

658
785

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет
ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут"



В.М. Вартанян, І.В. Чумаченко, В.А. Резчик, О.І. Лисенко

ПРИЙНЯТТЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ

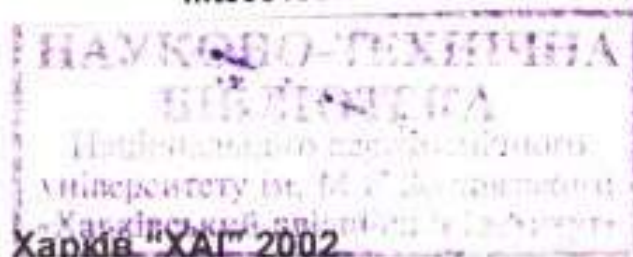
Частина 1
Методи та моделі

Рекомендовано Міністерством освіти
і науки України як навчальний
посібник для студентів вищих
навчальних закладів, що навчаються
за спеціальністю "Менеджмент"

Научно-техническая
библиотека
"ХАИ"



mt0051082



УДК 519.816:658.012 (075.8)

Основи прийняття управлінських рішень / В.М. Вартанян, І.В. Чумаченко, В.А. Резчик, О.І. Лисенко. – Навч. посібник. – Харків: Нац. аерокосмічний ун-т "Харк. авіац. ін-т", 2002. – 85 с.

ISBN 966-662-027-8

Розглянуто суть процесів прийняття рішень, методи та алгоритми досліджень як безперервних, так і дискретних динамічних систем.

Висвітлено раціональне вирішення проблем управління як сукупності виборів і показано етапи рішень: діагноз, формулювання обмежень та критеріїв, виявлення та оцінку альтернатив, остаточний вибір управлінського впливу, а також дослідження стійкості динамічних систем з урахуванням невизначеності параметрів і запізнювання.

Проаналізовано багатоступеневу систему прийняття рішень у пунктах їх прийняття з рівнями та темпами потоків на вході та виході з урахуванням взаємозв'язку інформації з дійсними та бажаними умовами як усередині, так і поза нею.

Рис. 24. Табл. 8. Бібліогр.: 14 назв.

Рецензенти: д-р економ. наук, проф. Є.М. Воробйов,
д-р техн. наук, проф. М.Д. Годлевський,
д-р техн. наук А.Д. Тев'яшев

Гриф надано 03.12.2001 року Міністерством освіти і науки України

ISBN 966-662-027-8

© Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут", 2002 р.

1. СУТЬ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ

У процесі управління керівництво підприємства (організації) реалізує функції планування, організації, мотивації та контролю, пов'язуючи їх з процесами комунікацій та прийняття рішень. Управлінське рішення, як і комунікації (обмін інформацією), відносять до сполучних процесів.

У процесі комунікацій керівник одержує інформацію, необхідну для прийняття ефективних рішень, і доводить її до працівників підприємства. Якщо комунікації налагоджені погано, рішення можуть виявитися помилковими, і від цього може постраждати справа.

Вітчизняні фахівці в області прийняття рішень вважають, що прийняття рішення є центральним пунктом теорії управління. Рубіжні фахівці стверджують, що людину тільки тоді можна назвати менеджером, якщо вона приймає рішення або реалізує їх через інших людей.

Прийняття рішень відбивається на всіх аспектах управління, є невід'ємною частиною щоденної роботи керівника, у цьому виявляється так звана "загальність прийняття рішень".

Професор менеджменту Френк Харрісон вважає, що "Прийняття рішень - це інтегральна частина управління організацією будь-якого роду. Більш ніж що-небудь інше, компетентність у даній області відрізняє менеджера від неменеджера і, що ще важливіше, - ефективно працюючого менеджера від неефективно працюючого колеги".

Кожна людина в особистому житті приймає безліч рішень. Але окремий вибір індивіда позначається лише на його власному житті та житті деяких зв'язаних із ним людей.

Керівники ж вибирають напрямок дій і для себе, і для організацій, і для інших працівників.

Якщо організація велика й впливова, рішення її вищих керівників можуть змінювати місцеве оточення, а важливі державні рішення - хід історії, наприклад, рішення президента США Трумена про атомне бомбардування Японії, рішення радянського уряду про введення військ в Афганістан, рішення наради у Біловезькій Пущі, рішення про будівництво АЕС, зокрема Чорнобильської АЕС, та ін.

Відповідальність за прийняття важливих рішень - це важкий тягар, особливо на вищих рівнях управління. Керівник не має права приймати непродумані рішення, вони мають бути обґрунтовані раніше, ніж будуть прийняті.

Що ж потрібно знати майбутньому керівникові про рішення, щоб, приймаючи їх, управляти раціонально й систематизовано?

Насамперед необхідно визначитися у різноманітні визначень, термінів, уявлень, пов'язаних із феноменом "рішення". Для майбутнього керівника (адміністратора, організатора, менеджера) професійний інтерес викликає поняття "Рішення - це вибір альтернативи". "Управлінське рішення" -

також ємне і досить широке поняття, однак його найчастіше розглядають лише як "команду від керуючої до керованої системи", що підлягає виконанню, без огляду на такий істотний елемент системи, як зворотний зв'язок.

Аналогічний, але все ж таки більш глибокий підхід до розуміння "управлінського рішення" полягає у тому, що за змістом управлінське рішення є одним із варіантів (оптимальним) сукупності впливу керуючої системи на керовану.

Поняття "управлінське рішення" розглядається як одна з функцій керуючого, його організаційно-практична діяльність в керованій системі практично збігається з поняттям "організаційне рішення". Дійсно, організаційне рішення - це вибір, що повинний зробити керівник, щоб виконати обов'язки, зумовлені посадою, яку він займає. Мета організаційного рішення - забезпечення прямування до поставлених перед організацією задач. Тому найефективнішим організаційним рішенням є вибір, що буде насправді реалізований і зробить найбільший внесок у досягнення кінцевої мети.

Таке розуміння управлінського рішення відповідає традиційному визначенню його у рамках вітчизняної школи управління: "Управлінське рішення - це одноразовий акт впливу суб'єкта управління на об'єкт, який установлює програму робіт, спрямованих на визначення й реалізацію конкретної мети, що виходить із загальних задач, які стоять перед керованим об'єктом. Воно ґрунтується на аналізі фактично сформованої ситуації й альтернатив її дозволу."

Відповідно до такого розуміння управлінського рішення його підготовка, прийняття й здійснення являють собою частини (етапи) процесу управління, що відображають його основний зміст. Вони характеризуються одноразовістю дії, альтернативним характером, цілеспрямованістю, перспективністю, наявністю програми дій, мають бути по можливості науково обґрунтованими, відповідати правовим нормативам.

2. КЛАСИФІКАЦІЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ

Залежно від сфери життя суспільства розрізняють такі види рішень:

- політичні;
- соціальні;
- економічні;
- ідеологічні;
- військові та ін.

Залежно від об'єкта управління розрізняють такі види рішень з управління:

- народним господарством;

- галуззю народного господарства;
- галуззю промисловості;
- підгалуззю;
- промислово-фінансовою групою;
- підприємством;
- цехом;
- дільницею;
- бригадою;
- робочим місцем.

Залежно від суб'єкта управління розрізняють рішення:

- президента;
- уряду;
- парламенту;
- голів адміністрації (області, міста, району);
- громадських організацій.

Залежно від мети і методів розроблення розрізняють різновиди управлінських рішень:

за масштабами об'єкта (чи за кількістю питань, що охоплюються рішенням):

- глобальні (загальні), що охоплюють усі ланки управлінської системи;

- локальні (часткові), адресовані визначеній ланці або підрозділу;
за характером мети:

- стратегічні, що визначають генеральні задачі;
- тактичні, спрямовані на здійснення раніше виробленої стратегії;
- оперативні, спрямовані на здійснення першочергових задач;

за кількістю цілей, що переслідуються:

- одноцільові (однокритеріальні);
- багатоцільові (багатокритеріальні);

за часом здійснення:

- перспективні (довгострокові);
- поточні (середньострокові), що являють собою частину, уточнення, й деталізацію перспективних цілей;
- регульовальні (короткострокові), спрямовані на забезпечення виконання поточних і перспективних рішень;

за колом розглянутих проблем або кількістю взаємозв'язків, що враховуються, і сферою впливу:

- комплексні (складні), пов'язані зі зміною багатьох сторін діяльності керованого об'єкта;
- прості чи елементарні;
- часткові (тематичні), що відносяться до однієї зі сторін діяльності об'єкта або сфери впливу рішення, а саме: виробничо-економічні,

організаційні, технічні, конструкторські, технологічні, екологічні та ін.

за методами обґрунтування (залежно від наявності попередньо проведеного дослідження):

- формалізовані з використанням математичних методів;
- неформалізовані з використанням евристичних методів;
- запрограмовані;
- незапрограмовані;
- інтуїтивні;
- основані на судженнях (апостеріорні);
- раціональні (апріорні);

за умовами, в яких приймаються рішення (залежно від повноти апріорної інформації):

- рішення, прийняті в умовах визначеності (вони, як правило, добре структуровані (детерміновані));
- рішення, прийняті в умовах ризику (ймовірні);
- рішення, прийняті в умовах невизначеності (пошукові);
- явні;
- неявні;

за ступенем складності підготовки рішення, ступенем новизни розв'язуваної проблеми й одержуваного рішення:

- стандартні (традиційні);
- оригінальні;

за періодичністю виникнення проблеми:

- програмні;
- сезонні;
- ситуаційні;
- періодичні;

за етапами вирішення проблеми:

- прогностичні;
- планові;
- виконавчі;

за характером вирішення проблеми:

- оперативно-розпорядчі;
- нормативно-організаційні;
- господарсько-керівні;
- перспективно-принципові;

за рівнем прийняття рішення:

- у вищих ланках;
- у середніх ланках;
- у первинних (нижніх) ланках;

за способом впливу на керований об'єкт:

- прямі директивні рішення, що доводяться до виконавця у вигляді наказу чи розпорядження, обов'язкового для виконання;
- рішення непрямого впливу з використанням засобів стимулювання підвищення ефективності у виконанні операції;

за напрямком впливу:

- зовнішні;
- внутрішні;

за глибиною впливу:

- однорівневі;
- багаторівневі;

за способом фіксації:

- усні;
- письмові;
- графічні;
- рішення, зафіксовані за допомогою світлової індикації, електронної

техніки та ін.

Залежно від кількості учасників вироблення й прийняття управлінських рішень:

- одноособові;
- колегіальні із залученням експертів і фахівців;
- колективні.

Залежно від рушійних мотивів і причин (стосовно особи або групи осіб, що приймають рішення):

- планові;
- ініціативні;
- ситуаційні, тобто причини, що спонукають до прийняття рішень,

можуть бути:

- внутрішніми (суб'єктивними), наприклад, матеріальна й моральна зацікавленість, ініціатива та ін.;
- зовнішніми (об'єктивними), наприклад, розпорядження вищої

організації.

Залежно від ступеня деталізації:

- загальні;

за ступенем обов'язковості:

- директивні;
- рекомендаційні;

за ступенем жорсткості:

- конкретно-жорсткі;
- нормативні;
- орієнтуючі;
- гнучкі;

Відповідно до загальних функцій управління:

- планові;

- організаційні;
- контрольні;
- координуючі;
- регулюючі;
- оптимізуючі;

Відповідно до конкретних функцій управління:

- із загального (лінійного) керівництва;
- з роботи з кадрами й побуту;
- з організації праці й планування;
- з контролю й обліку;
- з підготовки виробництва;
- із зовнішніх зв'язків;
- адміністративно-господарські та ін.

Американський підхід до визначення поняття "рішення" також дозволяє вибудувати класифікацію управлінських рішень за функціями управління. Оскільки рішення - це вибір альтернативи, то по суті це означає відповідь на ряд запитань. Отже, щоб менеджери могли сформулювати мету перед колективом керованої ними організації або групи та добитися її досягнення, треба відповісти на ряд запитань, що дозволяють прийняти правильні рішення.

У теорії менеджменту застосовується таке угруповання типових запитань (рішень) за функціями управління.

Планування:

- Яка наша надзадача або природа нашого бізнесу?
- Якими мають бути наші цілі?
- Які зміни відбуваються в зовнішньому оточенні та як вони відбиваються або можуть відбитися в майбутньому на організації?
- Яку стратегію чи тактику треба нам вибрати для досягнення поставлених цілей?

Мотивація:

- У чому мають потребу мої підлеглі?
- Якою мірою ці потреби задовольняються в ході діяльності, спрямованої на досягнення цілей організації?
- Якщо задоволення роботою та продуктивність моїх підлеглих зросли, то чому це відбулося?
- Що ми можемо зробити, щоб підвищити рівень задоволеності роботою і продуктивність підлеглих?

Контроль:

- Як нам вимірювати результат роботи?
- Як часто давати оцінку результатам?
- Наскільки ми досягли успіху в досягненні цілей?
- Якщо ми недостатньо просунулися до поставлених цілей, то чому це сталося і які корективи варто внести?

Відповідно до наведених різновидів рішень класифікація допомагає виявляти типові рішення з певним набором ознак і розробити для них типові процеси обґрунтування, прийняття й організації виконання. Така типізація процесів дозволяє визначити коло рішень, що розробляються у різних підрозділах апарату та приймаються на різних ієрархічних рівнях, склад використаної з цією метою інформації й типові методи її обробки, систему оформлення прийнятих рішень, процесів їх контролю та стимулювання виконання.

Крім того, класифікація рішень дозволяє керівникам глибше зрозуміти зміст своєї роботи та розподілити робочий час на виконання різних видів робіт.

Деякі з видів управлінських рішень відіграють ключову роль у процесі управління організаціями.

Розглянемо їх.

2.1. Організаційні рішення

Організаційні рішення поділяють на запрограмовані та незапрограмовані.

Запрограмовані рішення - це результат виконання певної послідовності кроків і дій, подібних тим, що виконуються при розв'язанні математичного рівняння. Як правило, кількість можливих виборів при цьому обмежено границями, у яких варіює, наприклад, норма обслуговування, прийнята в даній організації. Рішення приймається відразу, як тільки стає відомою необхідна чисельність клієнтів, яких обслуговують, покупців, пацієнтів та ін. Це дуже ефективно: заощаджується час, відпадає необхідність щоразу розробляти нову процедуру в ситуаціях, що повторюються. Але якщо запрограмована процедура неправильна чи небажана, то керівництво може втратити повагу і своїх працівників, і партнерів, на яких відбиваються прийняті рішення. Доцільно ознайомити користувачів з методологією прийняття запрограмованого рішення, а не просто запропонувати її для застосування, інакше це може викликати напруження й образити людей, які використовували цю процедуру. Ефективний обмін інформацією приводить до ефективності прийняття рішень.

Незапрограмовані рішення потрібні в нових ситуаціях, внутрішньо не структурованих, пов'язаних з невідомими факторами. Оскільки заздалегідь неможливо скласти конкретну послідовність кроків, керівник мусить розробити процедуру прийняття рішення.

Типи незапрограмованих рішень:

- Якими мають бути організації?
- Як поліпшити продукцію?
- Як удосконалити структуру підрозділу?

- Як посилити мотивацію підлеглих?

На практиці мало які управлінські рішення стають запрограмованими або незапрограмованими в чистому вигляді, майже всі вони опиняються між крайніми варіантами. Деякі запрограмовані рішення настільки структуровані, що ініціатива особи, яка приймає їх, цілком неможлива. І навіть у ситуації найскладнішого вибору методологія прийняття запрограмованих рішень може бути корисною.

Варто пам'ятати про компроміси. Прийняття рішень, що не мають негативних наслідків, практично неможливе. Необхідно знати, що кожне рішення повинно зрівноважувати настільки суперечливі цінності, цілі та критерії, що з будь-якої точки зору буде гірше оптимального. Кожне рішення (вибір), що стосується підприємства, матиме негативні наслідки для будь-яких його частин. Тому варто розглядати організацію з позиції системного підходу й враховувати можливі наслідки управлінського рішення для всіх частин організації.

У справі керівництва організацією зустрічається дуже мало ситуацій настільки однозначних, що результатом найкращого рішення буде тільки благо.

Керівники, які працюють ефективно та найбільш удачливі в повсякденному житті, не дозволяють паралізувати їх волю можливими недоліками в прийнятті рішень. Ці люди розуміють, що неприйняття рішення, "флюгерна" тактика звичайно гірша, ніж прийняття поганого рішення. Проте є ситуації, у яких відмовлення від вибору буде хорошим рішенням.

2.2. Психологічний аспект у процесі прийняття управлінських рішень

У процесі прийняття рішень є два моменти.

Перший: приймати рішення порівняно легко, тому що все, що при цьому робить керівник, зводиться до вибору напрямку дій. Але прийняти хороше рішення - важко.

Другий: прийняття рішення - це психологічний процес. Відомо, що людське поведіння не завжди логічне. Іноді нас спонукає логіка, іноді - почуття. Тому не дивно, що способи, які використовуються керівником для прийняття рішення, змінюються від спонтанних до високологічних. Важливо пам'ятати, що керівник перебуває під впливом таких психологічних факторів, як соціальні настанови, накопичений досвід і особистісні оцінки. Ці поведінкові фактори впливають на процес прийняття управлінських рішень.

Хоча будь-яке конкретне рішення рідко відноситься до якоїсь однієї категорії, можна стверджувати, що процес прийняття рішення має інтуїтивний, оснований на судженнях чи раціональний характер.

2.3. Інтуїтивні рішення

Чисто інтуїтивне рішення - це вибір, зроблений тільки на основі відчуття того, що він правильний. Особа, яка приймає рішення, не займається при цьому свідомим зважуванням "за" чи "проти" з кожної альтернативи і не потребує навіть розуміння ситуації. Просто людина робить вибір. Те, що називається осяянням, або шостим почуттям, і є інтуїтивним рішенням. Інтуїтивні рішення приймаються, як правило, керівниками вищого ешелону влади.

2.4. Рішення, основані на судженнях

Такі рішення іноді здаються інтуїтивними, оскільки логіка їх не очевидна. Рішення, основане на судженні, - це вибір, зумовлений знаннями або накопиченим досвідом. Людина використовує ті знання, що траплялися раніше в подібних ситуаціях, щоб спрогнозувати результат вибору альтернативи в існуючій ситуації. Судження як основа організаційного рішення корисне, оскільки багато ситуацій в організаціях мають тенденцію повторюватись. У цьому випадку раніше прийняте рішення може знову спрацювати не гірше, ніж колись (це основна позитивна якість запрограмованих рішень).

Оскільки рішення на основі судження приймаються в голові керуючого, вони мають таку значну позитивну якість, як простота і дешевизна його прийняття. Воно спирається на здоровий глузд, але щирий здоровий глузд зустрічається дуже рідко. Однак одного лише судження недостатньо для прийняття рішення, коли ситуація унікальна або дуже складна. Судження неможливо порівняти із ситуацією, що насправді нова, оскільки у керівника відсутній досвід, за допомогою якого він міг би обґрунтувати свій логічний вибір. Надмірна орієнтація на досвід зміщує рішення в напрямках, знайомих керівникам з їхніх колишніх дій. Через це вони можуть упустити нову, більш ефективну альтернативу. Ще важливіше, що керівник, надмірно прихильний до судження та накопиченого досвіду, може свідомо або несвідомо уникати можливості вторгнення в нові області. Це може закінчитися катастрофою.

2.5. Раціональні рішення

Головна розбіжність між раціональним рішенням і рішенням, основаним на судженні, полягає в тому, що раціональне рішення не залежить від минулого досвіду. Воно обґрунтовується за допомогою об'єктивного аналітичного процесу.

2.6. Раціональне вирішення проблем

Вирішення проблем, як і управління - багатокроковий процес. Керівник піклується не стільки про саме вирішення, скільки про все, що пов'язано з ним і виникає з нього. Для розв'язання проблеми потрібно не одиничне рішення, а сукупність виборів.

2.7. Етапи раціонального вирішення проблем

Діагностика проблеми показана на рис.1. Першим кроком на шляху розв'язання проблеми є визначення або діагноз, повний і правильний. Існує два способи розгляду проблеми:

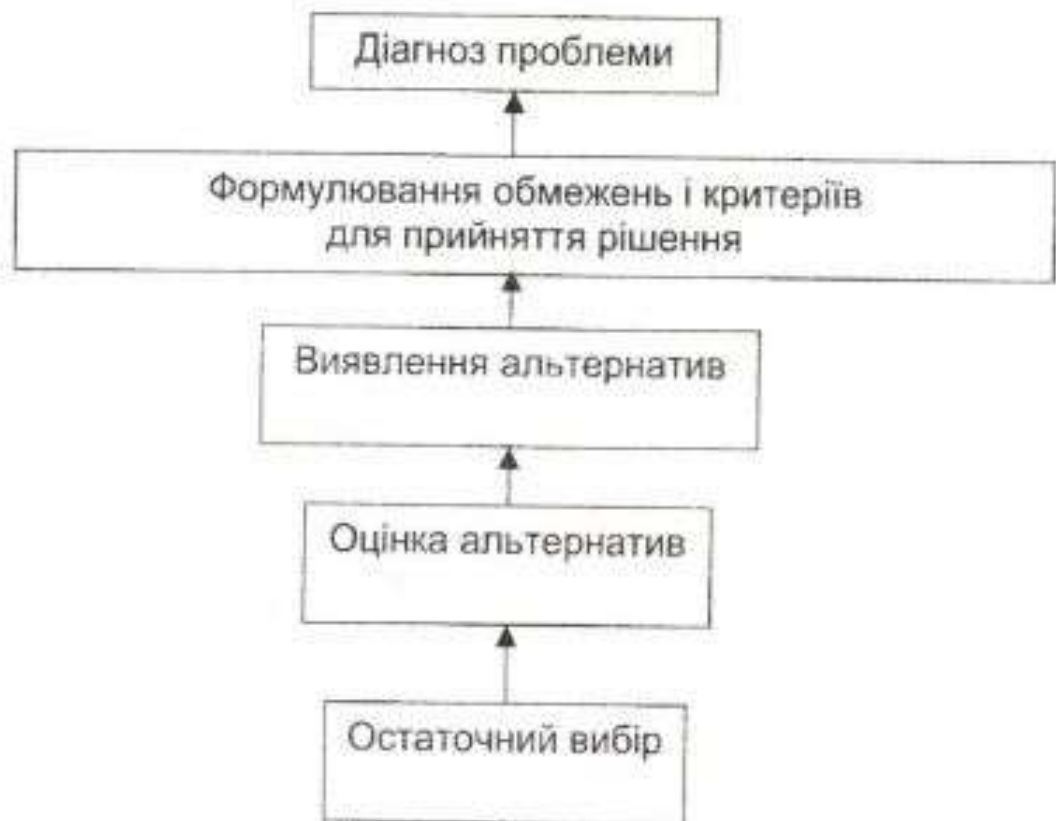


Рис.1. Етапи раціонального вирішення

- проблемою вважається ситуація, коли поставлені цілі не досягнуті, тобто про проблему дізнаються з того, що не трапилося те, що повинно було трапитися; проблему вирішують, згладжуючи відхилення від норми, тобто здійснюють реактивне управління;

- як проблема розглядається потенційна можливість, при цьому застосовується попереджувальне управління; прикладом такого управління є активний пошук способів підвищення ефективності підрозділу, навіть коли справи йдуть добре.

Отже, вирішення проблеми тільки відновлює норму, результати ж мають бути наслідком використання можливостей.

Цілком визначити проблему важко, оскільки всі частини організації взаємозалежні. Тому сам діагноз найчастіше стає процедурою в кілька кроків із прийняттям проміжних рішень.

2.7.1. Діагноз проблеми

Перша фаза діагностування проблеми - усвідомлення та виявлення симптомів, утруднень або наявних можливостей. Наприклад, симптоми - поганий збут, низькі прибутки, продуктивність та якість, надмірні витрати, численні конфлікти в організації та велика плінність кадрів.

Виявлення симптомів допомагає визначити проблему в загальному вигляді. Доцільно уникати негайних дій для усунення симптомів, до чого схильні багато керівників.

Для виявлення причин виникнення проблеми необхідно зібрати й проаналізувати внутрішню та зовнішню (щодо організації) інформацію. Інформацію можна збирати на основі формальних методів (аналіз ринку й фінансових звітів, інтерв'ювання, запрошення консультантів з управління, опитування працівників), неформально (бесіди про сформовані ситуації, особисті спостереження). Однак збільшення кількості інформації не обов'язково підвищує якість рішення. Тому в ході спостережень важливо відокремити релевантну інформацію (тобто дані, що стосуються тільки конкретної проблеми, мети, людини, періоду часу) від інформації, що не стосується справи.

Необхідно добиватися максимальної точності й відповідності проблемі релевантної інформації, оскільки вона є основою рішення.

Вичерпну інформацію з проблеми одержати не просто. Її спотворюють психологічні фактори. Наприклад, якщо керівник бачить, що підлеглі свідомо або несвідомо подають інформацію, яка сприятливо висвітлює їх позиції, або повідомляють лише про те, чого бажає керівник, це негативно відбивається на вирішенні проблеми.

2.7.2. Формулювання обмежень і критеріїв прийняття рішень

Коли керівник діагностує проблему з метою прийняття рішення, він повинен усвідомлювати, що можна з нею зробити. Багато можливих рішень проблем організації можуть стати нереалізованими (в організації немає ресурсів для розв'язання її проблем або це не дозволяє зовнішнє оточення, наприклад, не можна змінити закони і т.д.).

Таким чином, у вирішенні проблем організації мають місце обмеження щодо коригувальних дій та (або) факторів, що визначали область прийняття рішення. Перед переходом до наступного етапу процесу керівник мусить неупереджено визначити суть обмежень, а потім виявити альтернативи. У противному разі буде втрачено багато часу або

неправильно вибрано напрямок дій. Далі керівнику необхідно визначити критерії для оцінки альтернативних варіантів вибору.

2.7.3. Визначення альтернатив

На цьому етапі здійснюється формулювання набору альтернативних рішень проблеми. Бажано виявити всі можливі дії щодо усунення причин проблеми і дати організації можливість досягти своєї мети. На практиці керівник рідко має достатні знання або час, щоб сформулювати й оцінити кожен альтернативу. Крім того, розгляд дуже великої кількості альтернатив найчастіше призводить до плутанини. Тому керівники обмежують число варіантів вибору для серйозного розгляду усього декількох альтернативами, найбільш бажаними.

Пошук оптимального варіанта рішення займає занадто багато часу, дорого коштує або виявляється важким. Замість нього керівники вибирають рішення, що дозволяє зняти проблему.

При аналізі важких проблем до числа розроблюваних альтернатив включають можливість бездіяльності. При цьому виникає небезпека не встояти перед вимогою негайних дій. Дія ж заради дії підвищує ймовірність реагування на зовнішній симптом проблеми, а не на її головну причину.

