

53
3-36

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М.С. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

О.М. Застела, В. В. Борисевич

ПЕРЕОБЛІК 2005р

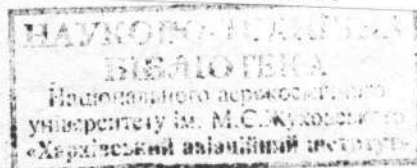
ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОСТІ

Конспект лекцій

Научно-техническая
библиотека
"ХАИ"



mt0061270



Харків «ХАІ» 2000

539.214 (075.8)

УДК 621.771

Теорія пластичності / О. М. Застела, В. В. Борисевич. – Консп. лекцій. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2000. – 77 с.

Подано лекції з основних розділів курсу “Теорія пластичності” відповідно до навчальної програми.

Розглянуто питання, які дають уявлення про зв'язок теорії пластичної течії та деформаційної теорії з проектуванням технологічних процесів пластичної обробки металів.

Мета конспекту — розширити знання з прикладної теорії пластичності та дати можливість засвоїти основні розділи та теми, необхідні при проектуванні технологічних процесів формозмінення шляхом пластичних деформацій.

Для студентів машинобудівних спеціальностей вузів.

Іл. 34. Бібліогр.: 8 назв

Рецензенти: канд. техн. наук, доц. Г. К. Крижний,
канд. техн. наук, доц. М.Ф. Савченко

Умовні позначення

- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – головні нормальні напруження,
 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ – нормальні напруження,
 $\sigma_s, \sigma_s, \sigma_s$ – границі пружності, пластичності, міцності,
 $\tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ – дотичні напруження,
 $\sigma_i, \tau_i, \varepsilon_i$ – інтенсивності нормальних і дотичних напружень,
 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – деформації у напрямку головних осей,
 δ – гранична пластичність,
 x, y, z – координати,
 F, F_θ, F_θ – площі,
 $\sigma_\theta, \sigma_{\theta\theta}$ – дійсні, умовні напруження,
 P, P_I – зусилля,
 σ_{cp} – середнє напруження,
 T_σ – тензори напруження,
 D_σ – девіатор напруження,
 I_1, I_2, I_3 – інваріанти напруження,
 S_v – повне напруження,
 τ_v – дотичне напруження на рівнопохилій площині,
 σ_v – нормальна складова напруження,
 I'_1, I'_2, I'_3 – інваріанти тензора напружень,
 $\bar{D}_\sigma$ – напрямний тензор,
 $\bar{\sigma}_{xx}, \bar{\tau}_{xy}, \dots, \bar{\sigma}_{zz}$ – компоненти напрямного тензора,
 X, Y, Z – масові сили,
 ρ – густина середовища,
 V_x, V_y, V_z – проекції вектора швидкості,
 T_ε – тензор деформацій,
 $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{xy}, \dots, \varepsilon_{zz}$ – компоненти тензора деформацій,
 e_{cp} – середнє подовження,
 D_ε – девіатор деформацій,
 I'_1, I'_2, I'_3 – інваріанти тензора деформацій,
 γ_i – інтенсивність деформацій зсуву,
 $\bar{D}_\varepsilon$ – напрямний тензор деформацій,
 $\bar{V}$ – швидкість переміщення точки,

- $\dot{\epsilon}_{xx}, \dot{\epsilon}_{xy}, \dots, \dot{\epsilon}_{zz}$ – компоненти тензора швидкостей деформацій,
 $\dot{\epsilon}$ – середня швидкість деформацій,
 T_{ϵ} – тензор швидкостей деформацій,
 D_{ϵ} – девіатор швидкостей деформацій,
 D_{ϵ} – напрямний тензор,
 W – об'єм,
 S – площа,
 $\vec{f}$ – проекція зовнішніх сил на нормаль до поверхні,
 N – потужність,
 E_m – кінетична енергія,
 ν_y – тензор завихреності,
 $A_{\text{пов}}^{(1)}$ – елементарна робота внутрішніх поверхневих сил,
 $A_{\text{пов}}^{(e)}$ – елементарна робота зовнішніх поверхневих сил,
 $A_m^{(e)}$ – елементарна робота зовнішніх масових сил,
 U_m – внутрішня енергія,
 $Q^{(e)}$ – загальний приплив тепла,
 Q^* – зовнішній приплив нетеплових видів енергії,
 $\vec{q}$ – вектор потоку тепла,
 c – масова теплоємність,
 λ – коефіцієнт теплопровідності,
 χ – коефіцієнт температуропровідності,
 S – ентропія,
 G, G' – узагальнені модулі пружної та пластичної деформацій,
 ω – стала Ільюшина,
 E – модуль пружності,
 Δ – відносне змінення об'єму,
 Ψ – функція напружень,
 ν – коефіцієнт Пуассона,
 Θ – лінійна температурна деформація,
 u_x, u_y, u_z – компоненти зміщень,
 μ – коефіцієнт жорсткості,
 B, m – сталі зміцнення.

Лекція 1

I. Вступ

Важливим етапом створення високоефективних виробів, які мають високу надійність, довговічність та економічність, є визначення напружено-деформованого стану їх елементів. Це потребує глибоких знань механіки деформованого середовища, одним з найважливіших розділів якої є теорія пластичності.

Теорія пружності вивчає дії сил на пружні тіла і визначає напруження та деформації, які виникають в стані рівноваги та у момент руху. Між теорією пружності та опором матеріалів є принципова різниця, яка полягає у вихідних передумовах, у методах вирішення задач та в діапазоні останніх. Опір матеріалів не може розв'язувати задач з визначення напружено-деформованого стану тіла, якщо воно має складну форму (пластина, оболонка, масив та ін.). Такі задачі вирішуються тільки з позиції теорії пружності, основні передумови якої відзначаються достатньою широтою та не обмежуються простою формою.

Наука, яка встановлює загальні закони виникнення пластичних деформацій і пластичної деформації напружень на всіх стадіях, називається теорією пластичності. В цьому простежується тісний зв'язок з нелінійною теорією пружності.

Як і в теорії пружності, поряд з точною теорією пластичних деформацій – назвемо її математичною теорією пластичності, – в теорії пластичності паралельно розроблюються спрощені методи розрахунку шляхом введення додаткових гіпотез (наприклад, надання тілу властивостей ідеальної пластичності), коло задач з питань пластичності, які вирішуються в останньому напрямку, складають прикладну теорію пластичності.

Змінення з часом деформацій та напружень через початкове навантаження деталі називають повзучістю. Зміну деформації при постійному навантаженні описано в курсі опору матеріалів, в якому це явище називають пружною післядією. Змінення напружень при постійній деформації часто називають реакцією.

Галузь механіки, яка вивчає післядії та реакції, називається теорією повзучості.

У твердих тілах під дією значних сил виникають пластичні деформації. В подібних випадках теорія пружності не може відповісти на питання, які цікавлять сучасну техніку.

Таким чином, можна зробити висновок, що теорія пластичності вивчає напруження та деформації в тілах, які підлягають деформуванню за межею пружності.

Задачі теорії пластичності взагалі різні. Її висновки знаходять широке використання в техніці. З урахуванням пластичних деформацій можна

розв'язувати статичні та динамічні задачі, задачі стійкості елементів конструкції, а також відповісти на питання, пов'язані з технологією обробки металів тиском.

Вирішення проблеми найбільш повного використання ресурсів міцності деталей машин, прогресивний метод їх розрахунку за граничним станом побудовані також на висновках теорії пластичності. В методі розрахунку за граничним станом спочатку визначають величину граничного навантаження, після чого коефіцієнт запасу обчислюють як відношення цього навантаження до дійсного. Цей метод розрахунку дозволяє створювати більш економічні конструкції порівняно з методом допустимих напружень, за яким встановлюють величини граничних навантажень, що відповідають вичерпаній несучій здатності деталей. Зрозуміло, що граничний стан починається після появи у деталях пластичних деформацій.

У технологічних процесах виробництва деяких елементів конструкції передбачають спеціальні операції, які дозволяють підвищити несучу здатність деталей у межах пружності шляхом пластичного деформування. Наприклад, гвинтові циліндричні пружини розтягнення, стиснення, кручення після навівання й термообробки витримують у деформованому за межею пружності стані певний час (операція загартовування).

Товстостінні труби після виготовлення навантажують внутрішнім тиском до появи пластичних деформацій для підвищення експлуатаційного ресурсу. В результаті цього в трубі утворюється таке поле залишкових напружень, яке знижує робоче напруження в експлуатаційних умовах. Така технологічна операція називається автоскріпленням, або автофретуванням. В результаті автоскріплення робочий тиск в трубі може бути підвищеним. Аналогічно автоскріпленню труб робилися спроби підвищення несучої здатності дисків турбіни шляхом початкового пластичного деформування (розкручування дисків до появи пластичної деформації).

Для визначення найефективніших умов пластичного деформування, розмірів заготовок, обчислення залишкових напружень, необхідних для розрахунків на міцність початково пластично zdeформованих деталей, необхідно вміти виконувати розрахунки за межею пружності.

Підвищення якості продукції до рівня світових зразків потребує широкого використання досягнень фундаментальних наук при проектуванні технологічних процесів, їх теоретичних розрахунків не тільки в науково-дослідних та проектно-конструкторських інститутах, але також в повсякденній практиці заводських інженерів, у тому числі по обробці металів тиском.

ОМТ проводиться шляхом пластичної деформації металу, яка спричиняє змінення його форми та розмірів, забезпечує потрібні механічні, фізичні та хімічні властивості (міцність, пластичність, в'язкість, зносостійкість,

електропровідність, жароміцність, корозійну стійкість). При цьому змінюється взаємне розташування частинок деформівного тіла та відстань між ними. В технологічних процесах ОМТ деформація відбувається під дією зовнішніх сил. Деформація, яка припиняється після зняття навантаження, називається пружною.

Для металів пружні деформації завжди малі. Деформація складається в основному з пластичної залишкової деформації, яка залишається після припинення навантажень.

Пластична деформація реалізується завдяки тому, що метали мають пластичність. Пластичність – властивість металу сприймати залишкові пластичні деформації, змінювати форму під дією зовнішніх сил без руйнування.

Під руйнуванням розуміють макроскопічне порушення суцільності металу (наприклад, утворення тріщин).

Теорія пластичності вивчає основні закономірності пластичної деформації металів, а також розроблює теоретичні основи методів розрахунку пружно-деформованого стану металу при його обробці тиском. Умовно розрізняють фізичну, математичну, прикладну теорію пластичності.

Фізична теорія пластичності на основі реальної кристалічної побудови металів і дефектів їх кристалічних решіток вивчає механізм пластичної деформації, вплив холодної та гарячої пластичної деформації на механічні, фізичні та хімічні властивості металів.

В основу математичної теорії пластичності покладено модель пластично деформівного матеріалу (суцільного середовища). На відміну від реального металу, який по об'єму має в основному "пустоти" (ядерна речовина, в якій зосереджена більша частина маси, займає невелику частину об'єму металічного тіла, приблизно 10^{-12} мм), суцільне середовище безперервно заповнює частину реального простору. Це дозволяє використовувати математичний апарат безперервних функцій, диференціальне та інтегральне обчислювання. Гіпотезу суцільного середовища покладено в основу електродинаміки, гідродинаміки, теорії пружності, теорії пластичності, суцільне середовище – об'єкт вивчення науки "Механіка суцільного середовища".

Математична теорія пластичності – розділ механіки суцільного середовища, в якому розроблюються методи математичного опису пружного і деформованого стану (з цією метою використовується апарат тензорного обчислювання); розглядаються фізичні закони збереження енергії відносно суцільного середовища й наслідки з них (рівняння нерозривності, диференціальні рівняння руху, симетрія тензора, напружень, закон збереження енергії відносно індивідуального об'єму суцільного середовища, рівняння теплового балансу й теплопровідності); будуються

реологічні моделі, тобто визначають рівняння стану або рівняння, які вказують на зв'язок між напруженим і деформованим станом в процесі пружно-пластичної деформації; вирішують крайові задачі з використанням системи диференціальних рівнянь теорії пластичності та розроблюються методи їх вирішень.

У прикладній теорії пластичності на основі методів вирішення крайових задач у математичній теорії пластичності здійснюють постановку та вирішення конкретних задач ОМТ – прокатки, волочіння, пресування, кування, штампування та інших. Межа між математичною та прикладною теоріями пластичності, звичайно, умовна. До прикладної теорії пластичності можна віднести розробку чисельних методів вирішень крайових задач і способів їх реалізації за допомогою ЕОМ.

Спочатку теорія пластичності розвивалася на основі вимог будівельної механіки. Допущення в будівельних конструкціях пластичної деформації підвищує їх несучу здатність. Потім загальним стимулом розвитку теорії пластичності були потреби технології та теорії ОМТ.

Розглянемо історію розвитку теорії пластичності. Основний закон деформування пружних тіл в його найпростішій формі (лінійний закон) без пояснення фізичної суті явища пружності був сформульований в 1678 році Р. Гуком.

Першу спробу розглянути нелінійну залежність між напруженнями та деформаціями у формі, відмінній від закону Гука, здійснив Бюльфінгер і опублікував у працях Російської Академії наук в 1729 році.

Більш як двісті років тому, в 1755 році, Л. Ейлером були виведені рівняння руху ідеальної рідини, які до цього часу є основними рівняннями гідромеханіки. При цьому використовувалась гіпотеза суцільності ідеальної рідини. Ці рівняння підтвердилися подальшими експериментами. Узагальненням цих рівнянь для випадку руху в'язких рідин були рівняння Нав'є (1827 рік). Перша спроба використання загальних рівнянь руху рідин до процесів пластичної течії металів належить Тресці (1868 рік).

Однак специфічні особливості деформованого металу у твердому стані не дозволили повною мірою використати ці рівняння для вирішення конкретних задач. Перші теоретичні дослідження у цьому напрямку були зроблені в 1871 році Сен-Венаном, який визначив умови переходу металу в пластичний стан (умова пластичності Сен-Венана):

$$(\sigma_{zz} - \sigma_{yy})^2 + \tau_{xy}^2 = 4k^2. \quad (1.1)$$

Подальшим розвитком теорії займався М. Леві, який запропонував метод інтегрування системи рівнянь рівноваги за умов пластичності:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0; \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} = 0; \quad (1.3)$$

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \tau_{xy}^2 = 4k^2 \quad (1.4)$$

шляхом введення двох допоміжних функцій φ та ψ , які знаходять з рівнянь:

$$\sigma_{xx} = k(-\cos \psi);$$

$$\sigma_{yy} = k(+\cos \psi);$$

$$\tau_{xy} = k \sin \psi.$$

У дослідях цих авторів матеріал наділявся ідеально-пластичними властивостями, які характеризуються графіком (рис. 1.1). Прандтль і Генкі (1921 – 1923 рр.) розглянули деякі задачі пластичної рівноваги і виявили основні закономірності, пов'язані з розв'язуванням задач цього типу.

Нині як в державах СНД, так і дальнього зарубіжжя теоретичним та експериментальним дослідям в області теорії пластичності приділяється багато уваги. Великий вклад у розвиток теорії пластичності внесли радянські вчені А. А. Ільюшин, В.В. Соколовський, Л.М. Качанов, Т.А. Смирнов-Аляев, М.М. Беляев та інші.

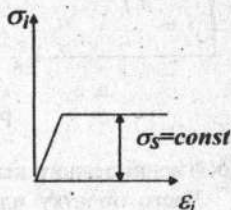


Рис. 1.1

Подальший розвиток полягає в застосуванні нових математичних моделей пластичного деформування, які досить точно відображають схему та умови деформування, а також дають змогу враховувати вплив швидкості деформівного матеріалу. Сучасні методи R-функцій і структурно-варіаційний, а також МКЕ дозволяють так сформулювати крайову задачу, що враховуються різні за величиною й природою граничні умови. Якщо раніше всі ділянки, на які розбивалась деформована деталь, розглядалися окремо, а потім ці частини “зшивали”, то при цьому мали місце похибки.

Використання нового підходу дає можливість більш точно аналізувати напружено-деформований стан, визначити зусилля деформування, роботу формозмінення заготовки.

2. Умовні діаграми розтягування

Щоб одержати залежності між компонентами напружень і деформацій за межою пружних деформацій у загальному випадку складного напруженого стану, необхідно насамперед розглянути основні поняття, пов'язані з пружністю та пластичністю, діаграму розтягування матеріалів, яка має дійсне уявлення про зв'язок між напруженням та деформацією при одновісному розтягуванні та є основою розрахунків.

Основні механічні властивості матеріалів можна виявити вже при простому розтягуванні. Стандартні зразки циліндричної форми розтягують з постійною швидкістю на розривній машині.

При поступовому зростанні сили розтягування матеріал зразка знаходиться в пружному стані, поки напруження в ньому не досягне деякої величини σ_e – границі пружності. Залежність між напруженням σ та деформацією ε для багатьох матеріалів є прямолінійною ділянкою. Потім матеріал переходить у пластичний стан, чому відповідає похила ділянка діаграми (рис. 2.1).

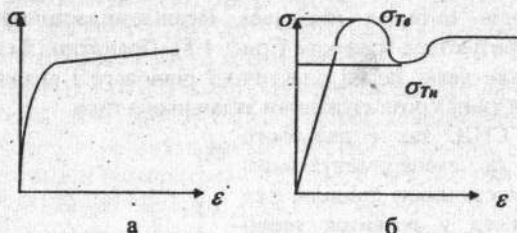


Рис. 2.1

Для різних матеріалів перехід з одного стану в інший може бути різним: проходить поступово (а) або починається з гострого піка (б). Цей пік вважають аномалією.

Він характеризує ті сплави, які по межах зерен мають крихкий скелет. При

досягненні певного напруження цей скелет крихко руйнується.

Часто початку пластичного стану відповідає горизонтальна ділянка – площадка текучості, де напруження характеризується сталою величиною σ_T – границею текучості. Потім напруження поступово зростають до деякої величини σ_s – границі міцності, після чого починається руйнування. Інколи площадка текучості відсутня: $\sigma_n = \sigma_m$ (рис. 2.2).

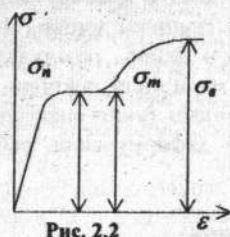


Рис. 2.2

У теорії пружності ми мали справу з матеріалами, в яких пружна ділянка діаграми розтягування була прямолінійною. Але бувають матеріали (наприклад гума, поліуретан), в яких деформації можуть бути пружними, а залежність між напруженням і деформацією – нелінійною. В таких матеріалах частково або повністю розвантаження відбувається так само, як і навантаження, але в зворотному напрямку (рис. 2.3).

Для пружно-пластичних матеріалів, які навантажені вище границі пружності, розвантаження відбувається по прямій, паралельній початковій прямолінійній ділянці (рис. 2.4).

При повторному навантаженні розтягненням діаграма розтягування (рис. 2.5) приблизно збігається з діаграмою розтягування по всій її довжині, потім збігається з діаграмою першого навантаження. При цьому в результаті

пластичного деформування границі пропорційності матеріалу підвищується. Однак це справедливо, якщо знаки першого та повторного навантаження збігаються. Зазначимо, що деформування матеріалу при напруженнях вище границі текучості збільшує його твердість. Прийнято говорити, що в результаті пластичного деформування відбувається зміцнення або наклеп матеріалу. На основі того, що розглянуто, можна зробити висновок: при напруженнях вище границі пропорційності матеріалу не буває взаємно однозначної відповідності між напруженнями та деформаціями. Це означає (діаграма на рис. 2.6), що одному й тому ж напруженню можуть відповідати деформації ϵ , ϵ_1 або ϵ_2 та інші залежно від того, при якому процесі напруження виникло — навантаженні чи розвантаженні, причому, на це суттєво впливає величина напружень. Ось у чому і полягають основні відзнаки пластичної стадії деформування від пружної.

