

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

В. О. Меньшиков, В. В. Усик

ДИНАМІКА МЕХАНІЗМІВ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2016

УДК 621.01:531.8(075.8)
ББК 22.21я73
М51

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. О. К. Морачковський;
канд. техн. наук, доц. О. І. Зінченко

Меньшиков, В. О.

М51 Динаміка механізмів [Текст] : навч. посіб. / В. О. Меньшиков, В. В. Усик. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2016. – 88 с.

ISBN 978-966-662-479-9

Розглянуто основні задачі динаміки механізмів. Наведено класифікацію й характеристику сил, які діють у них. Викладено методи силового розрахунку механізмів, визначено закони, режими й способи регулювання руху механізмів.

Для студентів механічних спеціальностей, які вивчають курс «Теорія механізмів і машин» і виконують практичні завдання з динамічного дослідження механізмів.

Іл. 48. Бібліогр.: 3 назви

УДК 621.01:531.8(075.8)
ББК 22.21я73

© Меньшиков В. О., Усик В. В., 2016
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2016

ISBN 978-966-662-479-9

ПЕРЕДМОВА

У динаміці механізмів досліджується рух ланок з урахуванням сил, що діють на них. Тільки після динамічного дослідження можна отримати справжню картину силової взаємодії ланок механізму і справжні закони їх руху. Механізм, спроектований без урахування динамічних факторів, матиме низькі надійність і продуктивність.

Динамічне дослідження механізмів – складна й багатопланова проблема.

Неможливо виконати динамічне дослідження без синтезу й кінематичного аналізу механізму, без знання системи зовнішніх сил, прикладених до ланок механізму. Величини сил, що діють на ланки, характер їх дії й точки прикладення зусиль змінюються під час роботи механізмів, тобто змінюються умови навантаження. Змінення умов навантаження призводить до появи прискорень, що спричиняють інерційні впливи на ланки механізмів. Таким чином, кінематичні параметри ланок визначаються системою зовнішніх сил, масами й розмірами ланок і їх формою.

Визначення законів руху ланок механізмів з певною геометричною формою, розмірами й масами під дією відомих зовнішніх силових факторів і законів їх змінення в часі називають динамічним розрахунком.

1. ЗАДАЧІ ДИНАМІКИ МЕХАНІЗМІВ

Динамічне дослідження механізмів базується на принципах, законах і теоремах теоретичної механіки.

Розрізняють дві основні задачі динаміки механізмів машин:

1. Пряма задача динаміки, яка має назву *силовий аналіз механізмів*, – визначення зовнішніх сил і реакцій у кінематичних парах, які забезпечують цей рух, при заданому законі руху механізму.

2. Обернена задача динаміки – **визначення закону руху механізму** при заданих зовнішніх силах, що діють на ланки механізму.

У динаміці механізмів вирішуються такі завдання: регулювання руху механізмів, зрівноваження механізмів, віброзахист механізмів тощо.

Далі розглянемо такі завдання:

- силовий аналіз механізмів;
- визначення законів руху механізмів;
- регулювання руху механізмів, а саме – підбір маховика.

2. СИЛИ, ЩО ДІЮТЬ У МЕХАНІЗМАХ

Дослідимо сили, які діють у механізмах під час руху.

2.1. Класифікація сил

Сили й пари сил (моменти сил), прикладені до механізму, можна розбити на кілька груп.

Рушійні сили й моменти – це такі сили, які надають механізму руху. Рушійними силами можуть бути тиск пари або газу, тиск води, повітря, електромагнітні сили, сили пружності пружини тощо. Рушійні сили й моменти, прикладені до ведучих ланок механізмів, виконують додатну роботу за час дії.

Сили й моменти корисного опору (або виробничого опору) – це сили технологічного опору руху, на подолання яких при виконанні технологічного процесу витрачається робота, тобто для здійснення якого й призначено механізм. Прикладом може бути опір різанню металів. Робота сил корисного опору завжди від'ємна.

До **сил шкідливого опору** належать сили тертя в кінематичних парах, а також опір середовища, у якому рухаються ланки механізму. Робота сил шкідливого опору також від'ємна.

Сили тяжіння є результатом взаємодії ланок із Землею. Унаслідок того, що ці сили завжди напрямлені в один бік, а в машинах траєкторії точок зазвичай замкнені, робота сил тяжіння за період руху механізму дорівнює нулю (без урахування витрат енергії на тертя). Під час руху ця робота відрізняється від нуля. До цих сил належать і сили тяжіння корпусу, і реакція фундаменту механізму на його корпус, і багато інших сил. Усі ці сили й моменти, оскільки вони прикладені до нерухомого корпусу, роботи не здійснюють.

Сили реакції виникають при взаємодії ланок у місцях їх стикання, тобто в кінематичних парах. Такі сили є внутрішніми силами для всього механізму в цілому, хоча для кожної окремої ланки вони будуть зовнішніми. Робота сил реакцій ніколи не дорівнює нулю, оскільки не дорівнюють нулю сили тертя в кінематичних парах. Їх нормальні складові роботи не здійснюють, а дотичні складові, тобто сили тертя, здійснюють від'ємну роботу.

Сили інерції виникають при зміні швидкості за величиною або напрямком. Сили інерції можуть набувати дуже великих значень. При періодичному русі робота сил інерції за період руху також дорівнює нулю (без урахування витрат енергії на тертя). Це пояснюється тим, що швидкості й прискорення точок рухомих ланок по закінченні кожного періоду набирають початкових значень. Під час руху ця робота відрізняється від нуля.