2.7.4. Оцінка альтернатив

При виявленні альтернатив на цьому етапі необхідна попередня їх оцінка. Переходити до оцінки кожної альтернативи слід тільки після складання списку всіх ідей. При оцінці рішень керівник визначає позитивні якості й недоліки кожного з них та можливі наслідки. При цьому необхідно зважати на всі компроміси, викликані негативними аспектами альтернатив, прийнятих до розгляду. Для зіставлення рішень використовують критерії, встановлені на іншому етапі.

Усі рішення варто виражати у певних формах. Бажано, щоб це була форма, у якій виражена мета. Наприклад, у бізнесі прибуток - незмінна потреба й вищий пріоритет, тому рішення можна подати в грошовому виразі й у вигляді оцінки його впливу на прибуток.

При оцінці можливих рішень намагаються спрогнозувати те, що відбудеться в майбутньому. Майбутнє завжди невизначене. Тому при оцінці необхідно визначити ймовірності здійснення кожного можливого рішення відповідно до намірів. Керівник включає ймовірність в оцінку, беручи до уваги ступінь невизначеності ризику.

2.7.5. Вибір альтернативи

Якщо проблема була правильно визначена, альтернативні рішення ретельно зважені й оцінені, прийняти рішення порівняно просто. Керівник

вибирає альтернативу з найсприятливішими загальними наслідками. Але якщо проблема складна, до уваги беруться безліч компромісів, якщо ж інформація й аналіз суб'єктивні, може трапитися, що жодна альтернатива буде не найкращим вибором. У цьому випадку головна роль належить якісному судженню та досвіду.

2.7.6. Реалізація

Реальна оцінка прийняття рішення стає очевидною тільки після його здійснення. Процес розв'язання альтернативи не закінчується її вибором (рис. 2).

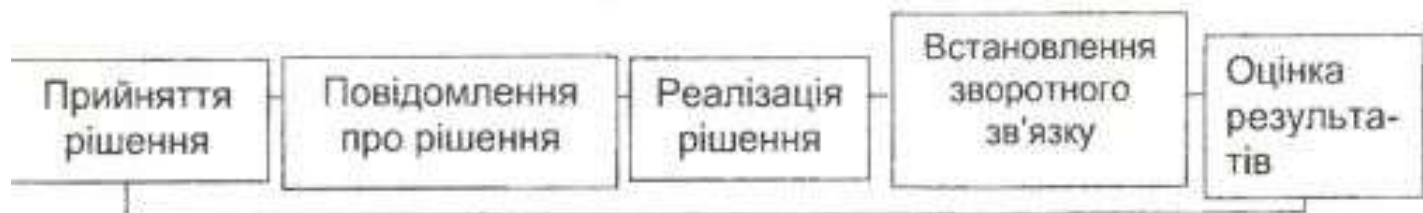


Рис. 2. Процес прийняття рішення зі зворотним зв'язком

Простий вибір напрямку дій становить малу цінність для організації. Для вирішення проблеми або здобуття вигоди з наявної можливості рішення має бути реалізовано. Рівень ефективності виконання рішення підвищиться, якщо воно визнано тими, кого воно стосується.

Керівник може покласти прийняття рішення на тих, хто повинен його виконувати. Частіше ж він змушений переконувати в правильності своєї точки зору, доводити, що його вибір несе благо і організації, і кожному працівнику окремо. Справа керівника – вибирати тих, хто повинен вирішувати. Повне здійснення рішень потребує приведення в дію всього процесу управління.

ЗВОРОТНИЙ ЗВ'ЯЗОК. Установлення зворотного зв'язку є ще однією фазою процесу прийняття управлінського рішення, що починається після того, як рішення починає діяти. На цій фазі відбуваються вимір і оцінка наслідків рішення або зіставлення фактичних результатів з тими, які керівник сподівався одержати. Зворотний зв'язок, тобто надходження даних про те, що відбувалося до прийняття рішення і після його реалізації, дозволяє керівнику скорегувати це рішення, поки організації ще не нанесено значних збитків. Оцінка рішення керівництвом виконується за допомогою функції контролю.

ОСОБИСТІСНІ ОЦІНКИ КЕРІВНИКА ЩОДО ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ. Особистісні оцінки містять суб'єктивне ранжування важливості, якості або блага. Відносно прийняття рішень оцінки виступають як компас, що вказує бажаний напрямок, коли доводиться вибирати між альтернативами дій. Важливо те, що всі управлінські рішення побудовані на фундаменті чистих системи цінностей.

СЕРЕДОВИЩЕ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ. При прийнятті управлінських

рішень завжди важливо враховувати ризик. Поняття "ризик" використовується не в значенні небезпеки, а відноситься до рівня визначеності, з котрою можна прогнозувати результат. Рішення приймаються в різних обставинах стосовно ризику. Ці обставини класифікуються як умови визначеності, ризику чи невизначеності.

ВИЗНАЧЕНІСТЬ. Рішення приймаються в умовах визначеності, коли керівник точно знає результат кожного з альтернативних варіантів вибору.

РИЗИК. До рішень, прийнятих в умовах ризику, відносять такі, результати яких не є визначеними, але ймовірність кожного результату відома. Сума ймовірностей усіх альтернатив повинна дорівнювати одиниці. В умовах визначеності існує лише одна альтернатива.

НЕВИЗНАЧЕНІСТЬ. Рішення приймається в умовах невизначеності, коли не можна оцінити ймовірність потенційних результатів. Це має місце, коли фактори, що потребують врахування, настільки нові й складні, що за ними неможливо одержати досить повний обсяг релевантної інформації. У результаті не можна з достатнім ступенем вірогідності пророчити ймовірність наслідків прийнятого рішення. Невизначеність характерна для деяких рішень, що доводиться приймати у швидко мінливих обставинах. Найвищий ступінь невизначеності має соціокультурне, політичне та наукоємне середовища. Найчастіше невизначеними бувають рішення Міністерства оборони стосовно розроблення нової складної зброї. Однак далеко не всі управлінські рішення приймаються в умовах повної невизначеності. Стикаючись з невизначеністю, керівник повинен спробувати одержати додаткову релевантну інформацію і ще раз проаналізувати проблему. Цим найчастіше вдається зменшити новизну й складність проблеми. Керівник сполучає цю додаткову інформацію й аналіз з накопиченим досвідом, здатністю до судження або інтуїцією, щоб додати результатам суб'єктивну чи передбачувану ймовірність.

Є ще одна можливість - діяти точно відповідно до минулого досвіду, суджень чи інтуїції та робити припущення про ймовірність подій. Це необхідно, коли бракує часу на збирання додаткової інформації, але витрати на неї занадто великі. Тимчасові й інформаційні обмеження мають найважливіше значення при прийнятті управлінських рішень.

ЧАС І ЗМІННЕ СЕРЕДОВИЩЕ. Хід часу звичайно зумовлює зміни ситуації. Якщо вони значні, ситуація може настільки перетворитися, що критерії для прийняття рішення стануть недійсними. Тому рішення варто приймати і втілювати в життя доти, доки інформація й допущення, на яких базуються рішення, залишаються релевантними й точними. Найчастіше це становить труднощі, оскільки період часу між прийняттям рішення й початком дії великий. Рішення необхідно приймати досить швидко, щоб бажана дія зберегла своє значення. Тому облік фактора часу іноді змушує

керівників спиратися на судження чи навіть на інтуїцію, тоді як у нормальних умовах вони віддали б перевагу раціональному аналізу.

Так само варто враховувати ймовірність випередження рішенням свого часу. Так, багато компаній вкладали мільйони доларів у нові проекти, щоб випередити конкурентів на ринку, але виграли ті, що припізнилися, і ті, які вирішили зачекати.

ІНФОРМАЦІЙНІ ОБМЕЖЕННЯ. Інформація необхідна для раціонального вирішення проблем. Інформація для прийняття хорошого рішення інколи недоступна чи коштує занадто дорого. До вартості інформації слід включати час керівників і підлеглих, який витрачено на її збирання, а також фактичні витрати, наприклад, пов'язані з аналізом ринку, оплатою машинного часу, використанням послуг зовнішніх консультантів та ін. Тому керівник повинен вирішити, чи є істотна вигода від додаткової інформації, наскільки важливе саме рішення, чи пов'язане воно зі значною частиною ресурсів організації або з невеликою грошовою сумою.

Якщо інформацію одержати за прийнятною ціною не просто, але така можливість незабаром з'явиться, найправильніше для керівника - відкласти прийняття рішення. Однак це можна зробити, лише прийнявши допущення, що час не є критичним чинником, а втрати від затримки будуть перекриті вигодою від прийняття більш якісного рішення на основі додаткової інформації.

Вигода й витрати здебільшого суб'єктивно оцінюються керівником, що особливо стосується оцінки керівником вартості власного часу й очікуваного поліпшення від прийнятого рішення.

На рис. 3 зображено три варіанти залежності між вартістю інформації та вигодою від її одержання.

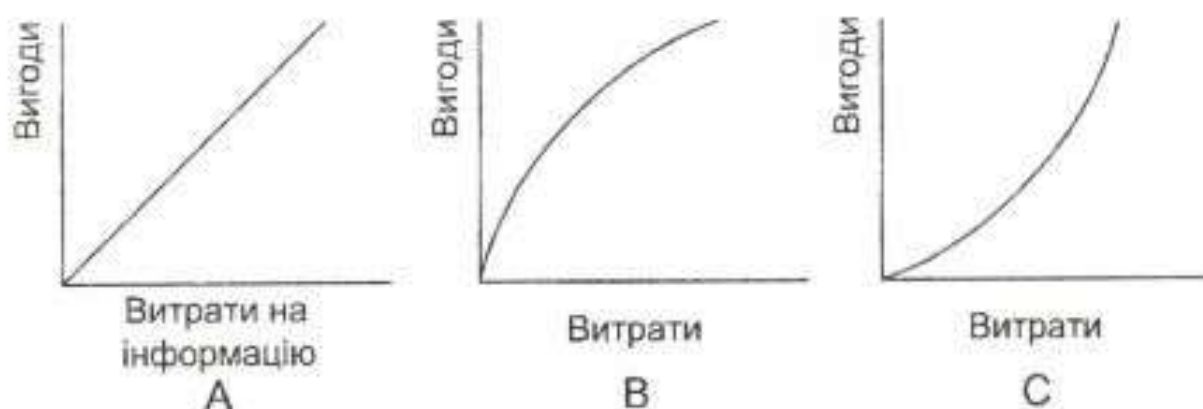


Рис.3. Залежність між вартістю додаткової інформації та вигодою від її одержання

За варіантом А вигода від кожної додаткової одиниці інформації дорівнює витратам на її одержання, тобто в якій мірі керівництво готове платити за додаткову інформацію, таку воно буде мати й додаткову вигоду.

Однак тимчасові обмеження та неможливість засвоєння менеджером усе більшої кількості інформації повинні зробити економічно недоцільним одержання додаткової інформації.

За варіантом В витрати на одержання додаткової інформації перекриваються вигодами до певної крапки, після якої керівництву не варто прагнути до одержання додаткової інформації, оскільки навіть при поліпшенні рішення за її допомогою витрати перевищать вигоду.

За варіантом С вигоди від одержання додаткової інформації перевершують витрати на неї. Одержання додаткової інформації дуже бажане. Проте тимчасові й інтелектуальні ресурси повинні в остаточному підсумку знизити вигоду від одержання інформації, тобто припущення деяких керівників, що більше інформації - обов'язково краще, є некоректним.

ПОВЕДІНКОВІ ОБМЕЖЕННЯ. Багато з факторів, що утруднюють міжособистісні та внутрішньоорганізаційні комунікації, впливають на прийняття рішень. Керівники по-різному сприймають обмеження й альтернативи, наявність проблеми і її серйозність. Це призводить до незгоди й конфліктів у процесі прийняття рішень. Керівники можуть бути настільки перевантажені роботою й інформацією, що не в змозі сприйняти можливості, що відкриваються. Вони дають різні тлумачення одній і тій же проблемі залежно від того, який відділ вони очолюють.

Від способу обміну інформацією керівника з підлеглими істотно залежить їх поведінка. Наприклад, коли менеджер почуває, що його начальник буде роздратований, якщо його повідомити про виниклу проблему, то менеджер може вирішити: "проблема - це погано", тому що набагато важливіше "мати гарний вигляд".

Керівник може відкинути той чи інший курс через особисті пристрасті або лояльність стосовно когось. Установлено, що численні психологічні фактори й особистісні якості відбиваються на процесі прийняття рішень.

НЕГАТИВНІ НАСЛІДКИ. Прийняття управлінських рішень - це майстерність знаходження компромісу. Виграш в одному майже завжди досягається на шкоду іншому. Проблема процесу прийняття рішень полягає в зіставленні мінусів із плюсами з метою одержання найбільшого загального виграшу.

Керівнику доводиться найчастіше виносити суб'єктивні судження про те, які негативні побічні ефекти припустимі за умови досягнення бажаного результату. Однак деякі наслідки не можуть бути прийнятні для керівників - це порушення закону або етичних норм. У таких випадках при виборі критеріїв для прийняття рішень негативні наслідки варто

трактувати як обмеження.

ВЗАЄМОЗАЛЕЖНІСТЬ РІШЕНЬ. В організації всі рішення взаємозалежні. Одне важливе рішення може потребувати сотні менш значних рішень. Великі рішення мають наслідки для організації в цілому, а не тільки для окремого сегмента, який стосується безпосередньо того чи іншого рішення.

Здатність бачити, як взаємодіють рішення в системі управління, стає все більш важливою в міру просування на вищі поверхи влади. Керівники, які знаходяться на нижніх рівнях управління і здатні бачити взаємозалежність рішень, найчастіше швидше просуваються вгору.

3. ПРАВИЛА, РІШЕННЯ, ІНФОРМАЦІЯ

Управління є процес перетворення інформації у дію. Цей процес можна назвати прийняттям рішень. Прийняття рішень, у свою чергу, залежить від різних явно або неявно виражених правил поведінки. Термін "правило" означає порядок прийняття поточних рішень. Рішення - це дії, початі в той чи інший момент часу із застосуванням установлених правил у певних умовах, які домінують у даний момент.

Якщо управління являє собою процес перетворення інформації в дію, то ясно, що успіх управління насамперед залежить від того, яка інформація відібрана і як виконано її перетворення. У цьому полягає різниця між хорошим і поганим управлінням. Кожна людина має у своєму розпорядженні велику кількість джерел інформації, але кожний з нас відбирає і використовує лише невелику її частину. При цьому ми застосовуємо її не цілком, а іноді й помилково, не говорячи вже про те, що це може бути не краща частина інформації.

Господарський керівник сам створює основу свого успіху, приймаючи рішення про те, які джерела інформації він буде враховувати, а які можна ігнорувати.

Після того, як керівник відбере певні види інформації і її джерела, успіх буде залежати від того, як він зуміє використати цю інформацію, наскільки швидко чи повільно зможе перетворити її в дію, яка відносна цінність інформації у світлі цілей, що він перед собою поставив, яким чином досягаються ці цілі на основі інформації, яку він має.

Таким чином, керівник розглядається як перетворювач інформації. Він є особою, до якої надходить інформація, і від нього виходять потоки рішень, що регулюють дії, які здійснюються всередині організації. Багато чого в поведінці людей може бути правильно оцінено, якщо розглядати керівника як перетворювача інформації у фізичну дію. Насамперед він регулює інформацію на певній ділянці, одержує вхідні потоки інформації та комбінує їх у потоки адміністративних вказівок.

Якщо розглядати керівника в цьому аспекті, стає ясно, чому нас цікавлять питання про прийняття рішень і про потік інформації. Промислова організація являє собою комплекс, в якому з'єднані мережі каналів інформації. Ці канали починаються в тих пунктах, де здійснюється вирішення реальних процесів, таких, як виробництво товарів, наймання робітників, оформлення замовлень, закупівля устаткування та ін.

Кожному пункту діяльності системи відповідає певний локальний пункт прийняття рішень, оснований на даних, що виходять від джерел інформації як у різних підрозділах організації, так і в навколишньому оточенні.

Потік рішень інформаційної системи зі зворотним зв'язком зображено на рис. 4.

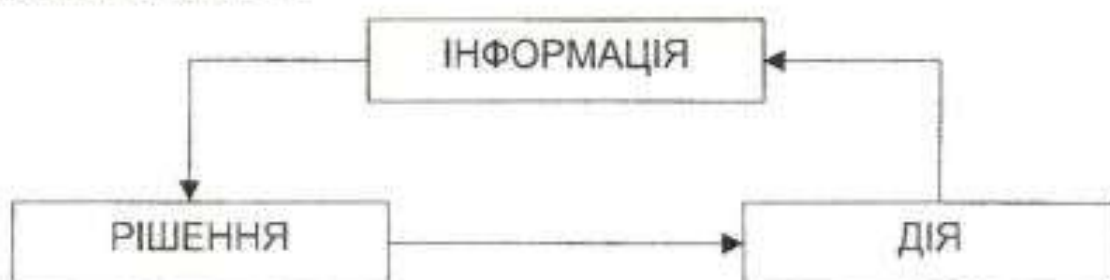


Рис. 4. Рішення й інформація зі зворотним зв'язком

Інформація вводиться в пункт, де приймаються рішення, що управляють дією, яка є джерелом нової інформації. У кожному з елементів схеми мають місце запізнювання. Дійсно, інформація про дії не може надходити негайно, рішення не відповідають миттєво на інформацію, що надійшла, а для виконання дій, що диктуються потоком рішень, потрібен час.

Крім того, у кожному з елементів схеми управління можуть мати місце посилення - позитивні, негативні чи нелінійні, тобто вивід з елемента може бути більше або менше, ніж це можна припустити, виходячи з вводу. Крім того, у виводі можуть бути перекручування. Посилення, загасання та перекручування в будь-якій точці системи управління можуть зробити її більш чутливою до одних видів збурення порівняно з іншими. Схема управління промислової системи складається з багатьох зв'язаних систем. Рішення приймаються в багатьох пунктах системи. Кожна відповідна дія породжує інформацію, що може бути використана в багатьох, але не в усіх пунктах, де приймаються рішення. Ця конструкція з багатоступінчастих взаємозалежних ланок інформації зі зворотним зв'язком у цілому зображує промислову систему. Усередині підприємства пункти прийняття рішень простягаються від складів до заводууправління.

Для детального аналізу процесу прийняття рішень розглянемо структуру системи навколо пункту прийняття рішень (рис.5). Рішення ґрунтується на стані системи, поданої сукупністю різних рівнів (рис. 6).

Одні рівні відбивають стан системи в даний момент, інші - наші уявлення про те, що відбувається в системі. Це можуть бути рівні товарно-матеріальних запасів, кількості службовців, середнього числа продажів за останній місяць, виконання плану науково-дослідних робіт на дане число, перспективи економічної активності та ін. Усі ці рішення є входами в пункт прийняття рішень (рис. 7). Вивід з пункту рішень регулює темп зміни рівнів у системі. Термін "рішення" вжитий у широкому розумінні. Він може стосуватися виконання замовлень за рахунок наявних запасів, розміщення замовлень для поповнення запасів, санкціонування реконструкції підприємства, наймання науково-дослідних працівників, затвердження витрат на рекламу та ін.

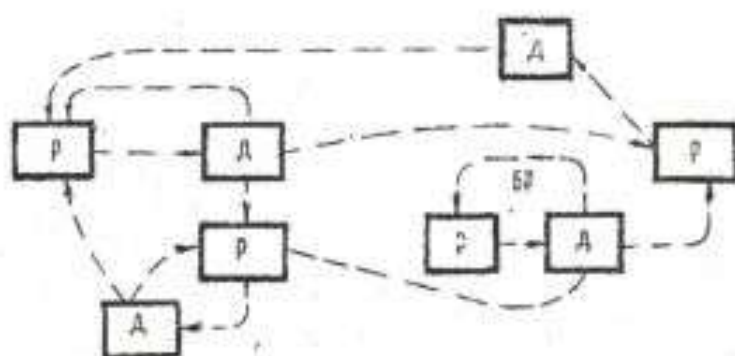


Рис. 5. Багатоступінчаста система прийняття рішення

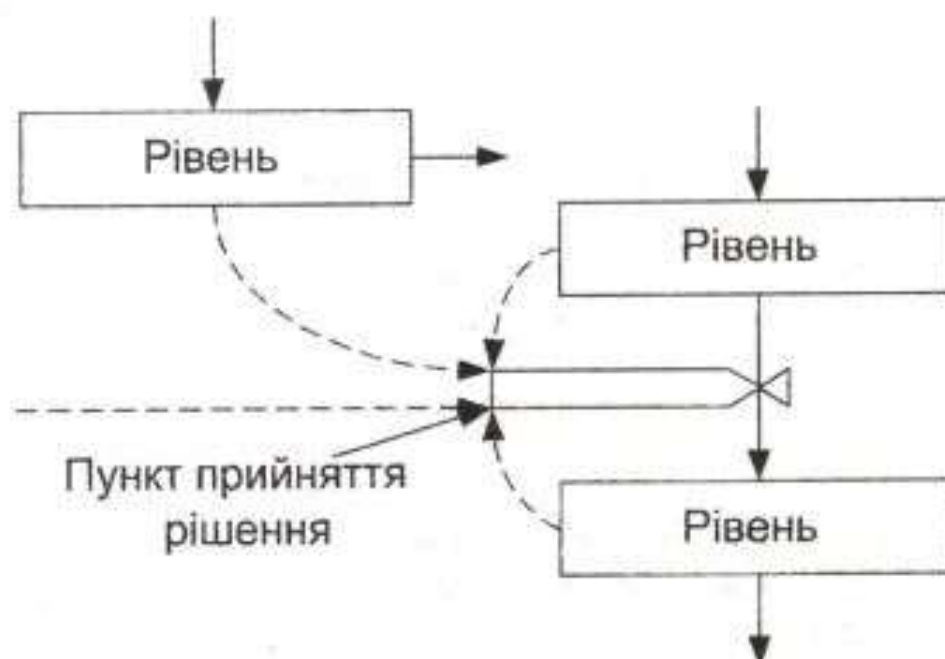


Рис. 6. Прийняття рішень у структурі системи

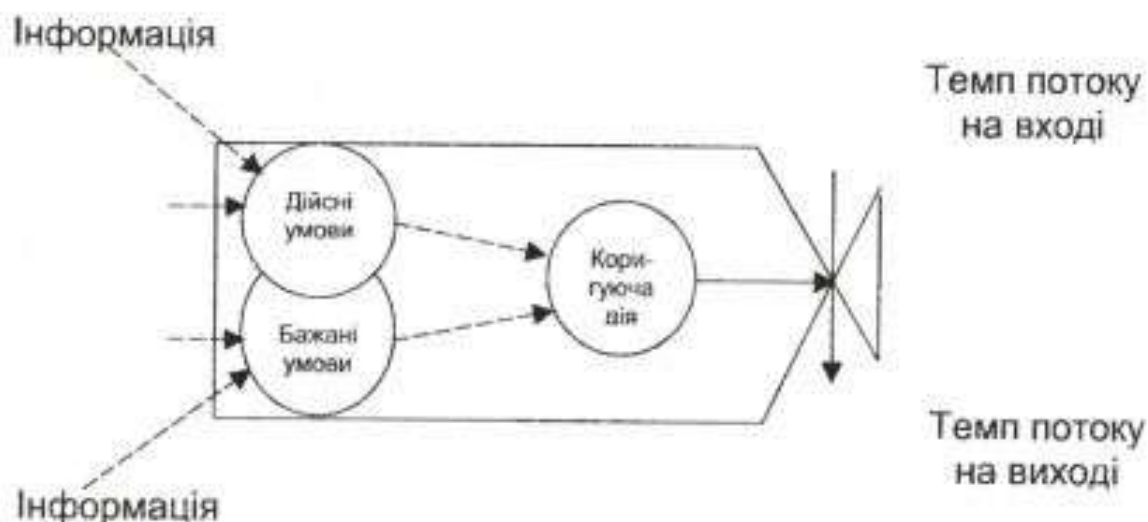


Рис.7. Пункт прийняття рішень

Для розглядуваної структури системи надзвичайно важливим є напрямок ліній, що характеризують взаємозв'язки між її елементами. Рівні є вводами в потік рішень. Рішення регулюють темпи потоків між рівнями. Темпи потоків приводять до змін рівнів. Однак темпи потоків самі по собі не є вводами до рішень.

Темп потоку в даний момент взагалі не піддається виміру, залишається невідомим і не може впливати на прийняття рішень у даний конкретний момент.

Певна особа в промисловій організації, з одного боку, може нести головну відповідальність за регулювання темпу якогось одного потоку, наприклад, за розміщення замовлень з метою підтримки рівня товарно-матеріальних запасів, з іншого боку - об'єднувати декілька окремих пунктів прийняття рішень, що регулюють декілька не зв'язаних між собою темпів потоків. У цьому випадку потоки треба розглядати ізольовано, як такі, що знаходяться в різних мережах інформації або інших мережах даної системи. Розгорнемо структуру прийняття рішень. Для цього проаналізуємо, що робиться всередині пункту прийняття рішення у той момент, коли воно приймається.

3.1. Процес прийняття рішення

Рішення в основному передбачають три моменти.

По-перше, це вироблення уявлення про бажаний стан речей. (Яким, на нашу думку, має бути стан системи? До чого ми прагнемо? У чому полягають цілі та задачі даного пункту прийняття рішень?).

По-друге, це фактичний стан, що спостерігається. Іншими словами, наявна інформація приводить нас до певних висновків, і ми віримо, що вони відбивають стан системи в даний момент часу. Залежно від потоків

інформації, що використовуються, величини затримок і перекручувань у цій інформації врахований фактичний стан може більшою чи меншою мірою відхилятися від дійсного стану речей у даний час.

Третя частина процесу прийняття рішень - це вироблення способу дій, що будуть здійснені відповідно до будь-яких виявлених розбіжностей між існуючим і бажаним. Взагалі, чим більше розбіжність, тим сильніше відповідна дія, хоча весь цей процес виявлення бажаних умов, визначення дійсного стану та вироблення на цій основі лінії поведінки є найвищою мірою нелінійним і повним перешкод. Незначні розбіжності між відображеним і бажаним станами системи можуть подаватись такими, що не мають значення, і викликати лише незначні дії. Зростаючі розбіжності можуть привести до більш рішучих спроб скорегувати дійсний стан у напрямку бажаного.

Однак певний рівень розбіжностей може залишитися й у тому випадку, коли був використаний максимум можливих коригувальних дій, і тоді подальше збільшення розриву між бажаним і дійсним станами системи в цьому пункті перестане викликати відповідні зміни в темпі потоків.

Це дуже наближений розгляд процесу прийняття рішення без достатньої уваги щодо механізму мислення і того, чи створюється рішення одним або декількома людьми і якими вони керуються мотивами й переживаннями. Але не таке наближене, як у власників акцій, які настільки далекі від підприємства, що не мають уявлення ні про його внутрішню структуру, ні про пункти прийняття рішення.