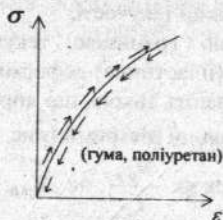


Рис. 2.3

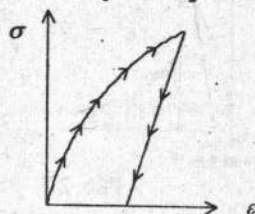


Рис. 2.4

Крім того, слід зазначити, що залежність в пружній стадії напружень та деформацій лінійна як при навантаженні, так і при розвантаженні. За границею пружності залежність між напруженнями та деформаціями при навантаженні нелінійна, а при розвантаженні — лінійна. Якщо на умовній діаграмі розтягування матеріалу відсутня площадка текучості (як це має бути для більшості легованих сталей та кольорових сплавів), то вводиться поняття

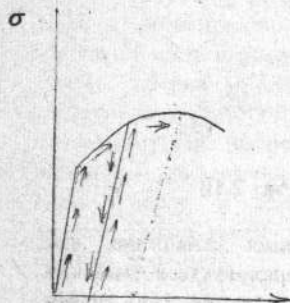


Рис. 2.5

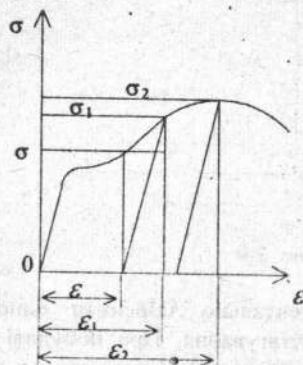


Рис. 2.6

умовної границі текучості.

Умовною границею текучості називають напруження, при якому залишкова (пластична) деформація дорівнює відповідній величині. Цю величину приймають такою, що дорівнює 0,002 або 0,2% (рис. 2.7).

Для умовної діаграми (рис. 2.8) гранична пластичність – величина δ , яка визначається як $\frac{\Delta l_{p.p.}}{l_0}$, де $\Delta l_{p.p.}$ – відносне подовження зразка при розриві; l_0 одержують відніманням довжини половинок зразка при розриві та його початкової довжини. Чим матеріал пластичніший, тим більше величина δ .

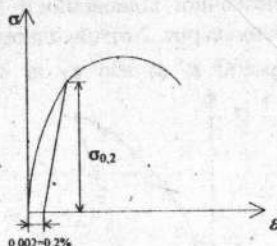


Рис. 2.7

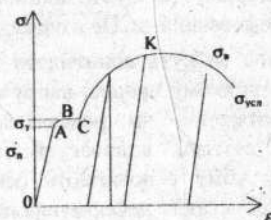


Рис. 2.8

Відносне звуження $\varphi = \frac{F_0 - F}{F_0}$ при умовній діаграмі також

характеризує пластичність.

Розглядають також умовні діаграми стиснення (рис. 2.9, 2.10).

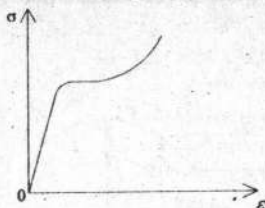


Рис. 2.9

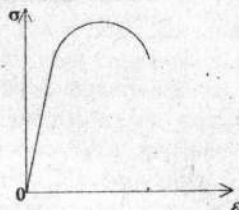


Рис. 2.10

Експериментально здійснити одновісне стиснення складніше, ніж одновісне розтягування. При побудові графіка не враховується зміння площі поперечного перерізу зразка в процесі деформування. Цей графік називають умовною діаграмою стиснення.

Якщо умовні діаграми розтягування та стиснення накласти одна на одну, то матимемо картину (рис. 2.11), наприклад, для сталей (а) та чавуну (б).

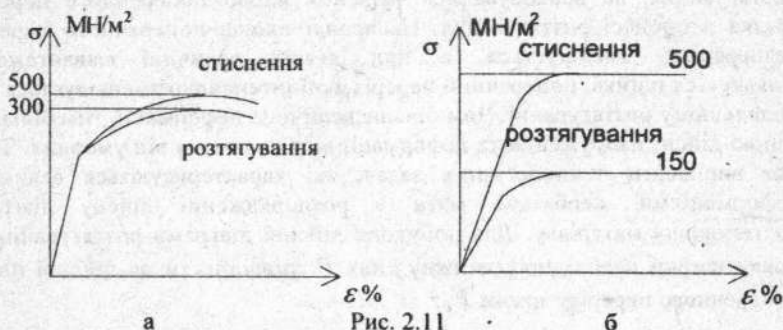


Рис. 2.11

Для більшості матеріалів при малих деформаціях приблизно можна вважати діаграми розтягнення і стиснення збіжними.

Ефект Баушингера

Ефект Баушингера полягає в зменшенні границі пропорційності при повторному навантаженні, коли навантаження протилежні за знаком (рис. 2.12, де ОА – початкове розтягнення; ОВ – початкове стиснення; АС – розвантаження; СД – повторне стиснення).

Ефект Баушингера пояснюється тим, що при малій пластичній деформації розтягування одні зерна матеріалу деформуються пластично, а інші – пружно. В результаті цього після розвантаження виникають залишкові сили взаємодії між зернами. Деякі зерна перебувають в розтягнутому стані, інші – в стисненому. При наступному стисненні пластичні деформації виникають в першу чергу в раніше стиснених зернах. Цим і пояснюється зниження границі текучості.

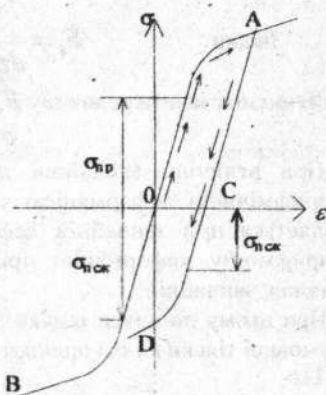


Рис. 2.12

Лекція 2

3. Дійсні діаграми розтягування матеріалів

При використанні формул, які відповідають умовній діаграмі розтягування, не враховувались змінення площі поперечного перерізу зразка в процесі розтягування. Насправді площа поперечного перерізу безперервно зменшується, а при деякій величині навантаження з'являється шийка, поперечний переріз якої інтенсивно зменшується при подальшому розтягуванні. Чим більше величина деформації, тим більшою мірою дійсні напруження та деформації відрізняються від умовних. Тому для вирішення технологічних задач, які характеризуються великими деформаціями, необхідно мати в розпорядженні дійсну діаграму розтягування матеріалу. Для побудови дійсної діаграми розтягування до появи шийки необхідно розтягнута силу P співвіднести до дійсної площі поперечного перерізу зразка F_0 :

$$\sigma_0 = \frac{P}{F_0} \quad (3.1)$$

Вимірювання дійсних розмірів поперечного перерізу зразка в процесі випробування його на розтягування здійснювати незручно. Дійсна площа поперечного перерізу може залежати від початкової, якщо приблизно прийняти, що об'єм елемента зразка $F_0 dz$ при його деформації залишається незмінним. Оскільки після деформації довжина dz зразка $dz(1+\epsilon)$, а площа F , то об'єм буде $Fdz(1+\epsilon)$. Тоді

$$F_0 dz = dz(1+\epsilon) F_0 \quad (3.2)$$

$$\text{Звідки} \quad F_0 = \frac{F_0 dz}{dz(1+\epsilon)} = \frac{F_0}{1+\epsilon} \quad (3.3)$$

Якщо підставити величину F_0 у формулу (3.1), одержимо залежність

$$\sigma_0 = \sigma(1+\epsilon) \quad (3.4)$$

При величині звичайної деформації менше за 20% різниця між логарифмічною деформацією та звичайною незначна. Оскільки шийка з'являється при звичайній деформації 10...15%, то до цього моменту логарифмічну деформацію приблизно можна враховувати такою, що дорівнює звичайній.

При цьому до появи шийки дійсна діаграма розтягування відрізняється від умовної тільки по осі ординат і розташовується вище неї (рис. 3.1).

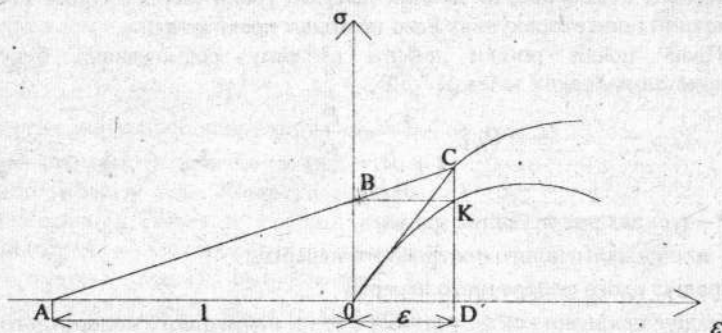


Рис. 3.1

Для визначення точки дійсної діаграми розтягування матеріалу, яка відповідає деякій точці K умовної діаграми (рис. 3.1), необхідно через точку K провести горизонтальну лінію до перетину з віссю ординат в точці B , а останню точку з'єднати з точкою A на осі абсцис зліва від осі ординат на відстані одиниці. Тоді точка C перетину лінії AB з вертикаллю DK , яка проведена через точку K , визначає точку C дійсної діаграми, відповідну до точки K умовної. Ця графічна побудова впливає з подібності трикутників ACD та ABD , згідно з якою

$$\frac{CD}{BO} = \frac{AD}{AO},$$

$$\text{або } \sigma_d = \sigma (1 + \epsilon). \quad (3.6)$$

Тепер на дійсній діаграмі розтягування знайдемо точку, яка відповідає границі міцності матеріалу. Диференціюючи вираз $\sigma = \frac{\sigma_d}{1 + \epsilon}$, одержуємо

$$\frac{d\sigma}{d\epsilon} = \frac{1}{1 + \epsilon} \times \frac{d\sigma_d}{d\epsilon} - \frac{\sigma_d}{(1 + \epsilon)^2}. \quad (3.7)$$

При $\sigma = \sigma_B \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\epsilon} = 0$

$$\left. \frac{d\sigma_d}{d\epsilon} \right|_{\sigma = \sigma_{cp}} = \frac{\sigma_d}{1 + \epsilon} \Big|_{\sigma = \sigma_{cp}}. \quad (3.8)$$

Відповідно до формули (3.6) визначаємо

$$\left. \frac{d\sigma_d}{d\epsilon} \right|_{\sigma = \sigma_{cp}} = \sigma_d. \quad (3.9)$$

Звернемо увагу на те, що площадка текучості, яка на умовній діаграмі паралельна осі абсцис, на дійсній діаграмі трохи похила. Однак цей нахил незначний і при розрахунках його можна не враховувати.

Після появи шийки дійсну діаграму розтягування будують з використанням таких залежностей:

$$\sigma_0 = \sigma_l = \frac{1}{1 + \frac{r_l}{4R}} \times \frac{P}{F}, \quad (3.10)$$

де P — зусилля розтягування зразка;

F — площа найменшого поперечного перерізу;

r_l — радіус цього поперечного перерізу;

R — радіус кривизни контуру шийки в точці найменшого поперечного перерізу;

$$\epsilon_l = \ln(1 + \epsilon) = \ln \frac{F_0}{F}, \quad (3.11)$$

де ϵ_l — інтенсивність деформацій.

Для побудови такої ділянки діаграми необхідно в процесі випробування вимірювати мінімальний діаметр шийки та радіус кривизни її контуру в точці найменшого перерізу.

4. Тензор і девіатор напружень, їх інваріанти

Виняткова складність явищ, які виникають на рівні кристалічної будови металу, змушує йти на ідеалізацію загальної схеми процесу з метою виявлення основних закономірностей. Однією з таких ідеалізацій є поняття про напруження, які статично відображають внутрішні зв'язки між частинками металу. Ці зв'язки можна подати у вигляді внутрішніх зусиль.

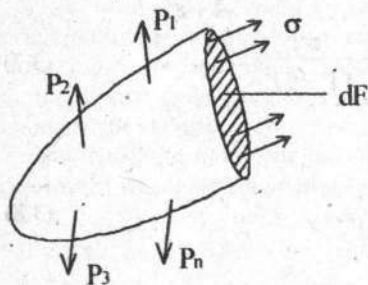


Рис. 4.1

Якщо подумки розділити тіло на частини, то дію однієї частини на іншу можна замінити внутрішніми силами, які відомим порядком розподіляються по площині перерізу. Взявши в довільній області пересічної площини точку, виділимо досить малу площину dF . Можна вважати, що внутрішні сили в даній точці характеризуються результуючою силою dP , яка діє на площі dF (рис. 4.1), а напруження визначається за співвідношенням

$$\sigma = \frac{dP}{dF} \quad (4.1)$$

У загальному випадку напруження σ діє під кутом до нормалі n (рис. 4.2), проведеної до площини dF , і його можна розкласти на нормальне напруження σ_n , що діє вздовж нормалі, та дотичне напруження τ в площині перерізу тіла. Якщо на тіло діє система зовнішніх сил, а в середині цього тіла виділити елементарний об'єм, то по його гранях будуть діяти напруження. Ці напруження в декартовій системі координат

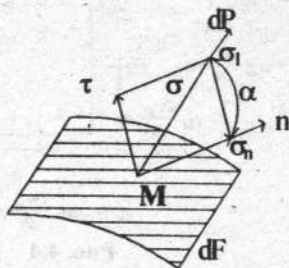


Рис. 4.2

можна зобразити у вигляді векторів P_x , P_y , P_z . Внаслідок того, що напруження P_x , P_y , P_z в загальному випадку діють під кутом до координатних осей, їх можна розкласти на нормальні напруження, що діють по нормалі до граней σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , та дотичні напруження τ_{xx} , τ_{yy} , τ_{zz} , τ_{xy} , τ_{yx} , τ_{xz} , τ_{zx} , τ_{yz} , τ_{zy} , розташовані в площині граней (рис. 4.3).

Ці дев'ять величин повністю визначають величину напружень на гранях виділеного елементарного об'єму і характеризують його напружений стан. У сукупності ці величини утворюють тензор напружень

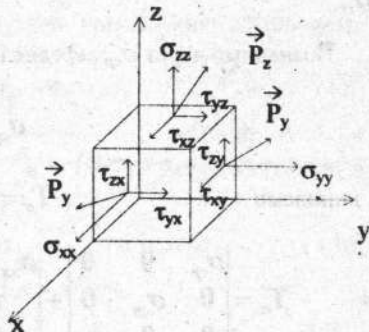


Рис. 4.3

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

За умов рівноваги виділеного елемента сума моментів відносно осей, паралельних координатам, мусить дорівнювати нулю. Це приводить до рівнянь (рис. 4.4)

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} \quad (4.3)$$

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \quad (4.4)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} \quad (4.5)$$

якщо не враховувати величини другого порядку малості.



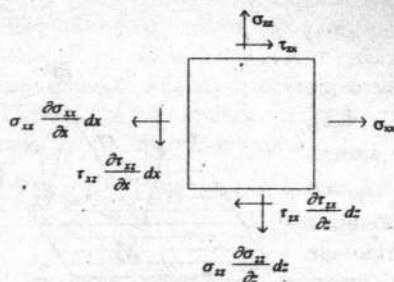


Рис. 4.4

Отже, дотичні напруження задовольняють закон парності і напружений стан визначається шістьма компонентами напружень: σ_{xx} , σ_{yy} , σ_{zz} , τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} .

Тензор напружень в теорії пластичності зручно показати у

вигляді суми двох тензорів: кульового тензора $T_{\sigma_{cp}}$ та девіатора напружень D_{σ} .

Позначимо через σ_{cp} середнє нормальне напруження

$$\sigma_{cp} = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} \quad (4.6)$$

і запишемо

$$T_{\sigma} = T_{\sigma_{cp}} + D_{\sigma},$$

$$T_{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{cp} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_{cp} \end{vmatrix}. \quad (4.7)$$

Кульовий тензор, як відомо з курсу теорії пружності, — це виділене із загального напруженого стану середнє всебічне розтягнення або стиснення. Таким чином, довільний напружений стан у точці тіла можна подати як накладання двох напружених станів: один характеризується однаковими нормальними напруженнями σ_1 , другий визначається наявністю в координатних площинах нормальних $\sigma_{xx} - \sigma_{cp}$, $\sigma_{yy} - \sigma_{cp}$, $\sigma_{zz} - \sigma_{cp}$ та дотичних $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ напружень (рис. 4.5).

Алгебраїчна сума нормальних напружень девіатора напружень дорівнює нулю.

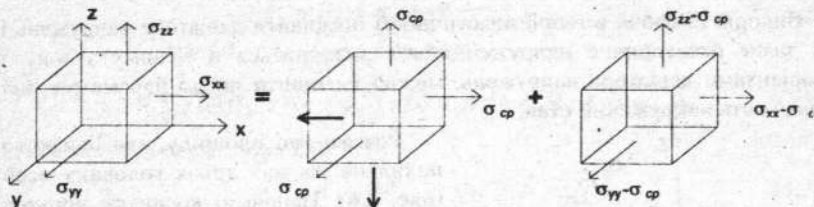


Рис. 4.5

При вивченні напруженого стану тіла в теорії пружності та пластичності розглядаються інваріанти тензора напружень з виразів його компонентів, які не змінюються при повороті осей координат.

Перший, або лінійний, інваріант є сумою нормальних компонентів напруження:

$$I'_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad (4.8)$$

другий – квадратичний:

$$I'_2 = -(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1); \quad (4.9)$$

третій — кубічний:

$$I'_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3, \quad (4.10)$$

де $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ – головні нормальні напруження.

У теорії пластичності необхідно розглянути інваріанти девіатора напружень D_σ . Вони складаються за аналогією з інваріантами тензора напружень і визначаються за такими виразами:

перший інваріант:

$$I_1 = (\sigma_{xx} - \sigma_{cp}) + (\sigma_{yy} - \sigma_{cp}) + (\sigma_{zz} - \sigma_{cp}) = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} - 3\sigma_{cp} = 0; \quad (4.11)$$

другий інваріант:

$$I_2 = -(\sigma_{xx} - \sigma_{cp})(\sigma_{yy} - \sigma_{cp}) - (\sigma_{xx} - \sigma_{cp})(\sigma_{zz} - \sigma_{cp}) - (\sigma_{yy} - \sigma_{cp})(\sigma_{zz} - \sigma_{cp}) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2 = \frac{1}{6}[(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]; \quad (4.12)$$

третій інваріант:

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{cp} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_{cp} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_{cp} \end{vmatrix} = (\sigma_1 - \sigma_{cp})(\sigma_2 - \sigma_{cp})(\sigma_3 - \sigma_{cp}). \quad (4.13)$$

Октаедричне напруження, інтенсивність напружень

Використовуючи в теорії пластичності інваріанти девіатора напружень і так зване октаедричне напруження, яке знаходиться в тісному зв'язку з інваріантами девіатора напружень, можна зменшити число параметрів, які визначають напружений стан.