2.2. Рушійні сили й сили корисного опору

На закон руху механізму найбільше впливають рушійні сили й моменти, а також сили й моменти опору. Їх фізична природа, величина й характер дії визначаються робочим процесом машини, приладу, у яких використовується цей механізм.

Рушійні сили й сили корисного опору, залежно від їхніх механічних, фізичних і технологічних характеристик, можуть бути сталими або функціями різних кінематичних параметрів – переміщень, швидкостей, прискорень і часу.

Рушійні сили й сили опору зазвичай визначають експериментальним шляхом. Отримані дані відображають у вигляді аналітичних залежностей або діаграм сил, робіт або потужностей. Ці функціональні залежності мають назву механічних характеристик. Під час розв'язування задач механічні характеристики двигунів і робочих машин вважають відомими.

Сили, які залежать від швидкості. На рис. 2.1 показано механічну характеристику асинхронного електродвигуна – залежність рушійного моменту від кутової швидкості ротора машини.

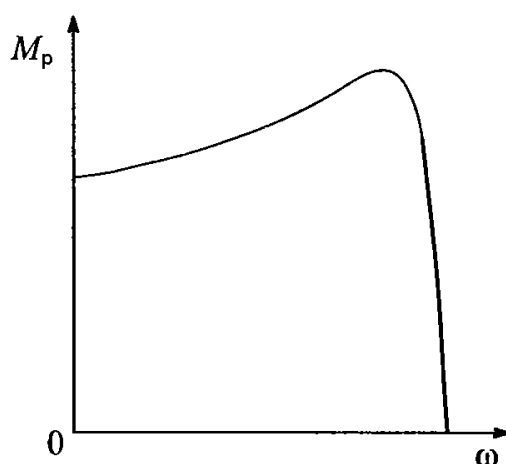


Рис. 2.1

Від швидкості залежать сили й моменти, що діють у таких роторних машинах, як електрогенератори, вентилятори, відцентрові насоси (рис. 2. 2) і багато інших.

При збільшенні швидкості момент двигунів зменшується, а момент машин-споживачів механічної енергії збільшується.

Така властивість дуже корисна, тому що автоматично сприяє підтриманню сталого режиму руху машини.

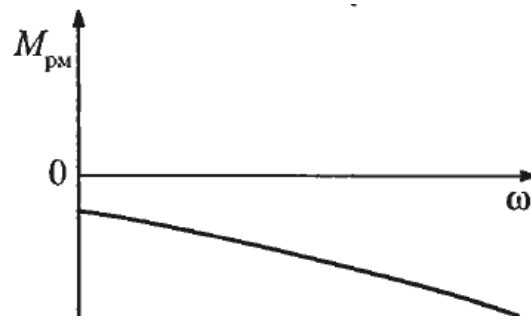


Рис. 2.2

Сили, які залежать від переміщення. На рис. 2.3 зображено кінематичну схему механізму двотактного двигуна внутрішнього згоряння (ДВЗ) та його механічну характеристику.