Ця точка зору - це точка зору керівника, тобто керівної особи, яка виконує певні зобов'язання. Вона досить обізнана про шляхи досягнення бажаних цілей і знаходиться в такому стані, що дозволяє спостерігати та забезпечувати джерела інформації, необхідні їй підлеглим для складання уявлення про фактичне положення речей. Вона загалом знає ті правила, якими буде керуватися підлеглий, що приймає рішення.

3.2. Правила

Термін "правило" вживається в широкому розумінні для визначення того порядку, відповідно до якого в результаті процесу прийняття рішень інформація перетвориться в дію. Правила встановлюють, які дії будуть у результаті введень, інакше кажучи, який характер взаємозв'язку між джерелами інформації і потоком відповідних рішень. Таким чином, правила - це основні принципи, що визначають залежність між джерелами інформації та відповідними рішеннями, або спосіб дій, яким керуються при прийнятті рішень. В галузі фізичних систем терміну "правило" відповідає термін "функція перетворення". Ця функція показує, у якій залежності знаходиться вивід з елемента від потоку введень, але

вона не обов'язково вказує конкретні фізичні шляхи перетворення. Достатньо, якщо функція перетворення в конкретних умовах підкаже, якими будуть відповідні дії на дійсні та колишні потоки вводів.

У промислових організаціях деякі види правил носять дуже формалізований характер. Вони зведені в інструкції для тих, хто приймає рішення в системі. Але правила значною мірою складаються з неформальних елементів, що значно впливають на стан речей. Вони залежать від звичок, підпорядкованості, понять про те, до чого варто прагнути, від значення впливових центрів усередині організації та від особистої зацікавленості.

Абстрактне поняття прийняття рішень має три стадії:

- перша (нижча) - випадкові, необдумані дії, що не залежать від вводів і не мають під собою ніякої підстави;
- друга - інтуїтивні реакції, що, власне кажучи є результатом одержуваних потоків інформації, однак ті, хто прийняв рішення, не усвідомлюють того, як складаються і на чому ґрунтуються їхні рішення;
- третя, яка характеризується поінформованістю про формальні підстави рішень, тобто чому приймається рішення і яка буде реакція інших осіб на зміни в навколишньому оточенні.

Таке уявлення про підстави для прийняття рішень називається політикою керівництва. Історія та література приділяють велику вагу підставам (політиці), що змушують людину, яка приймає рішення, розумно реагувати на навколишнє оточення, саме так, як цього можна очікувати. Коли ми говоримо, у чому полягає розумна й очікувана реакція, то, власне кажучи, описуємо правила, на основі яких інформація перетворюється у певні дії.

3.3. Виявлення керівних правил

У підході багатьох адміністраторів до питання про існування формальних правил (які дозволяють описати основні принципи управління), пов'язаних з розумінням формальної основи процесу прийняття рішень, існує протиріччя: будь-який адміністратор через необхідність визнає існування області автоматичних рішень. Однак вони вважають, що область прийняття рішень, оснований на інтуїції, настільки тонка, що її неможливо уявити хоча б приблизно за допомогою формальних правил прийняття рішень.

Ті ж самі адміністратори, якщо перед ними стоїть задача прийняти рішення, що виходить за межі інтуїтивного судження, звертаються до формальних правил прийняття рішень навіть тоді, коли треба прийняти особливо точні й важкі рішення. Наприклад, прогнози – це значною мірою процес прийняття рішень, оснований на статистичному аналізі або на сформованій практиці комерційних служб підприємства, припущення яких базуються на облікових і бухгалтерських даних.

Наука управління поки що не досягла достатніх результатів у формуванні й використанні правил, пов'язаних із прийняттям рішень.

Причини труднощів можна об'єднати в три групи:

1. Мова йде про перспективу подальшого просування. При спробі виявити керівні правила у цій області прийняття рішень вчені різних галузей знань недооцінювали деякі фактори інших галузей:

а) Вчені суспільних наук надають особливого значення психології й мотивам індивідуальних дій. Але результати досліджень, проведених в основному в штучній обстановці, як правило, не враховували:

- впливу соціальних умов,
- попереднього досвіду,
- прагнення дотримуватися загальноприйнятого порядку,
- намагання поводитися таким чином, як цього, на їхню думку, хотів би керівник;

б) Економісти розглядають підприємство занадто поверхово, звичайно перебільшуючи роль ринку. Вони бачать в особі власника підприємства людину, яка домагається будь-якими засобами максимального збільшення прибутку. Але чи знає він, який це максимум? Чи є в нього інформація та можливості підрахувати цей максимум?

Крім того, переоцінюються значення рішень на рівні вищого керівництва порівняно з рішеннями середнього й нижчого рівнів. Розпорядження вищого керівника не змінюють упереджень, звичок і основаних на особистих інтересах цілей тих осіб, які приймають рішення на середньому рівні. Зміни можуть відбутися тільки в результаті тривалого процесу:

в) Дуже важливо розглядати індивідуум не ізольованим від оточення і не таким, що стоїть поза системою.

2. Великої втрати розумінню процесу прийняття рішень завдало уявлення про нього як про більш тонке і таке, що потребує більшої майстерності, ніж це є насправді. Людина, яка приймає рішення в динамічній інформаційній системі зі зворотним зв'язком, звичайно використовує менший обсяг інформації порівняно з тим, що є в її розпорядженні. Більш того, надана інформація менша за обсягом, ніж це звичайно припускають. Те, що робить керівник з цими джерелами інформації, - досить стереотипно. Деякі з цих джерел використовуються для створення концепції бажаних цілей, інші служать для формування уявлення про дійсний стан речей. Із зіставлення бажаного та дійсного впливають досить прості, які уявляються логічними, дії. Однак те, що уявляється очевидним, може насправді бути не кращим.

3. Третя складність є результатом того, що випускається один зі ступенів послідовного абстрагування, пов'язаного з процесом прийняття рішень:

- 1) нижчий рівень - випадкові рішення;

2) другий рівень – раціональна дія, однак не ясно, які керівні правила лежать в основі цієї дії;

3) третій рівень, при якому є принаймні словесна описова модель раціональних правил.

Майстерність й інтуїція на цьому новому етапі більш не застосовуються до індивідуальних ізолюваних рішень, а використовуються при визначенні правил, що управляють потоком рішень. Однак методи абстрагування на цьому етапі ще недостатньо добре відпрацьовані. Незважаючи на пропуски, характерні для цієї стадії, економісти проминають етап абстрагування.

Вони намагаються використовувати статистичні методи для того, щоб вивести з кількісних даних систему правил, що регулюють прийняття рішень. Це вже інший рівень абстрагування, коли інтуїтивні майстерність і судження застосовуються для встановлення строгих правил, за допомогою яких визначається формальна політика прийняття рішення. Немає переконливих прикладів, що існує реальна можливість для переходу до даного етапу абстрагування. Цього не можна зробити доти, доки не буде визнаного успіху в майстерності, судженнях по-митецькому і використанні інтуїції при формулюванні правил прийняття рішень.

Після того, як цей процес буде добре вивчений, стане можливим перетворення аналізу діяльності організації в систему твердо встановлених правил. Попередній досвід свідчить, що в кожний даний момент варто застосовувати один з рівнів абстрагування. У кожен даний момент майстерність і судження по-митецьки служать встановленню правил, за допомогою яких нижчий рівень може бути автоматизований.

3.4. Явні та неявні рішення

Рішення можна поділити на дві категорії:

- явні, тобто свідомі рішення людей, що складають частину процесу управління або економічного процесу (рішення адміністративного характеру, рішення про закупівлі, а також рішення, пов'язані з різними психологічними факторами);

- неявні рішення, які є неминучим результатом стану системи:

- 1) можливість виконати замовлення, що залежить від наявних у даний момент запасів продукції;

- 2) рівень виходу із системи, транспорт, що залежить від рівня вводу, кількості товарів на шляху, тривалості циклу транспортування та ін.;

- 3) податки на прибуток.

Існуючий рівень виробництва звичайно є результатом неявного рішення, що залежить від кількості робочої сили, наявності устаткування й матеріалів, оскільки неможливо довільно визначити рівень виробництва і постійно його підтримувати. Неявне рішення супроводжують явні рішення

про додаткове наймання робочої сили та про замовлення устаткування й матеріалів. Чи будуть люди дійсно найняті в результаті явних рішень, залежить від дії неявних рішень усередині системи, до якої відносяться такі фактори, як наявність незайнятих працівників, пропонована зарплата та ін. Чи з'являться в результаті замовлень матеріали й устаткування, залежить теж від ряду умов.

Урахування як явних, так і неявних рішень створює можливість мати справу не тільки з дійсним станом речей, але й з бажаним. Певні умови викликають бажання змін. Це бажання взаємодії зі станом системи, з її ресурсами для визначення того, що повинно відбутися.

Уведення понять явних і неявних рішень звільняє нас від необхідності приймати рішення, пов'язані з виробництвом, що повинні дорівнювати рішенням, пов'язаним зі споживанням.

Такі рішення в дійсності приймаються ізольовано і незалежно одне від іншого, а поєднуються вони в кінцевому підсумку за посередництвом запасів, товарно-матеріальних цінностей, цін і різних потоків інформації. Явні рішення - бажати чи намагатися здійснити що-небудь - є результатом інформації, доступної особі, яка приймає рішення. Неявні рішення, що створюють дії, враховують як дійсний стан системи, так і бажане.

3.5. Уведення у функції рішень

При формулюванні функції рішень (рівнянь темпів) необхідно стежити за тим, щоб рішення виходили зі змінних, що дійсно знаходяться в пункті прийняття рішення. Як правило, інформація, доступна для прийняття явних рішень, не ідентична вихідним змінним, які вона виражає. Вона може бути запізненою, перекрученою, змішаною. Так чи інакше явні рішення звичайно базуються на інформації щодо вихідних змінних.

Найпростіші неявні рішення регулюють потоки, що залежать від дійсного стану системи і внаслідок цього - від дійсної величини змінних моделей.

Різниця між дійсною величиною змінної інформації щодо цієї змінної може бути розглянута на прикладі товарно-матеріальних запасів.

Можливість поставити окремий товар з наявних запасів, яка залежить від того, чи є цей товар у наявності, може розцінюватися як неявне рішення, регульоване дійсним станом запасів. Цей дійсний стан запасів є однією зі змінних величин у моделі.

Функція прийняття явних рішень, що регулює замовлення матеріалів для поповнення запасів, залежить від інформації про їх наявність.

Для характеристики того, що уявляється нам запасами, в деякі моделі доцільно ввести окрему змінну величину. Крім того, використовують поняття "бажаний стан запасів", що відрізняється від обох попередніх.

Таким чином, модель подібно дійсному світові повинна відтворювати як дійсні величини змінних, так і зв'язані з ними змінні, що виражають ті величини, які в процесі прийняття рішень лише беруться до уваги або враховуються.

3.6. Визначення форми рішення

Для відтворення правильної динамічної системи непогано мати формальні вирази, що показують, як приймаються рішення. Потік інформації безупинно перетворюється в рішення і дії. Ніякі посилання на те, що ми недостатньо добре розбираємося в процесі прийняття рішень, не можуть звільнити нас від знаходження критерію, яким варто керуватися при прийнятті рішення. Зневага до прийняття рішень означає заперечення їх існування - це помилка набагато значніша, ніж будь-яка інша, пов'язана з оцінкою процесу.

Чи можуть функції рішень бути настільки точно визначені, щоб бути корисними? Виявляється, що можуть. Вдумливі спостереження, обмін думками з особами, які приймають рішення, вивчення наявних даних, дослідження окремих прикладів рішень і дій - усе це може пролити світло на основні фактори, що впливають на прийняття рішень.

Визначення цих факторів здійснюється за чотири етапи:

- 1) вибір досить значних факторів;
- 2) установлення напрямку впливу факторів;
- 3) визначення значущості впливу факторів;
- 4) з'ясування того, які нелінійності треба врахувати.

3.7. Фактори, що підлягають врахуванню

При виборі факторів, що впливають на рішення, необхідно враховувати, чи впливають вони на характеристики інформаційної системи зі зворотним зв'язком. Далеко не всі особи мають правильне інтуїтивне судження щодо таких систем.

Не можна керуватися тільки ступенем прямого впливу розглядуваного фактора на рішення. Варто брати до уваги також ступінь зворотного зв'язку, що характеризує вплив рішення на фактор, що вводиться в рішення, а також тимчасові характеристики зворотного зв'язку. Відносно слабкі впливи на рішення можуть бути важливими в умовах "позитивного зворотного зв'язку", коли змінний фактор впливає на рішення, а рішення впливає на фактор, що вводиться, збільшуючи його вплив на подальшу зміну рішення. Наприклад, покупці у відповідь на зростаючі затримки у постачанні товарів починають купувати їх про запас, через це підвищений рівень замовлень збільшує відставання від їх виконання, в результаті чого затримки в постачанні товарів значно збільшуються.

3.8. Напрямок ефекту

Той напрямок, за яким зміни у певному факторі впливають на рішення, звичайно викликає мало сумнівів. Однак короткостроковий і довгостроковий вплив того самого фактора на рішення іноді діє в протилежному напрямку.

Звичайно припускається, що більш високі ціни стимулюють більший випуск продукції, однак для коротких термінів це іноді буває не так. Першим кроком, яким розпочинається виробництво м'яса, є скорочення постачань худоби на ринок з метою створення племінної череди, і обсяг продажів скорочується на 2-3 роки. Пов'язане з цим підвищення цін означає зростання вартості живого товарного запасу, що, у свою чергу, викликає збільшення періоду відгодівлі та знижує рівень продажів на декілька місяців. У деяких галузях підвищення попиту на товари може спричинити відволікання робочої сили від виробництва товару заради залучення їх до будівництва підприємств і виробництва устаткування. При розширенні науково-дослідних робіт виникає необхідність у найманні робочої сили, однак спочатку темп роботи знизиться, поки заново прийняті люди не будуть залучені до процесу.

3.9. Сила впливів функції рішення

Динамічна поведінка інформаційної системи зі зворотним зв'язком визначається тим, яким чином зміна в одній змінній приводить до зміни іншої. Очевидно, що наша дійсна економічна активність не мусить бути занадто чутливою до основних параметрів цієї активності і ці параметри змінюються нешвидко.

Це має бути так тому, що найважливіші характеристики залишаються незмінними протягом тривалого часу. Великі системи мають велику стабільність поведінки.

Національна економіка США продемонструвала дивно подібні повторювані економічні цикли протягом своєї історії, незважаючи на значні зміни в технології, структурі грошового обігу, швидкості комунікації й транспортування, у співвідношенні промисловості та сільського господарства.

3.10. Нелінійні функції рішення

Для правильного опису поведінки фірм істотне значення має нелінійність.

Перша форма нелінійності спостерігається тоді, коли дія фактора, що впливає на рішення, не пропорційна цьому фактору. Наприклад, наявний запас товарів для продажу впливає на темп постачання товарів. Якщо запаси малі, то недолік товарів обмежує можливості їх постачань, у межах

"нормальних" запасів товарно-матеріальних цінностей зміни цих запасів зроблять дуже значний вплив на рівень постачання.

Друге джерело нелінійності у функціях рішення виникає тоді, коли воно залежить не від двох чи більшої кількості змінних, що вводяться, а являє собою результат взаємозалежності цих змінних.

Постачання товарів не є незалежною й ізольованою відповіддю на запаси товарів і обсяг одержаних, але не виконаних замовлень на ці товари. Ми не можемо просто скласти ці дві величини. Якщо немає замовлень, то розміри замовлень не мають значення і не визначають постачання; якщо немає запасів, то замовлення не викликають постачання. Ці два види нелінійності часто зустрічаються разом. Розглянемо залежність темпів виробництва від наявного рівня кількості робітників і необхідного для виробництва устаткування. На рис. 8 показано, як темп виробництва може підвищуватися зі збільшенням кількості працюючих на підприємстві. Спочатку, коли кожний заново найнятий робітник може скористатися будь-яким потрібним йому устаткуванням, крива виробництва круто підноситься. Після того, як досягається максимальна продуктивність устаткування, збільшення випуску продукції знижується.

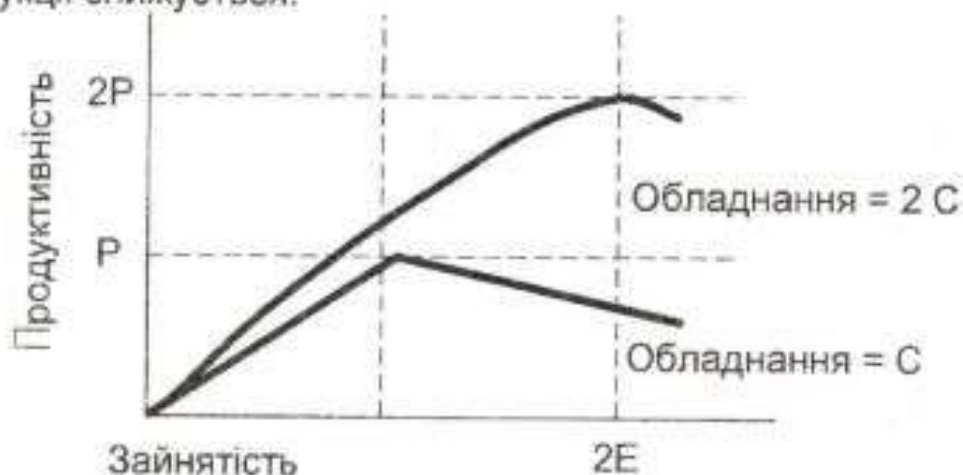


Рис. 8. Залежність темпу виробництва від кількості працюючих

Подальше зростання кількості робітників у кінцевому результаті приводить до максимального темпу виробництва при даному устаткуванні. Якщо й далі збільшувати кількість робітників, то це викличе простій, безладдя та втрати в темпі виробництва. При даній кількості устаткування темп виробництва не пропорційний кількості робітників і являє собою нелінійну функцію.

Оскільки вплив будь-якої даної зміни кількості робітників на темп виробництва залежить від кількості устаткування, то ці два фактори залежать один від одного. При недостатній кількості робітників коливання кількості устаткування від C до $2C$ не має значення. При великій кількості

робітників вплив додаткової робочої сили більше й більше залежить від того, чи буде введено додаткове устаткування.

4. КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ

Ефективність організацій можна підвищити, використовуючи кількісні методи й моделі науки управління для прийняття в складних ситуаціях обґрунтованих (об'єктивних) рішень.

Центральним пунктом науки управління є забезпечення керівництва підприємств науковою базою для вирішення проблем взаємодії підрозділів підприємства в інтересах його як цілого.

Цілі функціональних підрозділів підприємства найчастіше суперечать одна одній. Фахівцям з моделювання прийняття рішень необхідно оцінити компроміси, зумовлені різницею цілей, і виявити альтернативні рішення, що забезпечують баланс суперечливих цілей.

Науковий підхід в управлінні допомагає знайти ефективні рішення проблем підприємства.

Поняття "наука управління", "наука про прийняття рішень", "системний аналіз", "наука про системи", "дослідження операцій", що широко використовуються зараз, - суть взаємозамінні поняття, які поширюються на кількісні методи.

Незалежно від термінології відмінні риси науки управління як підходу такі:

- застосування наукового методу як фундаментальної процедури наукового дослідження;
- системна орієнтація;
- використання моделей.

Схему наукового методу зображено на рис. 9.

Розглянемо приклад використання наукового підходу на основі проблем, що виникають у процесі управління запасами.

Перший етап. Розглядається залежність між потребою у виробі і рівнем запасів залежно від попиту.

Другий етап. Формулюється гіпотеза. Дослідник виявляє альтернативи та їх наслідки для ситуації, робить прогноз на основі спостережень. Наприклад, встановлено, що запаси знизяться, якщо протягом місяця попит на них зросте на 10%. Отже, треба збільшити приріст запасів на певну величину для попередження їх скорочення.

Третій етап. Керівник може збільшити запаси на величину, що рекомендується штабним фахівцем. Якщо рівень запасів не зменшується і не зростає надміру, гіпотеза правильна. Якщо спостерігається нестача продукції з ростом попиту або запаси зростають так, що витрати на їхнє утримання стають надмірними, то гіпотеза визнається неправильною.

Керівник повинен повернутися до першого етапу, додати інформацію, одержану на етапі перевірки, інші дані та сформулювати нову гіпотезу.



Рис. 9. Етапи наукового методу

4.1. Моделювання

Розроблення моделей дозволяє приймати об'єктивні рішення в ситуаціях, занадто складних для простої причинно-наслідкової оцінки альтернатив. Багато моделей настільки складні, що не всякий середній керівник у змозі скористатися ними самостійно. Однак відсутність уявлення про моделі може призвести керівника до методу проб і помилок й прийняттю необдуманих рішень замість застосування перевірених методів. Моделі, що використовуються наукою управління, можуть бути дуже складними, але концепція моделювання проста. За визначенням Шеннона, "модель - це подання об'єкта, системи чи ідеї в деякій формі, відмінній від самої цілісності".

Головною характеристикою моделі можна вважати спрощення реальної життєвої ситуації, до якої модель застосовується. Завдяки цьому модель підвищує здатність керівника до розуміння та розв'язання проблем, що виникли в нього.

Модель допомагає керівнику поєднати свій досвід і здатність до судження з досвідом і судженнями експертів.

Причини, що зумовлюють необхідність моделювання замість прямої взаємодії з реальним світом, такі:

- складність організаційних ситуацій;
- неможливість проведення експериментів у реальному житті, навіть коли вони необхідні;
- орієнтація керівництва на майбутнє.

Розглянемо докладно зазначені причини.

Складність. Через те, що реальний світ організації винятково складний і фактичне число змінних, які відносяться до конкретної проблеми, істотно перевершує можливості будь-якої людини, зрозуміти цей світ можна, спростивши його за допомогою моделювання.

Експериментування. Експериментування проводиться завжди в процесі конструкторської підготовки виробництва складної технічної системи: літального апарата, двигуна, системи керування та ін. Наприклад, при створенні літака виготовляється його макет у натуральну величину, потім один літак - для статичних випробувань, другий - для льотних випробувань і третій - як зразок - для серійного виробництва.

Але якщо, наприклад, необхідно побудувати новий завод за рубежом, то провести експеримент з будівництвом декількох заводів у різних місцях для визначення найвигіднішого варіанта, звичайно ж, неможливо.

Орієнтація управління на майбутнє. Неможливо спостерігати явище, яке ще не існує і, можливо, ніколи не відбудеться. Але керівники прагнуть розглядати тільки реальне й відчутне.

Моделювання - єдиний у цей час систематизований спосіб побачити варіанти майбутнього, визначити потенційні наслідки альтернативних рішень і об'єктивно їх порівняти.

4.2. Типи моделей

4.2.1. Фізична (портретна) модель

Фізична модель являє собою те, що досліджується за допомогою збільшеного чи зменшеного опису або об'єкта системи. Вона має вигляд модельованої цілісності, наприклад: генеральний план заводу, макети, планування корпусів, будинків та ін., а також моделі літальних апаратів для продувки в аеродинамічній трубі, моделі, що літають, та ін. Модель коштує значно дешевше, ніж справжній об'єкт.

4.2.2. Аналогова модель

Аналогова модель являє собою досліджуваний об'єкт аналогом, що поводить як реальний об'єкт, але не має такого вигляду, наприклад,

залежність між обсягом виробництва і питомими витратами у розрахунку на одну умовну одиницю (рис.10).

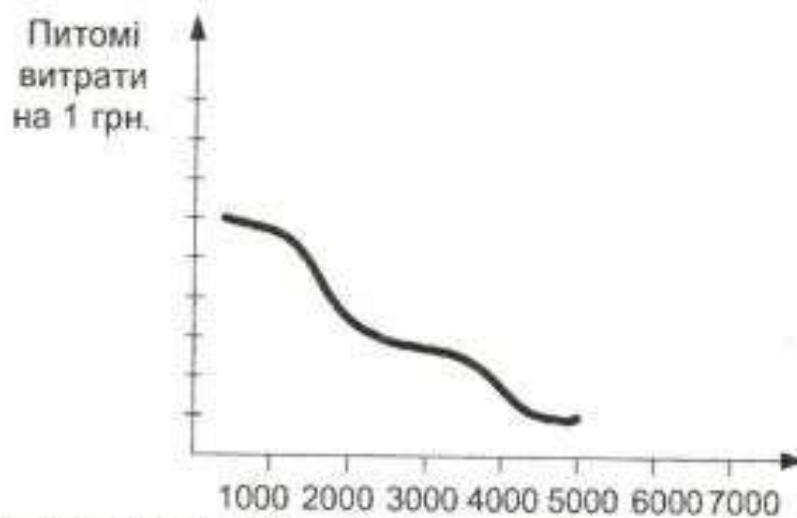


Рис. 10. Залежність між об'єктом виробництва і питомими витратами

Або, наприклад, організаційна схема управління заводом. За цією схемою легко перевірити ланцюги проходження команд і формальну залежність між співробітниками апарату управління і їхньою діяльністю. Така модель є більш простим способом сприйняття та прояву взаємозв'язків структури великої організації, ніж, наприклад, установлення взаємозв'язків між усіма працівниками.

4.2.3. Математична (символічна) модель

У математичній моделі використовуються символи для опису властивостей об'єкта чи події. Математичною моделлю операції називаються формальні співвідношення, що встановлюють зв'язок прийнятого критерію ефективності з діючими факторами операції.

4.2.4. Процес побудови моделі

Основними етапами процесу побудови моделей є:

- постановка задачі;
- побудова моделі;
- перевірка моделі на вірогідність;
- застосування й оновлення моделі.

Постановка задачі. Це найважливіший етап, здатний забезпечити прийняття правильного управлінського рішення. Правильне застосування математики й ЕОМ не принесе користі, якщо проблема не буде правильно діагностована. Правильна постановка задачі навіть важливіша за її рішення. Згідно з Шенноном "Мільйони доларів витрачаються щорічно на пошук елегантних і глибокодумних відповідей на неправильно поставлені

запитання".

Якщо керівник обізнаний з проблемою, з цього ще не випливає, що проблема ідентифікована. Керівник зобов'язаний відрізняти симптоми від причин.

Побудова моделі. Розроблювач (фахівець з науки управління) повинен визначити:

1. Головну мету моделі.
2. Які вихідні нормативи чи інформацію передбачається одержати, використовуючи модель, щоб допомогти керівництву вирішити проблему, що стоїть перед ним.
3. Яка інформація необхідна для побудови моделі, що задовольняє головну мету і видає на виході потрібну інформацію. Можливо, що ця інформація розкидана по багатьох джерелах. Крім того, при побудові моделі мають бути враховані інші фактори (потенційні проблеми).
4. Витрати (модель, що коштує більше, ніж задача, яка розв'язується за її допомогою, не наблизить підприємство до його цілей).
5. Реакцію людей (надмірно складна модель може бути сприйнята кінцевими користувачами як погроза і відкинута ними).

Отже, для побудови ефективної моделі керівникам і фахівцям з науки управління варто працювати разом, взаємно узгоджуючи потреби кожної сторони.