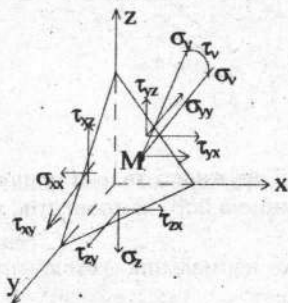


Рис. 4.6

Розглянемо площину, яка однаково похилена до всіх трьох головних осей (рис. 4.6). Напрямні косинуси нормалі до цієї площини:

$$l = m = n = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad (4.14)$$

напруження запишемо у вигляді:

$$\sigma_{1v} = \sigma_1 l = \frac{\sigma_1}{\sqrt{3}}; \quad (4.15)$$

$$\sigma_{2v} = \sigma_2 m = \frac{\sigma_2}{\sqrt{3}}; \quad (4.16)$$

$$\sigma_{3v} = \sigma_3 n = \frac{\sigma_3}{\sqrt{3}}. \quad (4.17)$$

Повне напруження визначимо як

$$S_v = \sqrt{\sigma_{1v}^2 + \sigma_{2v}^2 + \sigma_{3v}^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2}, \quad (4.18)$$

нормальну складову σ_v знайдемо проєціюванням σ_{1v} , σ_{2v} , σ_{3v} на нормаль v :

$$\sigma_v = \sigma_{1v} l + \sigma_{2v} m + \sigma_{3v} n = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma_{cp}. \quad (4.19)$$

Особливий інтерес має дотична τ_v , яка визначається за залежністю

$$\tau_v = \sqrt{S_v^2 - \sigma_v^2}. \quad (4.20)$$

Підставляючи значення в (4.20) для σ_v і S_v , одержуємо

$$\tau_v = \sqrt{\frac{1}{3} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (4.21)$$

Дотичне напруження називається октаедричним напруженням, або інтенсивністю дотичних напружень. Інтенсивність дотичних напружень позначають через τ_i і записують у вигляді:

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{2[(I'_1)^2 + 3I'_2]}; \quad (4.22)$$

$$I'_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3; \quad (4.23)$$

$$I'_2 = -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \\ = \frac{1}{3} \sqrt{2[(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 6(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]}; \quad (4.24)$$

у декартовій системі координат :

$$I'_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}; \quad (4.25)$$

$$I'_2 = -(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx}) + \tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2; \quad (4.26)$$

$$\tau_i = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (4.27)$$

Величина інтенсивності дотичних напружень мало відрізняється від максимального дотичного напруження. Це й є суттю цього інваріанта девіатора напружень. Інваріант визначає величину дотичних напружень, які виникають на рівнопохилій до головних осей площадці.

Окрім інтенсивності дотичних напружень τ_i вводять другу величину – інтенсивність напружень σ_i , яка визначається за формулою:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}, \quad (4.28)$$

або

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (4.29)$$

Інтенсивність напружень σ_i не можна показати наочно у вигляді напруження, яке діє на будь-якій площадці. Однак вираз для σ_i має ту перевагу, що при простому розтягуванні ($\sigma_1 \neq 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) він збігається з нормальним розтяжним напруженням, відмінним від нуля:

$$\sigma_i = \sigma_1. \quad (4.30)$$

Порівнюючи вирази інтенсивності дотичних напружень з виразами другого інваріанта девіатора напружень, очевидно, що з точністю до цілого числового множника квадрат інтенсивності дотичних напружень дорівнює другому інваріантові девіатора напружень:

$$\tau_i^2 = \frac{2}{3} I'_2. \quad (4.31)$$

Якщо всі компоненти девіатора напружень розділити на другий інваріант, то одержимо напрямний тензор:

$$\bar{D}_\sigma = \frac{D_\sigma}{\tau_l} = \begin{vmatrix} \bar{\sigma}_{xx} & \bar{\tau}_{xy} & \bar{\tau}_{xz} \\ \bar{\tau}_{yx} & \bar{\sigma}_{yy} & \bar{\tau}_{yz} \\ \bar{\tau}_{zx} & \bar{\tau}_{zy} & \bar{\sigma}_{zz} \end{vmatrix}; \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{xx} &= \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{cp}}{\tau_l}; & \bar{\tau}_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{\tau_l}; & \bar{\tau}_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{\tau_l}; \\ \bar{\tau}_{yx} &= \frac{\tau_{yx}}{\tau_l}; & \bar{\sigma}_{yy} &= \frac{\sigma_{yy} - \sigma_{cp}}{\tau_l}; & \bar{\tau}_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{\tau_l}; \\ \bar{\tau}_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{\tau_l}; & \bar{\tau}_{zy} &= \frac{\tau_{zy}}{\tau_l}; & \bar{\sigma}_{zz} &= \frac{\sigma_{zz} - \sigma_{cp}}{\tau_l}. \end{aligned}$$

де

Компоненти напрямного тензора – безрозмірні величини.

Розглядаючи напружений стан у точці, слід відзначити, що компоненти тензора напружень у теорії пластичності задовольняють ті ж самі диференціальні рівняння рівноваги, що і в теорії пружності:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0; \quad (4.33)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = 0; \quad (4.34)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0; \quad (4.35)$$

або диференціальні рівняння руху суцільного середовища:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = \rho \frac{\partial V_x}{\partial t}; \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y = \rho \frac{\partial V_y}{\partial t}; \quad (4.37)$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = \rho \frac{\partial V_z}{\partial t}, \quad (4.38)$$

де ρ – густина середовища; V_x, V_y, V_z – компоненти швидкості руху частинки, та граничні умови:

$$\sigma_{xxv} = \sigma_{xx} l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \quad (4.39)$$

$$\sigma_{yyv} = \tau_{yx} l + \sigma_{yy} m + \tau_{yz} n; \quad (4.40)$$

$$\sigma_{zzv} = \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_{zz} n. \quad (4.41)$$

Граничні умови можуть відрізнятися від наведених, тобто можуть задаватися переміщення або швидкості переміщення точок межі тіла. Існують змішані граничні умови: на одній частині поверхні тіла задається навантаження, а на другій – переміщення або його швидкість.

5. Тензор і девіатор деформацій, їх інваріанти

Деформований стан у точці визначається тензором деформацій

$$T_{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & \frac{1}{2}\epsilon_{xy} & \frac{1}{2}\epsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\epsilon_{yx} & \epsilon_{yy} & \frac{1}{2}\epsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\epsilon_{zx} & \frac{1}{2}\epsilon_{zy} & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}. \quad (5.1)$$

Як і тензор напружень, тензор деформацій є симетричним тензором другого рангу.

Множник при кутових деформаціях надає всім формулам, які характеризують деформований стан, повну схожість з аналогічними формулами для напружень. При повороті осей координат компоненти деформацій змінюються так само, як і компоненти напружень. Отже, всі висновки теорії напружень, які пов'язані з поворотом площадки, поширюються і на теорію деформацій. Як і для напружень, можна знайти три взаємно перпендикулярні площадки, на яких немає зсувів. Нормалі до цих площадок є головними осями деформації.

Позначимо лінійні деформації в напрямку цих осей через ϵ_1 , ϵ_2 і ϵ_3 , введемо поняття про середнє подовження

$$\epsilon_{cp} = \frac{\epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3}{3}. \quad (5.2)$$

Тензор деформацій можна подати у вигляді суми двох тензорів:

$$T_{\epsilon} = T_{\epsilon_{cp}} + D_{\epsilon}, \quad (5.3)$$

де

$$T_{\epsilon} = \begin{vmatrix} \epsilon_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{cp} \end{vmatrix} \quad (5.4)$$

— сферичний тензор деформацій, який характеризує змінення об'єму, а девіатор деформацій має вигляд

$$D_{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{cp} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{cp} \end{vmatrix}. \quad (5.5)$$

Він характеризує змінення форми, оскільки об'ємна деформація (сума діагональних членів) дорівнює нулю.

Інваріанти тензора деформацій одержують аналогічно інваріантам тензора напружень:

$$I_1^* = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3; \quad (5.6)$$

$$I_2^* = -(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx}) + \frac{\varepsilon_{xy}^2}{4} + \frac{\varepsilon_{yz}^2}{4} + \frac{\varepsilon_{zx}^2}{4} = -(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1); \quad (5.7)$$

$$I_3^* = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix} = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3. \quad (5.8)$$

Як і в теорії напруженого стану, вводять поняття про інтенсивність деформацій зсуву

$$\begin{aligned} \gamma_i &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}. \end{aligned} \quad (5.9)$$

Інтенсивність деформацій

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)}. \quad (5.10)$$

Аналогічно поняттю напрямного тензора напружень вводять поняття "напрямний тензор деформацій"

$$\bar{D}_{\varepsilon} = \frac{D_{\varepsilon}}{\gamma_i}. \quad (5.11)$$

Проводиться аналогія, і за тензором швидкостей деформацій $T_{\dot{\varepsilon}}$. У процесі формозмінення твердого тіла окремі його точки рухаються з певною швидкістю, яка залежить від положення цієї точки та від часу:

$$\bar{V} = \bar{V}(x, y, z, t). \quad (5.12)$$

Якщо виділити всередині тіла прямокутний паралелепіпед з гранями, паралельними координатним площинам, то в процесі формозмінення тіла змінення кутів і довжини ребер паралелепіпеда відбуватиметься з певною швидкістю. Компоненти швидкості деформацій зв'язані зі швидкостями переміщення частинок рівняннями:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial V_x}{\partial x}; \quad \dot{\epsilon}_{xy} = \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}; \\ \dot{\epsilon}_{yy} &= \frac{\partial V_y}{\partial y}; \quad \dot{\epsilon}_{yz} = \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}; \\ \dot{\epsilon}_{zz} &= \frac{\partial V_z}{\partial z}; \quad \dot{\epsilon}_{zx} = \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}.\end{aligned}$$

У цих рівняннях не враховують нелінійні члени, оскільки градієнти швидкостей незначні.

Компоненти швидкостей деформації утворюють тензор швидкостей деформацій

$$T_{\dot{\epsilon}} = \begin{vmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{xy} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{xz} \\ \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{yz} \\ \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{zx} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} \end{vmatrix}. \quad (5.13)$$

Якщо ввести швидкість деформації за рівнянням

$$\dot{\epsilon}_{cp} = \frac{\dot{\epsilon}_{xx} + \dot{\epsilon}_{yy} + \dot{\epsilon}_{zz}}{3}, \quad (5.14)$$

то тензор швидкостей деформацій можна подати у вигляді суми двох тензорів:

$$T_{\dot{\epsilon}} = \begin{vmatrix} \dot{\epsilon}_{cp} & 0 & 0 \\ 0 & \dot{\epsilon}_{cp} & 0 \\ 0 & 0 & \dot{\epsilon}_{cp} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{cp} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{xy} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{xz} \\ \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} - \dot{\epsilon}_{cp} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{yz} \\ \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{zx} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} - \dot{\epsilon}_{cp} \end{vmatrix}. \quad (5.15)$$

Другий член цього рівняння називають девіатором швидкостей деформацій:

$$D_{\dot{\epsilon}} = \begin{vmatrix} \dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{cp} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{xy} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{xz} \\ \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{yx} & \dot{\epsilon}_{yy} - \dot{\epsilon}_{cp} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{yz} \\ \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{zx} & \frac{1}{2}\dot{\epsilon}_{zy} & \dot{\epsilon}_{zz} - \dot{\epsilon}_{cp} \end{vmatrix} \quad (5.16)$$

Другий інваріант девіатора швидкостей деформацій визначається так:

$$\dot{\epsilon}_7 = \frac{2}{3} \sqrt{(\dot{\epsilon}_{xx} - \dot{\epsilon}_{yy})^2 + (\dot{\epsilon}_{yy} - \dot{\epsilon}_{zz})^2 + (\dot{\epsilon}_{zz} - \dot{\epsilon}_{xx})^2 + \frac{3}{2}(\dot{\epsilon}_{xy}^2 + \dot{\epsilon}_{yz}^2 + \dot{\epsilon}_{zx}^2)} \quad (5.17)$$

Напрямний тензор

$$\bar{D}_{\dot{\epsilon}} = \frac{D_{\dot{\epsilon}}}{\dot{\epsilon}_7} \quad (5.18)$$

Лекція 3

6. Основні закони механіки суцільного середовища

Фізичне тіло в класичній статистичній механіці — це система великого числа частинок, які взаємодіють між собою та приграничними тілами та розташовуються в полі зовнішніх сил. Щодо такого тіла вважають справедливими класичні закони механіки системи матеріальних точок. При цьому сила взаємодії між частинками з'являється при зближенні та зникає при віддаленні на відстань порядку a . Наприклад, моделлю твердого тіла при низьких температурах є система щільноупакованих частинок, які здійснюють невеликі теплові коливання біля положення рівноваги. Наведений якісний опис системи не можна доповнити кількісними методами аналітичної механіки системи матеріальних точок через велику їх кількість, оскільки інформація про індивідуальний рух точок нічого не пояснює про макроскопічні властивості системи. Спеціальний підхід до цієї проблеми забезпечують методи статистичної механіки, які дозволяють ввести в механіку суцільного середовища (МСС) необхідні поняття — густини, швидкості, внутрішніх напружень, енергії, температури, ентропії та кількості теплоти.

У МСС тіло зображують у вигляді деякої субстанції матеріального континуума, який безперервно заповнює об'єм геометричного простору. Нескінченно малий об'єм тіла також називають частинкою. Вводяться поняття густини, переміщення та швидкості, внутрішньої енергії, температури, ентропії та потоку тепла як безперервно диференціюючих функцій координат і часу.

При вивченні руху матеріального середовища слід користуватися двома системами координат: системою координат спостерігача і лагранжевою

системою, яка складає єдине поле з тілом, що розглядається, рухається, деформується разом з ним і є тому криволінійною та неортогональною. Вивчення деформації тіла зводиться до вивчення деформації супутньої системи, що дозволяє виявити причину деформування частин тіла та простежити за зміненням їх механічних і фізико-хімічних властивостей.

Для замкнених систем (що не взаємодіють з зовнішніми тілами, які не обмінюються енергією з навколишнім середовищем) використовують функції змінних Лагранжа, які називають інтегралами руху. Інтеграл руху системи називають адитивним, якщо він дорівнює сумі інтегралів руху частинок, що складають систему. Адитивних інтегралів руху чотири – маса, імпульс, момент імпульсу та енергія. Як показує дослід, ці чотири величини, що характеризують стан системи, не змінюються з часом. Це дозволяє сформулювати в ньютонівській механіці закони збереження маси, імпульсу, моменту імпульсу та енергії, які зумовлені основними властивостями матерії та руху, а також простору та часу як основних форм буття матерії.

Що стосується МСС, яка будується на основі ньютонівської механіки, то закони збереження енергії приводять до суттєвих результатів. Із закону збереження маси випливає рівняння нерозривності як необхідна умова існування рухомого та деформівного середовища саме як суцільного. Із закону збереження імпульсу випливають диференціальні рівняння руху суцільного середовища, які є основою розрахунків його руху та деформації, із закону збереження моменту кількості руху — симетрія тензора напружень, що суттєво спрощує динамічне рівняння суцільного середовища. Закон збереження енергії є основою екстремальних принципів суцільного середовища та енергетичних методів розрахунку напружено-деформованого стану.

Вводяться фундаментальні поняття внутрішніх напружень і деформацій та постулюється наявність зв'язку між ними та температурою, яка відображає статистику руху та взаємодії атомів.

У МСС використовують основні рівняння динаміки системи і статистичної механіки, в першу чергу – закон збереження маси, імпульсу енергії та балансу ентропії.

Закон збереження маси. Рівняння нерозривності

Тіло називається матеріальним, якщо воно має властивості інерції. Величина, яка залежить від кількості речовини в тілі й визначає рівень його інертності, називається масою тіла. Маса – це властивість суцільного середовища. Якщо об'єм складається з однакових частинок середовища, то такий об'єм називають індивідуальним.

Фундаментальним законом механіки Ньютона є закон збереження маси будь-якого індивідуального об'єму: $m = \text{const}$ або $\frac{dm}{dt} = 0$.

У механіці суцільного середовища замість маси використовують поняття густини. Дійсну густину середовища в точці P визначають як границю відношення маси Δm елементарного об'єму ΔW до величини цього об'єму при $\Delta W \rightarrow 0$:

$$\rho = \lim_{W \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta W} = \frac{dm}{dW}. \quad (6.1)$$

У процесі руху суцільного середовища густина індивідуальної частинки може і не зберігатися, оскільки її об'єм у різні моменти часу може бути різним внаслідок деформації.

Рівняння нерозривності

Розглянемо рух суцільного середовища в нерухомій (інерційній) системі координат. Вважаємо, що густина ρ та швидкість $\vec{V}$ — безперервні функції координат і часу: $\rho = \rho(\vec{r}, t)$, $\vec{V} = \vec{V}(\vec{r}, t)$. На фізичну природу та стан середовища обмеження не поширюються.

Якщо змінення маси за одиницю часу в об'ємі W дорівнює $\iiint_W \rho dW$, то за одиницю часу всередині поверхні S змінення маси може бути

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_W \rho dW. \quad (6.2)$$

Оскільки об'єм W фіксований, то

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_W \rho dW = \iiint_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW. \quad (6.3)$$

Це змінення маси всередині нерухомої поверхні S дорівнюватиме потоку маси через поверхню S за одиницю часу, який на основі того, що потік рідини через поверхню S дорівнює $\iint_S \vec{V} \vec{n} dS$, а для будь-якого

векторного поля — $\iint_S \vec{a} \vec{n} dS$, визначимо як

$$\iint_S \rho \vec{V} \vec{n} dS. \quad (6.4)$$

Таким чином,

$$\iiint_W \frac{\partial \rho}{\partial t} dW = - \iint_S \rho \vec{V} \vec{n} dS. \quad (6.5)$$

Використовуючи формулу Остроградського – Гаусса, маємо рівняння

$$\iiint_W \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{V} \right) dW = 0, \quad (6.6)$$

справедливе при будь-якому об'ємі інтегрування, в тому числі й при макроскопічно нескінченно малому об'ємі. При безперервності підінтегрального виразу

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \bar{V} = 0. \quad (6.7)$$

Отже, одержано одне з основних рівнянь МСС, яке називається рівнянням нерозривності (безперервності) в змінних Ейлера. Воно може мати іншу форму, якщо застосувати оператор матеріального диференціювання

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + V_k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (6.8)$$

до функції густини $\rho = \rho(\bar{r}, t)$:

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + V_k \frac{\partial \rho}{\partial x_k}. \quad (6.9)$$

Тоді, враховуючи, що

$$\operatorname{div} \bar{V} = \rho \operatorname{div} \bar{V} + V_k \frac{\rho}{x_k}, \quad (6.10)$$

і підставляючи $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ та $\operatorname{div} \bar{V}$ в (6.2), одержуємо рівняння нерозривності у вигляді

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho \operatorname{div} \bar{V}. \quad (6.11)$$

Це співвідношення накладає обмеження на швидкості точок суцільного середовища і справедливе при великих переміщеннях точок середовища.

Оскільки для нестисненого середовища будь-який його індивідуальний об'єм залишається постійним за величиною протягом руху, з умови збереження маси випливає, що густина в частинці нестисненого середовища $\frac{d\rho}{dt} = \text{const}$, а

з (6.11) одержимо рівняння нестисливості суцільного середовища:

$$\operatorname{div} \bar{V} = 0, \quad (6.12)$$

або

$$\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0. \quad (6.13)$$

Рівняння кількості руху. Рівняння руху та рівноваги

Основними динамічними характеристиками руху матеріальної частинки є кількість руху ($m\bar{V}$) та кінетична енергія ($\frac{1}{2}m\bar{V}^2$).

Для рухомої під дією суми сил P матеріальної частинки постійної маси другий закон Ньютона можна записати у вигляді рівняння кількості руху

$$\frac{d}{dt}m\bar{V} = \rho\bar{V}dW, \quad (6.14)$$

яке формулюється як похідна часу від кількості руху матеріальної частинки, що дорівнює сумі всіх сил, що діють на цю частинку.

Розглянемо рухомий індивідуальний об'єм суцільного середовища W у момент часу t . Нехай на цей об'єм діють розподілені по поверхні зовнішні сили з густиною $\bar{\sigma}_n$. По всій області середовища визначається поле швидкостей $\bar{V} = \bar{V}(\bar{r}, t)$. Загальна кількість руху системи мас в об'ємі W визначається інтегралом

$$\iiint_W \rho\bar{V}dW. \quad (6.15)$$

Внутрішні сили згідно з третім законом Ньютона зрівноважуються. Якщо зовнішні сили на систему не діють, то за законом збереження імпульсу кількість руху системи не змінюється за часом:

$$\frac{dm\bar{V}}{dt} = 0. \quad (6.16)$$

Суму зовнішніх масових і поверхневих сил, які діють на суцільне середовище в об'ємі W , запишемо для головного вектора масових сил:

$$\iiint_W \rho\bar{f}dW \quad (6.17)$$

і для головного вектора поверхневих сил:

$$\iint_S \bar{\sigma}_n dS. \quad (6.18)$$

Внутрішні сили, які діють між частинками даного об'єму, підпорядковуються третьому закону Ньютона про дію та протидію.