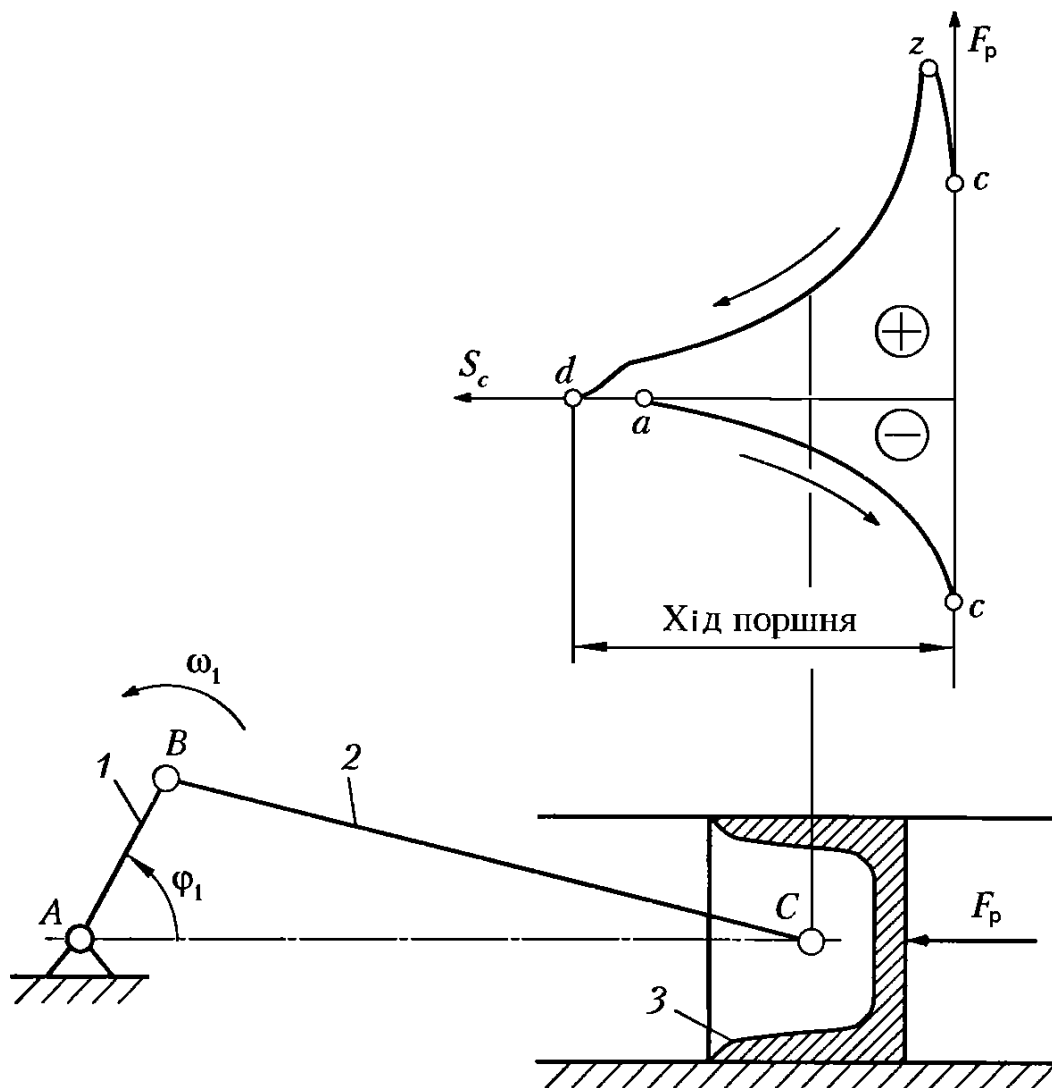


Рис. 2.3

Сила F_p , прикладена до поршня 3, діє завжди вліво, тому під час руху поршня вліво (процес розширення газів) ця сила здійснює додатну роботу і має знак «плюс» (гілка *сzd*). Під час руху поршня вправо (процес стиснення газів) сила F_p має знак «мінус» (гілка *dac*). Якщо подача палива в ДВЗ не змінюється, то при наступному обороті початкової ланки 1 механічна характеристика $F_p = F_p(S_c)$ повторює свою форму. Це означає, що сила F_p буде змінюватися періодично.

Графічно робота сили F_p – площа, обмежена кривою $F_p(S_c)$. На рис. 2.3 ця площа складається з двох частин: додатної і від'ємної, причому перша більше другої. Тому робота сили F_p за повний період буде додатною. Отже, сила F_p є рушійною. Зазначимо: якщо сила, будучи знакозмінною, здійснює за один період від'ємну роботу, то вона є силою опору.

Сили, що залежать тільки від переміщення, діють у багатьох інших машинах і приладах, причому дія цих сил може бути як періодичною, так і неперіодичною.

Сили, які не залежать від переміщення. Момент машин роторного типу від переміщення, тобто від кута повороту ротора, не залежить. Характеристики таких машин при $\omega = \text{const}$ зображено на рис. 2.4, а, б. При цьому для машин-двигунів $M_p > 0$, а для машин-споживачів механічної енергії (тобто робочих машин) $M_p < 0$.

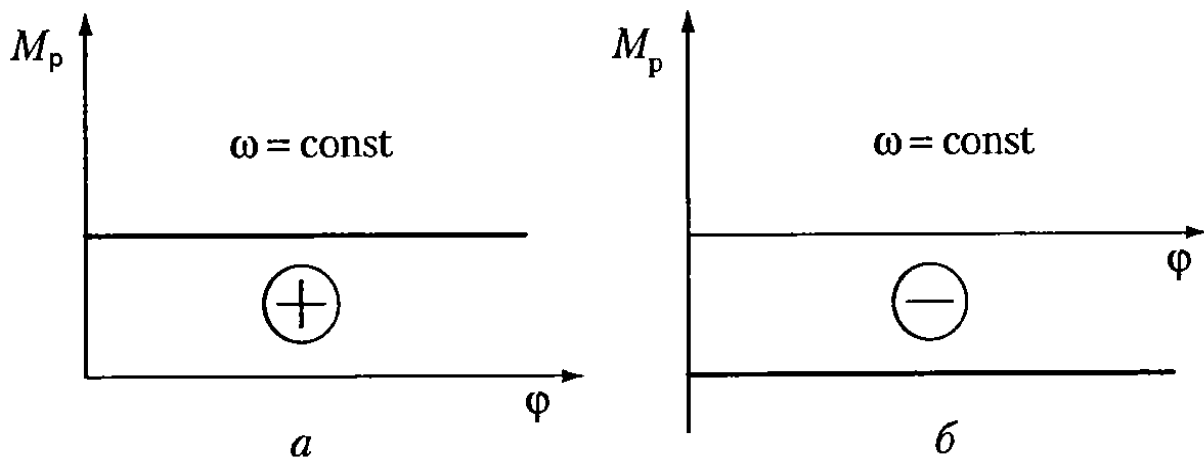


Рис. 2.4

Сили, які залежать від інших параметрів. Якщо змінювати подачу палива в ДВЗ, то його механічна характеристика набуде вигляду сім'ї кривих (рис. 2.5, а): чим більше подача палива (параметр h), тим вище розташовуються характеристики.

Сім'єю кривих зображується й механічна характеристика шунтового електродвигуна (рис. 2.5, б). Опір кола обмотки збудження двигуна – параметр h .

Характеристика гідродинамічної муфти також має вигляд сім'ї кривих (рис. 2.5, в). Наповнення муфти рідиною – параметр h .