Перевірка моделі на вірогідність. Цей етап містить такі аспекти перевірки:

1. Визначення ступеня відповідності моделі реальному світу. Фахівець з науки управління мусить установити, чи всі істотні компоненти реальної ситуації вбудовані в модель. Це не так просто. Багато моделей управління можуть виявитися недосконалими, оскільки не охоплюють усіх істотних змінних. Чим краще модель відбиває реальний світ, тим вище її потенціал як засіб, за допомогою якого керівник приймає рішення (якщо модель не складна у використанні).

2. Установлення ступеня, у якому інформація, одержана за допомогою моделі, дійсно допомагає керівнику вирішити проблему. Одним зі способів перевірки моделі є випробування її на ситуації з минулого.

Застосування моделі. Після перевірки на вірогідність модель готова до використання. За Шенноном, жодну модель науки управління "не можна вважати успішно вибудованою, поки вона не прийнята, не зрозуміла і не застосована на практиці".

Лише 60% моделей науки управління були використані повною мірою. Можливо, керівники побоюються моделей чи не розуміють їх.

Якщо лінійні керівники беруть участь у постановці задачі й установленні вимог щодо інформації, то застосування моделей збільшується на 50%.

Керівників треба навчити використовувати моделі, пояснити, як

модель функціонує, які її можливості й обмеження.

Оновлення моделі. Навіть при успішному застосуванні моделі вона потребує оновлення. Можливо, що керівництву не зрозумілі форма вихідних даних чи бажані додаткові дані. Якщо зміна цілей організації вплинула на критерії прийняття рішень, модель треба модифікувати.

Зміна зовнішнього середовища (наприклад, поява нових споживачів, постачальників) може знецінити допущення та вихідну інформацію, на яких будувалася модель.

4.3. Загальні проблеми моделювання

Як і всі засоби й методи, моделі науки управління можуть призвести до помилок. Ефективність моделі може бути знижена через ряд причин:

- недостовірні вихідні допущення (передумови);
- обмежені можливості одержання потрібної інформації;
- страхи користувача;
- слабе використання на практиці;
- надмірно висока вартість.

Недостовірні вихідні допущення - це передумови:

- що піддаються оцінці, наприклад, витрати на зарплату в наступному кварталі;
- що не піддаються оцінці, наприклад, припущення про ріст збуту на 10% у майбутньому році, яке не можна об'єктивно перевірити.

Точність моделі залежить від точності передумов. Якщо прогнози збуту на майбутній період не точні, не можна використати модель для прогнозування запасів.

Точність моделі залежить також від точності внутрішніх взаємозв'язків між компонентами моделі. Тому, наприклад, модель для оцінки необхідних обсягів виробництва фарби різних типів повинна містити допущення й залежності продажної ціни та прибутку від вартості матеріалів і робочої сили.

Інформаційні обмеження - основна причина невірогідності вихідних допущень.

У складній ситуації неможливо одержати інформацію щодо всіх релевантних (істотних) факторів чи вмонтувати її в модель.

При рухомому зовнішньому середовищі інформацію про нього слід оновляти швидко, але це не завжди вдається зробити.

При побудові моделі можуть бути прогнозовані істотні складові, що не піддаються виміру. Наприклад, модель визначення ефективності нової технології буде некоректною, якщо вона базується на інформації про зниження витрат відповідно до підвищення ступеня спеціалізації. Але якщо при цьому не враховані психологічні установки робітників, яким не подобається новий процес, то неминучий зріст витрат через прогули, високу плинність кадрів і затори на потокових лініях і дільницях.

Найскрутнішою є побудова в умовах невизначеності інформації. У цьому випадку керівнику треба покластися на свій досвід, здатність до судження, інтуїцію, а також на допомогу консультантів.

Страх користувачів. Модель не можна вважати ефективною, якщо її не застосовують. Основна причина невикористання моделей керівниками - нестача знань у цій галузі. Керівники не цілком розуміють результати, що одержуються за допомогою моделі, й тому бояться їх застосувати. Для боротьби з цим фахівцям з кількісних методів аналізу варто приділяти значно більше часу для ознайомлення керівників з можливостями і порядком використання моделей. Керівники мають бути підготовлені до застосування моделей, а вищому керівництву необхідно постійно підкреслювати, що успіх організації залежить від моделі і що моделі підвищують здатність керівників ефективно планувати та контролювати роботу організації.

Слабке використання на практиці. Дослідження показують, що рівень моделювання в науці управління перевершує рівень використання моделей. Причини цього (як уже підкреслювалося) - страх, нестача знань і опір змінам. Бажано, щоб на стадії побудови моделі штабні фахівці залучали до цієї справи користувачів. Якщо люди мають можливість обговорити й краще зрозуміти питання, метод чи передбачувану зміну, їхній опір звичайно знижується.

Надмірна вартість. Необхідно, щоб вигода від використання моделей з лишком справджувала її вартість. Витрати на моделювання повинні враховувати витрати часу керівників усіх рівнів на побудову моделі, збирання інформації, витрати й час на навчання, вартість обробки та збереження інформації.

4.4. Лінійне програмування

У процесі обґрунтування прийнятих управлінських рішень лінійне програмування (ЛП) є найчастіше використовуваним методом оптимізації. На його частку припадає майже три чверті від загальної кількості оптимізаційних методів і близько чверті машинного часу, витраченого за останні роки на проведення наукових досліджень.

Причина такої популярності ЛП полягає в доступності математичного забезпечення для розв'язання задач лінійного програмування (ЗЛП) великої розмірності та можливості аналізу розв'язків при варіації вихідних даних.

4.4.1. Розроблення моделей ЛП

Побудова моделей ЛП - це, скоріше, мистецтво, ніж наука, і осягається з досвідом.

Етапи побудови моделей ЛП:

- визначення змінних задач;
- подання обмежень задачі у вигляді лінійних рівнянь або нерівностей;
- задання лінійної цільової функції, що підлягає мінімізації або максимізації.

Приклади ЗЛП:

1. Задача мінімізації витрат на технічний контроль. У бюро цехового контролю (БЦК) працюють контролери 4-го і 5-го розрядів. Норма їх змінного виробітку – не менше 1800 виробів (за 8 годин). Контролер 5-го розряду перевіряє 25 виробів за годину, не допускаючи помилок у 98% випадків. Контролер 4-го розряду перевіряє 15 виробів у годину, не допускаючи помилок у 95% випадків. Їхня годинна зарплата складає:

5-й розряд - 4 грн.;

4-й розряд - 3 грн.

Кожна помилка контролера завдає підприємству дві гривні збитку. Кількість контролерів у БЦК обмежена вісьмома контролерами 5-го розряду і десятьма - 4-го розряду.

Керівництво бажає знати оптимальний склад БЦК, при якому витрати на контроль будуть мінімальними.

Розглянемо розроблення математичної моделі.

Нехай X_1 і X_2 - кількість контролерів 5-го і 4-го розрядів, обмеження з їх кількості - $X_1 \leq 8$ (5-й розряд), $X_2 \leq 10$ (4-й розряд).

З огляду на те, що перевіряти треба не менше 1800 виробів щодня, запишемо:

$$8 \cdot 25X_1 + 8 \cdot 15X_2 = 200X_1 + 120X_2 \geq 1800,$$

або

$$5X_1 + 3X_2 \geq 45.$$

Годинні витрати на зарплату контролерів і збитки підприємства через їхні помилки складають:

за 5-м розрядом – $4 + 2 \cdot 25 \cdot 0,02 = 5$ грн./год.;

за 4-м розрядом – $3 + 2 \cdot 15 \cdot 0,05 = 4,5$ грн./год.

Щоденні витрати на контроль

$$Z = 8(5X_1 + 4,5X_2) = 40X_1 + 36X_2,$$

де Z - цільова функція, що підлягає мінімізації. Ці витрати мають бути мінімальними.

Отже, сформулюємо ЗЛП:

мінімізувати $Z = 40X_1 + 36X_2$ при таких обмеженнях:

$$X_1 \leq 8, \quad X_2 \leq 10, \quad 5X_1 + 3X_2 \geq 45,$$

$$X_1 \geq 0, \quad X_2 \geq 0.$$

2. Модель оптимального розкрою матеріалів. Листовий матеріал необхідно розкроїти на заготовки в кількості не менше 80 штук 1-го типу і не менше 40 штук 2-го типу. Відомі чотири способи розкрою (табл. 1).

Таблиця 1

Способи розкрою	1	2	3	4
Кількість заготовок, шт.				
тип 1	3 (1)	2 (1)	1 (1)	0 (1)
тип 2	1 (2)	6 (2)	9 (2)	3 (2)

Нехай x_j - кількість листів, що розкроюються j -м способом ($j=1,4$).

Вибір значень x_j обмежений такими умовами:

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 80 \quad (1\text{-й тип заготовок});$$

$$X_1 + 6X_2 + 9X_3 + 13X_4 \geq 40 \quad (2\text{-й тип заготовок}),$$

тобто забезпечується задана кількість заготовок кожного типу і $X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$ (кількість листів не може бути від'ємною).

Сумарна витрата матеріалу дорівнює

$$Z = X_1 + X_2 + X_3 + X_4,$$

де Z - цільова функція. Вона має бути мінімальною.

Задача лінійного програмування формулюється у такий спосіб: знайти X_1, X_2, X_3, X_4 , що становлять мінімум цільової функції, або, інакше, визначити

$$X_1, \dots, X_4 \longrightarrow \min \left\{ z = \sum_{j=1}^4 X_j \right\}$$

при $3X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 80, X_1 + 6X_2 + 9X_3 + 15X_4 \geq 40, \forall X_j \geq 0 \quad (j = \overline{1,4})$.

Це були приклади розроблення найпростіших моделей ЛП. А ось, наприклад, модель планування роботи гідроенергетичного комплексу, що має дві ГЕС і два водоймища, які працюють у режимі двох періодів з різною кількістю вироблюваної енергії і різним рівнем цін на енергію по цих періодах, має 21 змінну і 12 обмежень.

4.4.2. Графічне розв'язання найпростішої задачі ЛП з двома змінними

Звичайно на практиці такі задачі не зустрічаються, але вони добре ілюструють основні поняття, що використовуються при розв'язанні задач великої розмірності.

Отже, задача технічного контролю формулюється так: мінімізувати $Z = 40X_1 + 36X_2$ при обмеженнях

$$X_1 \leq 8, X_2 \leq 10,$$

$$5X_1 + 3X_2 \geq 45,$$

$$X_1 \geq 0; X_2 \geq 0.$$

Визначити всі можливі невід'ємні значення змінних X_1 і X_2 , задовольняючи обмеження. Наприклад, координати точки $X_1 = 8, X_2 = 10$

додатні і для неї виконуються всі обмеження. Така точка називається припустимим розв'язком.

Множина усіх припустимих розв'язків називається припустимою областю.

Розв'язання ЗЛП полягає у відшуванні найкращого розв'язку в припустимій області (рис. 11).

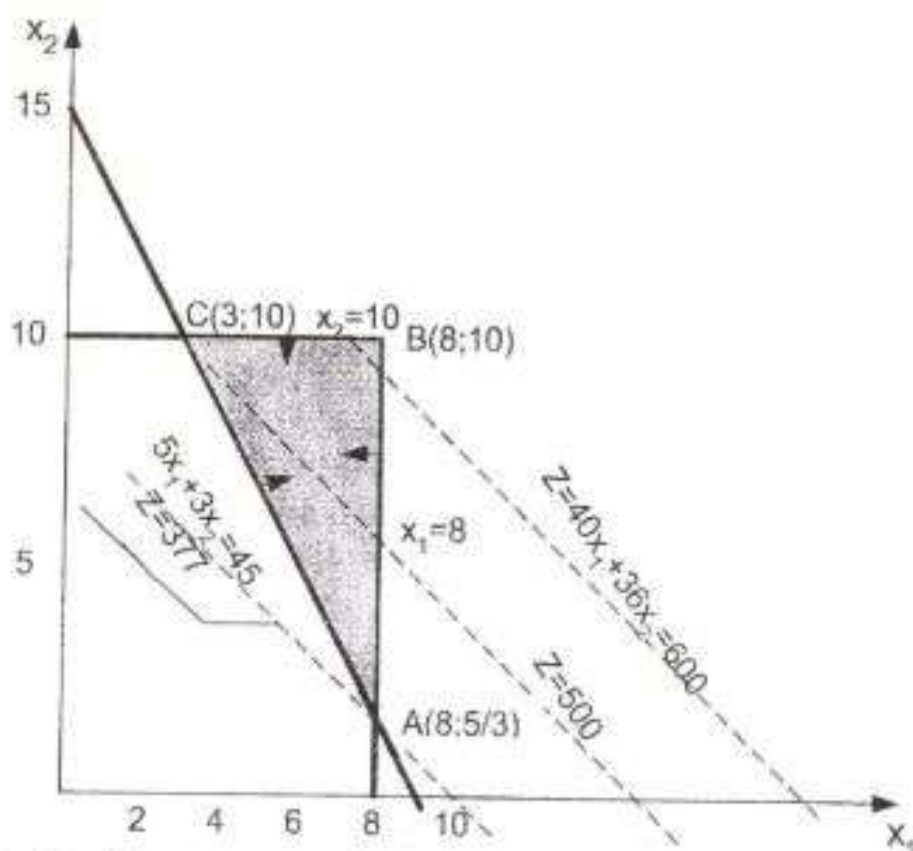


Рис. 11. Приклад розв'язання задачі графічним методом

Кращий припустимий розв'язок ЗЛП називається оптимальним.

Для зображення припустимої області варто накреслити графіки всіх обмежень. Усі припустимі розв'язки лежать у 1-му квадранті (значення змінних невід'ємні).

Усі припустимі розв'язки (X_1, X_2) через обмеження $5X_1 + 3X_2 \geq 45$ розташовані по один бік від прямої $5X_1 + 3X_2 = 45$.

Потрібну півплощину знаходять, перевірюючи, чи задовольняє початок координат обмеження.

Пряму проводять, виходячи з умови $X_1=0, X_2=15; X_2=0, X_1=9$. Початок координат не задовольняє обмеження, тому потрібна півплощина відзначена стрілкою. Аналогічно розглядаються обмеження $X_1 \leq 8, X_2 \leq 10$.

У припустимій області ABC міститься нескінченна кількість припустимих точок. Треба знайти точку з найменшим Z .

Якщо зафіксувати значення $Z = 40X_1 + 36X_2$, то відповідна йому точка буде лежати на деякій прямій. При зміні величини Z пряма паралельно переноситься. Розглянемо значення Z , що мають із припустимою областю хоча б одну точку. При переміщенні прямої до початку координат

знаходимо, що А – найкраща припустима точка.

Таким чином, треба використати вісім контролерів 5-го розряду і 1,6 контролера 4-го розряду. Один з контролерів 4-го розряду завантажений неповний робочий день.

У даній задачі має місце одиничність оптимального розв'язку, тому що $X_1=8$, $X_2=1,6$ - єдина припустима точка з мінімальним значенням Z .

Неодинаковість оптимального розв'язку існує, якщо ЗЛП має декілька припустимих розв'язків зі значеннями цільової функції, що дорівнюють оптимальному значенню. Усі ці припустимі розв'язки оптимальні, тобто ЗЛП має альтернативні оптимальні розв'язки (рис. 12).

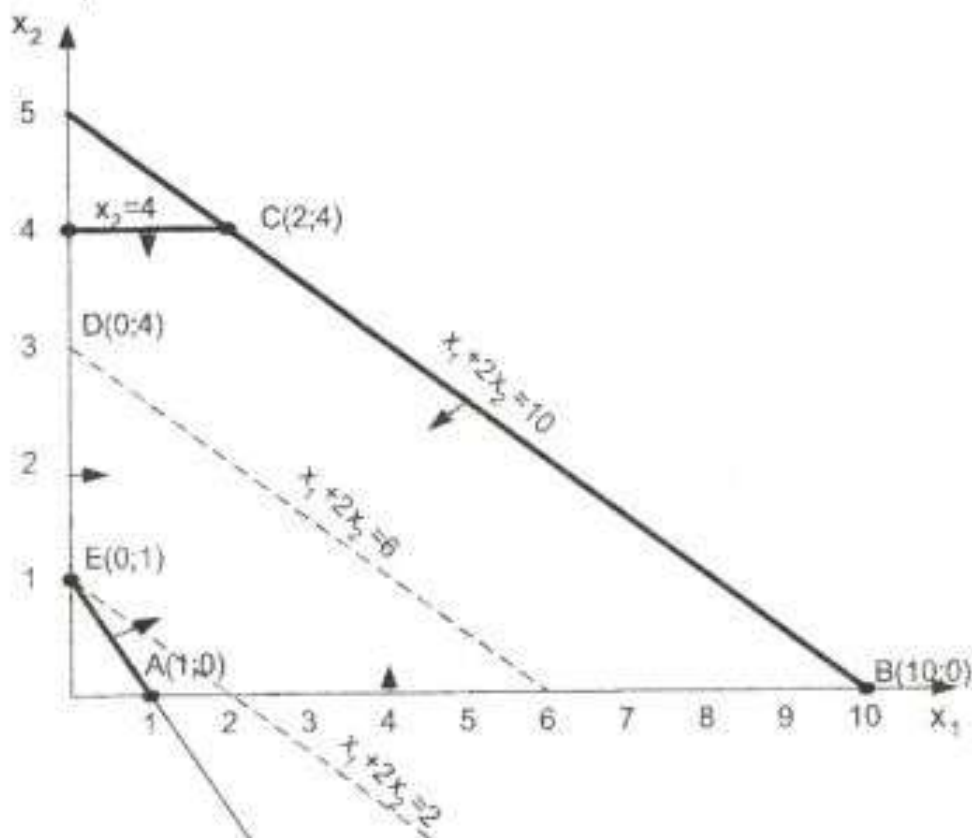


Рис. 12. Приклад неодинаковості оптимальності

Приклад. Максимізувати $Z = X_1 + 2X_2$ при обмеженнях

$$X_1 + 2X_2 \leq 10, X_1 + X_2 \geq 1,$$

$$X_2 \leq 4, X_1 \geq 0, X_2 \geq 0.$$

Пряма $X_1 + 2X_2 = 10$ містить відрізок BC, що лежить на межі допустимої області. Тому всі точки на відрізку BC – оптимальні розв'язки.

Необмежений оптимум. Для деяких ЗЛП не існує оптимального розв'язку, тобто для будь-якого допустимого розв'язку можна знайти інший допустимий розв'язок, якому відповідає краще значення Z . У наведеному вище прикладі таке положення виникає, якщо опустити обмеження $X_1 + 2X_2 \leq 10$. При цьому віддалі від початку координат викликає зростання Z і $\max Z = +\infty$, тобто ЗЛП має необмежений оптимум.

На практиці така задача не зустрічається, інакше можна було б

одержати нескінченний дохід при кінцевому запасі ресурсів.

Якщо при розв'язанні ЗЛП має місце така ситуація, то це означає, що одне чи декілька обмежень у задачі були пропущені на етапі побудови моделі.

У розглянутих прикладах були або єдиний розв'язок (вершина А припустимої області), або різні розв'язки, серед яких знаходилися вершини В і С припустимої області. В обох випадках одна з вершин була оптимальним розв'язком. Ця властивість виконується для всіх ЗЛП.

Розглянемо властивість І. Якщо в ЗЛП існує оптимальний розв'язок, то принаймні одна з вершин припустимої області являє собою цей розв'язок. На даній властивості базується симплекс-метод розв'язання ЗЛП.

Допустима область ЗЛП звичайно складається з нескінченної кількості точок, але оптимальний розв'язок завжди можна знайти перебором скінченного числа її вершин. Для $z = x_1 + 2x_2$ допустима область має вершини: А(1,0), В(10,0), С(2,4), D(0,4), Е(0,1). у них $Z(A)=1$, $Z(B)=10$, $Z(C)=10$, $Z(D)=8$, $Z(E)=2$. Оскільки максимальне значення z досягається у вершинах В і С, то згідно з властивістю І обидві вони – оптимальні розв'язки.

ЗЛП у стандартній формі. ЗЛП у стандартній формі з m обмеженнями і n змінними має такий вигляд: максимізувати

$$z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

при обмеженнях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2;$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m;$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, \dots, x_n \geq 0;$$

$$b_1 \geq 0, b_2 \geq 0, \dots, b_m \geq 0$$

або у векторно-матричній формі максимізувати $z = cx$ при обмеженнях $x = b, x \geq 0, b \geq 0$, де A - матриця коефіцієнтів (розмірністю $m \times n$); X - вектор змінних (вектор-стовпець розмірністю $n \times 1$); b - вектор ресурсів (вектор-стовпець розмірністю $m \times 1$); c - вектор оцінок ЗЛП (вектор-рядок розмірністю $1 \times n$).

При розв'язанні ЗЛП симплекс-методом потрібно, щоб задача була подана у стандартній формі. Однак не всі ЗЛП мають вигляд нерівностей. У деяких задачах не всі змінні можна вважати невід'ємними. Таким чином, перший етап розв'язання ЗЛП полягає у зведенні її до стандартної форми.

Перетворення нерівностей. Обмеження у вигляді нерівностей можна перетворити шляхом введення залишкових або надлишкових змінних. Наприклад,

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 25$$

можна перетворити введенням залишкової змінної s_1 :

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + s_1 = 25,$$

де s_1 - невід'ємна. Це різниця правої та лівої частин нерівності.

Аналогічно

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 \geq 12$$

перетворюється введенням надлишкової змінної s_2 :

$$2x_1 + x_2 - 3x_3 - s_2 = 12.$$

Додаткові змінні так само необхідні, як і вихідні змінні задачі.

Перетворення не обмежених за знаком змінних. Існують задачі, де змінні приймають як додатні, так і від'ємні значення.

Оскільки змінні ЗЛП у стандартній формі передбачаються невід'ємними, то необмежені змінні необхідно замінити різницею двох невід'ємних. Наприклад, якщо s_1 - необмежена змінна, то заміну змінних можна подати у вигляді

$$s_1 = s_1^+ - s_1^-, s_1^+ \geq 0, s_1^- \geq 0.$$

Значення s_1 може бути додатним або від'ємним залежно від співвідношення величин s_1^+ і s_1^- .

П р и к л а д. ЗЛП записана в нестандартній формі. Максимізувати $z = x_1 - 2x_2 + 3x_3$ при таких обмеженнях:

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 7; \quad (1)$$

$$x_1 - x_2 + x_3 \geq 2; \quad (2)$$

$$3x_1 - x_2 - 2x_3 = -5; \quad (3)$$

$$x_1, x_2 \geq 0,$$

де x_3 - змінна, не обмежена за знаком.

Перетворимо задачу до стандартної форми:

1. Замінімо x_3 на $x_4 - x_5$, де $x_4, x_5 \geq 0$.

2. Помножимо обидві частини рівняння (3) на -1 .

3. Введемо додаткові змінні x_6, x_7 в обмеження 1 і 2.

4. Припишемо нульовий коефіцієнт змінним x_6, x_7 , цільова функція при цьому не змінюється.

Таким чином, ЗЛП зводиться до стандартної форми $z = x_1 - 2x_2 + 3x_4 + 3x_5$ при обмеженнях:

$$x_1 + x_2 + x_4 - x_5 + x_6 = 7;$$

$$x_1 - x_2 + x_4 - x_5 - x_7 = 2;$$

$$-3x_1 + x_2 + 2x_4 - 2x_5 = 5;$$

$$x_1, x_2, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0.$$

Формулювання основних визначень ЗЛП. Використовуючи стандартну ЗЛП у матричному запису, максимізувати $z = cx$ при обмеженнях

$$Ax = b, x \geq 0.$$

Основні визначення можна сформулювати так:

1. Допустимий розв'язок - це невід'ємний вектор, для якого виконуються обмеження $Ax = b$.

2. Допустима область S складається з усіх допустимих розв'язків. Формально це можна записати так:

$$S = \{x \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

3. Оптимальний розв'язок - це такий допустимий вектор x^* , для якого відповідне йому значення цільової функції (cx^*) більше, ніж для будь-якого іншого допустимого розв'язку. Таким чином, вектор x^* - це оптимальний розв'язок задачі, коли $x^* \in S$ і $cx^* \geq cx \forall x \in S$.

4. Оптимальне значення ЗЛП - це значення цільової функції, що відповідає оптимальному розв'язку. Якщо z^* - оптимальне значення, то $z^* = cx^*$.

5. Неєдиність оптимального розв'язку. Коли ЗЛП має більше одного оптимального розв'язку, говорять, що вона має різні оптимальні розв'язки. При цьому існує більше одного допустимого розв'язку зі значенням цільової функції, що дорівнює оптимальному (z^*).

6. Єдиність оптимуму. Оптимальний розв'язок єдиний, якщо не існує інших оптимальних розв'язків.

7. Необмежений оптимум має місце, коли ЗЛП не має скінченного оптимуму (тобто $\max z \rightarrow +\infty$ або $\min z \rightarrow -\infty$).

4.4.3. Основи симплекс-методу

Розглянемо загальну ЗЛП з m обмеженнями та n змінними у стандартній формі:

максимізувати $Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ при обмеженнях

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1;$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2;$$

....

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m;$$

$$x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0.$$

Як правило, кількість рівнянь менше кількості змінних, тобто $m < n$. Тому множина допустимих розв'язків задачі нескінченна і, відповідно, вибір найкращого допустимого розв'язку, що максимізує z , не тривіальний.

Використовуючи метод Гаусса – Жордана, систему m рівнянь з n невідомими зводять до канонічного, або ступінчастого вигляду.

Розглянемо на прикладі системи двох рівнянь (S_1) з п'ятьма невідомими схему реалізації метода Гаусса - Жордана:

$$(S_1) \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 2; & (4) \\ x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 - x_5 &= 4. & (5) \end{aligned}$$

Дві системи рівнянь називаються еквівалентними, якщо вони мають одну й ту саму множину розв'язків (тобто розв'язок однієї системи автоматично є розв'язком другої, і навпаки).

Метод базується на побудові еквівалентної системи, розв'язок якої легко знайти безпосередньо. Розв'язок цієї системи одночасно є й розв'язком початкової.

При побудові еквівалентних систем використовують такі операції:

- множення будь-якого рівняння системи на додатне або від'ємне число;
- додавання будь-якого рівняння до будь-якого іншого рівняння системи, помноженого на константу.

Тоді, якщо (4) помножити на -1 та додати його до (5), то систему (S_2) можна записати у вигляді

$$(S_2) \quad \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 + 2x_5 &= 2; & (6) \\ x_2 - 2x_3 - x_4 + x_5 &= 2. & (7) \end{aligned}$$

Далі, помноживши (7) на 2 та склавши його з (6), одержимо систему (S_3):

$$(S_3) \quad \begin{aligned} x_1 - 3x_3 - 2x_4 - 4x_5 &= 6; & (8) \\ x_2 - 2x_3 - 3x_5 &= 2. & (9) \end{aligned}$$

Тут S_1 , S_2 , S_3 - еквівалентні системи (розв'язок однієї буде розв'язком двох інших).