Узагальнюючи рівняння кількості руху (6.14) на випадок кінцевого індивідуального об'єму W суцільного середовища, одержуємо:

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho\bar{V}dW = \iiint_W \rho\bar{f}dW + \iint_S \bar{\sigma}_n dS. \quad (6.19)$$

Визначимо диференціальну форму рівняння руху суцільного середовища, використавши вираз для симетричного тензора напружень $\sigma_{ni} = \sigma_{in} n_i$ і застосовуючи формулу Остроградського - Гаусса

$$\oint_S \sigma_{ni} dS = \oint_S \sigma_{in} n_i dS = \iiint_W \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dW. \quad (6.20)$$

Підставивши (6.20) у формулу (6.19), дістанемо

$$\iiint_W \left(\frac{\sigma_{ij}}{x_j} + \rho f_i \right) dW = \frac{d}{dt} \iiint_W \rho \bar{V}_i dW. \quad (6.21)$$

Після підстановки

$$\frac{d}{dt} \iiint_W \rho \bar{V}_i dW = \iiint_W \rho \frac{dV_i}{dt} dW \quad (6.22)$$

у формулу (6.21) одержуємо теорему змінення кількості руху в інтегральній формі:

$$\iiint_W \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i - \rho \frac{dV_i}{dt} \right) dW = 0. \quad (6.23)$$

Це рівняння справедливе для будь-якого об'єму інтегрування, наприклад, для макроскопічно нескінченно малого. Отже, підінтегральна функція повинна дорівнювати нулю:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i - \rho \frac{dV_i}{dt} = 0,$$

або

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = \rho \frac{dV_i}{dt} \quad (6.24)$$

Рівняння (6.24) називається рівнянням руху і є основним диференціальним рівнянням суцільного середовища. Воно справедливе для будь-яких суцільних середовищ: твердих, рідких, газоподібних. У виразі (6.24) всі величини, задані в змінних Ейлера, є функціями координат x_1, x_2, x_3 та часу t . Індивідуальну похідну $\frac{\partial V_i}{\partial t}$ визначаємо залежно від оператора матеріального диференціювання.

У випадку рівноваги, коли відсутні прискорення ($\frac{\partial V_i}{\partial t} = 0$) або інерційними членами можна знехтувати ($\rho \frac{\partial V_i}{\partial t} = 0$), рівняння руху (6.24)

перетворюється на рівняння рівноваги: $\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i = 0$. Якщо можна знехтувати і масовими силами, то

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0. \quad (6.25)$$

Помноживши рівняння (6.14) векторно зліва на радіус-вектор матеріальної частинки, одержимо рівняння кількості руху

$$\frac{d}{dt}(\bar{r} \times m \bar{V}) = \bar{r} \times \bar{P}, \quad (6.26)$$

яке є наслідком другого закону Ньютона. Векторна величина $(\bar{r} \times m \bar{V})$ називається моментом кількості руху матеріальної частинки.

Рівняння моментів кількості руху можна записати для системи матеріальних частинок з масами m_i , які рухаються зі швидкістю V_i :

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\bar{r}_i \times m_i \bar{V}_i) = \iiint_W (\bar{r} \times \rho \bar{f}) dW + \iint_S (\bar{r} \times \bar{\sigma}_n) dS, \quad (6.27)$$

і узагальнити для кінцевого індивідуального об'єму W суцільного середовища, замкненого поверхнею S :

$$\frac{d}{dt} \iiint_W (\bar{r} \times \rho \bar{V}) dW = \iiint_W (\bar{r} \times \rho \bar{f}) dW + \iint_S (\bar{r} \times \bar{\sigma}_n) dS. \quad (6.28)$$

У розглянутому класичному випадку за відсутності внутрішніх моментів кількості руху і розподілених масових і поверхневих пар рівняння моментів кількості руху доводить, що тензор напружень симетричний.

Лекція 4

7. Закони збереження термодинаміки

Рівняння припливу тепла. Перший закон термодинаміки

У процесах обробки металів тиском відбувається перетворення механічної енергії не тільки шляхом учиненої роботи. Істотну роль відіграє також перетворення енергії за допомогою теплообміну.

Термодинаміка вивчає закономірності перетворення енергії. Одним з основних понять термодинаміки є поняття "стан системи" та "параметри стану".

Поняття термодинамічної системи визначає сукупність матеріальних тіл, що взаємодіють між собою і навколишнім середовищем. Щоб визначити конкретні фізичні умови, за яких розглядається речовина, вводять термодинамічні характеристики (параметри) стану речовини, що являють

собою властивості речовини, які не залежать від його кількості. Параметри стану поділяють на зовнішні та внутрішні. Стан, до якого за даних зовнішніх умов прагне система, називається термодинамічною рівновагою. Якщо рівновага не встановилася і в системі існують градієнти параметрів стану, то останній називається нерівноважним.

Між параметрами стану системи повинна існувати залежність, що називається рівнянням стану:

$$f(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) = 0. \quad (7.1)$$

Між двома станами системи можуть відбуватися два види процесів: зворотний і незворотний

Зворотний процес — це процес, у результаті здійснення якого в прямому та зворотному напрямках система повертається у початковий стан, не викликаючи при цьому зміння стану зовнішніх тіл.

Незворотний процес не можна здійснити у зворотному напрямку, не спричиняючи подібних змін (процес тертя). Незворотні процеси завжди приводять до розсіювання механічної енергії (дисипації).

Деформоване тіло в процесі ОМТ можна розглядати як незамкнуту термодинамічну систему, в якій відбувається нерівноважний незворотний термодинамічний процес.

Перший закон термодинаміки — енергія не зникає і не виникає знов, вона лише перетворюється з одного виду в інший.

У МСС головне значення має приплив частки енергії механічної за природою та теплової енергії.

Згідно з першим законом термодинаміки існує така однозначна функція $E = E(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$, що називається повною енергією системи, повний диференціал якої дорівнює сумі елементарних робіт зовнішніх поверхневих і масових сил $dA^{(e)}$, елементарного припливу тепла $dQ^{(e)}$ та елементарного припливу інших видів енергії dQ^* :

$$dE = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^*, \quad (7.2)$$

де

$$dA^{(e)} = dA_{nos}^{(e)} + dA_m^{(e)}.$$

Змінення повної енергії в системі відбувається через змінення її кінетичної dE_m та внутрішньої dU_m енергії:

$$dE = dE_m + dU_m. \quad (7.3)$$

Підставивши (7.3) в (7.2), одержимо вираз першого закону термодинаміки:

$$dE_m + dU_m = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^*. \quad (7.4)$$

Тут dU_m — повний диференціал параметрів стану, оскільки U_m — функція стану.

Для теплоізолизованого (адіабатичного) процесу $dQ^{(e)} = 0$, і, якщо $dQ^* = 0$, то співвідношення (7.4) перетворюється на закон збереження механічної енергії. Враховуючи це і підставляючи (7.2) в (7.4), дістанемо рівняння

$$dU_m = -dA_{nos}^{(i)} + dQ^{(e)} + dQ^*, \quad (7.5)$$

яке називається рівнянням припливу тепла і може замінити закон збереження енергії (7.4). Якщо $dQ^{(e)} = 0$ і $dQ^* = 0$, то (7.5) перетворюється на

$$dU_m = -dA_{nos}^{(i)} = \iiint_w \sigma_{ij} \xi_{ij} dt dw$$

Для плавного процесу, коли прискоренням можна знехтувати, змінення кінетичної енергії дорівнює нулю ($dE_m = 0$). У цьому випадку, порівнюючи (7.4) при $dE_m = 0$ і (7.5), очевидно, що для таких процесів елементарна робота зовнішніх сил дорівнює елементарній роботі внутрішніх поверхневих сил з протилежним знаком:

$$dA^{(e)} = -dA_{nos}^{(i)}, \quad (7.6)$$

або

$$dU_m = dA^{(e)} + dQ^{(e)} + dQ^*. \quad (7.7)$$

Складемо рівняння припливу тепла (7.5) для нескінченно малої частки суцільного середовища. З цією метою введемо елементарні притоки зовнішніх енергій до одиниці маси середовища $dq^{(e)}$ і dq^* . Розділимо (7.5) на Δm і спрямуємо Δm до нуля. Густина роботи внутрішніх поверхневих сил дорівнює

$$-\frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \xi_{ij} dt, \quad (7.8)$$

де ξ_{ij} – симетричний тензор:

$$\xi_{ij} = \xi_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right),$$

звідки одержуємо диференціальне рівняння припливу тепла

$$dU = \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \xi_{ij} dt + dq^{(e)} + dq^*, \quad (7.9)$$

де U – густина внутрішньої енергії.

Рівняння (7.9) є універсальним рівнянням, що використовується для різних процесів, і зв'язуючою ланкою між МСС та термодинамікою. Якщо не можна знехтувати тепловими ефектами, то закон збереження механічної енергії слід замінити першим законом термодинаміки, крім того, до числа основних рівнянь слід додати рівняння теплопровідності.

Рівняння теплопровідності

Будь-який процес переносу теплової енергії у просторі називається теплообміном. Тепло може передаватися трьома шляхами: теплопровідністю (передача тепла молекулами, атомами, електронами за рахунок нерівномірності температури в тілі); конвекцією та випромінюванням. У МСС найбільше значення має процес теплопровідності.

Введемо поняття вектора потоку тепла $\vec{q} = \vec{q}(x_1, x_2, x_3, t)$. Цей вектор характеризує напрямок передачі тепла (спрямований у бік зменшення температури) і за величиною дорівнює кількості тепла, що віддається за одиницю часу через виділену в суцільному середовищі довільно орієнтовану площину dS з одиничним вектором зовнішньої нормалі $\vec{n}$, і дорівнює $\vec{q} \cdot \vec{n} dS dt$. Загальний приплив тепла $dQ^{(e)}$ до об'єму W суцільного середовища через замкнуту поверхню S , що обмежує його, визначається так:

$$dQ^{(e)} = - \oint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS dt = - \oint_S \vec{q} \cdot \vec{n} dS dt. \quad (7.10)$$

Знак мінус означає, що у випадку припливу тепла ($dQ > 0$) до об'єму, що розглядається, вектори $\vec{q}$ і $\vec{n}$ утворюють кут, більший за $\pi/2$, а скалярний добуток $\vec{q} \cdot \vec{n}$ буде від'ємним. Перетворимо рівняння (7.10) за формулою Остроградського - Гаусса:

$$dQ^{(e)} = - \iiint_W \text{div} \vec{q} dW dt. \quad (7.11)$$

Оскільки вирішення конкретних задач МСС з використанням рівняння припливу тепла (7.7) інколи математично неможливе, часто використовують додаткові припущення щодо ідеалізації процесу. Однією з таких ідеалізацій є адіабатичний процес ($dQ^{(e)} = 0$), в якому буде відсутній приплив тепла та теплообмін між частинками. Ідея такого процесу пов'язана з розглядом теплоізованих тіл або процесів, що швидко протікають. Іншою ідеалізацією є ізотермічний процес ($dT/dt=0$), в якому теплообмін настільки інтенсивний, а стан змінюється настільки поволі, що температуру усіх частин тіла можна вважати постійною. Рівняння $dT/dt=0$ разом з рівнянням стану середовища замінює рівняння припливу тепла, за допомогою якого можна обчислити кількість тепла $dQ^{(e)}$, що підводиться до кожної частинки. Інколи до ізотермічних відносять такі процеси, для яких температура частинок є функцією часу. Вона однакова для всіх частинок.

Розглянемо у деформованому суцільному середовищі виділений об'єм W , обмежений поверхнею S . Вважаємо, що середовище є розсіюючим, і тому робота внутрішніх поверхневих сил цілком перетворюється у тепло.

Оскільки зовнішній приплив нетеплових видів енергії відсутній ($dQ^* = 0$), то рівняння припливу тепла (7.5) запишемо так:

$$dU_m = -dA_{\text{ноє}}^{(1)} + dQ^{(e)}. \quad (7.12)$$

Таким чином, елементарна робота $dA_{\text{ноє}}^{(1)}$ і приплив тепла $dQ^{(e)}$ відповідно до (7.12) витрачатимуться на збільшення внутрішньої енергії суцільного середовища.

Для визначення змінення внутрішньої енергії dU_m виділимо нескінченно малий об'єм dW масою ρdW . За час dt об'єм dW нагрівається на $\frac{dT}{dt} dt$ градусів, на що потрібна така кількість тепла:

$$c \rho dW \frac{dT}{dt} dt, \quad (7.13)$$

де $c = \frac{dq^{(e)}}{dT}$ — масова теплоємність (кількість тепла, яку необхідно віддати одиниці маси середовища, щоб підвищити його температуру на один градус за Цельсієм). Кількість тепла — це змінення внутрішньої енергії маси ρdW за час dt .

Інтегруючи (7.13), дістанемо:

$$dU_m = \iiint_W c \rho \frac{dT}{dt} dW dt. \quad (7.14)$$

Підставляємо вирази (7.14) для dU_m і (7.11) для $dQ^{(e)}$ у рівняння припливу тепла (7.12). Переносячи всі доданки в ліву частину та скорочуючи на dt , одержуємо

$$\iiint_W \left(c \rho \frac{dT}{dt} - \sigma_{ij} \xi_{ij} + \text{div } \vec{q} \right) dW = 0, \quad (7.15)$$

або

$$c \rho \frac{dT}{dt} - \sigma_{ij} \xi_{ij} + \text{div } \vec{q} = 0. \quad (7.16)$$

За законом теплопровідності Фур'є $\vec{q} = -\lambda \text{grad } T$, де λ — коефіцієнт теплопровідності.

Оскільки вектори $\vec{q}$ і $\text{grad } T$ мають протилежні напрямки, то $\lambda > 0$.

Підставляючи (7.15) в (7.16), одержуємо рівняння теплопровідності

$$c \rho \frac{dT}{dt} - \sigma_{ij} - \text{div} (\lambda \text{grad } T) = 0. \quad (7.17)$$

Якщо $\lambda = \text{const}$, то

$$\frac{dT}{dt} = \chi \operatorname{div} \operatorname{grad} T + \frac{1}{c\rho} \sigma_{ij} \xi_{ij}, \quad (7.18)$$

де $\chi = \frac{\lambda}{c\rho}$ — коефіцієнт теплопровідності.

У випадку нерухомого середовища індивідуальна похідна $\frac{dT}{dt}$ може бути замінена на локальну $\frac{\partial T}{\partial t}$.

До рівняння (7.18) входять константи інтегрування, і тому воно неоднозначне. При розв'язанні (7.18) необхідно сформулювати крайову задачу. Задання крайових умов полягає у формулюванні початкових умов (звичайно при $t=0$), необхідних тільки при нестационарних процесах теплопровідності, та граничних умов, що задаються на поверхнях, що обмежують рухоме середовище. При заданні граничних умов і початкового температурного поля рівняння теплопровідності має єдине рішення.

Другий закон термодинаміки. Ентропія

Перший закон термодинаміки, що характеризує перетворення енергії з якісної сторони, не визначає умов можливості перетворення енергії, оскільки згідно з першим законом обидва напрямки в протіканні процесів перетворення механічної енергії повністю в тепло і тепла повністю в механічну енергію рівноможливі.

Усі процеси незворотні та протікають у напрямку встановлення в системі рівноваги. Ствердження про неможливість одержання енергії за рахунок тіл, що знаходяться в термодинамічній рівновазі, є основним змістом другого закону термодинаміки.

При розгляді циклу Карно для теплових машин може бути одержана кількісна характеристика другого закону. Повна робота дорівнює: $A = Q^{(e)} = Q_1 - Q_2$. Існує універсальне твердження, що температура як характеристика ізотерми та енергія, зв'язані таким співвідношенням:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{T_1}{T_2}. \quad (7.19)$$

Таким чином, тепло Q_1 при T_1 еквівалентне Q_2 при T_2 , адже якщо поглинається Q_1 , то завжди виділяється Q_2 . Можна сказати, що при

зворотних процесах Q/T поглинається стільки, скільки й виділяється. Ця величина називається ентропією. Змінення ентропії для зворотного циклу дорівнює нулю.

Для будь-якого циклу

$$\oint_L \frac{dQ^{(e)}}{T} \leq 0, \quad (7.20)$$

де $\frac{dQ^{(e)}}{T} = dS$ – змінення ентропії.

Таким чином,

$$TdS = dQ^{(e)} + dQ', \quad (7.21)$$

де dQ' – некомпенсоване тепло.

Для одиниці маси

$$Tds = dq^{(e)} + dq'; \quad dq' = \frac{dQ'}{dm} \geq 0, \quad (7.22)$$

де $s = \frac{S}{m}$ – ентропія одиниці маси.

Для замкнутої системи ентропія максимальна, коли система переходить до стану термодинамічної рівноваги:

$$s = k \ln N, \quad (7.23)$$

де k – стала Больцмана,

N – міра імовірності стану (число можливих станів, що відповідають даному стану).

Перехід з нерівноважного стану у рівноважний являє собою перехід зі стану, що здійснюється меншою кількістю способів, у стан, який здійснюється більшою кількістю способів.

Можна об'єднати рівняння припливу тепла (7.5) і другий закон термодинаміки (7.20):

$$TdS \geq dU_m + dA_{\text{нов}}^{(i)} + dQ'. \quad (7.24)$$

Окрім рівняння припливу тепла зв'язуючою ланкою між МСС та термодинамікою є рівняння стану. При деформації суцільних середовищ із внутрішнім тертям (в'язкопружні, в'язкопластичні) всередині кожного елемента таких середовищ виникає ентропія. Саме ця обставина приводить до термодинаміки незворотних процесів.

Фундаментальні рівняння механіки суцільних середовищ

На основі фундаментальних законів природи (закону збереження маси, кількості руху та енергії) можна записати п'ять незалежних рівнянь:

- 1 – рівняння нерозривності;
- 2, 3, 4 – три рівняння руху;
- 5 – рівняння припливу тепла.

Цю систему п'яти рівнянь можна доповнити другим законом термодинаміки, необхідним для побудови конкретних моделей суцільних середовищ. Остаточно маємо систему універсальних рівнянь руху суцільного середовища:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\sigma_{ij}}{x_i} + \rho f_i &= \rho \frac{dv_i}{dt}, \\ dU &= \frac{1}{\rho} \sigma_{ij} \xi_{ij} dt + dq^{(e)} + dq', \\ Tds &= dq^{(e)} + dq', \quad dq' \geq 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

Якщо знехтувати взаємодією механічних і термомеханічних процесів і не враховувати розсіювання енергії, то систему фундаментальних рівнянь можна записати у вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \rho \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho f_i &= \rho \frac{dv_i}{dt}. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Це система чотирьох диференціальних рівнянь у похідних з десятима невідомими функціями координат і часу. Невідомими залишаються: густина ρ , три компоненти швидкості v_i (або переміщення u_i) та шість незалежних компонент тензора напружень σ_{ij} . При цьому граничні умови задані.

Для замикання системи необхідні ще шість визначальних рівнянь, що в даному розгляді містять тільки динамічні та кінематичні параметри і часто являють собою співвідношення між напруженнями та деформаціями. Ці співвідношення характеризують фізичні властивості суцільного середовища, що вивчається, і їх називають механічними рівняннями стану. Крім того, поле температур звичайно вважається відомим або ж рівняння теплопровідності розв'язуються окремо і незалежно від механічної задачі. Для ізотермічних процесів температура припускається постійною і задача є чисто механічною.