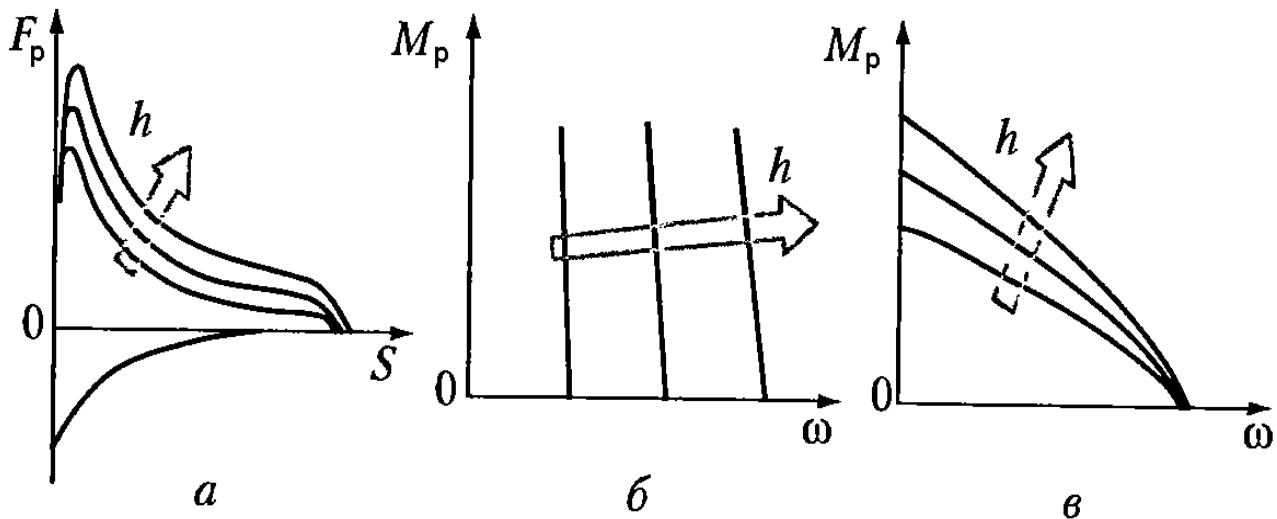


Рис. 2.5

Таким чином, змінюючи параметр h , можна керувати режимом роботи теплового, електричного або гідравлічного приводу, збільшуючи його рушійну силу або швидкість.

2.3. Сили інерції

З теоретичної механіки відомо, що в загальному випадку всі сили інерції елементарних мас будь-якої ланки AB (рис. 2.6), яка здійснює плоский складний рух і має площину симетрії, паралельну до площини руху, можуть бути зведені до головного вектора сили інерції $\bar{F}_{\text{ін}}$ (скорочено – сили інерції), який прикладаємо в центрі мас S , і до головного вектора моменту сил інерції $\bar{M}_{\text{ін}}$ (скорочено – моменту сил інерції).

Сила інерції визначається формулою

$$\bar{F}_{\text{ін}} = -m \cdot \bar{a}_S, \quad (2.1)$$

де $\bar{F}_{\text{ін}}$ – вектор сили інерції ланки AB ; m – маса ланки, кг; $\bar{a}_S$ – вектор повного прискорення центра мас S , м/с.

Сила інерції ланки $\bar{F}_{\text{ін}}$ напрямлена протилежно вектору прискорення

центра мас $\bar{a}_S$.

Таким чином, для визначення сили інерції $\bar{F}_{iH}$ ланки необхідно знати її масу й вектор повного прискорення $\bar{a}_S$ центра мас. Як видно з (2.1), силу інерції виражають у ньютонках (Н).

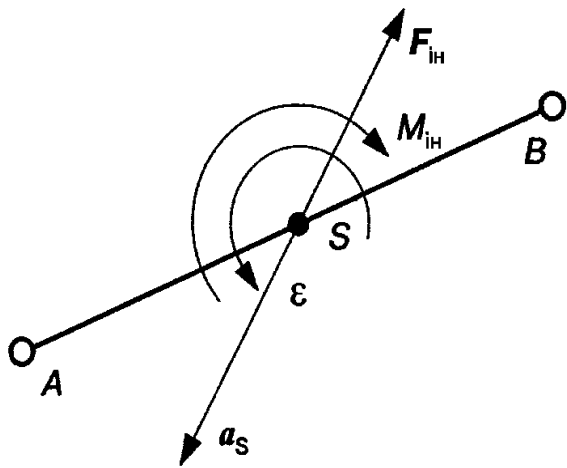


Рис. 2.6

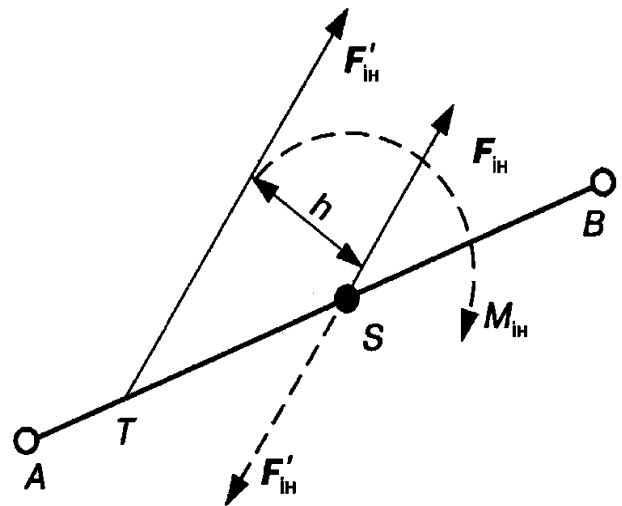


Рис. 2.7

Момент $\bar{M}_{iH}$ пари сил інерції напрямлений протилежно кутовому прискоренню $\bar{\epsilon}$ і визначається формулою

$$\bar{M}_{iH} = -J_S \bar{\epsilon}, \quad (2.2)$$

де J_S – момент інерції ланки відносно осі, яка проходить через центр мас і є перпендикулярною до площини руху ланки; $\bar{\epsilon}$ – її кутове прискорення ланки.

Момент $\bar{M}_{iH}$ пари сил інерції виражають у ньютон-метрах (Н·м).