Тепер можна знайти всі можливі розв'язки системи S_3 .

Якщо $x_3 = x_4 = x_5 = 0$, то $x_1 = 6$, $x_2 = 2$.

Інші рішення системи S_3 можна одержати, задавши деякі значення x_3, x_4, x_5 і визначивши далі x_1 та x_2 .

Системи рівнянь типу S_3 називають канонічними системами, зведеними до ступінчастого вигляду.

Отже, зведемо систему, записану у стандартному вигляді, до канонічного (ступінчастого) вигляду (ks_1) . При цьому використовуються перші m змінних $(x_1, \dots, x_m)$:

$$\begin{aligned} x_1 + \bar{a}_{1,m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{1,s}x_s + \dots + \bar{a}_{1n}x_n &= \bar{b}_1; \\ x_r + \bar{a}_{r,m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{r,s}x_s + \dots + \bar{a}_{rn}x_n &= \bar{b}_r; \\ x_m + \bar{a}_{m,m+1}x_{m+1} + \dots + \bar{a}_{m,s}x_s + \dots + \bar{a}_{mn}x_n &= \bar{b}_m. \end{aligned} \quad (ks_1)$$

Змінні $x_1, \dots, x_m$, що входять з одиничними коефіцієнтами тільки в одне рівняння системи і з нульовими – в решту, називаються базисними, або залежними. У канонічній системі кожному рівнянню відповідає рівно одна базисна змінна. Решта $n - m$ змінних $(x_{m+1}, \dots, x_n)$ називаються небазисними, або незалежними, змінними.

Сформулюємо визначення, пов'язані із зведенням системи лінійних рівнянь до канонічного вигляду та з наступним її розв'язанням.

Елементарне перетворення – це послідовність елементарних операцій над рядками, в результаті якої коефіцієнт при деякій змінній стає таким, що дорівнює одиниці в одному з рівнянь системи і нулю – в інших рівняннях.

Базисний розв'язок системи у канонічному вигляді – це розв'язок, одержаний при нульових значеннях небазисних змінних.

Наприклад, один з базисних рішень системи (ks_1)

$$x_1 = \bar{b}_1, x_m = \bar{b}_m, x_{m+1} = \dots = x_n = 0.$$

Якщо $\bar{b}_1, \dots, \bar{b}_m$ до того ж невід'ємні, то одержаний розв'язок називається допустимим базисним розв'язком (ДБР).

У наведеній в загальному вигляді системі як базисні використовуються перші m змінних, але можна вибирати будь-які. Тому максимальне число базисних розв'язків ЗЛП з m обмеженнями та n змінними у стандартній формі скінченне та визначається виразом

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad \text{для} \quad 0 \leq m \leq n.$$

Така ж величина обмежує максимальне число ДБР, бо за визначенням ДБР є базисним розв'язком (значення базисних змінних, що входять до нього, невід'ємні).

Оптимальний розв'язок ЗЛП можна знайти шляхом перебору ДБР за допомогою методу Гаусса - Жордана (будь-яка вершина допустимої області відповідає деякому допустимому розв'язку системи обмежень), і процес цей кінцевий, бо число ДБР не перевищує $\binom{n}{m}$ величину.

Більш ефективним при розв'язанні ЗЛП є симплекс-метод, розроблений Дж. Данцигом. Він являє собою інтерактивну процедуру розв'язання ЗЛП. При цьому система обмежень рівнянь має бути зведена до канонічного вигляду, що дає можливість легко знаходити ДБР.

Кроки алгоритму симплекс-методу:

1. Вибір початкового ДБР.
2. Перехід від початкового розв'язку до іншого ДБР з кращим значенням цільової функції. На даному кроці вилучаються всі ДБР, які гірші за поточний розв'язок. У – цьому перевага симплекс-методу порівняно з простим перебором.
3. Продовження пошуку ДБР, який поліпшує значення цільової функції. Якщо ж деяке ДБР не можна поліпшити, воно є оптимальним.

Розглянемо крок симплекс-методу у припущенні, що базисний розв'язок системи (ks_1) допустимий. Нехай ДБР задано у вигляді:

базисні змінні $x_i = \bar{b}_i \geq 0, i=1, 2, \dots, m;$

небазисні змінні $x_j = 0, j=m+1, \dots, n.$

Множина базисних змінних називається базисом (x_b) .

Вектор коефіцієнтів при базисних змінних позначається c_b .

Для початкового базису

$$x_b = (x_1, \dots, x_m), c_b = (c_1, \dots, c_m).$$

Оскільки небазисні змінні дорівнюють нулю, то значення z , що відповідає початковому ДБР, таке:

$$z = c_b x_b = c_1 \bar{b}_1 + \dots + c_m \bar{b}_m.$$

Симплекс-метод дає можливість перевірити існування ДБР з більшим значенням z . Для цього спочатку перевіряють оптимальність розглядуваного розв'язку. Якщо він не оптимальний, переходять до суміжного ДБР з більшим (або, на крайній випадок, не меншим) значенням z .

Суміжне ДБР відрізняється від розглядуваного тільки однією базисною змінною.

Для одержання суміжного ДБР симплекс-метод перетворює одну з базисних змінних в небазисну та вводить одну з небазисних змінних у базис.

Базисні й небазисні змінні потрібно вибирати так, щоб заміна однієї з них на іншу давала максимальний приріст z .

У будь-якому ДБР базисні змінні додатні, а небазисні дорівнюють нулю. Отже, перетворення небазисної змінної у базисну приводить до збільшення її значення від нуля до деякої додатної величини. Змінна, що вводиться в базис, повинна давати поліпшення значення z . Для вибору змінної, що вводиться в базис, потрібно небазисній змінній присвоїти значення, що дорівнює одиниці, та обчислити зміну z .

Проаналізуємо небазисну змінну x_s . Нехай $x_s = 1$. Дослідимо зміну цільової функції.

Оскільки розглядаються тільки суміжні ДБР, решта небазисних змінних так само дорівнює нулю, так що систему (ks1) можна переписати у вигляді:

$$\begin{aligned} x_1 & + \bar{a}_{1s}x_s = \bar{b}_1, \\ x_r & + \bar{a}_{rs}x_s = \bar{b}_r, \\ x_m & + \bar{a}_{ms}x_s = \bar{b}_m. \end{aligned} \quad (\text{ks2})$$

При зростанні x від нуля до одиниці одержуємо розв'язок системи (ks2):

$$\begin{aligned} x_i &= \bar{b}_i - \bar{a}_{is}, i=1, \dots, m, \\ x_s &= 1, x_j = 0, j=m+1, \dots, n, j \neq s. \end{aligned}$$

Нове значення цільової функції дорівнює

$$z = \sum_{i=1}^m c_i(\bar{b}_i - \bar{a}_{is}) + c_s.$$

Позначимо приріст величини z при збільшенні значення x на одиницю через $\bar{c}_s$. Тоді $\bar{c}_s$ – нове значення, c_s – старе значення:

$$z = \sum_{i=1}^m c_i(\bar{b}_i + \bar{a}_{is}) + c_s - \sum_{i=1}^m c_i \bar{b}_i = c_s - \sum_{i=1}^m c_i \bar{a}_{is}, \quad (\text{Sm1}),$$

де $\bar{c}_s$ – відносна оцінка небазисної змінної x_s ;

c_s – вихідна оцінка x_s в цільовій функції.

Якщо $c_s > 0$, то можна досягти збільшення значення цільової функції z , вводячи x_s в базис. Рівняння Sm1, яке визначає відносну оцінку, відоме як правило скалярного добутку.

Правило скалярного добутку. Відносна оцінка небазисної змінної x_j

$$\bar{c}_j = c_j - c_b \bar{P}_j,$$

де c_b відповідає оцінкам базисних змінних; $\bar{P}_j$ – j -й стовпець у

канонічній системі, що відповідає розглядуваному базису.

Умова оптимальності. Якщо відносні оцінки небазисних змінних ДБР задачі максимізації від'ємні або дорівнюють нулю, то розв'язок оптимальний.

Якщо $\bar{c}_j \leq 0$ для всіх небазисних змінних, то будь-якому суміжному ДБР відповідає значення цільової функції, яке не перевищує вже досягнутого. Отже, у розглядуваній точці є локальний максимум. Оскільки цільова функція z лінійна, локальний максимум збігається з глобальним.

Припустимо, що $\bar{c}_j = \max \bar{c}_j > 0$. Отже, початкове ДБР не оптимальне.

Оскільки величина $\bar{c}_s$ додатна, то при збільшенні значення небазисної змінної x_s на одиницю цільова функція z зростає на величину $\bar{c}_s$. Чим більше зростає значення x_s , тим більше приріст величини z , і тому необхідно, щоб значення x_s було по можливості великим.

При збільшенні x_s значення решти базисних змінних також змінюється, і їх нові значення знаходяться з системи (ks2):

$$x_i = \bar{b}_i - \bar{a}_{is} \cdot \bar{x}_s, \quad i=1, \dots, m. \quad (sm2)$$

Якщо $\bar{a}_{is} < 0$, то x_i зростає разом з x_s .

При $\bar{a}_{is} = 0$ значення x_i не змінюються.

Якщо $\bar{a}_{is} > 0$, то x_i спадає зі збільшенням x_s і при необмеженому зростанні x_s стає від'ємним, а розв'язок — неприпустимим.

Таким чином, максимально припустиме значення x_s визначається так:

$$\max x_s = \min(\bar{b}_i / \bar{a}_{is}), \quad (sm3)$$

$$\bar{a}_{is} > 0.$$

Нехай
$$\bar{b}_r / \bar{a}_{rs} = \min(\bar{b}_i / \bar{a}_{is}),$$
$$\bar{a}_{is} > 0.$$

Тоді при збільшенні x_s до $\bar{b}_r / \bar{a}_{rs}$ базисна змінна x_r першою серед базисних змінних обертається в нуль і замінюється у базисі змінною x_s . Змінна x_s стає новою базисною змінною в r -му рядку і нове ДБР має вигляд

$$\begin{aligned} x_i &= \bar{b}_i - \bar{a}_{is} (\bar{b}_r / \bar{a}_{rs}) \quad \forall i; \\ x_s &= \bar{b}_r / \bar{a}_{rs}; \end{aligned} \quad (sm4)$$

$x_j = 0$ для всіх інших небазисних змінних;

$$j = m + 1, \dots, n, j \neq s.$$

Оскільки при збільшенні x_s на одиницю приріст z складає $\bar{c}_s$, для нового розв'язку загальний приріст z дорівнює

$$(\bar{c}_s) \cdot (\bar{b}_r / \bar{a}_{rs}) > 0.$$

Рівняння (sm3), на основі якого визначаються базисні, що виводяться з базису, називаються правилом мінімального відношення. При використанні симплекс-методу обчислення відносних оцінок усіх небазисних змінних поточного ДБР (sm4) та перевірка його оптимальності проводяться до виконання умов оптимальності.

П р и к л а д. Максимізувати $z = 3x_1 + 2x_2$ при обмеженнях

$$-x_1 + 2x_2 \leq 4;$$

$$3x_1 + 2x_2 \leq 14;$$

$$x_1 - x_2 \leq 3;$$

$$x_1 \geq 0; x_2 \geq 0.$$

Зведемо ЗЛП до стандартного вигляду: максимізувати $z = 3x_1 + 2x_2$ при обмеженнях

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 = 4; \quad (10)$$

$$3x_1 + 2x_2 + x_4 = 14; \quad (11)$$

$$x_1 - x_2 + x_5 = 3; \quad (12)$$

$$x_1, \dots, x_5 \geq 0.$$

У ДБР системи рівнянь у канонічному вигляді базисними змінними є x_3, x_4, x_5 .

Послідовні ітерації симплекс-методу зручно подавати у вигляді таблиць з обмеженнями та цільовою функцією. При цьому обчислення з використанням правила скалярного добутку, мінімального відношення та елементарних перетворень проводять за допомогою стандартних процедур.

Елементами таблиць є коефіцієнти задачі. Для кожного обмеження записані тільки коефіцієнти при вхідних в нього змінних. Коефіцієнти цільової функції c_j знаходяться над коефіцієнтами відповідних їм x_j .

Поняття базис означає сукупність базисних змінних початкової таблиці (табл. 2) (x_3 - для обмеження (10), x_4 - для (11), x_5 - для (12)).

Символ c_B означає сукупність значень оцінок змінних c_j базису.

Таблиця 2

c_b	Базис	c_j					Сталі
		3	2	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	-1	2	1	0	0	4
0	x_4	3	2	0	1	0	14
0	x_5	(1)	-1	0	0	1	3
$\bar{c}$ -рядок		3	2	0	0	0	$Z=0$

Початкове ДБР визначаємо з табл. 2:

$$x_3 = 4, x_4 = 14, x_5 = 3, x_1 = x_2 = 0.$$

Значення цільової функції задається скалярним добутком вектора c_b та вектора правих частин рівняння:

$$z = (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ 3 \end{pmatrix} = 0.$$

Для перевірки оптимальності знайденого ДБР треба обчислити відносні оцінки змінних за правилом скалярного добутку:

$$(\bar{c}_j = c_j - c_b \bar{p}_j),$$

$$\text{тобто } \bar{c}_1 = 3 - (0, 0, 0) \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 3; \quad \bar{c}_2 = 2 - (0, 0, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 2;$$

$\bar{c}_3 = \bar{c}_4 = \bar{c}_5 = 0$, тому що відповідні змінні - базисні.

Незалежні x_1 і x_2 мають додатні відносні оцінки, отже, ДБР не оптимальне.

Небазисна змінна x_1 має найбільшу $\bar{c}_1$, тому її треба ввести в базис.

Для визначення змінної, що виводиться з базису, застосуємо правило мінімального відношення (sm3). Розрахуємо відношення для всіх обмежень з додатним коефіцієнтом при x_1 (табл. 3).

Оскільки для першого рядка коефіцієнт при x_1 від'ємний, можна необмежено збільшувати x_1 , а x_3 залишається додатним. Тому відношення не розраховується, а приймається таким, що дорівнює ∞ , x_4 - таким, що дорівнює нулю при зростанні x_1 до $14/3$, а якщо x_1 збільшується до 3, то x_5 перетвориться в нуль. Мінімальне відношення дорівнює 3, тому при зростанні x_1 від 0 до 3 першою перетворюється

Таблиця 3

Номер рядка	Базисна змінна	Відношення
1	x_3	∞
2	x_4	14/3
3	x_5	3/1

в нуль x_5 , вона заміниться в базисі змінною x_1 . Третій рядок називається ведучим, а коефіцієнт при x_1 - ведучим елементом.

Елементарне перетворення приводить до системи з новими базисними змінними x_3, x_4, x_1 (табл. 4). Для цього треба:

1. Додати ведучий рядок 3 до рядка 1, щоб виключити x_1 .
2. Помножити ведучий рядок на 3 та додати його до рядка 2, щоб виключити x_1 .

Таблиця 4

c_b	Базис	c_j					Сталі
		3	2	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	1	1	0	1	7
0	x_4	0	(5)	0	1	-3	5
3	x_1	1	-1	0	0	1	3
$\bar{c}$ -рядок		0	5	0	0	-3	$Z=9$

Для перевірки оптимальності одержаного в табл. 4 ДБР потрібно розрахувати вектор відносних оцінок (ряд $\bar{c}$), використовуючи правила скалярного добутку або елементарні перетворення.

Відносна оцінка $\bar{c}$ змінної x_1 повинна дорівнювати нулю, тому що x_1 увійшла в базис. Тому ведучий рядок табл. 2 необхідно помножити на (-3) та скласти з рядком $\bar{c}$:

$$z = (0, 0, 3) \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot 7 + 0 \cdot 5 + 3 \cdot 3 = 9.$$

Рядок $\bar{c}$ (див. табл. 4) все ще містить додатний елемент. Отже, є можливість введення в базис небазисної x_2 , що поліпшує значення цільової функції.

Застосовуючи правило мінімального відношення, знаходимо мінімум з набору (7/1, 5/5, ∞).

x_2 повинна зайняти місце базисної x_4 (табл. 5).

Використаємо елементарні перетворення:

1. Помножимо ведучий рядок 2 на $1/5$, щоб коефіцієнт при x_2 , що вводиться в базис, дорівнював 1, і додамо його до рядка 3, щоб виключити x_2 .
2. Помножимо ведучий рядок 2 на $-1/5$ і додамо його до рядка 1, щоб виключити x_2 .

Таблиця 5

c_b	Базис	c_j					Сталі
		3	2	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	1	$-1/5$	$8/5$	6
2	x_2	0	1	0	$1/5$	$-3/5$	1
3	x_1	1	0	0	$1/5$	$2/5$	4
$\bar{c}$ -рядок		0	0	0	-1	0	$Z=14$

По рядку $\bar{c}$: помножимо ведучий рядок 2 на -1 і додамо його до рядка $\bar{c}$:

$$z = (0, 2, 3) \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = 0 \cdot 6 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 4 = 14.$$

Оскільки у табл. 5 усі елементи рядка $\bar{c}$ недодатні, вона оптимальна. Оптимальний розв'язок має вигляд: $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 6, x_4 = x_5 = 0$, а оптимальне значення z дорівнює 14.

Неєдиність оптимуму. Небазисна змінна x_5 (табл. 5) має нульову відносну оцінку $\bar{c}$, отже, зміна x_5 не приведе до зміни значення цільової функції. Таким чином, x_5 можна ввести у базис, причому для цього ДБР значення цільової функції $z = 14$. За визначенням будь-який допустимий розв'язок, для якого значення z дорівнює оптимальному, також оптимальний. У ЗЛП є різні оптимальні значення. Одне з них одержуємо, якщо з базису вивести x_3 (за правилом мінімального відношення) (табл. 6).

Елементарне перетворення:

1. Помножимо рядок 1 на $5/8$, щоб коефіцієнт зі змінною x_5 , що вводиться в базис, дорівнював одиниці.
 2. Помножимо рядок 1 на $(3/8)$ та додамо його до рядка 2.
 3. Помножимо рядок 1 на $(-1/4)$ та додамо його до рядка 3.
- Перехід від однієї таблиці до іншої можна зобразити графічно (рис. 13).

Таблиця 6

θ	Базис	c_j					Сталі
		3	2	0	0	0	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
0	x_3	0	0	5/8	-1/8	1	15/4
2	x_2	0	1	3/8	1/8	0	13/4
3	x_1	1	0	-1/4	-1/4	0	5/2
$\bar{c}$ -рядок		0	0	0	-1	0	$Z=14$

ДБР, наведене в табл. 2, відповідає вершині А. З розглянутого рядка $\bar{c}$ (див. табл. 2) видно, що для збільшення z у базис можна ввести будь-яку із змінних x_1 або x_2 . На рис. 13 видно, що зі збільшенням будь-якої з них зростає z . У межах допустимої області значення x_1 можна збільшувати не більше ніж на 3 (точка В). Ця величина й складає мінімальне відношення, задане симплекс-методом. Отже, табл. 3 відповідає точці В.

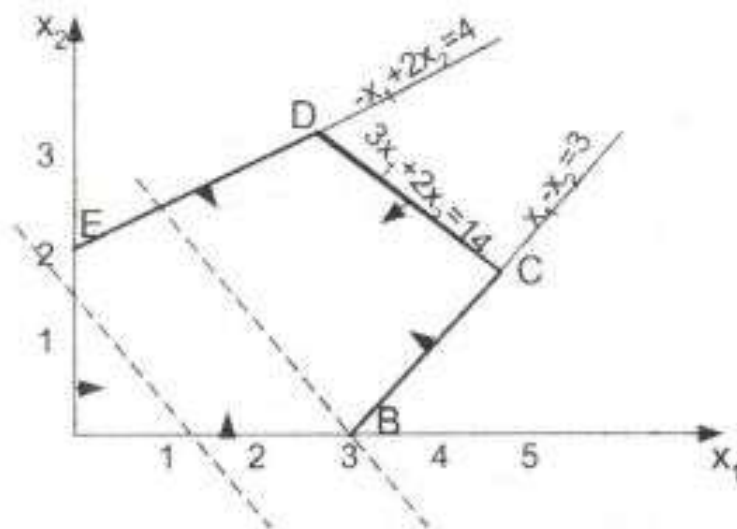


Рис. 13. Графічна ілюстрація переходу від табл. 1 до табл. 3

Відповідно до симплекс-методу та табличної форми стосовно задачі максимізації мають місце такі кроки обчислювального процесу.

Перший крок. Записати задачу у стандартній формі.

Другий крок. Заповнити первісну таблицю з використанням ДБР. (Далі описується процедура пошуку ДБР).

Третій крок. Обчислити вектор відносних оцінок (рядок $\bar{c}$) за допомогою правила скалярного добутку.

Четвертий крок. Якщо всі оцінки $\bar{c}_j$ недодатні, поточне ДБР

оптимальне. У протилежному випадку необхідно ввести в базис небазисну змінну з найбільшим значенням $\bar{c}_j$.

П'ятий крок. Визначити за допомогою мінімального відношення змінну, що виводиться з базису.

Шостий крок. Застосувати елементарне перетворення для одержання нового ДБР і нової таблиці.

Сьомий крок. Розрахувати нові відносні оцінки з застосуванням елементарного перетворення або правила скалярного добутку.

Повторити четвертий крок.

Примітка. Ітерацією симплекс-методу називається виконання кроків 4–7. На кожній ітерації одержуються нова таблиця й поліпшене ДБР. Число ДБР, що переглядаються при застосуванні симплекс-методу, – важлива характеристика цього методу.

Задачі мінімізації. Для їх розв'язання використовуються два підходи.

Підхід 1. Перетворення задачі мінімізації в еквівалентну задачу максимізації шляхом помноження цільової функції на (-1) з наступним використанням симплекс-методу.

Підхід 2. Для задач мінімізації введення в базис небазисних змінних (x) з від'ємними відносними оцінками $\bar{c}$, оскільки вони поліпшують цільову функцію. Якщо всі коефіцієнти в рядку $\bar{c}$ невід'ємні, поточний розв'язок оптимальний. Таким чином, для задач мінімізації можна використати сім кроків алгоритму, змінивши четвертий крок симплекс-методу, тобто, якщо всі коефіцієнти в рядку $\bar{c}$ додатні або дорівнюють нулю, поточне ДБР оптимальне. У протилежному випадку необхідно ввести в базис небазисну змінну з найменшим (від'ємним і максимальним за абсолютною величиною) значенням відносної оцінки.

Метод штучних змінних. Наявність початкового ДБР канонічної системи рівнянь є необхідною умовою застосування симплекс-методу. Без цього неможливо побудувати початкову симплекс-таблицю. Для одержання системи в канонічному вигляді, що має ДБР, треба звести ЗЛП до стандартної форми (усі змінні невід'ємні, обмеження мають вигляд рівнянь, праві частини невід'ємні). Потім для кожного обмеження перевіряють існування відповідної базисної змінної. Якщо її немає, вводять нову змінну, що відіграє роль базисної для даного обмеження. Після перевірки всіх обмежень одержуємо систему в канонічному вигляді. Змінні, що вводяться, не мають ніякого відношення до ЗЛП у вхідній постановці. Їх називають штучними на відміну від керованих змінних. В оптимальному розв'язку штучні змінні повинні перетворюватися в нуль (щоб не порушувалися обмеження ЗЛП).

П р и к л а д. Мінімізувати $z = -3x_1 + x_2 + x_3$ при обмеженнях

$$x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11;$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3;$$

$$2x_1 - x_3 = -1;$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

Задача в стандартній формі:

мінімізувати $z = -3x_1 + x_2 + x_3$ при обмеженнях:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11; \quad (13)$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 3; \quad (14)$$

$$-2x_1 + x_3 = 1; \quad (15)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$$

У рівнянні (13) додаткова змінна x_4 - базисна. Оскільки в інших співвідношеннях нема базисних змінних, потрібно ввести штучні змінні x_6 і x_7 , які є базисними для рівнянь (14) і (15). Для зберігання стандартної форми ЗЛП x_6 і x_7 передбачаються невід'ємними.

У результаті цього одержуємо допоміжну систему:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11;$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3;$$

$$-2x_1 + x_3 + x_7 = 1;$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_7 \geq 0.$$

ДБР допоміжної системи таке:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0; x_4 = 11; x_5 = 0; x_6 = 3; x_7 = 1.$$

Розв'язок недопустимий для первісної задачі, оскільки x_6 і x_7 - додатні. Тому що будь-яке ДБР допоміжної системи, в якому x_6 і x_7 дорівнюють нулю, допустиме для вихідної задачі, треба добитися перетворення в нуль штучних змінних. Це досягається за допомогою двохетапного симплекс-методу.

Перший етап. Знаходять початкове ДБР первісної задачі, тобто виключають штучні змінні. З цією метою розглядають штучну цільову функцію, що дорівнює сумі штучних змінних, яка мінімізується за допомогою симплекс-методу.

ЗЛП на першому етапі формулюється таким чином: мінімізувати $w = x_6 + x_7$ при обмеженнях:

$$x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 11;$$

$$-4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 + x_6 = 3;$$

$$-2x_1 + x_3 + x_7 = 1;$$

$$x_1 \geq 0, \dots, x_7 \geq 0.$$

Вихідну цільову функцію не розглядають на першому етапі. Якщо мінімальне значення допоміжної задачі дорівнює нулю, то всі штучні змінні перетворюються в нуль і одержується ДБР початкової задачі.

Примітка. Якщо сума невід'ємних змінних дорівнює нулю, то кожна змінна тотожно дорівнює нулю.

Якщо мінімальне значення допоміжної задачі додатне, то, принаймні, одна із штучних змінних додатна. Отже, початкова задача суперечлива і розрахунки закінчують.

Д р у г и й е т а п. Знайдене на першому етапі ДБР поліпшується згідно з цільовою функцією вихідної ЗЛП. Таким чином, оптимальна таблиця першого етапу перетворюється в початкову другого етапу, і, крім того, змінюється цільова функція. Для пошуку оптимального розв'язку застосовується симплекс-метод.

Аналіз чутливості в ЛП. Коефіцієнти цільової функції та обмежень в усіх ЗЛП задаються як вихідні дані (параметри) моделі. Оптимальний розв'язок залежить від значень вихідних коефіцієнтів. На практиці вони рідко відомі з абсолютною точністю, оскільки є функціями неконтрольованих параметрів (наприклад, майбутні потреби, вартість сировини або енергоресурсів). Отже, розв'язання практичної задачі не можна вважати закінченим, якщо знайдено оптимальний розв'язок.

Будь-яке відхилення у вихідних даних змінює умови ЗЛП, це може змінити знайдений оптимальний розв'язок при зміні початкових даних. Необхідну інформацію для цього одержують у результаті аналізу чутливості.

Аналіз чутливості дозволяє оцінити вплив зміни на оптимальний розв'язок таких параметрів ЗЛП, як фінансові кошти, виробничі потужності, запаси сировини. Якщо можна поліпшити оптимальний розв'язок за рахунок невеликих змін цих параметрів, треба це зробити.