У загальному випадку, коли механічні та теплові явища взаємозв'язані, слід звертатися до повної системи рівнянь. За припущенням, що масові сили f_i і елементарні припливи енергії dq^* задані, в системі невідомими функціями є десять величин ρ, v_i (або u_i), σ_{ij} , три компоненти вектора густини теплового потоку q_i , густина внутрішньої енергії U , густина ентропії s та абсолютна температура.

Таким чином, для довизначення системи треба знайти ще десять рівнянь. Шість з них є визначальними (рівняннями стану), що встановлюють математичні співвідношення між статичними, кінематичними та термодинамічними параметрами, які описують поведінку суцільного середовища за наявності механічних і термодинамічних дій. З інших чотирьох рівнянь три будуть являти собою співвідношення для задання закону теплопровідності, а одне – термодинамічне рівняння стану.

Оскільки реальні середовища реагують на навантаження надзвичайно складним чином, то до рівняння стану вводять деякі ідеалізовані середовища.

Для розв'язання систем диференціальних рівнянь у частинних похідних необхідно задати початкові та крайові умови таким чином, щоб існувало одне й тільки одне певне рішення у деякому інтервалі часу і в усій області, що охоплюється замкнутою поверхнею, на якій задано крайові умови.

Лекція 5

8. Розвантаження матеріалу після пластичної деформації. Теорема Ільюшина про розвантаження. Деформаційна теорія пластичності

Розглянемо одновісне розтягнення зразка та його розвантаження (рис. 8.1). Припустимо, що у розтягнутому стрижні в міру навантаження з'явилося напруження (точка B), причому $\sigma_1 > \sigma_{np}$. Нехай цьому напруженню відповідає деформація ε_1 . Якщо тепер частково розвантажити зразок на величину напруження σ' , то у стрижні залишаться напруження (точка C):

$$\bar{\sigma} = \sigma_1 - \sigma'.$$

Напруженню $\tilde{\sigma}$ відповідає одновісне подовження $\tilde{\epsilon}$, що залишилися у зразку після часткового розвантаження:

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_1 - \epsilon', \quad (8.1)$$

де ϵ' – зменшення деформації при розвантаженні.

Оскільки розвантаження зразка відбувається за пружним законом (BC паралельна AO), то ϵ' можна визначити за формулою

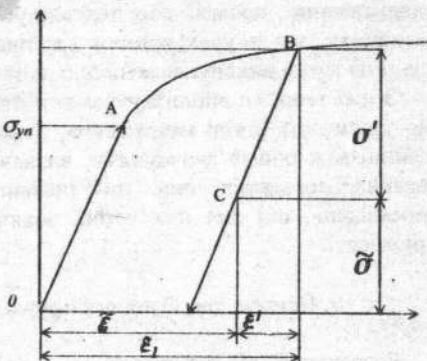


Рис. 8.1

$$\epsilon' = \frac{\sigma'}{E}, \quad (8.2)$$

тобто величина ϵ' така ж сама, як і при пружному навантаженні від нуля до напруження σ' .

Таким чином, для обчислення залишкової деформації стрижня необхідно з повної деформації, що відповідає найбільшому напруженню, відняти пружну деформацію, яка відповідає значенню напруження, на величину якого зменшилося найбільше напруження. Ця закономірність, очевидна при одновісному розтягуванні стрижня, залишається справедливою й у загальному випадку просторового напруженого стану тіла, якщо виконуються умови, що формуються у так званій теоремі про розвантаження, доведеної А. А. Ільюшиним. Розглянемо її докладніше.

Переміщення точки тіла (а також деформації та напруження) у деякий момент розвантаження дорівнюють різниці між їхніми значеннями у момент початку розвантаження та пружними переміщеннями (деформаціями, напруженнями), що з'явилися у ненавантаженому тілі під впливом зовнішніх сил, що дорівнюють різниці навантажень до та після розвантаження. При цьому необхідно, щоб навантаження та розвантаження були простими. Розвантаження, як і навантаження тіла, називається простим, якщо зовнішні сили у процесі пасивної деформації змінюються пропорційно одному параметру.

Такий принцип простого віднімання з повних початкових значень переміщень, деформацій та напружень тих їхніх значень, що відповідають зазначеним вище фіктивним силам (та повинні підраховуватись у припущенні лінійно-пружного тіла, що деформувалось), має обмеження. Його не можна застосовувати тоді, коли при розвантаженні з наступним переходом навантаження через нуль

узагальнене напруження, що має інший знак, ніж при першому навантаженні, досягає або перевищує значення границі пружності. Слід зазначити, що з урахуванням так званого ефекту Баушингера ця нова границя може виявитися меншою за звичайну границю пружності.

З цієї теореми випливає, що при повному звільненні від зовнішніх сил, що залишають у тілі напруження, деформації та переміщення дорівнюють різниці між їхніми значеннями, визначеними за теорією пластичності для заданих зовнішніх сил, та значеннями напружень, деформацій та переміщень, що для цих самих зовнішніх сил віднімаються за теорією пружності.

9. Основи теорії малих пружно-пластичних деформацій

Розрахунки за границями пружності при одновісному напруженому стані виконують на основі діаграми матеріалу. У випадку неодновісного напруженого стану необхідно мати залежності компонентів напружень від компонентів деформацій за границями пружності. Ці залежності встановлюються теоріями пластичності.

Основна задача теорії пластичності частково аналогічна задачі теорії пружності – за заданими зовнішніми силами або деформаціями деяких частин тіла знайти деформації та напруження у точках тіла; визначити залишкові деформації, якщо навантаження частково або повністю зняте; з'ясувати, якими будуть деформації при повторних навантаженнях; визначити навантаження, за яких відбувається руйнування.

Всі теорії пластичності розподіляються на дві групи. Теорії однієї групи називаються деформаційними. Вони утворюють подібні згідно з законами для пружної області залежності між компонентами тензора напружень та тензора деформації, тобто напруження зв'язуються повною накопиченою величиною пластичної деформації, а остання залежить не тільки від миттєвого напруження, але й від пластичної передісторії.

У другій групі розглядаються зв'язки між нескінченно малими приростами деформацій та напружень, а також самими напруженнями. В окремому випадку одержують залежності швидкостей деформацій від напружень. Ці теорії називають теоріями течії.

Протиріччя цих теорій розкрито у роботах А. А. Ільюшина. Доведено, що у випадку активної деформації, що з'являється при простому навантаженні, та у випадку малих деформацій всі відомі теорії пластичності є окремими випадками загальної та всі вони справедливі тільки при простому навантаженні. Нижче викладається теорія малих пружно-пластичних деформацій, що досить вірогідно описує властивості твердих тіл при малих пружних та пластичних деформаціях.

Всі ж теорії пластичності, основані на умові пластичності, не дозволяють при заданих зовнішніх силах та знайдених напруженнях визначити деформації. Окрім зовнішніх сил мають бути задані й переміщення на межі області пластичності, що не завжди можливо, а також треба враховувати властивість зміцнення матеріалу.

Математичний апарат теорії малих пружно-пластичних деформацій складають такі рівняння:

1. Три статичних рівняння, єдині для пружного та пластичного тіл:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X_p &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y_p &= \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z_p &= \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (9.1)$$

де X, Y, Z – проекції об'ємної сили;

v, ζ, ω – компоненти зміщень.

2. Шість геометричних співвідношень, також спільних для механіки деформованого тіла:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= \frac{\partial v}{\partial x}; \epsilon_x = \frac{\partial \zeta}{\partial y}; \epsilon_z = \frac{\partial \omega}{\partial z}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \gamma_{yz} = \frac{\partial \zeta}{\partial z} + \frac{\partial \omega}{\partial y}; \gamma_{zx} = \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}.\end{aligned}\quad (9.2)$$

3. Шість фізичних рівнянь, що характеризують конкретні властивості пружно-пластичного тіла, виражених через компоненти напружень та деформацій:

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = 2G'\epsilon_x; \sigma_y - \sigma_{cp} = 2G'\epsilon_y; \sigma_z - \sigma_{cp} = 2G'\epsilon_z; \quad (9.3)$$

$$\tau_{xy} = G'\gamma_{xy}; \tau_{yz} = G'\gamma_{yz}; \tau_{zx} = G'\gamma_{zx},$$

де G' – узагальнений модуль деформації,

$$G' = G(1 - \omega(\epsilon)) = \frac{\sigma_l}{3\epsilon_l} \quad (9.4)$$

Тут ω – функція Ільющина.

4. Вирази для інтенсивності напружень та деформацій і рівняння, що зв'язує їх між собою:

$$\sigma_l = E(1 - \omega)\epsilon_l. \quad (9.5)$$

Основні положення теорії малих пружно-пластичних деформацій є узагальненням деяких висновків закону Гука для неоднорізного напруженого стану. В основу теорії покладено такі гіпотези:

1. Об'ємна деформація прямо пропорційна середньому нормальному напруженню, причому коефіцієнт пропорційності дорівнює модулю пружної об'ємної деформації. Іншими словами, відносне зміння об'єму є пружною деформацією та пропорційне середньому тиску, або через пластичну деформацію зміння об'єму не відбувається.

Відносне зміння об'єму:

$$\Delta = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3k}, \quad (9.6)$$

де k – об'ємний модуль пружності,

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)}.$$

Тут ν – коефіцієнт Пуасона.

$$\text{Оскільки } \sigma_{-p} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \quad \text{і} \quad \Delta = 3\varepsilon_{cp} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \text{ то}$$

$$\sigma_{cp} = 3k\varepsilon_{cp}. \quad (9.7)$$

Експериментально доведено, що зміння об'єму звичайно невелике, і тому ним можна знехтувати. У такому випадку можна говорити про нестисливість матеріалу та записати умову цього як

$$\varepsilon_{cp} = 0.$$

Як впливає з наведених формул, припущення щодо рівності об'ємної деформації нулю еквівалентно припущенню, що об'ємний модуль пружності дорівнює нескінченності або що коефіцієнт поперечної деформації дорівнює половині.

2. Напрямки головних нормальних напружень збігаються з напрямками головних лінійних деформацій, а головні дотичні напруження пропорційні головним кутовим деформаціям. Іншими словами, компоненти девіатора деформацій пропорційні компонентам девіатора напружень, а самі вони коаксіальні (напрямні тензори напружень та деформацій збігаються). Згідно з цим

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}}{\sigma_x - \sigma_{cp}} = \frac{\varepsilon_y - \varepsilon_{cp}}{\sigma_y - \sigma_{cp}} = \frac{\varepsilon_z - \varepsilon_{cp}}{\sigma_z - \sigma_{cp}} = \frac{\gamma_{xy}}{\tau_{xy}} = \frac{\gamma_{yz}}{\tau_{yz}} = \frac{\gamma_{zx}}{\tau_{zx}} = \psi, \quad (9.8)$$

де ψ – деяка функція напружень.

У границях пружності ψ — стала величина, що дорівнює

$$\psi = \frac{1}{2G}. \quad (9.9)$$

З наведеного співвідношення (9.8) одержуємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon_{cp} &= \psi(\sigma_x - \sigma_{cp}); \gamma_{xy} = 2\psi\tau_{xy}; \\ \varepsilon_y - \varepsilon_{cp} &= \psi(\sigma_y - \sigma_{cp}); \gamma_{yz} = 2\psi\tau_{yz}; \\ \varepsilon_z - \varepsilon_{cp} &= \psi(\sigma_z - \sigma_{cp}); \gamma_{zx} = 2\psi\tau_{zx}. \end{aligned} \quad (9.10)$$

Якщо підставити компоненти цих деформацій у вираз для інтенсивності деформацій, враховуючи при цьому співвідношення для інтенсивності напружень, то дістанемо

$$\psi = \frac{2\varepsilon_i}{3\sigma_i}. \quad (9.11)$$

Рівняння (9.10) за зовнішнім виглядом схожі на аналогічні залежності між напруженнями та деформаціями у пружній області, але значно складніші за них, бо постійний коефіцієнт $2G$ замінено в них на відношення інтенсивності напружень до інтенсивності деформацій, а останні самі є функціями напружень та деформацій.

Рівняння (9.10) відображують також пропорційність компонент девіатора напружень компонентам девіатора деформацій і пропорційність головних деформацій головним дотичним напруженням, а тому й співвісність напрямних девіаторів напружень та деформацій:

$$\bar{D}_\sigma = \bar{D}_\varepsilon \quad \text{або} \quad \frac{1}{\tau_i} D_\sigma = \frac{2}{\gamma_i} D_\varepsilon.$$

$$\text{Оскільки } \tau_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_i \text{ та } \gamma_i = \sqrt{2} \varepsilon_i, \text{ то}$$

$$D_\sigma = \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} D_\varepsilon, \quad (9.12)$$

що у проєкціях на координатні осі й приводить до рівняння (9.10).

3. Інтенсивність напружень є для кожного матеріалу цілком означеною і не залежить від виду напруженого стану та є функцією інтенсивності деформацій. Відповідно до цього для визначення залежності інтенсивності напружень від інтенсивності деформацій можна скористуватися результатами випробувань на розтягування. Графік залежності інтенсивності напружень від інтенсивності деформацій називатимемо діаграмою деформування матеріалу.

Вирази для інтенсивності напружень та деформацій при одновісному напруженому стані мають вигляд:

$$\sigma_i = \sigma;$$

$$\varepsilon_l = \varepsilon - \varepsilon_{cp} \quad (9.13)$$

Враховуючи, що при одновісному розтягуванні $\sigma_{cp} = \frac{\sigma}{3}$, а також що

$$\sigma_{cp} = 3k\varepsilon_{cp},$$

де

$$k = \frac{E}{3(1-2\nu)},$$

одержуємо

$$\varepsilon_l = \varepsilon - \frac{1-2\nu}{3E} \sigma. \quad (9.14)$$

За допомогою даних формул можна за діаграмою розтягування матеріалу обчислити величини ε_l та σ_l .

Розглянемо розподіл деформації на пружну та пластичну. У границях пружності $\psi = \frac{1}{2G}$, тому у формулах (9.10) прийемо

$$\psi = \frac{1}{2G} + \varphi. \quad (9.15)$$

Оскільки

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}; k = \frac{E}{3(1-2\nu)}; \sigma_{cp} = 3k\varepsilon_{cp},$$

дістанемо

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + (\sigma_x - \sigma_{cp});$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} + 2\varphi\tau_{zx}; \quad (9.16)$$

$$\varphi = \frac{3\varepsilon_l}{2\sigma_l} - \frac{1}{2G}.$$

Інші доданки у рівнянні (9.16) є компонентами пластичної деформації та визначаються за формулами

$$\varepsilon_{cp} = \varphi(\sigma_x - \sigma_{cp}),$$

$$\gamma_{zcp} = 2 \tau_{xz}.$$

Підставляючи у вираз для інтенсивності деформацій компоненти пластичної деформації та враховуючи співвідношення для інтенсивності напружень, одержуємо

$$\varepsilon_{ip} = \frac{2}{3} \varphi \sigma_i, \quad (9.18)$$

а тому

$$\varphi = \frac{2 \varepsilon_{ip}}{3 \sigma_i}. \quad (9.19)$$

Тоді залежності (9.17) набувають вигляду

$$\varepsilon_{xp} = \frac{2 \varepsilon_{ip}}{3 \sigma_i} (\sigma_x - \sigma_{cp}),$$

$$\gamma_{xp} = 3 \frac{\varepsilon_{ip}}{\sigma_i} \tau_{xp}. \quad (9.20)$$

4. Тіло ізотропне.

Припущення, що ізотропія є природним розширенням допущень класичної теорії пружності на пластичну область, є задовільним. Водночас при різних змінних напрямку навантаження може спостерігатися значний вплив анізотропії.

Лекція 6

10. Метод змінних параметрів пружності

Розгляд різних пружно-пластичних і пластичних задач показує, що розв'язання їх пов'язано зі значними труднощами. Тому в теорії пластичності ще більшою мірою, ніж у теорії пружності, мають значення приблизні методи вирішення. Найпоширенішими з них є варіаційні методи, а також методи, в яких пружно-пластична задача зводиться до послідовності пружних задач у результаті застосування процесу послідовних наближень.

Розглянемо так званий метод змінних параметрів пружності. В основі цього методу лежить подання залежностей деформацій від напружень з теорії пружно-пластичних деформацій у формі так званого узагальненого закону Гука, згідно з яким параметри пружності залежать від напруженого стану у точці й тому різні для різних точок тіла. Використовуючи співвідношення

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\sigma_{cp}}{3K} + \theta \alpha, \quad (10.1)$$

де θ — лінійна деформація, що виникає при нагріванні (температурна деформація);

α – коефіцієнт лінійного розширення і $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$,

$$\sigma_x - \sigma_{cp} = \frac{2\sigma_l}{3\varepsilon_l} (\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}); \tau_{xy} = \frac{\sigma_l}{3\varepsilon_l} \gamma_{xy}, \quad (10.2)$$

маємо

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu^* (\sigma_y + \sigma_z)] + \theta; \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G^*}, \quad (10.3)$$

де E^*, G^*, ν^* – так звані змінні параметри пружності:

$$E^* = \frac{\sigma_l}{1 + \frac{1-2\nu\sigma_l}{3E\varepsilon_l}}; \quad \nu^* = \frac{\frac{1}{2} \frac{1-2\nu\sigma_l}{3E\varepsilon_l}}{1 + \frac{1-2\nu\sigma_l}{3E\varepsilon_l}}; \quad G^* = \frac{\sigma_l}{3\varepsilon_l}. \quad (10.4)$$

З цих формул випливає, що зв'язок між змінними параметрами пружності мають такий самий вигляд, що й для пружних сталей E, G і ν , а саме:

$$G^* = \frac{E^*}{2(1+\nu^*)}. \quad (10.5)$$

В окремому випадку для так званого нестисливого тіла, в якого $\nu = \frac{1}{2}$,

$$E^* = 3G^* = \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l}; \nu^* = \frac{1}{2}, \quad (10.6)$$

тобто змінний модуль пружності збігається із січним модулем, а змінний коефіцієнт поперечної деформації дорівнює 0,5.

Для вирішення пружно-пластичної задачі згідно з методом змінних параметрів пружності використовується процес послідовних наближень. У першому наближенні приймається, що змінні параметри пружності дорівнюють параметрам пружності, і вирішується пружна задача, у результаті чого визначаються напруження та деформації першого наближення $\sigma_{xI}, \dots; \tau_{zxI}, \dots; \gamma_{zxI}$. За цими величинами у кожній точці тіла з допомогою формул (10.7) підраховують інтенсивності напружень та деформацій у першому наближенні σ_{II} і ε_{II} :

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)},$$

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \quad (10.7)$$

В координатах σ_i , ε_i напружений та деформований стани деякої точки тіла зображується точкою 1 (рис. 10.1), що лежить на промені, тангенс кута нахилу якого пропорційний величині $3G$. У другому наближенні вноситься поправка для величини $3G$. Вона приймається такою, що дорівнює відношенню інтенсивності напруження σ_{i1}^* до відповідної інтенсивності деформацій за діаграмою деформування:

$$3G_1^* = \frac{\sigma_{i1}^*}{\varepsilon_{i1}}. \quad (10.8)$$

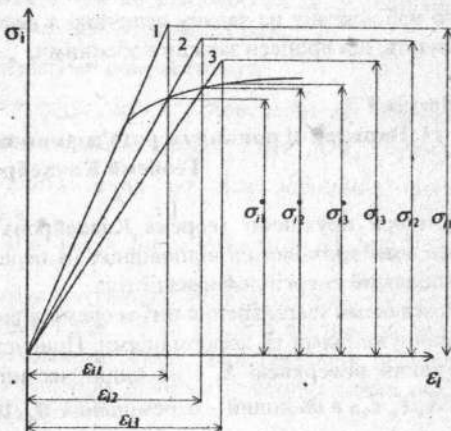


Рис. 10.1

За величинами σ_{i1}^* і ε_{i1} визначають також параметри E_1^* та ν_1^* . Параметри E_1^* , G_1^* та ν_1^* будуть різними у різних точках тіла. Таким чином, виникає задача визначення напружень у неоднорідному тілі, параметри пружності у різних точках якого різні. Далі розв'язують цю задачу, визначають напруження та деформації $\sigma_{x2}, \dots, \tau_{xz2}, \dots, \varepsilon_{x2}, \dots, \gamma_{xz2}$, що є другим наближенням. За цими величинами у кожній точці тіла з допомогою формул (10.7) підраховують інтенсивності напружень та деформацій у другому наближенні σ_{i2} , ε_{i2} .