Силу інерції $\bar{F}_{iH}$ і момент пари сил інерції $\bar{M}_{iH}$ можна замінити однією рівнодієюною силою $\bar{F}'_{iH}$, яка за величиною дорівнює силі інерції $\bar{F}_{iH}$ (рис. 2.7), лінія дії якої зміщена відносно центра мас S на відстань $h = \bar{M}_{iH} / \bar{F}_{iH}$.

2.4. Сили тертя

Під час руху одного тіла відносно іншого між поверхнями, що стикаються, виникає взаємодія, яка перешкоджає переміщенню тіл, а якщо вони

перебувають у стані спокою, то їх відносному зміщенню. Це явище називають тертям, а сили опору – **силами тертя**. Поверхні, якими стикаються між собою тіла, називають тертьовими.

Виникнення тертя пояснюється двома основними причинами.

По-перше, поверхні тертя не абсолютно гладкі, а мають нерівності, тому при стиканні поверхонь створюється опір руху $\vec{F}_f$ (рис. 2.8).

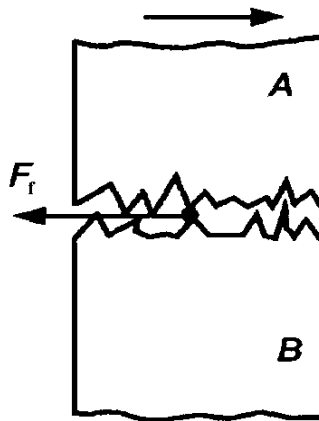


Рис. 2.8

По-друге, між тілами, які стикаються поверхнями, виникають сили молекулярної взаємодії, для подолання яких також необхідно прикласти силу.

На практиці користуються наближеними емпіричними законами Амонтона і Кулона. Якщо треба мати більшу точність розрахунків, то доводиться визначати силу тертя експериментально при конкретних умовах тертя.

Тертя в машинах є як корисним, так і шкідливим. З одного боку, завдяки тертю рухаються тіла, з іншого – тертя є причиною спрацювання деталей механізмів і витрат енергії.

Залежно від характеру відносного переміщення тіл, що стикаються, розрізняють два види тертя: ковзання й кочення.

Тертя ковзання – тертя поршня по гільзі ДВЗ, цапфи вала по втулці підшипника тощо.

Тертя кочення має місце в шарикових або роликових підшипниках, фрикційних передачах тощо.

Для зменшення сил тертя використовують різні мастила. Залежно від їх наявності між тертьовими поверхнями виникають такі види тертя:

- **сухе** – без мастильних матеріалів;
- **рідинне** – з мастильними матеріалами;
- **граничне** – на тертьових поверхнях є тонкі мастильні плівки;
- **напівсухе (напіврідинне)** – якщо більша частина поверхні контакту не покрита мастилом, то вважають, що тертя напівсухе, і навпаки, якщо переважає рідинне тертя, то – напіврідинне тертя.

Тертя ковзання

При терті ковзання виникає сила тертя ковзання $\bar{F}_f$ (рис. 2.9, а), яку можна наближено визначити за формулою Амонтона – Кулона

$$F_f = fN, \quad (2.3)$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання; N – нормальна реакція, яка в цьому випадку дорівнює силі G , яка притискає тіло 1 до поверхні тіла 2 ($N = G$).

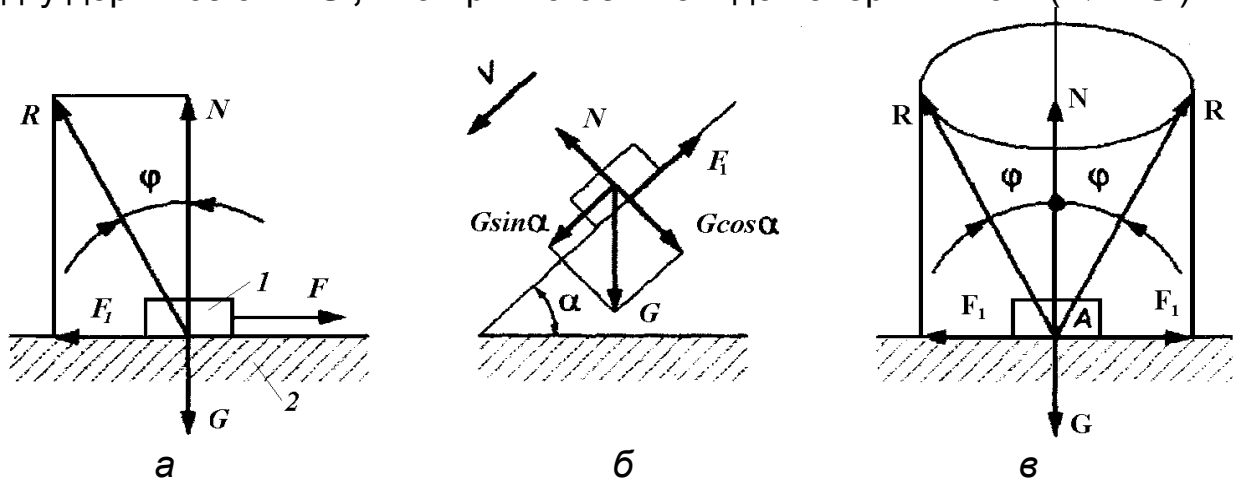


Рис. 2.9

Сила нормального тиску дорівнює вазі тіла тільки тоді, коли поверхня ковзання – горизонтальна площина, а на тіло не діють інші сили, крім сили його ваги. Якщо тіло лежить на похилій площині (рис. 2.9, б), то нормальна реакція $N = G \cos \alpha$, де α – кут нахилу площини. Якщо ж на тіло крім сили тяжіння діють ще й інші сили, то за силу нормального тиску на поверхню слід брати нормальну складову рівнодійної всіх прикладених до нього сил.