Доцільно також підвищити точність оцінок параметрів, які найбільшою мірою впливають на значення цільової функції. Такими параметрами є очікуваний збут, прогноз цін і витрат, а також інші параметри, що одержуються при обробці ретроспективних даних.

4.4.4. Двоїста задача

Однією з поширених проблем практики управління виробництвом є така: з можливого "портфеля замовлень" вибрати найвигідніші для підприємства вироби, виходячи з таких даних, як ринкові ціни на вироби, виробничі потужності, грошові кошти (фінансові ресурси), які має підприємство.

Сформульована проблема еквівалентна задачі: із заданої кількості видів виробів $j = \overline{1, n}$, кожний з яких характеризується ринковою ціною c_j ,

трудомісткістю виготовлення t_j , матеріаломісткістю m_j , вибрати певну кількість $x_j \geq 0$ виробів заданих видів $j = \overline{1, n}$ з умови максимізації прибутку (найвигідніші вироби) при обмеженнях по виробничих потужностях T і грошових коштах D , які має в наявності підприємство.

4.4.4.1. Постановка задачі

Формально прибуток можна виразити так:

$$P(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n c_j x_j - 3, \quad \bar{x} = x_1, \dots, x_n, \quad (16)$$

Тут 3 – витрати на виробництво, які можуть бути подані у вигляді

$$3 = 3_{\text{зм}} + 3_{\text{пост}},$$

де $3_{\text{пост}}$ – постійні виробничі витрати, які не залежать від обсягу випуску, величину яких розраховують за статтями калькуляції;

$3_{\text{зм}}$ – змінні виробничі витрати, величина яких прямо пропорційна обсягу випуску.

Змінні витрати на виробництво

$$3_{\text{зм}} = \sum_{j=1}^n s_j x_j,$$

де s_j – прямі витрати на виробництво одиниці j -го виду продукції, які розраховують за статтями калькуляції.

Тоді вираз прибутку (16) набуває вигляду

$$P(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n k_j x_j - 3_{\text{пост}},$$

де $k_j = (c_j - s_j) > 0$.

Ставиться задача: знайти невід'ємне значення обсягів випуску $x_j \geq 0$ видів продукції $j = \overline{1, n}$, що приносять максимальний прибуток $P(\bar{x})$ при обмеженій виробничій потужності підприємства T і обмежених грошових коштах D :

$$\begin{aligned} \max_{\bar{x}} & \left(\sum_{j=1}^n k_j x_j - 3_{\text{пост}} \right); \\ & \sum_{j=1}^n t_j x_j \leq T; \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^n s_j x_j + 3_{\text{пост}} \leq D.$$

Сформульована задача еквівалентна такій задачі:

$$\begin{aligned} \max_{\bar{x}} \quad & \sum_{j=1}^n k_j x_j; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \leq b_i, i = \overline{1, m}; \quad m = 2; \\ x_j & \geq 0, j = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (17)$$

де

$$a_{1j} = t_j; a_{2j} = s_j; b_1 = T; b_2 = D - 3_{\text{пост}}.$$

Одержана задача (17) визначення таких невід'ємних значень змінних $x_j \geq 0, j = \overline{1, n}$, підпорядкованих системі обмежень

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, i = \overline{1, m}$$

у формі лінійних нерівностей, при яких досягається максимум (або мінімум) заданої лінійної функції $P'(\bar{x}) = \sum_{j=1}^n k_j x_j$ (яка іменується цільовою функцією), називається задачею лінійного програмування й може бути розв'язана симплекс-методом.

4.4.4.2. Графоаналітичний метод розв'язання окремого вигляду ($m=2$) задачі лінійного програмування

Нехай задано задачу лінійного програмування вигляду

$$\begin{aligned} \max_{\bar{x}} \quad & \sum_{j=1}^n k_j x_j; \\ \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j & \leq b_i, i = \overline{1, m}; \\ x_j & \geq 0, k > 0, b_i > 0, j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Запишемо цю задачу у векторно-матричній формі:

$$\begin{aligned} \max_{\bar{x}} \quad & \bar{k} \bar{x}; \\ \bar{A} \bar{x} & \leq \bar{b}; \\ \bar{x} & \geq 0, \end{aligned} \quad (18)$$

де $\bar{k} = k_1, \dots, k_n; \bar{x} = x_1, \dots, x_n; A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}$.

Кожній задачі лінійного програмування, яку називатимемо прямою, відповідає деяка двоїста задача, яку необхідно скласти за таким алгоритмом.

Цільову функцію двоїстої задачі $G(\bar{y})$ можна одержати з вектора констант обмежень прямої задачі $\bar{b} = b_1, \dots, b_m$ і з нового вектора змінних $\bar{y} = y_1, \dots, y_m$, розмірність якого відповідає кількості обмежень прямої задачі m :

$$G(\bar{y}) = \sum_{i=1}^m b_i y_i = \bar{b} \bar{y}.$$

Критерій оптимальності беремо діаметрально протилежним критерію прямої задачі:

$$\min_{\bar{y}} G(\bar{y}).$$

Систему обмежень знайдемо, якщо задану матрицю обмежень прямої задачі $A = (a_{ij})_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}$ помножимо ліворуч на вектор нових змінних $\bar{y} = y_1, \dots, y_m$.

Вектор констант обмежень відповідає вектору коефіцієнтів цільової функції прямої задачі $\bar{k} = k_1, \dots, k_n$, а знак нерівності змінюється на протилежний:

$$\bar{y} A \geq \bar{k}, \quad \text{або} \quad A^T \bar{y} \geq \bar{k},$$

де A^T - транспонована матриця A .

Одержуємо двоїсту задачу лінійного програмування

$$\begin{aligned} \min_{\bar{y}} \quad & \bar{b} \bar{y}; \\ & \bar{y} A \geq \bar{k}; \\ & \bar{y} \geq 0, \end{aligned}$$

або в розгорнутій формі:

$$\begin{aligned} \min_{\bar{y}} \quad & \sum_{i=1}^m b_i y_i; \\ & \sum_{i=1}^m a_{ij} y_i \geq k_j, j = \overline{1,n}; \\ & y_i \geq 0, i = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{19}$$

Цю двоїсту задачу лінійного програмування для випадку $m = 2$ можна легко розв'язати графоаналітичним способом. Без втрати спільності для простоти вважатимемо $n=3$. У просторі невідомих $y_i \geq 0, i=1,2$ будемо область допустимих значень вектора $\bar{y} = y_1, y_2$.

Нехай пряма I відповідає рівнянню $\sum_{i=1}^2 a_{i1}y_i = k_1$, пряма II - $\sum_{i=1}^2 a_{i2}y_i = k_2$, пряма III - $\sum_{i=1}^2 a_{i3}y_i = k_3$.

Ломана лінія (вісь y_2 , відрізок 1-2, відрізок 2-3, відрізок 3-4, вісь y_1) являє собою межу області допустимих значень змінних y_1 і y_2 (рис.14).

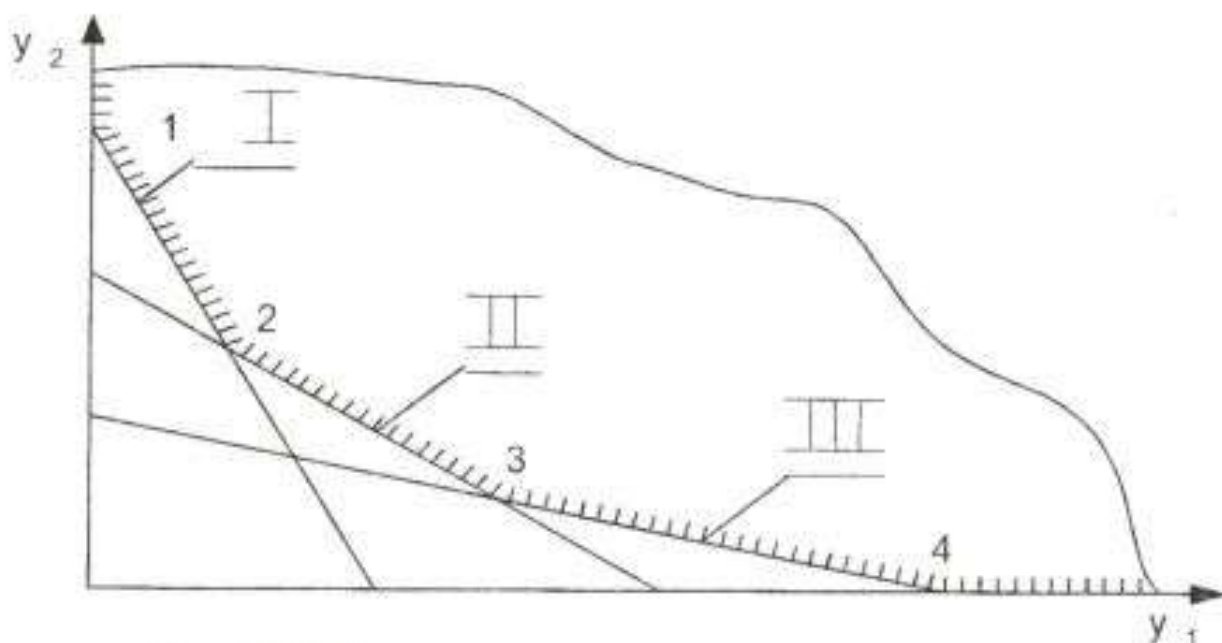


Рис.14. Побудова допустимої області значень вектора $\bar{y}$

Відомо, що розв'язання будь-якої задачі лінійного програмування, якщо воно існує, завжди здійснюється хоча б в одній з вершин межі області допустимих значень. Отже, розв'язання розглядуваної задачі лінійного програмування буде досягатися як мінімум в одній з вершин (див. рис. 14, точки 1, 2, 3, 4) межі допустимих значень вектора $\bar{y} = y_1, y_2$ з координатами $(y_1^{(l)}, y_2^{(l)})$, де $l = \overline{1,4}$.

Визначимо координати вершин межі допустимих значень змінних y_1, y_2 .

Точка 1 з координатами $y_1^{(1)}, y_2^{(1)}$:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^2 a_{i1} y_i &= k_1; \\ y_i &= 0; \end{aligned} \right\} y_1^{(1)} = 0; y_2^{(1)} = \frac{k_1}{a_{21}} = \frac{k_1}{s_1}.$$

Точка 2 з координатами $y_1^{(2)}, y_2^{(2)}$:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^2 a_{i1} y_i &= k_1; \\ \sum_{i=1}^2 a_{i2} y_i &= k_2; \end{aligned} \right\} y_1^{(2)} = \frac{\Delta_{y1}}{\Delta}; y_2^{(2)} = \frac{\Delta_{y2}}{\Delta},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1 & s_1 \\ t_2 & s_2 \end{vmatrix} = t_1 s_2 - t_2 s_1;$$

$$\Delta_{y1} = \begin{vmatrix} k_1 & a_{21} \\ k_2 & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_1 & s_1 \\ k_2 & s_2 \end{vmatrix} = k_1 s_2 - k_2 s_1;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{12} & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_1 & k_1 \\ t_2 & k_2 \end{vmatrix} = t_1 k_2 - t_2 k_1.$$

Точка 3 з координатами $y_1^{(3)}, y_2^{(3)}$:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^2 a_{i2} y_i &= k_2; \\ \sum_{i=1}^2 a_{i3} y_i &= k_3; \end{aligned} \right\} y_1^{(3)} = \frac{\Delta_{y1}}{\Delta}; y_2^{(3)} = \frac{\Delta_{y2}}{\Delta},$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_2 & s_2 \\ t_3 & s_3 \end{vmatrix} = t_2 s_3 - t_3 s_2;$$

$$\Delta_{y1} = \begin{vmatrix} k_2 & a_{22} \\ k_3 & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_2 & s_2 \\ k_3 & s_3 \end{vmatrix} = k_2 s_3 - k_3 s_2;$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & k_1 \\ a_{12} & k_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t_2 & k_2 \\ t_3 & k_3 \end{vmatrix} = t_2 k_3 - t_3 k_2.$$

Точка 4 з координатами $y_1^{(4)}, y_2^{(4)}$:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^2 a_{i3} y_i &= k_3; \\ y_2 &= 0; \end{aligned} \right\} y_1^{(4)} = \frac{k_3}{a_{23}} = \frac{k_3}{s_3}; y_2^{(4)} = 0.$$

Далі визначимо значення цільової функції $G(\bar{y}) = b_1 y_1 + b_2 y_2$ у точках 1, 2, 3, 4, а із одержаних значень

$$G_l(\bar{y}) = b_1 y_1^{(l)} + b_2 y_2^{(l)}; l = \overline{1, 4}$$

згідно з заданим критерієм оптимальності виберемо мінімальне

$$\min_l \{G_l(\bar{y})\}, l = \overline{1, 4}.$$

Координати точки $y_1^* = y_1^{(l)}, y_2^* = y_2^{(l)}$, в якій цільова функція $G(\bar{y})$ досягає свого найменшого значення $\min_{\bar{y}} G(\bar{y}) = G(\bar{y}^*)$, будуть розв'язком

сформульованої задачі лінійного програмування (19), яка є двоїстою відносно вихідної (прямої) задачі лінійного програмування (18).

Вершину межі допустимої області, в якій здійснюється розв'язання задачі лінійного програмування, можна визначити графічним методом, побудувавши лінію рівня цільової функції:

$$b_1 y_1 + b_2 y_2 = c,$$

де $c = \text{const} > 0$.

Пересуваючи еквідистантно лінію рівня (паралельно самій собі), що відповідає зміні величини константи c , можна знайти ту вершину межі допустимої області, в якій лінія рівня буде дотикатися до цієї межі. Координати знайденої точки дотику й будуть розв'язком розглядуваної двоїстої задачі лінійного програмування.

Для розв'язання прямої задачі лінійного програмування (18) на основі результатів розв'язань двоїстої задачі (19) скористаємося такою теоремою двоїстості.

Для того, щоб допустимі вектори $\bar{x}, \bar{y}$ були розв'язком прямої $\bar{x}^*$ і двоїстої $\bar{y}^*$ задач, необхідно і достатньо, щоб виконувалися такі умови додаткової нежорсткості:

$$(\bar{k} - \bar{y}^* A) \bar{x}^* = 0;$$

$$\bar{y}^* (\bar{b} - A \bar{x}^*) = 0,$$

або у розгорнутій формі:

$$(k_j - \sum_{i=1}^2 a_{ij} y_i^*) x_j^* = 0, j = \overline{1, n}; \quad (20)$$

$$y_i^* (b_j - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^*) = 0, i=1,2. \quad (21)$$

Тоді з умови (20) виходить: якщо $\sum_{i=1}^2 a_{ij} y_i^* > k_j$, то $x_j^* = 0, \forall j \in \{1, n\}$.

Іншими словами, за строгими нерівностями $\sum_{i=1}^2 a_{ij} y_i^* > k_j, j \in \{1, n\}$ обмежень двоїстої задачі в оптимальній точці $\bar{y} = \bar{y}^*$ можна визначити змінні прямої задачі $x_j, j \in \{1, n\}$, які в оптимальній точці $\bar{x} = \bar{x}^*$ набувають нульових значень $x_j^* = 0$.

З умови (21) виходить: якщо $y_i^* > 0$, то $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i, \forall i \in \{1, 2\}$.

Іншими словами, за додатними значеннями змінних двоїстої задачі в оптимальній точці $y_i^* > 0, i \in \{1, 2\}$ можна визначити нерівності прямої задачі, які в оптимальній точці $\bar{x}^*$ перетворюються в строгі рівності:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i.$$

Це дозволяє скласти рівняння $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i, i \in \{1, 2\}$ для знаходження чисельних значень додатних змінних $x_j, j = \overline{1, n}$, при яких досягається оптимальне значення цільової функції прямої задачі $P^I(x) = \sum_{j=1}^n k_j x_j$.

Нехай розв'язання двоїстої задачі (19) здійснюється в точці 2 з координатами $y_1^* = y_1^{(2)}; y_2^* = y_2^{(2)}$. Це відповідає умові

$$\min_{\bar{y}} G(\bar{y}) = b_1 y_1^{(2)} + b_2 y_2^{(2)}.$$

У точці 2 справедливі такі співвідношення:

$$y_1^* = y_1^{(2)} > 0; y_2^* = y_2^{(2)} > 0; \quad (22)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^2 a_{i1} y_i^* &= k_1, \text{ або } t_1 y_1^{(2)} + s_1 y_2^{(2)} = k_1; \\ \sum_{i=1}^2 a_{i2} y_i^* &= k_2, \text{ або } t_2 y_1^{(2)} + s_2 y_2^{(2)} = k_2; \\ \sum_{i=1}^2 a_{i3} y_i^* &> k_3, \text{ або } t_3 y_1^{(2)} + s_3 y_2^{(2)} > k_3. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Тоді з умов доповнюючої нежорсткості

$$\begin{aligned} (k_1 - \sum_{i=1}^2 a_{i1} y_i^*) x_1^* &= 0, \\ (k_2 - \sum_{i=1}^2 a_{i2} y_i^*) x_2^* &= 0, \\ (k_3 - \sum_{i=1}^2 a_{i3} y_i^*) x_3^* &= 0. \end{aligned}$$

З урахуванням рівняння (23) виходить $x_3^* = 0$, тому що

$$k_3 < \sum_{i=1}^2 a_{i3} y_i^*.$$

Далі з умов доповнюючої нежорсткості

$$\begin{aligned} y_1^* (b_1 - \sum_{j=1}^3 a_{1j} x_j^*) &= 0, \\ y_2^* (b_2 - \sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j^*) &= 0. \end{aligned}$$

Беручи до уваги (22),

$$\begin{aligned} b_1 - \sum_{j=1}^3 a_{1j} x_j^* &= 0, & \text{ або } b_1 - \sum_{j=1}^3 t_j x_j^* &= 0, \\ b_2 - \sum_{j=1}^3 a_{2j} x_j^* &= 0, & \text{ або } b_2 - \sum_{j=1}^3 s_j x_j^* &= 0. \end{aligned}$$

Враховуючи рівняння $x_3^* = 0$, одержуємо два рівняння

$$\begin{aligned} t_1 x_1 + t_2 x_2 &= b_1, \\ s_1 x_1 + s_2 x_2 &= b_2 \end{aligned}$$

з двома невідомими x_1, x_2 , звідки визначаємо значення x_1^*, x_2^* , при яких

досягається оптимум цільової функції $P'(\bar{x}) = \sum_{j=1}^3 k_j x_j$. Для перевірки правильності знайденого розв'язку можна використати таку теорему двоїстості.

Допустимий вектор $\bar{x}^*$ є розв'язком задачі лінійного програмування тоді і тільки тоді, коли існує такий допустимий вектор $\bar{y}^*$ двоїстої задачі, що значення цільових функцій обох задач на цих векторах дорівнюють одне одному.

Таким чином, у нашому випадку повинні виконуватися рівняння

$$P'(\bar{x}^*) = G(\bar{y}^*)$$

або

$$\sum_{j=1}^n k_j x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*.$$

При $n = 3, m = 2, x_3^* = 0, y_1^* = y_1^{(2)}, y_2^* = y_2^{(2)}$ одержуємо рівняння

$$k_1 x_1^* + k_2 x_2^* = b_1 y_1^{(2)} + b_2 y_2^{(2)},$$

розв'язання якого гарантує правильність знайденого розв'язку вихідної задачі лінійного програмування (18).

П р и к л а д. Визначити $x_j \geq 0, j = \overline{1,4}$, для яких

$$\max(8x_1 + 10x_2 + 12x_3 + 9x_4)$$

при обмеженнях

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 6,$$

$$x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 30.$$

Розв'язання.

Складемо двоїсту задачу лінійного програмування

$$\min_{\bar{y}} (6y_1 + 30y_2)$$

при

$$2y_1 + y_2 \geq 8,$$

$$y_1 + 5y_2 \geq 10,$$

$$3y_1 + 2y_2 \geq 12,$$

$$3y_1 + y_2 \geq 9,$$

$$y_i \geq 0, i = \overline{1,2}.$$

Побудуємо межу допустимої області вимірювання вектора змінних $\bar{y} = y_1, y_2$ (рис.15).

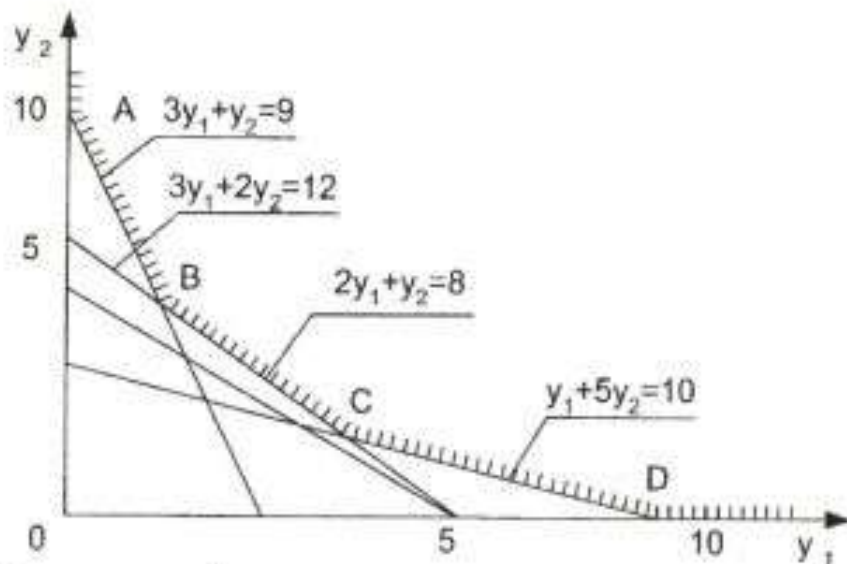


Рис. 15. Приклад побудови допустимої області значень вектора $\bar{y}$

Вершинами межі допустимої області є точки A, B, C, D з координатами:

для точки A $y_1^{(A)} = 0; y_2^{(A)} = 9;$

для точки B $y_1^{(B)} = 1; y_2^{(B)} = 6.$

З розв'язання системи рівнянь

$$3y_1 + y_2 = 9,$$

$$2y_1 + y_2 = 8$$

для точки C маємо $y_1^{(C)} = 10/3; y_2^{(C)} = 4/3.$

З розв'язання системи рівнянь

$$2y_1 + y_2 = 8,$$

$$y_1 + 5y_2 = 10$$

для точки D маємо $y_1^{(D)} = 10; y_2^{(D)} = 0.$

Визначимо значення цільової функції у знайдених точках A, B, C, D і виберемо мінімальне з них:

$$G_A(\bar{y}) = 6y_1^{(A)} + 30y_2^{(A)} = 270;$$

$$G_B(\bar{y}) = 6y_1^{(B)} + 30y_2^{(B)} = 186;$$

$$G_C(\bar{y}) = 6y_1^{(C)} + 30y_2^{(C)} = 60;$$

$$G_D(\bar{y}) = 6y_1^{(D)} + 30y_2^{(D)} = 60.$$

Мінімального значення цільова функція досягає в точках D і C.

Візьмемо координати точки D як розв'язок двоїстої задачі. Тоді

$$y_1^* = y_1^{(D)} = 10, y_2^* = y_2^{(D)} = 0.$$

У точці D обмеження двоїстої задачі виконуються так:

$$2y_1^{(D)} + y_2^{(D)} > 8;$$

$$y_1^{(D)} + 5y_2^{(D)} = 10;$$

$$3y_1^{(D)} + 2y_2^{(D)} > 12;$$

$$3y_1^{(D)} + y_2^{(D)} > 9.$$

Тому з умов доповнюючої нежорсткості виходить

$$x_1^* = 0, x_3^* = 0, x_4^* = 0,$$

а з умови $y_1^* = 10, y_2^* = 0 \rightarrow$

$$2x_1^* + x_2^* + 3x_3^* + 3x_4^* = 6,$$

звідки $x_2^* = 6$.

Перевіримо одержану відповідь:

$$x_1^* = 0, x_2^* = 6, x_3^* = 0, x_4^* = 0.$$

Для правильності знайденого розв'язку треба виконати рівняння

$$8x_1^* + 10x_2^* + 12x_3^* + 9x_4^* = 6y_1^* + 3y_2^*,$$

що відповідає тотожності $60 = 60$.

Отже, задача розв'язана правильно.

За розв'язок двоїстої задачі можна взяти координати точки C.

Тоді

$$y_1^* = y_1^{(C)} = 10/3, y_2^* = y_2^{(C)} = 4/3.$$

Обмеження в точці C набувають такого вигляду:

$$2y_1^{(C)} + y_2^{(C)} = 8;$$

$$y_1^{(C)} + 5y_2^{(C)} = 10;$$

$$3y_1^{(C)} + 2y_2^{(C)} > 12;$$

$$3y_1^{(C)} + y_2^{(C)} > 9.$$

Отже, з умов доповнюючої нежорсткості

$$x_3^* = 0, x_4^* = 0.$$

При цьому повинні виконуватися рівняння

$$2x_1^* + x_2^* + 3x_3^* + 3x_4^* = 6,$$

$$x_1^* + 5x_2^* + 2x_3^* + x_4^* = 30$$

внаслідок того, що $y_1^* > 0, y_2^* > 0$.

Таким чином, одержуємо систему двох рівнянь з двома невідомими:

$$2x_1 + x_2 = 6,$$

$$x_1 + 5x_2 = 30.$$

Розв'язок цієї системи: $x_1^* = 0, x_2^* = 6$, тобто таким самим буде розв'язок вихідної задачі лінійного програмування:

$$x_1^* = 0, x_2^* = 6, x_3^* = 0, x_4^* = 0.$$

4.4.5. Цілочислове програмування

Задачі цілочислового програмування (ЗЦЛП) – це задачі, в яких усі або деякі змінні повинні набувати цілих значень. Вони можуть бути повністю цілочисловими або змішаними.

ЗЦЛП можна розв'язувати як ЗЛП без умови цілочисловості змінних, а потім округляти розв'язок з залишком або нестачею. Далі треба перевірити допустимість розв'язання. Використовують цей метод при великих значеннях змінних, коли можна знехтувати помилками округлення.

Недолік методу: потрібно багато машинного часу для розв'язання задач великої розмірності.

Наприклад, оптимальний розв'язок: $x = 2,4; x = 3,5$. Тоді приблизне оптимальне цілочислове розв'язання потребує розгляду чотирьох точок (2;3), (2;4), (3;3), (3;4) і вибору з них допустимої точки з найкращим значенням цільової функції. А при десяти цілочислових змінних треба розглядати $2^{10} = 1024$ варіантів цілочислового розв'язання. Але й це не гарантує оптимальності вибору варіанта.

4.4.5.1. Побудова моделей цілочислового програмування.

ЗЦЛП з фіксованими доплатами

Розглянемо задачу планування виробництва N видів продукції за умови, що виробництво j -го виду продукції пов'язано з постійними

витратами K_j . Величина K_j не залежить від обсягу виробництва цього виду продукції.