У координатах σ_i , ε_i напружений та деформований стани деякої точки тіла зображуються точкою 2', що лежить на промені, тангенс кута нахилу якого пропорційний величині $3G$.

У третьому наближенні величину $3G$ приймають такою, що дорівнює відношенню інтенсивності напружень σ_{i2}^* до відповідної інтенсивності деформацій за діаграмою деформування:

$$3G_2^* = \frac{\sigma_{i2}^*}{\varepsilon_{i2}}. \quad (10.9)$$

За величинами σ_{12}^* та ε_i знаходять також параметри E_2^* та ν_2^* , що використовуються для визначення напружень та деформацій третього наближення $\sigma_{x3}, \dots, \tau_{xz3}, \dots, \varepsilon_{x3}, \dots, \gamma_{xz3}$.

Розрахунки необхідно продовжувати доти, доки одержані результати розрахунків n -го наближення відрізнятимуться від результатів розрахунків $n-1$ -го наближення на задану величину з необхідною точністю. Розрахунки показують, що процеси завжди є збіжними.

Лекція 7

11. Варіаційні принципи розв'язання задач теорії пластичності. Теорема Клапейрона

У теорії пружності теорема Клапейрона формулюється таким чином: робота зовнішніх сил на відповідних їм переміщеннях дорівнює подвоєній потенціальній енергії деформації тіла.

Розглянемо узагальнення цієї теореми у випадку нелінійних залежностей між напруженнями та деформаціями. Припустимо, що тіло займає об'єм W , обмежений поверхнею S , і на одній частині поверхні задано поверхневі сили X, Y, Z , а на іншій – переміщення u_x, u_y, u_z .

Робота прикладених до тіла зовнішніх сил на відповідних їм переміщеннях буде

$$A = \int_W (Xu_x + Yu_y + Zu_z) dW + \int_S (X_v u_x + Y_v u_y + Z_v u_z) ds, \quad (11.1)$$

де X, Y і Z – компоненти об'ємної сили, а u_x, u_y, u_z – компоненти переміщення точок тіла.

Підставимо у другий інтеграл співвідношення з рівняння рівноваги елементарного об'єму і перетворимо його за формулою Остроградського-Гауса. Тоді

$$\int_S (X_v u_x + Y_v u_y + Z_v u_z) ds = \int_S \left[\begin{aligned} &(\sigma_x u_x + \tau_{xy} u_y + \tau_{xz} u_z) l + (\tau_{yx} u_x + \sigma_y u_y + \tau_{yz} u_z) m + \\ &(\tau_{zx} u_x + \tau_{zy} u_y + \sigma_z u_z) n \end{aligned} \right] dS,$$

де l, m, n – напрямні косинуси нормалі до поверхні S .

Додаючи цю величину до першого інтеграла та використовуючи диференціальні рівняння рівноваги і залежності компонентів деформації від компонентів переміщення, одержуємо

$$A = \int_W (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \nu_{xy} + \tau_{yz} \nu_{yz} + \tau_{zx} \nu_{zx}) dW. \quad (11.2)$$

Ця формула є узагальненням теореми Клапейрона. У границях пружності вираз у круглих дужках дорівнює подвійній потенціальній енергії деформації, віднесеної до одиниці об'єму W :

$$2\Pi = \sigma_x \epsilon_x + \dots + \tau_{zx} \nu_{zx}. \quad (11.3)$$

З виразу (11.2) дістанемо

$$A = 2 \int_W \Pi dW. \quad (11.4)$$

Таким чином, робота зовнішніх сил на відповідних їм переміщеннях дорівнює подвійній потенціальній енергії деформації тіла.

Принцип мінімуму повної енергії

Зробимо такі ж вхідні припущення, що й у попередньому підрозділі. Надамо точкам нескінченно малі переміщення $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$, сумісні з крайовими умовами. Робота прикладених до тіла зовнішніх сил на можливих переміщеннях дорівнює

$$\delta A = \int_W (X \delta u_x + Y \delta u_y + Z \delta u_z) dW + \int_S (X_n \delta u_x + Y_n \delta u_y + Z_n \delta u_z) dS. \quad (11.5)$$

Відзначимо, що другий інтеграл фактично береться лише по тій частині поверхні, на якій задано поверхневі сили, бо на іншій її частині, де задано переміщення, їхні варіації дорівнюють нулю. Підставляючи у другий інтеграл (11.1) співвідношення з рівняння рівноваги елементарного об'єму, маємо

$$\begin{aligned} \int_S (X_n \delta u_x + Y_n \delta u_y + Z_n \delta u_z) dS = \\ = \int_S \left[(\sigma_x \delta u_x + \tau_{xy} \delta u_y + \tau_{xz} \delta u_z) + (\tau_{yx} \delta u_x + \sigma_y \delta u_y + \tau_{yz} \delta u_z) + (\tau_{zx} \delta u_x + \tau_{zy} \delta u_y + \sigma_z \delta u_z) \right] dS. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Перетворюючи цей інтеграл за формулою Остроградського-Гаусса та використовуючи диференціальні умови рівноваги й залежності компонентів деформацій від компонентів переміщення, одержуємо

$$\delta A = \int_W (\sigma_x \delta \epsilon_x + \sigma_y \delta \epsilon_y + \sigma_z \delta \epsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx}) dW. \quad (11.7)$$

Введемо поняття потенціалу деформації як функції компонентів деформацій $\Pi(\epsilon_x, \dots, \gamma_{zx})$, частинні похідні від якої дорівнюють відповідним компонентам напружень:

$$\sigma_x = \frac{\Pi}{\epsilon_x}, \dots, \tau_{zx} = \frac{\Pi}{\gamma_{zx}}. \quad (11.8)$$

Потенціал деформації має вигляд

$$\Pi = \frac{9}{2} K \epsilon_{cp}^2 + \int_0^{\epsilon_i} \sigma_i d\epsilon_i \quad (11.9)$$

Перший доданок у цій формулі являє собою питому потенціальну енергію змінення об'єму, а другий – питому потенціальну енергію змінення

форми. Другий доданок у певному масштабі дорівнює площі, обмеженій діаграмою деформування матеріалу.

Диференціюючи вираз (11.9) за компонентами деформації, дістанемо

$$\begin{aligned} \frac{\Pi}{\varepsilon_x} &= \frac{9}{2} K 2\varepsilon_{cp} \frac{1}{3} + \sigma_l \frac{\varepsilon_l}{\varepsilon_x} = 3K\varepsilon_{cp} + \sigma_l \frac{1}{9} \frac{2(\varepsilon_x - \varepsilon_y - \varepsilon_z + \varepsilon_x)}{\varepsilon_l} = \\ &= \sigma_{cp} + \frac{2}{3} \frac{\sigma_l}{\varepsilon_l} (\varepsilon_x - \varepsilon_{cp}) = \sigma_x; \end{aligned} \quad (11.10)$$

$$\frac{\Pi}{\gamma_{zx}} = \sigma_l \frac{1}{9} \frac{3 \cdot 2 \gamma_{zx}}{\varepsilon_l} = \frac{\sigma_l}{3\varepsilon_l} \gamma_{zx} = \tau_{zx}.$$

Таким чином, вираз (11.9) є потенціалом деформації.

Підставляючи співвідношення (11.8) у формулу (11.7), маємо

$$\delta A = \int_W \delta \Pi dW, \quad (11.11)$$

або

$$\delta \left(\int_W \Pi dW \right) = 0.$$

Величина у круглих дужках називається повною енергією системи

$$\mathfrak{E} = \int_W \Pi dW - A.$$

Таким чином,

$$\delta \mathfrak{E} = 0. \quad (11.12)$$

Визначення другої варіації повної енергії системи доводить, що знак її додатний. Отже, дійсна форма рівноваги тіла відрізняється від усіх можливих форм тим, що для неї повна енергія набуває мінімального значення.

Принцип можливих змінень напруженого стану.

Принцип мінімуму додаткової роботи

Зробимо такі ж вхідні припущення, що й у двох попередніх підрозділах. Зіставимо дійсні напружені стани у різних точках тіла, які характеризуються компонентами напружень $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$, зі всіма близькими напруженнями, що задовольняють диференціальні рівняння рівноваги та умови на поверхні:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\sigma_x + \delta\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau_{yx} + \delta\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau_{zx} + \delta\tau_{zx}) + X + \delta X = 0, \quad (11.13)$$

$$(\sigma_x + \delta\sigma_x)l + (\tau_{yx} + \delta\tau_{yx})m + (\tau_{zx} + \delta\tau_{zx})n = X_v + \delta X_v,$$

Такі напружені стани називаються статично можливими.

Оскільки компоненти напружень $\sigma_x, \dots, \tau_{zx}$, а також $\sigma_x + \delta\sigma_x, \dots, \tau_{zx} + \delta\tau_{zx}$ задовольняють рівняння рівноваги та умови на поверхні, то варіації напружень $\delta\sigma_x, \dots, \delta\tau_{zx}$ і варіації зовнішніх сил $\delta X, \delta Y, \delta Z, \delta X_v, \delta Y_v, \delta Z_v$ також задовольняють ці рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\delta\sigma_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\delta\tau_{yx}) + \frac{\partial}{\partial z}(\delta\tau_{zx}) + \delta X = 0; \quad (11.14)$$

$$\delta\sigma_x l + \delta\tau_{yx} m + \delta\tau_{zx} n = \delta X_v.$$

Робота варіацій зовнішніх сил на можливих переміщеннях, за які приймемо дійсні переміщення u_x, u_y, u_z , дорівнює

$$\int_W (u_x \delta X + u_y \delta Y + u_z \delta Z) dW + \int_S (u_x \delta X_v + u_y \delta Y_v + u_z \delta Z_v) dS \quad (11.15)$$

Підставимо у другий інтеграл співвідношення (11.15). Тоді

$$\int_S (u_x \delta X_v + u_y \delta Y_v + u_z \delta Z_v) dS = \int_S \left[\begin{aligned} &(u_x \delta\sigma_x + u_y \delta\tau_{xy} + u_z \delta\tau_{xz})l + \\ &+ (u_x \delta\tau_{yx} + u_y \delta\sigma_y + u_z \delta\tau_{yz})m + \\ &+ (u_x \delta\tau_{zx} + u_y \delta\tau_{zy} + u_z \delta\sigma_z)n \end{aligned} \right] dS. \quad (11.16)$$

Так само, як і вище, перетворимо другий інтеграл за формулою Остроградського-Гаусса, використовуючи диференціальні рівняння (11.14) та залежності компонентів деформацій від компонентів переміщень:

$$\begin{aligned} &\int_W (u_x \delta X + u_y \delta Y + u_z \delta Z) dW + \int_S (u_x \delta X_v + u_y \delta Y_v + u_z \delta Z_v) dS = \\ &= \int_W (\epsilon_x \delta\sigma_x + \epsilon_y \delta\sigma_y + \epsilon_z \delta\sigma_z + \gamma_{xy} \delta\tau_{xy} + \gamma_{yz} \delta\tau_{yz} + \gamma_{zx} \delta\tau_{zx}) dW. \end{aligned} \quad (11.17)$$

Введемо поняття додаткової роботи як функції компонентів напруження, частинні похідні від якої за компонентами напружень дорівнюють відповідним компонентам деформацій:

$$\epsilon_x = \frac{\partial R}{\partial \sigma_x}, \dots, \gamma_{\alpha\beta} = \frac{\partial R}{\partial \tau_{\alpha\beta}}. \quad (11.18)$$

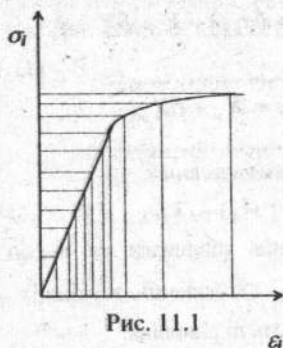


Рис. 11.1

Ці співвідношення замінюють відомі у теорії пружності формули Кастиліано. Наприклад, у границях пружності частинні похідні беруться від питомої потенціальної енергії деформації.

Додаткова робота дорівнює:

$$R = \frac{\sigma_{cp}^2}{2K} + \int_0^{\sigma_l} \epsilon_l d\sigma_l \quad (11.19)$$

Перший доданок у цій формулі являє собою питому потенціальну енергію змінення об'єму, а другий — питому потенціальну енергію змінення форми.

Другий доданок у деякому масштабі дорівнює площі, заштрихованій на рис. 11.1 горизонтальними лініями.

Диференціюючи вираження (11.7) за компонентами напружень, одержуємо:

$$\begin{aligned} \frac{R}{\sigma_x} &= \frac{\sigma_{cp}}{3K} + \epsilon_l \frac{\sigma_l}{\sigma_x} = \epsilon_{cp} + \epsilon_l \frac{\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z + \sigma_x}{2\sigma_l} = \\ &= \epsilon_{cp} + \frac{3}{2} \cdot \frac{\epsilon_l}{\sigma_l} (\sigma_x - \sigma_{cp}) = \epsilon_x; \end{aligned} \quad (11.20)$$

$$\frac{R}{\tau_{zx}} = \epsilon_l \frac{\sigma_l}{\tau_{zx}} = \epsilon_l \frac{6\tau_{zx}}{2\sigma_l} = \frac{3\epsilon_l}{\sigma_l} \tau_{zx} = \gamma_{zx}.$$

Таким чином, доведено, що вираз (11.19) є додатковою роботою. Назвемо додатковою роботою для всього тіла вираз

$$\tilde{R} = \int_W R dW. \quad (11.21)$$

Підставляючи співвідношення (11.18) у формулу (11.17), дістанемо

$$\int_W (u_x \delta X + u_y \delta Y + u_z \delta Z) dW + \int_S (u_x \delta X_n + u_y \delta Y_n + u_z \delta Z_n) dS = \delta R \quad (11.22)$$

Рівняння (11.22) є математичною формою так званого принципу можливих змінень напруженого стану тіла, згідно з яким сума робіт прирощення усіх зовнішніх сил на переміщеннях точок прикладання цих сил дорівнює приросту додаткової роботи всього тіла.

У границях пружності додаткова робота дорівнює потенціалу деформації або питомій потенціальній енергії, а тому й сума робіт приросту всіх зовнішніх сил на переміщеннях точок прикладання цих сил дорівнює приросту потенціальної енергії тіла.

З формули (11.22) випливає, що

$$\delta \tilde{R} = 0,$$

якщо за відсутності об'ємних сил робота приросту зовнішніх сил дорівнює нулю, що має місце, коли на частині поверхні задано напруження ($\delta X_v = \delta Y_v = \delta Z_v = 0$), а на іншій її частині переміщення дорівнюють нулю ($u_x = u_y = u_z = 0$).

Визначення другої варіації додаткової роботи доводить, що знак її додатний. Отже, з усіх статичних можливих напружених станів лише для істинного напруженого стану додаткова робота для всього тіла R набуває мінімального значення.

Теорема Кастиліано

У теорії пружності теорема Кастиліано формулюється таким чином: частинна похідна від потенціальної енергії деформації тіла, яка береться за величиною будь-якої з прикладених до тіла зовнішніх сил, дорівнює проекції переміщення точки прикладання цієї сили на напрямок її дії.

Розглянемо узагальнення цієї теореми у випадку нелінійних залежностей між напруженнями та деформаціями. Визначимо через P зосереджені сили, прикладені до тіла; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ – напрямні косинуси ліній дії цих сил, а через u_{xi}, u_{yi}, u_{zi} – проекції переміщення точок прикладання зосереджених сил P на осі x, y і z .

З варіаційного рівняння (11.22), вважаючи, що одна з сил одержує нескінченно малий приріст δP_i , визначаємо

$$(u_{xi}\alpha_i + u_{yi}\beta_i + u_{zi}\gamma_i)\delta P_i = \delta \tilde{R}. \quad (11.23)$$

Вираз у круглих дужках дорівнює проекції переміщення точки прикладання сили P_i на напрямок лінії дії сили δ_i .

Отже,

$$\delta_i = \frac{\delta \tilde{R}}{P_i}. \quad (11.24)$$

Таким чином, частинна похідна додаткової роботи тіла за величиною будь-якої з прикладених до тіла зовнішніх сил дорівнює проекції переміщення точки прикладання цієї сили на напрямок її дії.

Лекція 8

12. Загальні рівняння руху

Нагадаємо найбільш загальну систему рівнянь руху

$$m\ddot{\omega} - \sum \vec{F} = 0. \quad (12.1)$$

Виділимо всередині металу малий об'єм dW , обмежений поверхнею dS . Оскільки цей об'єм має густину ρ , то на нього впливатимуть інерційні сили, що для всього об'єму дорівнюють

$$\int_W \ddot{\omega} \rho dW. \quad (12.2)$$

Крім того, на той самий об'єм впливатиме масова сила

$$\int_W \vec{P} \rho dW, \quad (12.3)$$

де $\vec{P}$ – сила, що діє на одиницю поверхні;

На поверхні діятимуть поверхневі сили

$$\int_S \vec{P}_n dS, \quad (12.4)$$

де $\vec{P}_n$ – сила, яка діє на одиницю поверхні.

Рівняння динаміки набуває вигляду

$$\int_W (\vec{P} - \ddot{\omega}) \rho dW + \int_S \vec{P}_n dS = 0. \quad (12.5)$$

Якщо припустити, що в процесі руху **суцільного** середовища підінтегральні функції залишаються безперервними, то після перетворення поверхневого інтеграла в об'ємний рівняння за формулою Остроградського - Гаусса (12.5) можна записати в диференціальній формі:

$$\vec{P} - \ddot{\omega} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (12.6)$$

де

$$\vec{P}_x = i\sigma_{xx} + j\tau_{xy} + k\tau_{xz}; \quad (12.7)$$

$$\vec{P}_y = i\tau_{yx} + j\sigma_{yy} + k\tau_{yz}; \quad (12.8)$$

$$\vec{P}_z = i\tau_{zx} + j\tau_{zy} + k\sigma_{zz}. \quad (12.9)$$

Підставляючи значення сил $\vec{P}_x, \vec{P}_y, \vec{P}_z$ у рівняння

$$\vec{P} - \ddot{\omega} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \vec{P}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{P}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{P}_z}{\partial z} \right) = 0, \quad (12.10)$$

одержуємо три скалярні рівняння руху:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right); \\ \frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} = Y - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right); \\ \frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} = Z - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right). \end{cases} \quad (12.11)$$

Ці рівняння є відомими рівняннями руху суцільного середовища, записаними в напруженнях. Ліва частина цих рівнянь враховує інерційні зусилля, що виникають при нерівномірному русі окремих частинок суцільного середовища, причому інерційні зусилля можуть бути двох видів.