Під **коефіцієнтом тертя ковзання** розуміють відношення сили тертя до нормальної реакції:

$$f = \frac{F_f}{N}. \quad (2.3')$$

Коефіцієнт тертя залежить від матеріалу тіл, що стикаються, і фізичного стану тертьових поверхонь.

Розрізняють силу й коефіцієнт тертя спокою й руху. Сила тертя під час руху є меншою від сили тертя спокою. Це ж стосується й коефіцієнта тертя. Сила тертя завжди напрямлена в бік, протилежний відносним швидкостям, а в стані спокою тіла – протилежно силі, яка намагається вивести це тіло зі стану спокою.

Кут φ , на який через тертя відхиляється від нормальної реакції N повна реакція R опорної поверхні (рис. 2.9, а), називають **кутом тертя**:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{F_f}{N}. \quad (2.4)$$

З формул (2.3') і (2.4) маємо, що

$$\operatorname{tg} \varphi = f \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} f. \quad (2.5)$$

Тангенс кута тертя дорівнює коефіцієнту тертя ковзання, інакше кажучи, кутом тертя називають кут, тангенс якого дорівнює коефіцієнту тертя ковзання.

Якщо тіло переміщати відносно опорної поверхні в різні боки, то лінія дії реакції R опише конічну поверхню (рис. 2.9, в), яку називають **конусом тертя**.

Для руху тіла необхідно, щоб рівнодійна зовнішніх сил, прикладених до нього, проходила за межами конуса тертя. Якщо ж рівнодійна зовнішніх сил розташована всередині конуса тертя, то якою б вона великою не була, рух тіла є неможливим, оскільки рушійна сила в цьому випадку завжди буде меншою від сили тертя.

Тертя в поступальних кінематичних парах

За конструкцією розрізняють плоскі (рис. 2.10, а), клинові (рис. 2.10, б) і циліндричні (рис. 2.10, в) поступальні кінематичні пари. У свою чергу, усі вони поділяються на горизонтальні й похилі.

Оскільки основні закономірності тертя ковзання в плоских горизонтальних поступальних кінематичних парах уже розглянуто, дослідимо тертя ковзання в інших випадках.

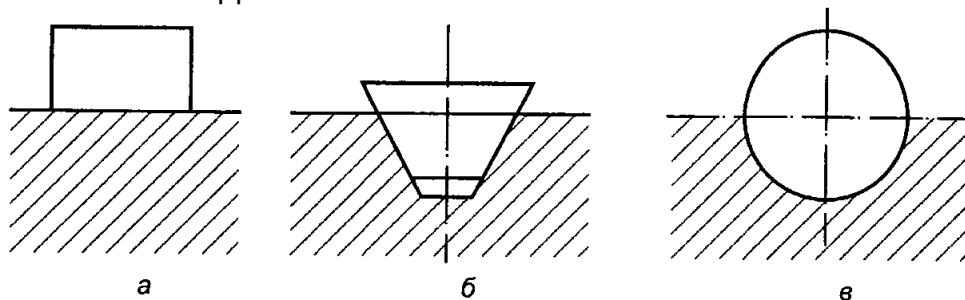


Рис. 2.10

Тертя на похилій площині. Розглянемо загальний випадок рівномірного руху тіла вгору по похилій площині (рис. 2.11, а), яка утворює кут α з лінією горизонту. Тіло вагою G приводиться в рух силою F , яка утворює з нормаллю $n - n$ до похилої площини кут β .

Під час рівномірного руху тіла вгору по похилій площині на нього крім

сил F і G діятиме нормальна реакція площини N і сила тертя F_f , яка напрямлена в протилежний від руху тіла бік. Замінімо сили N і F_f рівнодійною R , яка утворює з нормальною реакцією кут тертя φ .

Розглянемо умову рівноваги тіла під дією прикладених сил $(\bar{F}, \bar{G}, \bar{R})$, на основі якої можна записати векторне рівняння