Є також змінні витрати. Вартість виробництва одиниці продукції j -го виду дорівнює c_j . Нехай маємо M видів ресурсів і при виробництві одиниці j -го виду продукції витрачається a_{ij} одиниць ресурсу i -го виду. Є можливість реалізувати d одиниць j -го виду за ціною p_j . Запас ресурсів i -го виду обмежений величиною $b_i (i=1,2,...,M)$. Потрібно визначити оптимальні пропорції виробництва продукції з метою одержання максимального чистого прибутку.

4.4.5.2. Формулювання задачі

Величина загальних виробничих витрат дорівнює сумі постійних і змінних витрат і являє собою нелінійну функцію обсягу випуску продукції. Використовуючи булівські $(0,1)$ змінні, можна сформулювати цю задачу у вигляді ЗЦЛП.

Нехай δ_j - булівська змінна. Вона відповідає прийняттю рішення у виробництві j -го виду продукції, тобто

$$\delta_j = \begin{cases} 1, & \text{якщо виробляється } j\text{-й вид продукції,} \\ 0 & \text{- у протилежному випадку.} \end{cases}$$

Нехай $x_j \geq 0$ - обсяг випуску j -го виду продукції. Тоді загальні витрати на виробництво j -го виду продукції складають

$$k_j \delta_j + c_j x_j,$$

де $\delta_j = 1$ при $x_j > 0$, $\delta_j = 0$ при $x_j = 0$.

Тоді цільова функція має такий вигляд:

$$\text{максимізувати } z = \sum_{j=1}^N p_j x_j - \sum_{j=1}^N (k_j \delta_j + c_j x_j).$$

Обмеження по i -му виду ресурсів:

$$\sum_{j=1}^N a_{ij} x_j \leq b_i, i=1,2,...,M.$$

Обмеження, пов'язані з розміром попиту:

$$x_j \leq d_j \delta_j, j=1,2,...,N;$$

$$x_j \geq 0, \delta_j = 0 \text{ або } 1 \forall j.$$

Зауваження. x_j може бути додатним тільки при $\delta_j = 1$. Лише тоді виробництво j -го виду продукції обмежено величиною d_j і в цільову функцію включаються постійні витрати K_j .

4.4.5.3. Перетворення нелінійних задач з булівськими змінними

З а д а ч а: максимізувати $z = x_1^2 + x_2 x_3 - x_3^3$ при обмеженнях
 $-2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 3; x_1, x_2, x_3 \in \{0, 1\}.$

Задача зводиться до еквівалентної ЗЦЛП. Для будь-якого додатного k і булівської змінної x_j має місце співвідношення

$$x_j^k = x_j.$$

Тоді $z = x_1 + x_2 x_3 - x_3$.

Розглянемо $x_2 \cdot x_3$. Для булівських змінних x_2, x_3 цей добуток набуває значень 0 і 1. Проаналізуємо булівську змінну $y_1 = x_2 x_3, y_1 = 1$ при $x_2 = x_3 = 1$. В усіх інших випадках $y_1 = 0$, що виражається за допомогою обмежень

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - y_1 &\leq 1, \\ -x_2 - x_3 + 2y_1 &\leq 0. \end{aligned}$$

Дійсно, при $x_2 = x_3 = 1$ обмеження потребують, щоб $y_1 \leq 1$ і $y_1 \geq 1$, тому $y_1 = 1$.

При $x_2 = 0$ або $x_3 = 0$ $y_1 = 0$, якщо друге рівняння переписати у вигляді

$$y_1 \leq (x_2 + x_3)/2.$$

Таким чином, булівська ЗЦЛП, еквівалентна вихідній нелінійній булівській задачі, має вигляд

$$\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 + x_3 &\leq 3, \\ x_2 + x_3 - y_1 &\leq 1, \\ -x_2 - x_3 + 2y_1 &\leq 0, \end{aligned}$$

де x_1, x_2, x_3, y_1 – булівські змінні.

Процедура перетворення добутку двох змінних узагальнюється у випадку довільного числа змінних.

4.4.5.4. Розв'язання задач цілочислового програмування. Метод гілок і меж

Метод можна застосовувати для цілком цілочислових і змішаних ЗЦЛП. Він має вигляд процедури перебору усіх цілочислових допустимих розв'язків.

П р и к л а д. Максимізувати $z = 3x_1 + 2x_2$ при обмеженнях $x_1 \leq 2, x_2 \leq 2, x_1 + x_2 \leq 3,5$ ($x_1, x_2 \geq 0$ - цілочислові).

Початковий крок - знаходження розв'язку ЗЛП при відкиданні умови цілочисловості x_1, x_2 . Позначимо задачу через ЗЛП-1 (рис. 16).

Оптимальний розв'язок: $x_1 = 2, x_2 = 1,5, z_0 = 9$.

Оскільки x_2 - дробовий, розв'язок не може бути оптимальним для вихідної ЗЛП. Значення z_0 - це верхня межа істинного оптимального цілочислового значення, тому що при виконанні цілочисловості x_2 значення z може лише зменшитися.

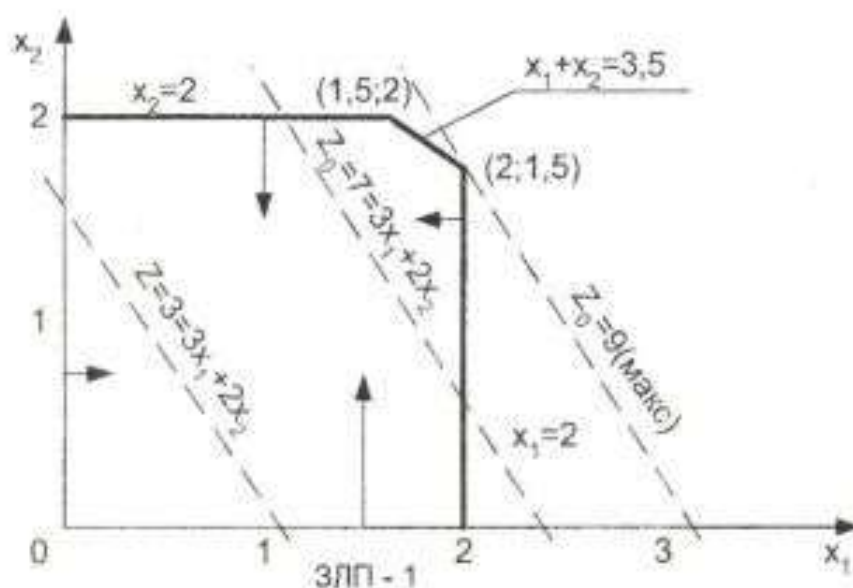


Рис. 16. Розв'язання задачі ЗЛП-1

Наступний крок методу гілок і меж полягає в перегляді цілочислових значень x_2 , більших або менших від 1,5. Це здійснюється додаванням до ЗЛП-1 або обмеження $x_2 \leq 1$, або $x_2 \geq 2$. Таким чином, з ЗЛП-1 одержуємо дві задачі: ЗЛП-2 і ЗЛП-3 (рис. 17, 18).

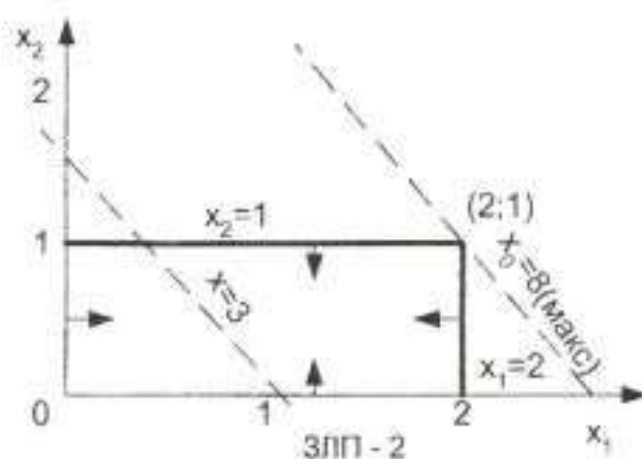


Рис. 17. Розв'язання задачі ЗЛП-2

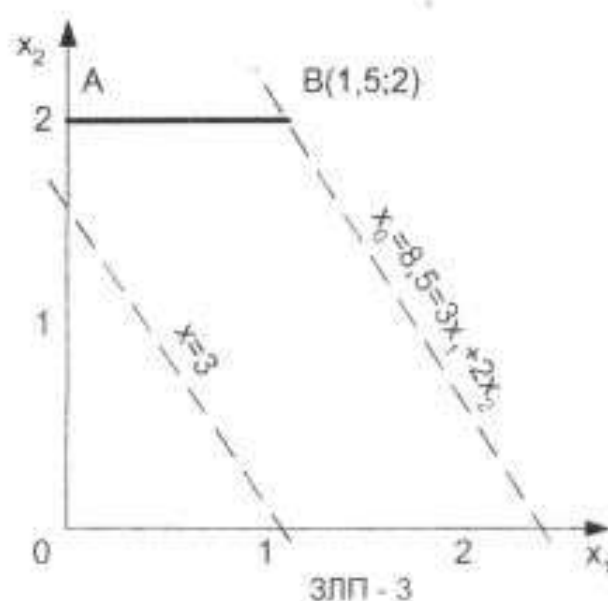


Рис. 18. Розв'язання задачі ЗЛП-3

ЗЛП-2:

максимізувати $z = 3x_1 + 2x_2$

при обмеженнях $\begin{cases} x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 3,5. \end{cases}$

Нове обмеження: $x_2 \leq 1,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

ЗЛП-3:

максимізувати $z = 3x_1 + 2x_2$

при обмеженнях $\begin{cases} x_1 \leq 2, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 + x_2 \leq 3,5. \end{cases}$

Нове обмеження: $x_2 \geq 2,$
 $x_1, x_2 \geq 0.$

4.4.5.5. Властивості допустимих областей ЗЛП-2 і ЗЛП-3

1. Оптимальний розв'язок ЗЛП-1 ($x_1 = 2, x_2 = 1,5$) недопустимий для обох задач. Таким чином, цей розв'язок не повториться.

2. Будь-який допустимий цілочисловий розв'язок вихідної задачі допустимий для ЗЛП-2 і ЗЛП-3. Таким чином, при введенні цих задач не відбуваються втрати допустимих (цілочислових) розв'язків вихідної задачі.

Оптимальний розв'язок ЗЛП-2: $x_1 = 2, x_2 = 1, z_0 = 8$. Таким чином, дістано допустимий (цілочисловий) розв'язок вихідної змішаної ЗЛЦП. Навіть якщо ЗЛП-2 має інші нецілочислові розв'язки, значення цільової функції в них не може бути більше восьми.

Оскільки раніше була одержана лише верхня межа $z = 9$, не можна стверджувати, що розв'язок ЗЛП-2 оптимальний для вихідної задачі. Отже, необхідно розглянути ЗЛП-3. Оптимальний розв'язок ЗЛП-3: $x_1 = 1.5, x_2 = 2, z_0 = 8.5$. Для вихідної змішаної задачі ЦЛП цей розв'язок недопустимий, тому що x_1 має дробове значення. Оптимальне значення $z_0 = 8.5$ ЗЛП-3 більше, ніж раніше одержана нижня межа, що дорівнює восьми. Тому необхідно перевірити існування в допустимій області ЗЛП-3 цілочислового розв'язку, що дає значення цільової функції $z \geq 8$. Для цього слід розглянути ЗЛП-4, ЗЛП-5, які можна дістати при додаванні до ЗЛП-3 обмежень $x_1 \leq 1$ і $x_1 \geq 2$ (рис. 19).

Допустима область ЗЛП-4 складається з відрізка DE. ЗЛП-5 не має допустимих розв'язків.

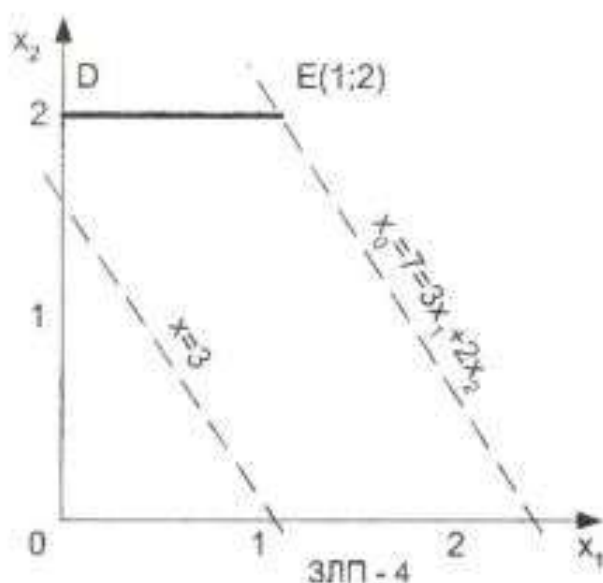


Рис. 19. Розв'язання задачі ЗЛП-4

Оптимальний розв'язок ЗЛП-4 має вигляд: $x_1 = 1, x_2 = 2, z_0 = 7$. Отже, для будь-якого цілочислового розв'язку в допустимій області ЗЛП-4 значення цільової функції не перевищує семи. Таким чином, точка

$x_1 = 2, x_2 = 1$ є оптимальним цілочисловим розв'язком вихідної задачі, z^* цільової функції дорівнює восьми. Послідовність ЗЛП, що виникає при використанні процедури метода гілок і меж для розв'язання задач, зручно подати у вигляді сітки чи дерева. Сітка чи дерево складається з безлічі вершин дуг і гілок, які з'єднують їх (рис. 20). Кожна вершина є або початковою, або кінцевою точкою деякої гілки.

Вершину 1 (ЗЛП-1) одержують з вихідної задачі при відкиданні вимог цілочисловості змінних.

Галуження у вершині 1, що визначається цілочисловою змінною x_2 за допомогою обмеження $x_2 \leq 1$, приводить до вершини 2 (ЗЛП-2). Оскільки ЗЛП-2 має оптимальний цілочисловий розв'язок, немає необхідності робити галуження у вершині 2 (кажуть, що ця вершина прозондована). Галуження у вершині 1 за обмеженням $x_2 \geq 2$ дає ЗЛП-3 (вершина 3). Тому що оптимальний розв'язок ЗЛП-3 дробовий, має місце подальше галуження у вершині 3 за цілочисловою змінною x_1 . Таким чином, виникають вершини 4 і 5. Ці вершини - прозондовані, тому що ЗЛП-4 має цілочисловий розв'язок, а ЗЛП-5 не має допустимих розв'язків.

Найкращим розв'язком з одержаних у прозондованих вершинах є оптимальний. Це вершина 2 (ЗЛП-2), де $x_1 = 2, x_2 = 1, z_0 = 8 = z^*$.

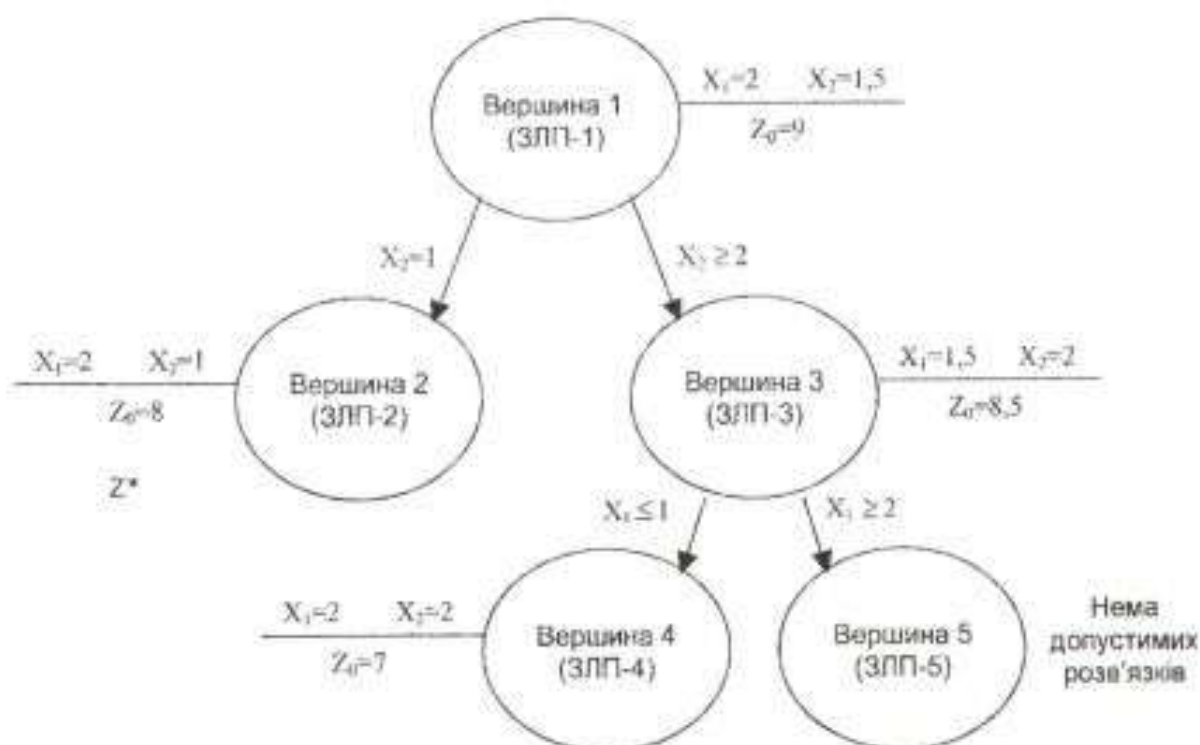


Рис. 20. Послідовність розв'язання задачі методом меж і гілок

4.4.5.6. Опис алгоритму гілок і меж. Цілочислова задача

Максимізувати z – сх при обмеженнях $Ax = b; x \geq 0; x_j$ – цілочислова змінна при $j \in J$, де J – велика кількість індексів цілочислових змінних задачі.

Перший крок. Розв'язати сформульовану задачу як ЗЛП з безперервними змінними (рис. 21). Одержану таким чином задачу позначити як ЗЛП-1, оптимальне значення її цільової функції – через z_1 .

Нехай в оптимальному розв'язку ЗЛП-1 деякі цілочислові змінні набувають дробових значень. У цьому випадку оптимальний розв'язок вихідної задачі збігається з оптимальним розв'язком ЗЛП-1. Тоді z_1 – верхня межа оптимального значення z вихідної задачі.

Другий крок. Здійснити галуження по одній з цілочислових змінних, яка має дробове значення в оптимальному розв'язку ЗЛП-1.

Правила визначення змінної, по якій проводиться галуження:

1. Вибір цілочислової змінної, значення якої в оптимальному розв'язку ЗЛП-1 має найбільше дробове значення.
2. Приписування цілочисловим змінним пріоритетів і галуження по змінній з невеликим пріоритетом: змінна являє собою важливий розв'язок у рамках розглядуваної моделі.

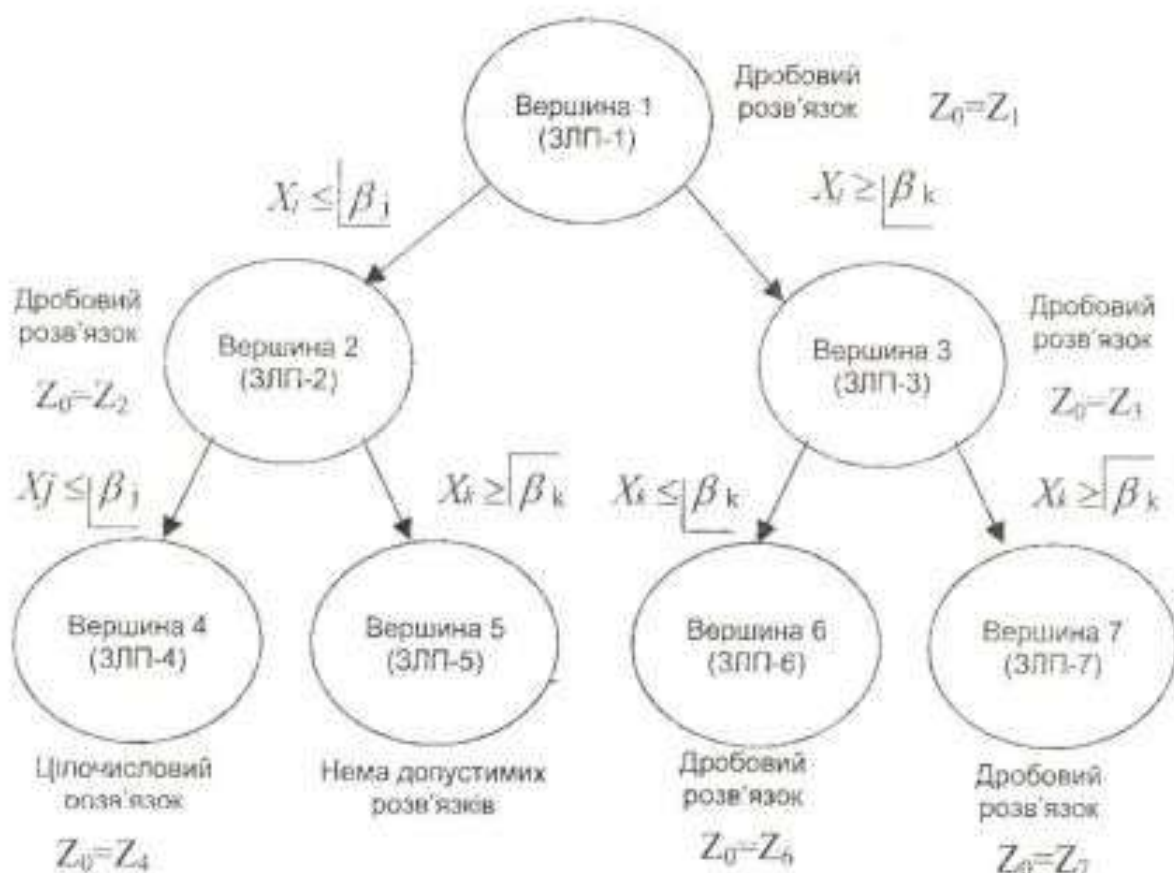


Рис. 21. Алгоритм розв'язання задачі цілочислового програмування методом меж і гілок

Її коефіцієнт вартості або прибутку в цілочисловій функції суттєво переважає інші; значення даної змінної відіграє ключову роль для моделі (на думку розробників і тих, хто користується моделлю).

3. Довільні правила вибору. Наприклад, можна вибрати змінну з найменшим номером.

Нехай галуження відбувається за цілочисловою змінною x_j , дробове значення якої в оптимальному розв'язку ЗЛП-1 дорівнює β_j .

Далі треба розглянути дві нові задачі - ЗЛП-2 і ЗЛП-3, які одержують введенням обмежень $x_j \leq \lfloor \beta_j \rfloor$ і $x_j \geq \lceil \beta_j \rceil$, де $\lfloor \beta_j \rfloor$ - найбільше ціле, яке не перевищує β_j , $\lceil \beta_j \rceil$ - найменше ціле, більше від β_j .

Умови ЗЛП-2 і ЗЛП-3:

ЗЛП-2

максимізувати $Z = cX$
при обмеженнях $AX = b$,

$$x_j \leq \lfloor \beta_j \rfloor, \\ x \geq 0.$$

ЗЛП-3

максимізувати $Z = cX$
при обмеженнях $AX = b$,

$$x_j \geq \lceil \beta_j \rceil, \\ x \geq 0.$$

Нехай оптимальні розв'язки ЗЛП-2 і ЗЛП-3 містять дробові значення цілочислових змінних і не є допустимими для вихідної задачі.

Третій крок. Вибрати ЗЛП-2 або ЗЛП-3 і здійснити галуження у відповідній вершині, вводячи нові обмеження:

1. Використання оптимального значення цільової функції, тобто вибір вершини, що відповідає найбільшому оптимальному значенню цільової функції ЗЛП. (Допустима область ЗЛП із найбільшим значенням Z може містити й хороший цілочисловий розв'язок).
2. "Останнім прибув – першим обслужений". Цей вислів означає, що для подальшого галуження потрібна ЗЛП, яка розв'язувалася б останньою. Потім відбувається її вибір.

Далі потрібно вибрати цілочислову змінну, яка має в оптимальному розв'язку відповідної ЗЛП дробове значення, і здійснити галуження по цій змінній.

Процес галуження та розв'язання ЗЛП продовжують до одержання цілочислового оптимального розв'язку однієї з ЗЛП.

Значення z у даній точці являє собою нижню межу оптимального значення цільової функції вихідної ЗЛП. На цьому етапі необхідно відкинути всі вершини ЗЛП, для яких оптимальне значення z не перевищує одержаної нижньої межі. Ці вершини є прозондованими, тому що у відповідних їм допустимих областях нема цілочислових розв'язків, кращих за ті, що вже є.

Цілочисловий оптимальний розв'язок ЗЛП-4 дає нижню межу z_4 , тобто оптимальний розв'язок вихідної задачі не може мати значення z , меншого, ніж z_4 . Подальше галуження у вершині 4 зайве, тому що для будь-якої з наступних ЗЛП оптимальне значення не може бути більше від z_4 . Вершина 4 прозондована.

Вершина 5 прозондована, оскільки допустимі обмеження, що вводяться, приводять до відсутності допустимих розв'язків у цій ЗЛП.

Подальше галуження можливе у вершинах 6 і 7. Нехай $z_6 < z_4, z_7 > z_4$. Це означає, що вершина 6 прозондована неявним чином. Дійсно, значення z , що відповідає цілочисловому розв'язку задачі при галуженні вершини 4, не повинно перевищувати z_4 . Але тому що $z_7 > z_4$, у допустимій області ЗЛП-7 може знайтися цілочисловий розв'язок зі значенням $z > z_4$. Таким чином, для подальшого галуження необхідно вибрати вершину 7.

Отже, проміжна вершина ЗЛП є прозондованою (явно або неявно), якщо вона задовольняє хоча б одну з трьох умов:

1. Оптимальний розв'язок у заданій вершині цілочисловий, тобто одержаний розв'язок допустимий для вихідної ЗЦЛП.
2. ЗЛП, що відповідає розглядуваній вершині, не має допустимих розв'язків.
3. Оптимальне значення z відповідної ЗЛП не перевищує поточну нижню межу. Вибір відбувається доти, доки не залишиться хоча б одна непрозондована вершина. Прозондована вершина з найкращим значенням z дає оптимальний розв'язок вихідної задачі. Умову 3 не можна застосовувати для одержання нижньої межі ЗЦЛП, тобто вершини, що задовольняє умову 1.

Допустимий цілочисловий розв'язок ЗЦЛП, одержаний до реалізації методу гілок і меж, дає початкову нижню межу, яку використовують до одержання кращої нижньої межі в процесі галуження.

4.4.6. Типові варіанти застосування програмування в управлінні виробництвом

1. Укрупнене планування виробництва: складання графіків виробництва, що мінімізують загальні витрати, з урахуванням витрат, пов'язаних зі зміною процентної ставки, заданих обмежень по трудових ресурсах та рівнем запасів.