Члени $\frac{\partial V_x}{\partial t}, \frac{\partial V_y}{\partial t}, \frac{\partial V_z}{\partial t}$ враховують інерційні сили, що з часом виникають внаслідок змінення швидкості течії частинок суцільного середовища в даній точці. Це локальні члени рівняння руху. В технологічних процесах ОМТ ці члени враховують інерційні сили, пов'язані з нерівномірним ходом робочого органу обладнання, наприклад, повзуна на кривошипних пресах при ОМТ. Наступні члени лівої частини рівняння враховують інерційні сили, що виникають в окремих точках тіла внаслідок змінення швидкості в процесі течії залежно від координат:

$$x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z}; \quad (12.12)$$

$$x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z}; \quad (12.13)$$

$$x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z}. \quad (12.14)$$

Перші члени правої частини рівняння X, Y, Z враховують сили ваги. У багатьох випадках при вирішенні технологічних питань ними можна нехтувати через їхню малість.

Якщо дією сили ваги та інерційної сили знехтувати, то рівняння руху набуває вигляду

$$\operatorname{div} T_0 = 0. \quad (12.15)$$

Це рівняння рівноваги в скалярній формі широко відоме. Його використовують як в теорії пружності, так і в теорії пластичності.

Таким чином, застосування рівняння руху дає можливість враховувати інерційні сили, що виникають при високошвидкісних процесах ОМТ, оцінити вплив характеристик обладнання на процес деформації.

13. Фізичні закономірності

Для того щоб записати основні рівняння теорії течії металів, необхідно знати зв'язок між компонентами напружень, деформацій і швидкостей деформацій. З'ясування характеру цього зв'язку для пластичного деформування металу в загальному вигляді є складною задачею, що до нинішнього часу не розв'язана. Для випадку простого навантаження ця залежність визначена.

Просте навантаження — це навантаження тіла, при якому головні осі напружень, деформацій і швидкостей деформацій збігаються одна з одною і не відхиляються в процесі деформування. Іншими словами, при простому навантаженні максимальні подовження і швидкості руху частинок орієнтовані у напрямку дії максимальних напружень; а мінімальні — у напрямку дії мінімальних напружень.

Для середовищ, які вважаються ізотропними, подібний вигляд залежності між напруженнями, деформаціями і швидкостями деформацій є наслідком самого припущення про характер середовища. Що стосується пластичного деформування металу, то здійснення згаданого вище виду зв'язку потребує певного характеру навантаження внаслідок дії ефекту Баушингера, так званого простого навантаження, при якому напрямні тензори напружень, деформацій і швидкостей деформацій збігаються, тобто

$$\bar{D}_\sigma = \bar{D}_\epsilon = \bar{D}_\dot{\epsilon}. \quad (13.1)$$

Напрямні тензори зв'язані з відповідними девіаторами відомими співвідношеннями

$$D_\sigma = \sigma_{ii} \bar{D}_\sigma, \quad (13.2)$$

$$D_\epsilon = \epsilon_{ii} \bar{D}_\epsilon, \quad (13.3)$$

$$D_{\dot{\epsilon}} = \dot{\epsilon}_{ii} \bar{D}_{\dot{\epsilon}}. \quad (13.4)$$

Звідси випливає, що за умов простого навантаження між девіаторами напружень, деформацій і швидкостей деформацій має місце залежність

$$\sigma_{ii}/\epsilon_{ii} = \sigma_{ii}/\dot{\epsilon}_{ii} = \sigma_{ii}/\epsilon_{ii} = b. \quad (13.5)$$

Згідно з цією залежністю зв'язок між девіаторами напружень і швидкостями деформацій через їхні інші інваріанти визначається рівністю

$$D_\sigma = \frac{2}{3} \frac{\sigma_i}{\dot{\epsilon}_i} D_{\dot{\epsilon}}. \quad (13.6)$$

Інші інваріанти девіаторів зв'язані з інтенсивностями напружень і швидкостей деформацій такими співвідношеннями:

$$\sigma_{ii} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_i, \quad (13.7)$$

$$\varepsilon_{2l} = \frac{1}{\sqrt{2}} \varepsilon_l, \quad (13.8)$$

де

$$\sigma_l = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)};$$

$$\dot{\varepsilon}_l = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{yy})^2 + (\dot{\varepsilon}_{yy} - \dot{\varepsilon}_{zz})^2 + (\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{\varepsilon}_{xx})^2 + 3(\dot{\varepsilon}_{xy}^2 + \dot{\varepsilon}_{yz}^2 + \dot{\varepsilon}_{zx}^2)}.$$

Зважаючи на це, рівняння зв'язку між девіаторами напружень і швидкостей деформацій через їхні інтенсивності набуває вигляду

$$D_\sigma = \frac{\sigma_{2l}}{\dot{\varepsilon}_{2l}} D_{\dot{\varepsilon}},$$

або

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{cp}, \tau_{xy}, \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, \sigma_{yy} - \sigma_{cp}, \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz} - \sigma_{cp} \end{pmatrix} = \frac{2\sigma_l}{3\dot{\varepsilon}_l} \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{cp}, \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{xy}, \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{xz} \\ \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{yx}, \dot{\varepsilon}_{yy} - \dot{\varepsilon}_{cp}, \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{yz} \\ \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{zx}, \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{zy}, \dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{\varepsilon}_{cp} \end{pmatrix}, \quad (13.9)$$

що приводить до таких рівнянь зв'язку між компонентами напружень і швидкостей деформацій за умови простого навантаження:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{cp} + \frac{2\sigma_l}{3\dot{\varepsilon}_l} (\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{cp}); \tau_{xy} = \frac{1\sigma_l}{3\dot{\varepsilon}_l} \dot{\varepsilon}_{xy}; \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{cp} + \frac{2\sigma_l}{3\dot{\varepsilon}_l} (\dot{\varepsilon}_{yy} - \dot{\varepsilon}_{cp}); \tau_{yz} = \frac{1\sigma_l}{3\dot{\varepsilon}_l} \dot{\varepsilon}_{yz}; \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{cp} + \frac{2\sigma_l}{3\dot{\varepsilon}_l} (\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{\varepsilon}_{cp}); \tau_{zx} = \frac{1\sigma_l}{3\dot{\varepsilon}_l} \dot{\varepsilon}_{zx}. \end{aligned} \quad (13.10)$$

У результаті аналізу експериментальних досліджень ряду авторів А. А. Ільюшин довів, що у випадку простого навантаження при складному напруженому стані залежність між інтенсивностями напружень і деформацій точно збігається з діаграмою розтягування зразка, тобто інтенсивність напружень є цілком означеною функцією інтенсивності деформацій:

$$\sigma_l = \psi(\varepsilon_l), \quad (13.11)$$

де

$$\varepsilon_l = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + 3(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)}.$$

Компоненти деформацій зв'язані зі швидкостями деформацій у випадку простого навантаження диференціальними співвідношеннями:

$$\begin{aligned}\frac{d\varepsilon_{xx}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{xx}, \quad \frac{d\varepsilon_{xy}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{xy}; \\ \frac{d\varepsilon_{xy}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{xy}, \quad \frac{d\varepsilon_{yz}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{yz}; \\ \frac{d\varepsilon_{zz}}{dt} &= \dot{\varepsilon}_{zz}, \quad \frac{d\varepsilon_{zx}}{dt} = \dot{\varepsilon}_{zx}.\end{aligned}\quad (13.12)$$

Наведені вище фізичні закономірності мають місце при постійній температурі. Якщо температура зразка змінюється, то це передусім відбивається на його механічних властивостях, внаслідок чого залежність між напруженнями і деформаціями стає більш складною:

$$\sigma_i = \psi(\varepsilon, T). \quad (13.13)$$

Для простого навантаження необхідно мати не тільки спеціальне навантаження, але й цілком означене поле температур. За наявності неоднорідного поля температур в матеріалі може виникнути анізотропія механічних властивостей.

Однак, незважаючи на появу анізотропності, багато важливих практичних задач можуть розглядатися з точки зору простої деформації, а особливо у випадку формозмінення вісесиметричних заготовок.

Розглянемо випадок простого навантаження. При цьому будемо зважати на те, що досліди Девіса (1943–1945 рр.) з випробування спільної дії осьового розтягування і внутрішнього тиску при постійному відношенні величини сили, що розтягує до внутрішнього тиску, довели, що і за наявності значних деформацій, аж до руйнування зразків, залежність між інтенсивностями напружень і деформацій залишається такою самою, що і у випадку простого випробування на розтягання.

Лекція 9

14. Коефіцієнт жорсткості

Для в'язких рідин залежність між девіаторами напружень і швидкостей деформацій, як відомо, має вигляд

$$D_{\sigma} = 2\mu D_{\varepsilon}, \quad (14.1)$$

де μ – коефіцієнт в'язкості, що для даної температури є постійною величиною і змінюється тільки зі зміною температури:

$$\mu = \mu(T). \quad (14.2)$$

Використовуючи умови нестисливості у вигляді

$$\varepsilon_{cp} = 0,$$

для випадку руху нестисливої в'язкої рідини відповідно до $D_o = 2\mu D_\varepsilon$ можна записати залежність між напруженнями і швидкостями деформації у вигляді:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_{cp}, \tau_{xy}, \tau_{xz} \\ \tau_{yx}, \sigma_{yy} - \sigma_{cp}, \tau_{yz} \\ \tau_{zx}, \tau_{zy}, \sigma_{zz} - \sigma_{cp} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\mu \begin{pmatrix} \dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{cp}, \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{xy}, \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{xz} \\ \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{yx}, \dot{\varepsilon}_{yy} - \dot{\varepsilon}_{cp}, \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{yz} \\ \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{zx}, \frac{1}{2}\dot{\varepsilon}_{zy}, \dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{\varepsilon}_{cp} \end{pmatrix}; \quad (14.3)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} - \sigma_{cp} &= 2\mu(\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon}_{cp}), \quad \sigma_{cp} = p, \quad \dot{\varepsilon}_{cp} = 0; \\ \sigma_{xx} &= -p + 2\mu\dot{\varepsilon}_{xx}; \quad \tau_{xy} = \mu\dot{\varepsilon}_{xy}; \\ \sigma_{yy} &= -p + 2\mu\dot{\varepsilon}_{yy}; \quad \tau_{yz} = \mu\dot{\varepsilon}_{yz}; \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\mu\dot{\varepsilon}_{zz}; \quad \tau_{zx} = \mu\dot{\varepsilon}_{zx}. \end{aligned} \quad (14.4)$$

Для простої пластичної деформації за умови незмінності об'єму залежність між напруженнями і швидкостями деформацій така:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \sigma_{cp} + 2\frac{1}{3}\frac{\sigma_l}{\dot{\varepsilon}}\dot{\varepsilon}_{xx}; \quad \tau_{xy} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_l}{\dot{\varepsilon}}\dot{\varepsilon}_{xy}; \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{cp} + 2\frac{1}{3}\frac{\sigma_l}{\dot{\varepsilon}}\dot{\varepsilon}_{yy}; \quad \tau_{yz} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_l}{\dot{\varepsilon}}\dot{\varepsilon}_{yz}; \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{cp} + 2\frac{1}{3}\frac{\sigma_l}{\dot{\varepsilon}}\dot{\varepsilon}_{zz}; \quad \tau_{zx} = \frac{1}{3}\frac{\sigma_l}{\dot{\varepsilon}}\dot{\varepsilon}_{zx}. \end{aligned} \quad (14.5)$$

Порівняння цих систем рівнянь показує, що вони тотожно збігаються за умови

$$p = -\sigma_{cp}, \quad \mu = \sigma_l / 3\dot{\varepsilon}. \quad (14.6)$$

Отже для опису процесу пластичної течії металу при простій деформації можуть використовуватися відповідні рівняння течії в'язкої рідини, якщо в них замість коефіцієнта в'язкості прийняти вираз

$$\frac{1}{3}\frac{\sigma_l}{\dot{\varepsilon}} = \mu. \quad (14.7)$$

У подальшому цю величину називатимемо коефіцієнтом жорсткості. Цей коефіцієнт залежить від механічних властивостей металу, а також від деформацій, що одержуються тилом, і швидкостей деформацій.

В розгорнутому вигляді маємо такий вираз для коефіцієнта жорсткості:

$$\mu_t = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\Phi \left[\frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon)^2 + \frac{3}{2}(\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2)} \right]}{\frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_{xx} - \dot{\varepsilon})^2 + (\dot{\varepsilon}_{yy} - \dot{\varepsilon})^2 + (\dot{\varepsilon}_{zz} - \dot{\varepsilon})^2 + \frac{3}{2}(\dot{\varepsilon}_{xy}^2 + \dot{\varepsilon}_{yz}^2 + \dot{\varepsilon}_{zx}^2)}} \quad (14.6)$$

Функція враховує механічні властивості металу та його зміцнення в процесі течії, а комбінації вхідних деформацій та їхніх швидкостей відбивають вплив самого процесу.

Введення поняття "коефіцієнт жорсткості" дозволяє для опису пластичної течії металу користуватися також, як і у випадку в'язкої рідини, загальними рівняннями механіки суцільних середовищ. Однак слід зауважити, що коефіцієнт не характеризує в'язкості металів у звичайному розумінні. Уподібнення пластичної течії твердого металу течії в'язкої рідини носить тільки формальний характер і фізичного сенсу не має.

15. Початкові та граничні умови. Рівняння пластичної течії

Початкові умови в задачі про пластичну течію металу характеризуються значеннями швидкостей у початковий момент часу, тобто функціями, що визначають компоненти швидкості при $t=0$ для всієї розглядуваної області:

$$\begin{aligned} V_x(x, y, z, t) &= \varphi_1(x, y, z); \\ V_y(x, y, z, t) &= \varphi_2(x, y, z); \\ V_z(x, y, z, t) &= \varphi_3(x, y, z). \end{aligned} \quad (15.1)$$

У випадку стаціонарної течії питання про початкові умови не виникає.

Граничні умови при течії рідини, якщо потік обмежується твердими стінками, зводяться до відсутності відносних зміщень частинок рідини на поверхні контакту. Це означає, що на поверхні контакту нормальна та дотична складові швидкості руху рідини дорівнюють нулю. Якщо рідина обмежена вільною поверхнею, то нормальна складова швидкості збігається зі швидкістю переміщення поверхні розриву, а напруження на поверхні нормальні до неї.

При пластичній течії металу питання про граничні умови значно складніше. Експериментально доведено, що, наприклад, при стисканні на поверхні контакту можуть одночасно існувати зони, де відбувається ковзання частинок металу по поверхні контакту, і зони, де таке ковзання відсутнє.

Пояснюється це спільним впливом сил тертя та умовою пластичності. Відомо, що умова пластичності обмежує значення контактних дотичних напружень. У зв'язку з цим, якщо сили тертя малі, відбувається ковзання частинок металу по поверхні контакту, якщо ж контактні дотичні

напруження, викликані силами тертя, перевищують межу, відповідну до умови пластичності, виникає гальмування течії.

Зони, де це спостерігається, називають зонами застою, або зонами прилипання. За рахунок сил тертя на контактній поверхні можна уникнути взагалі появи означених зон.

Питання про граничні умови на контактній поверхні при пластичному стиску розглядалося низкою авторів. Найбільш докладно це питання досліджено Є. П. Унковим.

Рівняння пластичної течії

Згідно з залежностями, розглянутими вище, для напружень та швидкостей деформації при вивченні питання про коефіцієнт жорсткості можна записати:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \sigma_{cp} + 2\mu_1 \dot{\epsilon}_{xx}; \tau_{xy} = \mu_1 \dot{\epsilon}_{xy}; \\ \sigma_{yy} &= \sigma_{cp} + 2\mu_1 \dot{\epsilon}_{yy}; \tau_{yz} = \mu_1 \dot{\epsilon}_{yz}; \\ \sigma_{zz} &= \sigma_{cp} + 2\mu_1 \dot{\epsilon}_{zz}; \tau_{zx} = \mu_1 \dot{\epsilon}_{zx}.\end{aligned}\quad (15.2)$$

Швидкості деформацій зв'язані зі швидкостями течії рівняннями:

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}_{xx} &= \frac{\partial V_x}{\partial x}; \dot{\epsilon}_{xy} = \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y}; \\ \dot{\epsilon}_{yy} &= \frac{\partial V_y}{\partial y}; \dot{\epsilon}_{yz} = \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z}; \\ \dot{\epsilon}_{zz} &= \frac{\partial V_z}{\partial z}; \dot{\epsilon}_{zx} = \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x}.\end{aligned}\quad (15.3)$$

Рівняння руху суцільного середовища, записані в напруженнях, мають вигляд:

$$\begin{aligned}\frac{dV_x}{dt} &= X + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right); \\ \frac{dV_y}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right); \\ \frac{dV_z}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} \right).\end{aligned}\quad (15.4)$$

У випадку в'язкої рідини коефіцієнт в'язкості при однорідному температурному полі, як відомо, від координат не залежить, і тільки за умов неоднорідного поля температур він стає функцією координат. При пластичній течії металу коефіцієнт пластичної в'язкості (коефіцієнт

жорсткості) є також функцією координат, тому у загальному випадку пластичної течії металу має місце умова:

$$\mu_i = \mu_i(x, y, z). \quad (15.15)$$

Диференціюючи (15.2) і зважаючи на (15.3) — (15.5), одержимо загальні рівняння пластичної течії в декартовій системі координат:

$$\rho \left(\frac{\partial V_x}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_x}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_x}{\partial z} \right) = \rho X + \frac{\sigma}{x} + \mu_i \left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2} \right) + \frac{2\partial\mu_i}{\partial x} \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial\mu_i}{\partial y} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial\mu_i}{\partial z} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right); \quad (15.16)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_y}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_y}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) = \rho Y + \frac{\partial\sigma}{\partial y} + \mu_i \left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2} \right) + \frac{2\partial\mu_i}{\partial y} \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial\mu_i}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial\mu_i}{\partial z} \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right); \quad (15.17)$$

$$\rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_x \frac{\partial V_z}{\partial x} + V_y \frac{\partial V_z}{\partial y} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \rho Z + \frac{\partial\sigma}{\partial z} + \mu_i \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \frac{2\partial\mu_i}{\partial z} \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial\mu_i}{\partial x} \left(\frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial\mu_i}{\partial y} \left(\frac{\partial V_y}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial y} \right);$$

У випадку пластичного деформування з малими швидкостями впливом інерційних сил можна знехтувати, і тоді ліві частини наведених вище рівнянь дорівнюють нулю. Система має вигляд $\text{div} T_\sigma = 0$, тобто є системою рівнянь для квазистатичних процесів. Інколи так і чинять, коли швидкості деформування незначні. Швидкість деформування — це швидкість пересування робочого органу обладнання, наприклад, повзуна преса. У деяких випадках доводять (експериментально), що інерційний додаток складає менше 15 або 10%, і його вважають незначним (просто не враховують, прирівнюють до нуля).

У більшості випадків високошвидкісного навантаження так чинити не можна, бо інерційні складові вносять істотний додаток до величини роботи деформації. Тому задачу пластичного деформування вирішують із застосуванням зазначених вище залежностей.

У рекомендованій літературі наведено рівняння руху в довільній ортогональній криволінійній системі координат. Як зразок запишемо

систему рівнянь руху в полярних координатах, що використовується при розв'язанні задач для вісесиметричних тіл (тіла обертання):

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{V_z}{\partial z} \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_\theta^2}{r} \right) = \\ & = \rho F_r + \frac{\partial \sigma}{\partial r} + \mu_l \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} - \frac{V_r}{r^2} \right) + \\ & + 2 \frac{V_r}{r} \frac{\partial \mu_l}{\partial r} + \frac{\partial \mu_l}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) + \frac{\partial \mu_l}{\partial z} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right); \\ & \rho \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_z}{\partial z} \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{V_r V_\theta}{r} \right) = \\ & = \rho F_\theta + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \sigma}{\partial \theta} + \mu_l \left(\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{2 \partial V_r}{r \partial \theta} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) + (15.18) \\ & + \frac{2}{r^2} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} \frac{\partial \mu_l}{\partial \theta} + \frac{\mu_l}{r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r^2} \right) + \frac{\partial \mu_l}{\partial z} \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right); \\ & \rho \left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} + \frac{V_z}{\partial z} \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) = \\ & = \rho F_z + \frac{\partial \sigma}{\partial z} + \mu_l \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) + \\ & + 2 \frac{\partial V_z}{\partial z} \frac{\partial \mu_l}{\partial z} + \frac{\partial \mu_l}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial V_z}{\partial \theta} \right) + \frac{\mu_l}{\partial r} \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right); \\ & \frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{V_r}{r} = 0. \end{aligned}$$

У випадку рівнянь руху в координатах X, Y, Z для системи рівнянь в полярних системах координат при пластичному деформуванні з малими швидкостями впливом інерційних сил можна знехтувати, і тоді ліві частини наведених вище рівнянь стають такими, що дорівнюють нулю.