$$\bar{G} + \bar{F} + \bar{R} = 0. \quad (2.6)$$

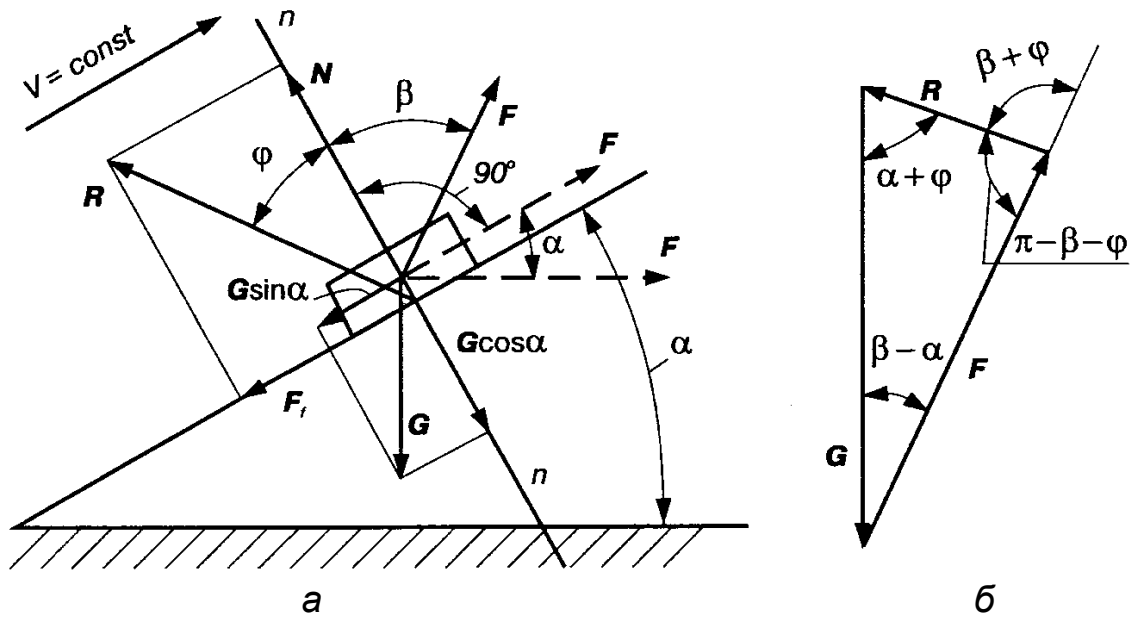


Рис. 2.11

Тоді, побудувавши згідно з рівнянням (2.6) план сил (рис. 2.11, б), запишемо пропорцію

$$\frac{F}{\sin(\alpha + \varphi)} = \frac{G}{\sin(\pi - \beta - \varphi)} = \frac{G}{\sin(\beta + \varphi)},$$

з якої знайдемо силу F , яка забезпечує рівномірний рух тіла по похилій площині:

$$F = G \frac{\sin(\beta + \varphi)}{\sin(\beta + \varphi)}. \quad (2.7)$$

Якщо сила F є паралельною до похилої площини ($\beta = \pi / 2$), то $\sin(\pi / 2 - \varphi) = \cos \varphi$, а отже,

$$F = G \frac{\sin(\alpha + \varphi)}{\cos \varphi}. \quad (2.8)$$

Якщо сила F є горизонтальною ($\beta = \pi / 2 + \alpha$), то

$$F = G \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (2.9)$$

Остання формула використовується в інженерних розрахунках.

Якщо тіло рухається рівномірно вниз по похилій площині, то сила тертя F_f буде напрямлена в протилежний бік (угору), а отже, повна реакція $R = F_f + N$ буде відхилятися від нормалі $n - n$ на кут $-\varphi$. Тоді залежності (2.7) – (2.9) набувають вигляду

$$F = G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\sin(\beta - \varphi)}; \quad F = G \frac{\sin(\alpha - \varphi)}{\cos \varphi}; \quad F = G \operatorname{tg}(\alpha - \varphi). \quad (2.10)$$

Характерно, що якщо кут нахилу площини є меншим від кута тертя ($\alpha \leq \varphi$), то сила F (2.10) має знак «мінус». Отже, у цьому разі для рівномірного руху тіла вниз по похилій площині необхідно змінити напрямок сили: сила F має «стягувати» тіло з похилої площини, бо інакше тіло перебуватиме в стані спокою. Площину, кут нахилу α якої є меншим від кута тертя φ , називають **самогальмівною**.

Граничним є самогальмування, коли $\alpha = \varphi$.

Тертя в клиновій поступальній парі

У деяких випадках поверхня стикання повзуна й напрямної в поперечному перерізі має вигляд двогранного кута або жолоба (рис. 2.12, а). Таку пару називають **клинковою**.

Нехай тіло 1, на яке діє вертикальна сила Q , під дією сили F рухається рівномірно вздовж горизонтальної напрямної 2. Повзун притискається до напрямної боковими поверхнями, на яких виникає сила тертя, що перешкоджає руху. Для того щоб тіло рухалося рівномірно в напрямній, повинна виконуватися умова $F = F_{f_1} + F_{f_2}$, де F_{f_1} , F_{f_2} – сили тертя, що виникають на кожній грані повзуна, причому $F_{f_1} = F_{f_2} = F_f$, оскільки $N_1 = N_2 = N$, $f_1 = f_2 = f$. Тоді

$$F = 2F_f = 2fN. \quad (2.11)$$

Реакції N_1, N_2 визначають з трикутника сил (рис. 2.12, б), скориставшись рівнянням $\bar{Q} + \bar{N}_1 + \bar{N}_2 = 0$.