2. Планування асортименту виробів: визначення оптимального асортименту продукції, в якому кожному її виду властиві свої витрати або потреби в ресурсах, наприклад: визначення оптимальної структури виробництва складових для бензину, фарб, продуктів споживання для

людини, кормів для тварин.

3. Маршрутизація виробництва виробів: визначення оптимального технологічного маршруту виготовлення виробів, що мають бути послідовно пропущені через декілька обробляючих центрів, причому кожна операція центру характеризується своїми витратами і продуктивністю.

4. Управління технологічним процесом, наприклад, зведення до мінімуму виходу стружки при різанні сталі або відходи шкіри чи тканини в рулоні та інше.

5. Регулювання запасів: визначення оптимального поєднання продуктів на складі або у сховищі.

6. Календарне планування виробництва: складання календарних планів, що мінімізують витрати з урахуванням витрат на утримування запасів, сплачування понаднормової роботи і заказів на стороні.

7. Планування розподілу продукції: складання оптимального графіку відвантажування з урахуванням розподілу продукції поміж виробничими підприємствами і складами, а також магазинами роздрібної торгівлі.

8. Визначення оптимального місця розташування нового заводу: визначення витрат на транспортування між альтернативними місцями розташування нового заводу і місцями його постачання і збуту готової продукції.

9. Календарне планування транспорту: мінімізація витрат, наприклад, подача ваговозів під навантажування і транспортних судів до вантажних причалів.

10. Розподіл робочих: мінімізація витрат при розподілі робочих по станках і робочих місцях.

11. Перевантаження матеріалів: мінімізація витрат при маршрутизації руху засобів перевантаження матеріалів (наприклад автонавантажувачів) між підрозділами заводу і при доставці матеріалів з відкритого складу до місць їх переробки на вантажних автомобілях різноманітної вантажопідйомності і з різними техніко-економічними характеристиками.

4.5. Класичні умови екстремуму.

Метод множників Лагранжа

Цей метод множників для задач з обмеженнями-рівняннями: $g_i(x) = b_i$, $i = \overline{1, m}$. Дана задача з цільовою функцією $z = f(x_1, x_2)$ і одним обмеженням $g(x_1, x_2) = b$. (Вимоги невід'ємності та цілочисловості x_1, x_2 відсутні) (рис. 22).

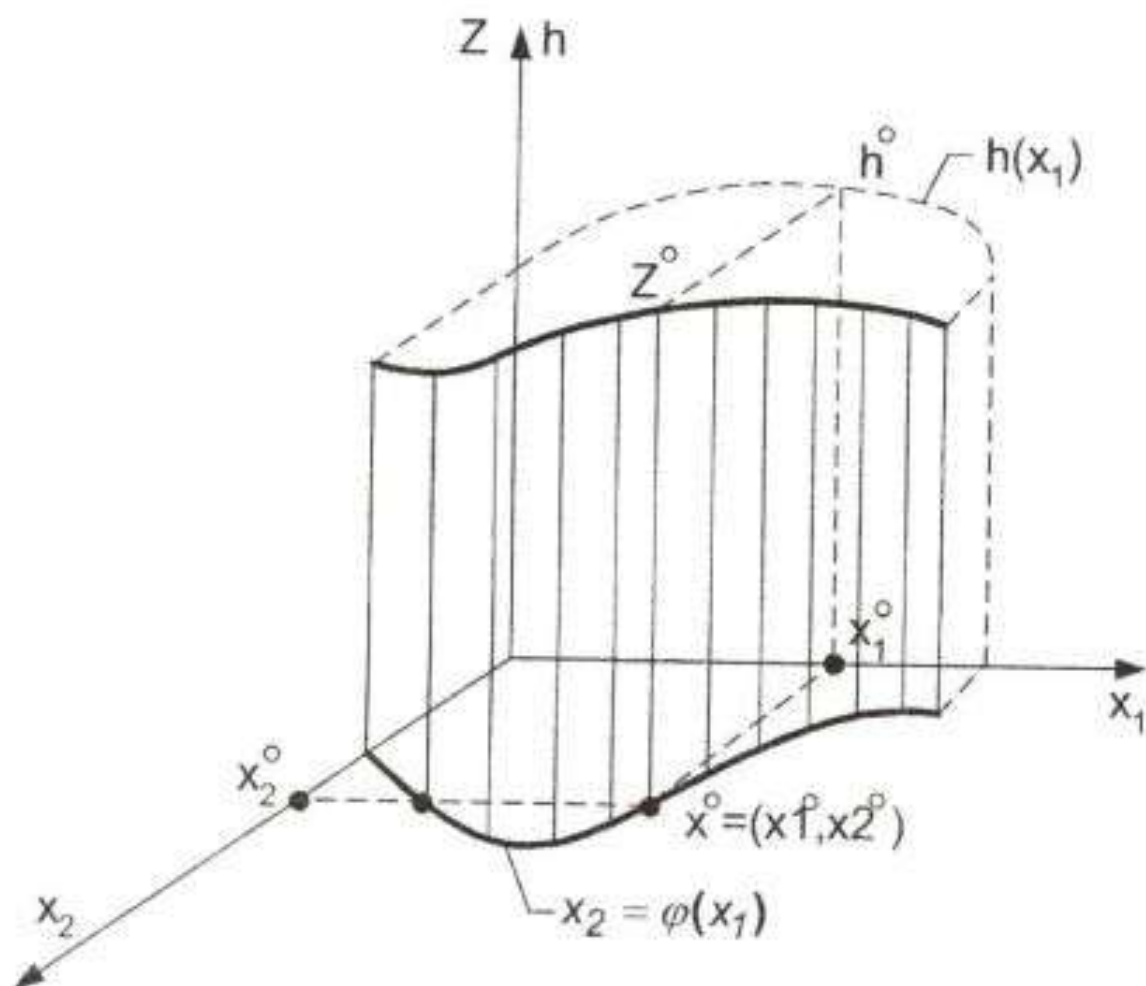


Рис. 22. Графік функції $z = f(x_1, x_2)$

Функції $f(x_1, x_2)$ і $g(x_1, x_2)$ безперервно диференційовані. Властивості $g(x_1, x_2)$ такі, що з рівняння $g(x_1, x_2) = b$ виходить: $x_2 = \varphi(x_1)$, тобто x_2 виражається в явному вигляді через x_1 .

Потрібно одержати необхідні умови, які повинна задовольняти точка локального екстремуму z .

Оскільки $x_2 = \varphi(x_1)$, то $z = f(x_1)$, $\varphi(x_1) = h(x_1)$.

Обмеження $g(x_1, x_2) = b$ означає, що з усіх точок площини x_1, x_2 інтерес становлять точки, що лежать на лінії $x_2 = \varphi(x_1)$.

Якщо в будь-якій з цих точок z досягає точок локального екстремуму, то і $h(x_1)$ досягає екстремуму h^0 . При цьому він не є умовним, тому що спосіб побудови функції $h(x_1)$ враховує вихідні обмеження і додаткових вимог до x_1 ставити не треба.

Отже, екстремальну точку x_1^0 (першу координату точки x^0) можна знайти з рівняння

$$\left[\frac{dh(x_1)}{dx_1} \right]_{x_1^0} = 0.$$

Враховуючи, що $h(x_1) = f(x_1, \varphi)$,

$$\frac{dh}{dx_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dx_1} \quad \text{і} \quad \frac{d\varphi}{dx_1} = - \frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2},$$

одержуємо
$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1} - \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \frac{\partial g / \partial x_1}{\partial g / \partial x_2} \right]_{x^0} = 0.$$

Позначивши $\lambda = \frac{\partial f / \partial x_2}{\partial g / \partial x_2}$ і припускаючи, що $\partial g / \partial x_2$ не дорівнює нулю,

зводимо рівняння до вигляду

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0,$$

звідки

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0.$$

Це означає, що шукані необхідні умови існування екстремуму можуть бути подані як

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0.$$

Отже,

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2} = 0, \quad g(x_1, x_2) - b = 0. \quad (24)$$

Спільні розв'язки рівняння (24) відносно x_1, x_2 дозволяють знайти всі точки, в яких очікується локальний екстремум функції z .

Систему (24) можна одержати й іншим формальним шляхом. Для цього достатньо за даними задачі скласти суму

$$f(x_1, x_2) + \lambda [b - g(x_1, x_2)] = \Phi(x_1, x_2, \lambda),$$

а потім прирівняти до нуля частинні похідні

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial \lambda},$$

вважаючи x_1, x_2, λ незалежними змінними ($\Phi(x_1, x_2, \lambda)$ - це функція Лагранжа, а λ - множник Лагранжа).

Суть методу множників полягає у пошуку розв'язання системи (24) з наступною перевіркою достатніх умов екстремуму в усіх знайдених точках x^0 , у порівнянні одержаних результатів і виборі найкращих з них. Цим і визначаються глобально оптимальні x^0, z^0 .

У випадку довільного числа змінних n і обмежень-рівнянь $m (m < n)$ функція Лагранжа має вигляд

$$\Phi(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(x)],$$

де x, λ - вектори $(x_1, \dots, x_n); (\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Необхідні умови локального екстремуму:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial x_j} &= \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} = 0; \\ \frac{\partial \Phi(x, \lambda)}{\partial \lambda_i} &= b_i - g_i(x) = 0, \end{aligned} \quad (25)$$

тобто для відшукування точок x^0 доводиться розв'язувати систему $(m+n)$ рівнянь. При цьому не обов'язково, щоб кожне її розв'язання надавало умовний екстремум Z , але кожна точка, в якій такий екстремум досягається, повинна відповідати умовам (25).

Недоліком методу є розв'язання громіздких рівнянь, що не завжди вдається. І, крім того, мають місце випадки, коли екстремальні точки явно існують, але системи (24) або (25) не можна розв'язати.

Ці складності можна зменшити, якщо функцію Лагранжа задати у вигляді

$$\Phi(x, \lambda) = \lambda_0 \cdot f(x) + \sum_{i=1}^m \lambda_i [b_i - g_i(x)].$$

П р и к л а д. Необхідно визначити максимальний об'єм вагонетки за умови, що зазори між вагонеткою та стінками тунелю не будуть менше заданих. Довжину вагонетки вибирають з міркувань, не пов'язаних з максимізацією, тому формально треба знайти довжину сторін прямокутника максимальної площини, вписаного в коло радіусом $r = \rho - \delta$ (рис. 23); x_1, x_2 - координати вершини 1. Тоді $z = 4x_1 \cdot x_2$, $x_1^2 + x_2^2 = r^2$.

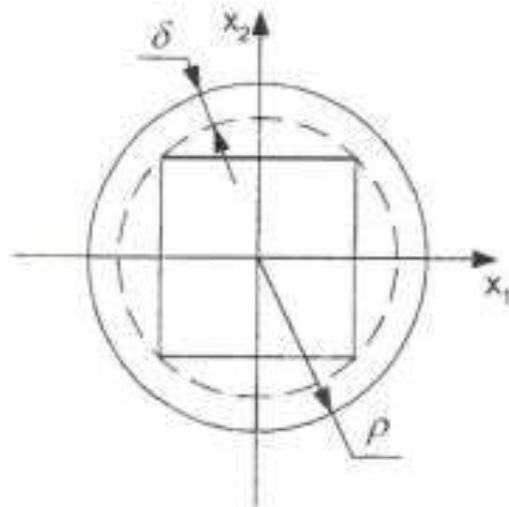


Рис. 23. Визначення максимального об'єму вагонетки

Похідна $\frac{\partial g}{\partial x_2} = 2x_2$ відрізняється від нуля, і тому можна застосувати метод множників Лагранжа.

Функція Лагранжа має вигляд

$$\Phi(x_1, x_2, \lambda_0, \lambda) = 4\lambda_0 x_1 \cdot x_2 + \lambda(r^2 - x_1^2 - x_2^2).$$

Прирівнюємо до нуля її похідні:

$$4\lambda_0 x_2 - 2\lambda \cdot x_1 = 0,$$

$$4\lambda_0 x_1 - 2\lambda \cdot x_2 = 0,$$

$$r^2 - x_1^2 - x_2^2 = 0.$$

Звідси виходить, що

$$x_1^0 = \frac{r}{\sqrt{2}}; x_2^0 = \frac{r}{\sqrt{2}}; \lambda_0^0 = 1; \lambda_0 = 2; x_1^0 = x_2^0.$$

4.6. Динамічне програмування

Динамічне програмування - це метод оптимізації багатоетапних процесів прийняття рішення.

Необхідність приймати рішення виникає тоді, коли здійснюються цілеспрямовані дії, наприклад, система переводиться управлінськими діями з одного стану в інший або розробляється послідовність формальних перетворень у пошуку екстремуму функції. Якщо в реальній задачі подібні випадки з'являються періодично, то виникає процес прийняття рішень.

Хід таких процесів заздалегідь не визначений. Його треба організувати так, щоб одержати найбільший ефект за прийнятим критерієм ефективності дій (z). Формально це означає намагання мінімізувати (максимізувати) величину z .

Припустимо, що розглядуваний процес можна поділити на N етапів, а дії, що здійснюються на r -му етапі, характеризуються показниками $(u_{r1}, \dots, u_{rm}) = U_r$.

Стан процесу на початок r -го етапу зумовлений параметрами $(\pi_{r1}, \dots, \pi_{rR}) = Q_r$.

Звичайно застосовувані дії не є повністю довільними, а залежать від стану Q_r , що виникає перед r -м кроком, тобто $U_r = U_r(Q_r)$.

Очевидно, що результуюче значення критерію z по закінченні процесу буде визначатися прийнятими раніше $U_r (r = 1, N)$, тобто $z = z(U_1, \dots, U_N)$.

Як вибрати $U_1, \dots, U_N$, щоб z набуло екстремального значення?

Ідея динамічного програмування полягає в тому, щоб проводити

оптимізацію поетапно, при цьому послідовно аналізується кожний етап процесу в пошуках найкращого варіанта його продовження (послідовна оптимізація).

Таким чином, застосовність методу полягає в можливості поділу процесу прийняття рішень на ряд однотипних етапів, кожний з яких планується окремо, але з урахуванням результатів, що були одержані на інших етапах.

4.6.1. Принципи динамічного програмування

Принцип оптимальності. Завжди необхідно забезпечувати оптимальне за прийнятим критерієм продовження процесу відносно вже досягнутого його стану, тобто рішення наступного етапу має бути прийнято з урахуванням результату на всіх попередніх етапах.

Принцип укладення. Природа задачі, що допускає динамічне програмування, не змінюється при зміні кількості етапів, тобто форма задачі інваріантна відносно N .

Виходячи з принципів динамічного програмування, можна стверджувати, що рішення, прийняте на черговому етапі, є найкращим з позиції усього процесу, а не окремого етапу.

Послідовність рішень одно-, двох- і т.д.-етапних задач приведе до вирішення вихідної N -етапної задачі.

Схеми динамічного програмування будуються так, що першим досліджується кінцевий етап явища, що вивчається в задачі, оскільки він може бути вивченим і спланованим у найкращий за критерієм z спосіб як завершувальний етап. Зробити це можна на основі припущення про очікувані результати попереднього етапу, тобто про значення Q_N . Це дає набір умовно оптимальних розв'язків

$$U_{Nopt}/Q_N.$$

Потім дослідження необхідно повторити стосовно до попереднього етапу процесу за умови, що ефект, який виражається в екстремальних значеннях z , був досягнений не на цьому етапі окремо, а на двох останніх етапах разом. Це дає другий набір умовно оптимальних розв'язків $(U_{N-1}, U_N)_{opt}/Q_{N-1}$, що враховують результати U_{Nopt} .

Одержавши далі третій, четвертий і т.д. набори умовно оптимальних розв'язків, можна знайти розв'язок задачі в цілому: $(U_1, U_2, \dots, U_N)_{opt}/Q_1$.

П р и к л а д. Знайти найкоротший транспортний маршрут при відомій мережі доріг (рис. 24.)

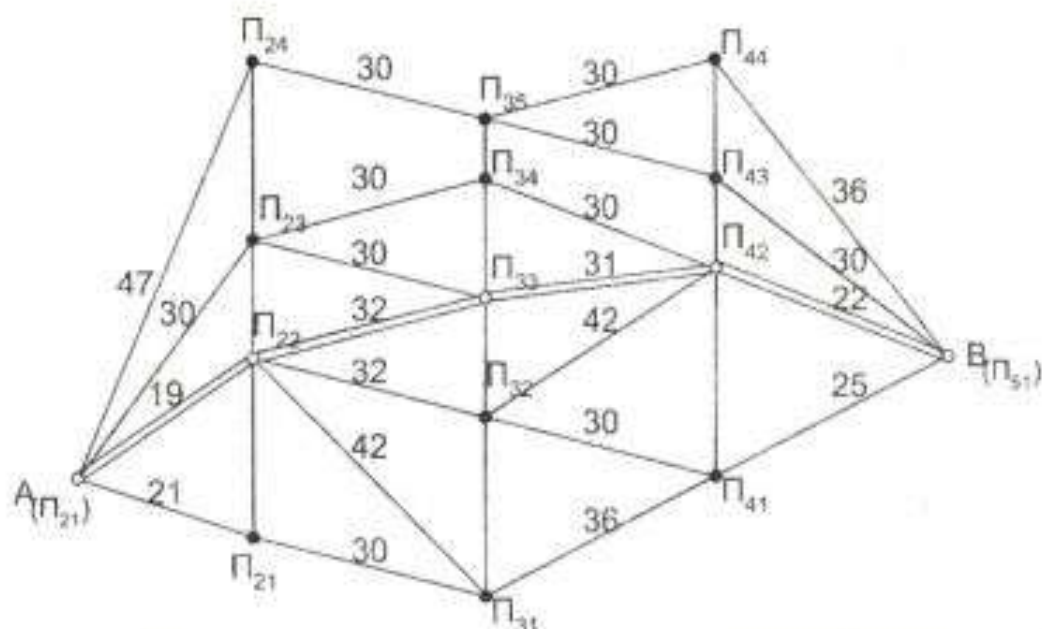


Рис. 24. Можливі маршрути переходу з пункту А до пункту В

Прийняття наступного розв'язку рівнозначно вибору напрямку з вузлового пункту, куди потрапив об'єкт. Етап процесу - це пересування об'єкта з одного пункту до іншого за допустимим маршрутом.

Стан процесу на початок чергового етапу характеризується місцезнаходженням об'єкта (π_{ij}).

Критерієм ефективності дій є пройдена відстань, що підлягає мінімізації.

Розв'язання починається з останнього (четвертого) етапу. Результатом дій об'єкта на третьому етапі є вихід у точку π_{41} (аналогічно - в точку $\pi_{42}; \pi_{43}; \pi_{44}$). Тоді найкоротшим і єдиним шляхом до пункту В буде $\pi_{41}\pi_{51} = U_{41opt}$ (аналогічно $\pi_{42}\pi_{51} = U_{42opt}; \pi_{43}\pi_{51} = U_{43opt}; \pi_{44}\pi_{51} = U_{44opt}$). Це перший набір умовно оптимальних розв'язків.

На початок третього етапу розв'язок має вигляд, показаний у табл. 7,

Таблиця 7

Стан	Найкраще продовження (найкоротший шлях)
π_{31}	$\pi_{31}\pi_{41}\pi_{51} = U_{31opt}$
π_{32}	$\pi_{32}\pi_{41}\pi_{51} = U_{32opt}$
π_{33}	$\pi_{33}\pi_{42}\pi_{51} = U_{33opt}$
π_{34}	$\pi_{34}\pi_{42}\pi_{51} = U_{34opt}$
π_{35}	$\pi_{35}\pi_{43}\pi_{51} = U_{35opt}$

і виконується вимога досягнення найбільшого ефекту на двох останніх

етапах.

На початок другого етапу розв'язок має вигляд, показаний у табл. 8.

Таблиця 8

Стан	Найкраще продовження (найкоротший шлях)
π_{21}	$\pi_{21}\pi_{31}\pi_{41}\pi_{51}$
π_{22}	$\pi_{22}\pi_{33}\pi_{42}\pi_{51}$
π_{23}	$\pi_{23}\pi_{34}\pi_{42}\pi_{51}$
π_{24}	$\pi_{24}\pi_{35}\pi_{43}\pi_{51}$

Для точки А порівняємо відстані $(\pi_{11}\pi_{21} + u_{21opt})$, $(\pi_{11}\pi_{22} + u_{22opt})$, $(\pi_{11}\pi_{23} + u_{23opt})$, $(\pi_{11}\pi_{24} + u_{24opt})$ і виберемо найменший шлях $\pi_{11}\pi_{22}\pi_{33}\pi_{42}\pi_{51}$.

Оптимальність досягнута за критерієм мінімуму довжини шляху, що пройшов об'єкт. За іншими критеріями (враховуючи, наприклад, небезпеку) можуть бути інші розв'язки.

Переваги методу динамічного програмування

1. Існує можливість розв'язання задач, що раніше не розв'язувалися (варіаційні задачі з обмеженнями-нерівностями).
2. Пошук оптимальних розв'язків спрощується за рахунок скорочень обсягів обчислень (комбінаторні задачі).
3. Як обчислювальний метод він допускає широке застосування ЕОМ при проведенні досліджень.

Недоліки методу динамічного програмування

1. Відсутність універсального алгоритму розв'язання.
2. Труднощі при проведенні аналізу задач великих розмірів.

Бібліографічний список

1. Barmish B.R., Shi Z.A. A simple test for robust stability of delay systems // Ibid. – 1988. P. 92 - 97.
2. Forrester, Jay W. 1961. Industrial Dynamics. Portland, OR: Productivity Press. - 464 p.
3. Fu M., Olbrot A.W., Polis M.P. Robust stability for time delay systems: the edge theorem and graphical test // IEEE Trans. – 1989. – AS. 34, 18, P. 813 - 820.
4. Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. – М.: Наука, 1988. – 448 с.
5. Литвак Б.Г. Управленческие решения: Учебник. – М.: Наука, 1998. – 320 с.
6. Моисеев Н.Н. Математические задачи системного анализа. – М.: Наука, 1981. – 226 с.
7. Науман Э. Принять решение, но как? – М.: Мир, 1987. – 198 с.
8. Орлов А.И. Сертификация и статистические методы // Заводская лаборатория. - 1997. - Т. 63, - № 3. - С. 55 - 62.
9. Орлов А.И. Устойчивость в социально-экономических моделях. – М.: Наука, 1979. – 296 с.
10. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. – М.: Наука, 1982. – 254 с.
11. Поляк Б.Т., Цыпкин Я.З. Частотные критерии робастной устойчивости и апериодичности линейных систем // АиТ. – 1990. - № 9. – С. 45 - 54.
12. Фатхутдинов Р.А. Разработка управленческого решения: Учеб. пособие. – М.: Наука, 1997. – 379 с.
13. Харитонов В.Л. Семейства устойчивых квазиполиномов // АиТ. – 1991. - № 7. – С. 75 - 88.
14. Основы принятия управленческих решений / В.А. Резчик, В.А. Пильщиков, В.А. Макаренко, А.И. Лысенко, С.М. Целуйкин. – Учеб. пособие. – Харьков: Харьк. авиац. ин-т, 1996. – 107 с.
15. Дегтярев Ю.И. Исследование операций: Учебник для вузов по специальности АСУ. – М.: Высш. шк., 1986. – 320 с.
16. Математические методы и модели в планировании и управлении: Сборник задач / С.А. Кулиш, С.Н. Воловельская, А.И. Жилин, А.С. Пилипенко. – Киев: Вища шк., 1985. – 239 с.
17. Мескон М.Х., Альберт М., Хедоури Ф. Основы менеджмента / Пер. с англ. – М.: Дело, 1992. – 702 с.
18. Терехов Л.Л. Кибернетика для экономистов. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 191 с.

ЗМІСТ

1. СУТЬ ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ	3
2. КЛАСИФІКАЦІЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ	4
2.1. ОРГАНІЗАЦІЙНІ РІШЕННЯ	9
2.2. ПСИХОЛОГІЧНИЙ АСПЕКТ У ПРОЦЕСІ ПРИЙНЯТТЯ УПРАВЛІНСЬКИХ РІШЕНЬ	10
2.3. ІНТУЇТИВНІ РІШЕННЯ	11
2.4. РІШЕННЯ, ОСНОВАНІ НА СУДЖЕННЯХ	11
2.5. РАЦІОНАЛЬНІ РІШЕННЯ	11
2.6. РАЦІОНАЛЬНЕ ВИРІШЕННЯ ПРОБЛЕМ	12
2.7. ЕТАПИ РАЦІОНАЛЬНОГО ВИРІШЕННЯ ПРОБЛЕМ	12
3. ПРАВИЛА, РІШЕННЯ, ІНФОРМАЦІЯ	19
3.1. ПРОЦЕС ПРИЙНЯТТЯ РІШЕННЯ	22
3.2. ПРАВИЛА	23
3.3. ВИЯВЛЕННЯ КЕРІВНИХ ПРАВИЛ	24
3.4. ЯВНІ ТА НЕЯВНІ РІШЕННЯ	26
3.5. УВЕДЕННЯ У ФУНКЦІЇ РІШЕНЬ	27
3.6. ВИЗНАЧЕННЯ ФОРМИ РІШЕННЯ	28
3.7. ФАКТОРИ, ЩО ПІДЛЯГАЮТЬ ВРАХУВАННЮ	28
3.8. НАПРЯМОК ЕФЕКТУ	29
3.9. СИЛА ВПЛИВІВ ФУНКЦІЇ РІШЕННЯ	29
3.10. НЕЛІНІЙНІ ФУНКЦІЇ РІШЕННЯ	29
4. КІЛЬКІСНІ МЕТОДИ І МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ	31
4.1. МОДЕЛЮВАННЯ	32
4.2. ТИПИ МОДЕЛЕЙ	33
4.3. ЗАГАЛЬНІ ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ	36
4.4. ЛІНІЙНЕ ПРОГРАМУВАННЯ	37
4.5. КЛАСИЧНІ УМОВИ ЕКСТРЕМУМУ. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА	79
4.6. ДИНАМІЧНЕ ПРОГРАМУВАННЯ	83
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК	87

2432 N 51082M - 51083M
2442 N 51084M - 51085M
Навчальне видання
3602 N 51086M - 51121M

Вартанян Василь Михайлович
Чумаченко Ігор Володимирович
Резчик Володимир Андрійович
Лисенко Олександр Іванович

Прийняття управлінських рішень

Частина 1
Методи та моделі

Редактори: С.П. Гевло, Л.О. Кузьменко

Зв. план, 2002
Підписано до друку 18.09.2002
Формат 60x84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк.
Ум.-друк. арк. 4,9. Обл.-вид. арк. 5,56. Т. 500 прим.
Замовлення 466. Ціна вільна

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр "ХАІ"

61070, Харків-70, вул. Чкалова

izdat@khai.edu

Научно-техническая
библиотека
"ХАИ"



mt0051082