Лекція 10

16. Схеми вирішення задач пластичної течії для статичного та динамічного навантажень

Гіпотези теорії пластичності

Метали та сплави мають кристалічну будову, певним способом орієнтовані іони, навколо них розташовується хмара валентних електронів. Закон розподілу густини електронної хмари наведено на рис 16.1. На рис. 16.2 подано приклад розподілу густини у процесі навантаження (розтягування).



Рис. 16.1



Рис. 16.2

Якщо $E_2 < E_1$ та $E_2 < E_{кр}$, метал руйнується.

Таке уявлення про матеріал не дозволяє застосовувати рівняння класичної гідромеханіки. Щоб це здійснити, використовують такі гіпотези:

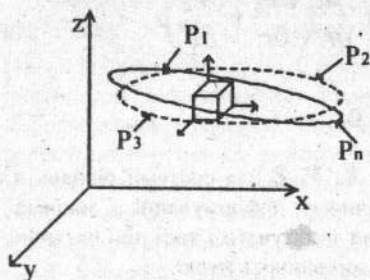


Рис. 16.3

1. Суцільності (гіпотеза суцільного середовища).

Середовище є суцільним однорідним полем.

2. Нерозривності напружень і деформацій (для описування безперервними функціями та можливості брати похідні).

Розглядаючи деяке тіло, навантажене зовнішніми силами $P_1, P_2, \dots, P_n$ (рис. 16.3), можна простежити за зміненням

його форми при пластичному деформуванні.

Формотворення поковок або інших виробів напівфабрикатів на пресі є прикладом статистичного навантаження.

Спроектуємо сили на осі X, Y, Z .

Дістанемо рівняння рівноваги:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad \text{або } \operatorname{div} T_{\sigma} = 0. \quad (16.1)$$

За законом парності дотичних напружень:

$$\begin{aligned} \tau_{xy} &= \tau_{yx}, \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy}, \\ \tau_{zx} &= \tau_{xz}. \end{aligned} \quad (16.2)$$

Отже, в рівняннях 6 невідомих.

Систему зводять до плоскої або вісесиметричної. В теорії, що використовується для визначення σ, P , наприклад в ОМТ, припускається помилка до 15%.

Для розв'язання плоскої задачі маємо два рівняння рівноваги і три невідомих. Як третє заключне додаткове рівняння використовують умову пластичності, наприклад умову Губера - Мізеса (енергетичну). Вона має такий вигляд:

$$\sigma_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} = \sigma_s. \quad (16.3)$$

Пластична течія в елементарному об'ємі суцільного середовища настає тоді, коли напруження в елементі дорівнюють напруженню течії:

$$\sigma_1 = \sigma_s. \quad (16.4)$$

Інколи використовують умову пластичності Трески і Сен-Венана

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \beta \sigma_s, \quad (16.5)$$

де $\beta = f(\sigma_1)$, при плоскому напруженому стані $\beta = 1$, а при об'ємному $\beta = 1 \dots 1.115$;

σ_{11}, σ_{33} - головні нормальні напруження.

В результаті розв'язання плоскої задачі одержуємо:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx} &= f_1(x, y, z, \sigma_s); \\
 \sigma_{yy} &= f_2(x, y, z, \sigma_s); \\
 &\dots\dots\dots \\
 \tau_{xy} &= f_4(x, y, z, \sigma_s); \\
 \tau_{mn} &= f_m(x, y, z, \sigma_s).
 \end{aligned}
 \tag{16.6}$$

Таким чином, маємо поле напружень та можливість проведення аналізу НДС. Границю текучості σ_s для різних випадків навантаження вибирають таким чином.

При аналізі різних процесів обробки металів тиском часто наближають до ідеалізації реальні залежності між напруженнями та деформаціями з метою спрощення математичних викладань.

1. Діаграма ідеального жорстко-пластичного матеріалу (рис. 16.4):

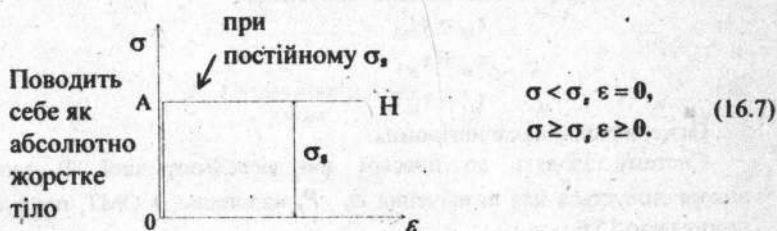


Рис. 16.4

2. Діаграма пружного ідеально пластичного матеріалу (рис. 16.5):

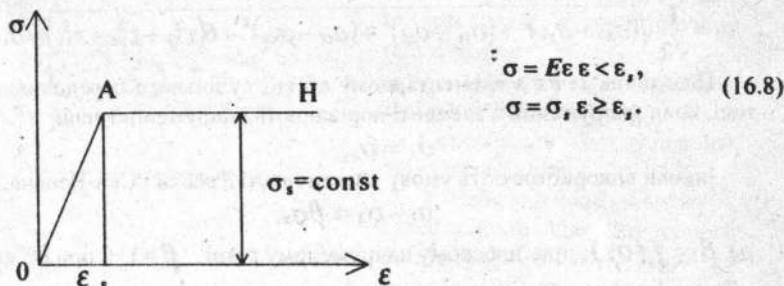


Рис. 16.5

3. Діаграма жорстко-пластичного матеріалу (рис. 16.6):

$$\varepsilon = 0, \sigma < \sigma_s,$$

$$\sigma = \sigma_s + P\varepsilon, \varepsilon > \varepsilon_s.$$

(16.9)

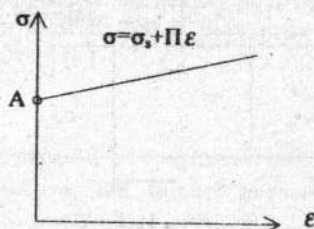


Рис. 16.6

Більш близька до процесів пружно-пластична модель, тобто діаграма, що враховує як пружну, так і пластичну ділянки деформування (рис. 16.7).

Лінійна апроксимація застосовується при роботі зі слабозміцненими матеріалами:

$$\sigma = \sigma'_0 + P\varepsilon,$$

(16.10)

де σ'_0 — апроксимаційна границя текучості.

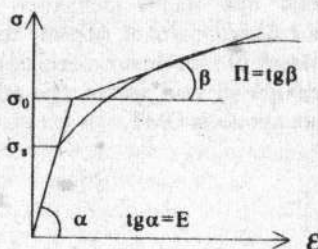


Рис. 16.7

Степенева апроксимація – для

середньо- і сильнозміцнених сплавів (це в основному кольорові сплави):

$$\sigma = B \varepsilon^m, \quad (16.11)$$

де B і m характеризують марку металу.

Існують й інші вигляди апроксимації, наприклад, $\sigma_s = \text{const}$ – це деформування з підведенням тепла.

Задачу з визначення зусиль і роботи деформування для кожної конкретної схеми, наприклад, для осадки зразка в циліндричній системі координат (рис. 16.8), розв'язують за формулою:

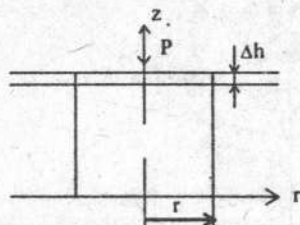


Рис. 16.8

$$P = \int_0^r \int_0^{2\pi} \sigma_{zz} r dr d\alpha, \quad (16.12)$$

де P – зусилля деформування.
Робота деформування визначається як

$$A = P \Delta h. \quad (16.13)$$

Коли Δh велике, то переміщення розподіляють на декілька ділянок.

При високошвидкісній або імпульсній обробці така методика неприйнятна. У випадку високих швидкостей рух частинок металу з'являються інерційні сили, а ці інерційні складові дають більші розбіжності з експериментом і складають похибку 300...400%.

Наявність інерційних сил може суттєво змінити хід процесу. Вплив інерційних сил можна простежити на осадці циліндричного зразка (рис. 16.9). Якщо при малій швидкості осадки осідання супроводжувалося утворенням бочкоподібної форми, то при такій самій величині імпульсу сили у випадку великої швидкості деформації остання локалізується в основному у верхній частині зразка. Цю обставину слід враховувати при аналізі швидкісних процесів ОМТ.

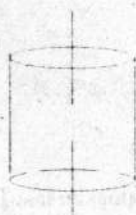
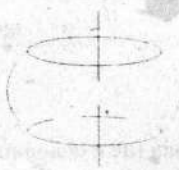
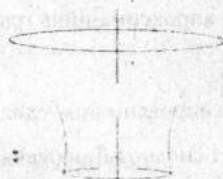
Вихідна
заготовкаМала швидкість
осадкиВелика швидкість
осадки

Рис.16.9

При розгляді динамічних процесів за основу беруть рівняння руху, що використовуються при описі руху рідини та газів. У загальному випадку рівняння має вигляд

$$\operatorname{div} T_{\sigma} = \rho m \frac{dV}{dt}. \quad (16.14)$$

Для використання класичних рівнянь гідромеханіки велику роль відіграв той факт, що вдалося вибрати таку характеристику для металу, що мала б розмірність в'язкості. Це – коефіцієнт жорсткості

$$\mu = \frac{1}{3} \frac{\sigma_1}{\dot{\epsilon}_1}. \quad (16.15)$$

Він залежить від інтенсивності напружень і узагальненої швидкості деформації. Таким чином, можна відзначити, що жодної аналогії μ коефіцієнту в'язкості не існує. Значення коефіцієнта μ – різне для різних точок об'єму металу – характеризує конкретний технологічний процес (прокатку, штампування, витяжку тощо), μ залежить від фізико-механічних властивостей металу $(t, \dot{\epsilon})$.

Отже, методика розрахунку енергетичних параметрів процесів обробки металів базується на рівнянні руху, а рівняння рівноваги – його окремий випадок.

Основою теорії пластичної течії є знаходження вектора швидкості $\vec{V} = f(V_x, V_y, V_z)$, або поля швидкостей. Це найтрудомісткіший етап методики.

Слід відзначити вимоги до поля швидкостей:

1. Поле швидкостей мусить забезпечити кінцевість формозмінення заготовки (тобто відображати весь процес деформування).
2. Поле швидкостей не повинно зазнавати розривів:

$$\operatorname{div} \vec{V} = 0; \quad \frac{V_x}{x} + \frac{V_y}{y} + \frac{V_z}{z} = 0.$$

3. Поле швидкостей мусить мати простий математичний вираз (проекції швидкостей повинні мати простий математичний вираз). Через спрощення втрачається точність. В теорії пластичної течії припускається похибка 10...15%.

Поле швидкостей у ряді випадків вдається визначити розв'язанням рівняння нерозривності за відомих граничних кінематичних умов.

Лекція 11

17. Визначення напружень при стисненні або осадці

Осадка є найпоширенішим процесом при гарячій ОМТ. На відміну від процесу розтягування, при осадці матеріал знаходиться у складному напруженому стані. Розрізняють осадку вільну та ускладнену.



Рис. 17.1

При вільній осадці внаслідок густого нанесення мастила на контактних поверхнях сили тертя незначні, й у цьому випадку осадка не відрізняється від процесу простого стиснення. Однак на практиці має місце, як правило, складна осадка, коли сили тертя досягають значної величини (рис. 17.1).

Для вирішення задачі визначення поля напружень на контактних поверхнях вибирають циліндричну систему координат. (17.2) Вісь z суміщують з віссю циліндра. Деформацію вважають вісесиметричною:

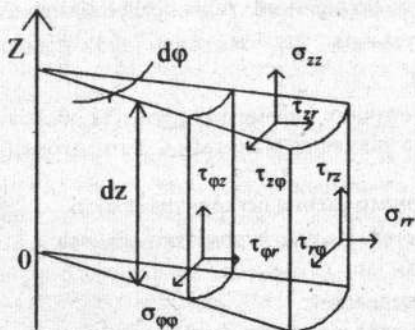


Рис. 17.2

$$\frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0; (17.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial \phi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{2\tau_{rz}}{r} = 0; (17.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial \phi} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0. (17.3)$$

Умова пластичності:

$$(\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi})^2 + (\sigma_{\phi\phi} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{rr})^2 + 6(\tau_{r\phi}^2 + \tau_{\phi z}^2 + \tau_{rz}^2) = 2\sigma_s^2. (17.4)$$

Якщо припустити незалежність напружень від координати, то ϕ ($\tau_{r\phi} = \tau_{z\phi} = 0$).

При зміні z від 0 до $h/2$ τ змінюється від 0 до τ . При $d > h$ σ_{rr} і $\sigma_{\phi\phi}$ не залежать від z . Тоді система рівнянь рівноваги значно спрощується та зводиться до рівняння

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2\tau}{h} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\phi\phi}}{r} = 0. (17.5)$$

Приблизно рівняння пластичності має вигляд

$$\sigma_{zz} - \sigma_{rr} = \beta \sigma_s. (17.6)$$

Повна пластичність при $\sigma_{rr} = \sigma_{\phi}$. Приходимо до спрощеного рівняння рівноваги

$$\frac{d\sigma_{rr}}{dr} + \frac{2\tau}{h} = 0, (17.7)$$

де R – зовнішній радіус зразка.

Розв'язок цього рівняння має вигляд

$$\sigma_r = \frac{\mu\beta}{h} \sigma_z r + c. \quad (17.8)$$

Для визначення довільної сталої скористуємося граничними умовами на зовнішній поверхні зразка. При

$$r=R \quad \sigma_r=0, \quad (17.9)$$

де R – зовнішній радіус зразка.

З урахуванням цього одержуємо остаточне рівняння для визначення розподілу напружень по контактній поверхні:

$$\sigma_r = \frac{\mu\beta}{h} \sigma_z (R-r) + \beta \sigma_z. \quad (17.10)$$

У центрі зразка, де сили тиску досягають значної величини, утвориться зона ускладненої течії матеріалу (рис. 17.3).

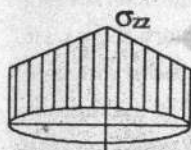


Рис. 17.3

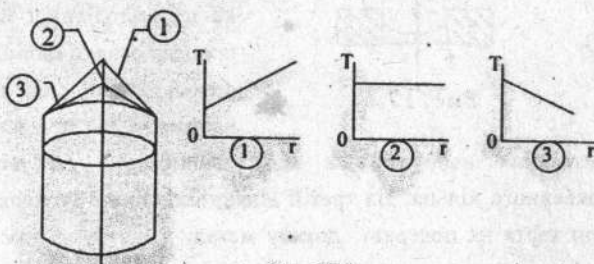


Рис. 17.4

Істотне значення для процесу осадки має розподілення температури по циліндричному зразку.

Це виявляє вплив на картину розподілення контактних напружень уздовж циліндричного зразка. З цього видно, що зусилля осадки значно залежить від закону розподілення температури (рис. 17.4), зокрема, закон зменшення температури до зовнішньої поверхні циліндра вигідніший, ніж її падіння в центрі.

Істотно на хід процесу осадки впливає форма інструменту. Застосування опуклого бойка знижує зусилля осадки, у той час як застосування вгнутого бойка (рис. 17.5) підвищує його, через вплив нормального зусилля P і сили тертя T .

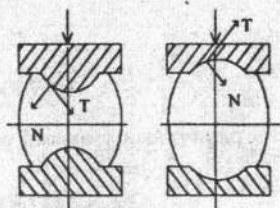


Рис. 17.5

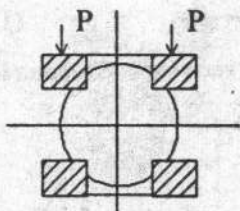


Рис. 17.6

Наявність в інструменті отвору знижує сили тертя (рис. 17.6). Розглянемо цей процес докладніше. Припустимо, що циліндричний зразок розміщується між двома підкладними кільцями.

При осадці зразка матеріал частково затікає всередину підкладного кільця, а частково роздається зовні. Зразок має поверхню, що визначається діаметром, від якого відбувається роздача матеріалу. Цей діаметр називається критичним. Увесь зразок можна розбити на три ділянки. Характер деформування зразка на першій ділянці не відрізняється від процесу осадки циліндричного зразка. На другій ділянці сили тертя змінюють свій напрямок, що призводить до зменшення

контактних напружень в міру наближення до внутрішньої порожнини підкладного кільця. На третій ділянці зовнішнє зусилля повинно подолати сили тертя на поверхні дотику металу з інструментом. Отже, наявність в інструменті отвору знижує величину зусилля, необхідного для здійснення процесу осадки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Алексеев Ю. Н. Вопросы пластического течения металлов. Харьков, 1958.
2. Безухов Н. И. Основы теории упругости пластичности и ползучести. М., 1968.
3. Бурлаков А. В. Основы теории пластичности и ползучести. Харьков, 1968.
4. Ильюшин А. А. Механика сплошной среды. М., 1971.
5. Ильюкович Б. М. Введение в теорию пластичности. Киев, 1983.
6. Малинин Н. Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М., 1968.
7. Малинин Н. Н. Технологические задачи пластичности и ползучести. М., 1979.
8. Писаренко Г. С., Мोजаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Киев, 1981.

Зміст

Умовні позначення.....	3
Лекція 1	
1. Вступ.....	5
2. Умовні діаграми розтягування.....	9
Лекція 2	
3. Дійсні діаграми розтягування матеріалів.....	14
4. Тензор і девіатор напружень, їх інваріанти.....	16
5. Тензор і девіатор деформацій, їх інваріанти.....	23
Лекція 3	
6. Основні закони механіки суцільного середовища.....	26
Лекція 4	
7. Закони збереження термодинаміки.....	32
Лекція 5	
8. Розвантаження матеріалу після пластичної деформації. Теорема Ільюшина про розвантаження.	
Деформаційна теорія пластичності.....	40
9. Основи теорії малих пружно-пластичних деформацій.....	42
Лекція 6	
10. Метод змінних параметрів пружності.....	47
Лекція 7	
11. Варіаційні принципи розв'язання задач теорії пластичності	50
Лекція 8	
12. Загальні рівняння руху.....	56
13. Фізичні закономірності.....	58
Лекція 9	
14. Коефіцієнт жорсткості.....	60
15. Початкові та граничні умови. Рівняння пластичної течії.....	62
Лекція 10	
16. Схеми вирішення задач пластичної течії для статичного та динамічного навантаження.....	66
Лекція 11	
17. Визначення напружень при стисненні або осадці.....	71
18. Список використаної та рекомендованої літератури.....	75

28 1003

Олександр Миколайович Застела
Володимир Володимирович Борисевич

ТЕОРІЯ ПЛАСТИЧНОСТІ

Редактори: Н. М. Сікульська,
Л. О. Кузьменко

Научно-техническая
библиотека
"ХАИ"



mt0061270

Зв. план, 2000

Підписано до друку 27.10.2000

Формат 60x84 $\frac{1}{16}$. Папір офс. № 2. Офс. друк.

Умовн.-друк. арк. 4,2. Облік.-вид. арк. 4,81. Т. 100 прим.

Замовлення 179. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет

ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

Ротапринт друкарні «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