Оскільки, що $N_1 = N_2 = N$, з плану сил випливає, що

$$N = \frac{Q}{2 \sin \gamma}.$$

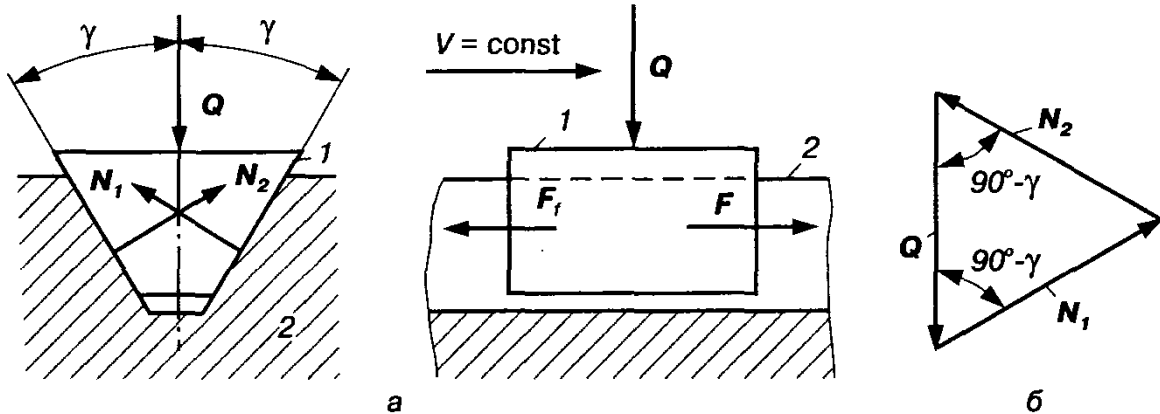


Рис. 2.12

Отже,

$$F = \frac{f}{\sin \gamma} Q = f' Q, \quad (2.12)$$

звідки

$$f' = \frac{f}{\sin \gamma}, \quad (2.13)$$

де f' – зведений (умовний) коефіцієнт тертя клинової пари. Оскільки завжди кут γ менше 90° , то $f' > f$ (зведений коефіцієнт тертя клинової пари більше коефіцієнта тертя плоскої поступальної пари). Цю властивість клинової пари широко використовують у техніці для збільшення сили тертя при передачі руху (наприклад, у фрикційних передачах, гвинтових з'єднаннях).

У всіх випадках, коли має місце тертя в клиновій парі, можна користуватися формулами для плоскої поступальної пари, у які замість коефіцієнта тертя f і кута тертя φ підставляють зведений коефіцієнт f' і зведений кут тертя $\varphi' = \arctg(f')$.

Тертя в циліндричній поступальній парі

Для визначення сили тертя F_f у такій парі (рис. 2.13) розглянемо елементарну частину $ab = ds = rd\beta$ циліндричної поверхні циліндра 1 (по-

взуна). Тоді елементарна сила тертя для цієї частини визначається так: $dF_f = fplds = fplrd\beta$, де p – питомий тиск на певному елементі напрямної; l – довжина повзуна; r – радіус циліндричної напрямної.

Повна величина сили тертя визначається формулою

$$F_f = frl \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p d\beta.$$

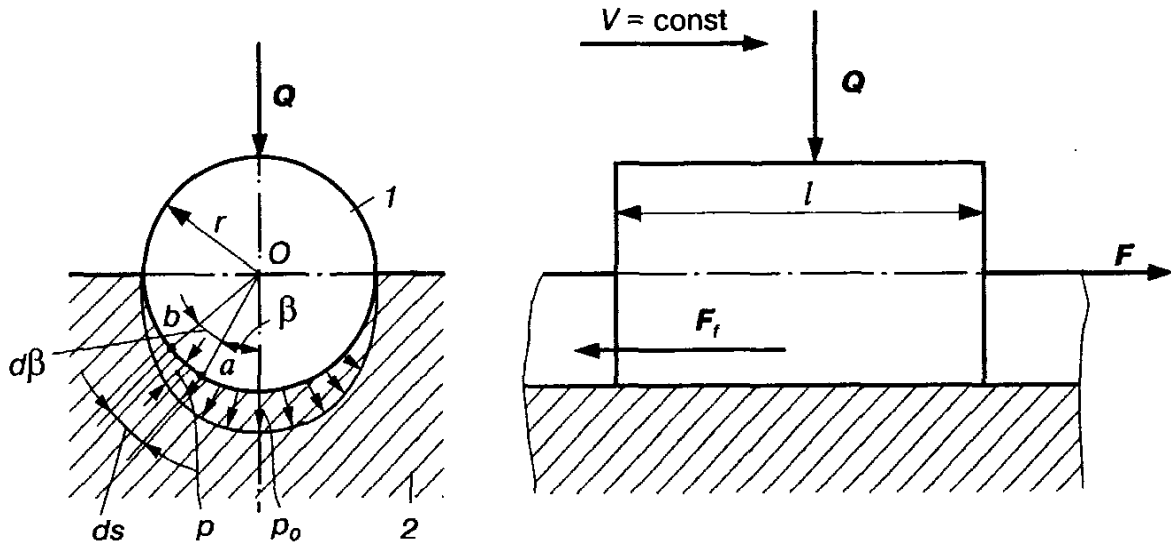


Рис. 2.13

Досліди показують, що змінення тиску p описується законом косинуса, тобто $p = p_0 \cos \beta$, де p_0 – нормальна реакція на лінії дії сили Q . Тоді

$$F_f = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p_0 \cos \beta d\beta = 2frlp_0. \quad (2.14)$$

Зв'язок p_0 з величиною зовнішнього навантаження Q можна одержати, записавши рівняння проекцій на вертикаль:

$$Q = frl \int_{-\pi/2}^{\pi/2} p l ds \cos \beta = frp_0 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2 \beta d\beta = \frac{\pi}{2} rlp_0.$$

Звідси

$$p_0 = \frac{2}{\pi} \frac{Q}{rl}.$$

Підставляючи це значення в формулу (2.14), знаходимо силу тертя

$$F_f = \frac{4}{\pi} fQ.$$

Позначивши зведений коефіцієнт тертя в циліндричній поступальній парі як $\frac{4}{\pi} f = f'$, остаточно одержимо

$$F_f = f'Q = 1,27 fQ. \quad (2.15)$$

Із формули (2.15) видно, що сила тертя повзуна в циліндричній на-
прямній на 27 % є більшою від сили тертя в плоскій поступальній парі, але
завдяки простоті виготовлення циліндричні поступальні пари досить широ-
ко використовуються в техніці.

Тертя у гвинтових парах

При розгляді тертя у гвинтових кінематичних парах роблять ряд при-
пущень. По-перше, оскільки закон розподілу тисків по гвинтовій різі є неві-
домим, умовно вважають, що тиск гайки на гвинт або, навпаки, гвинта на
гайку прикладений по середній лінії різі, розміщеної на відстані r від осі
гвинта (рис. 2.14, а).

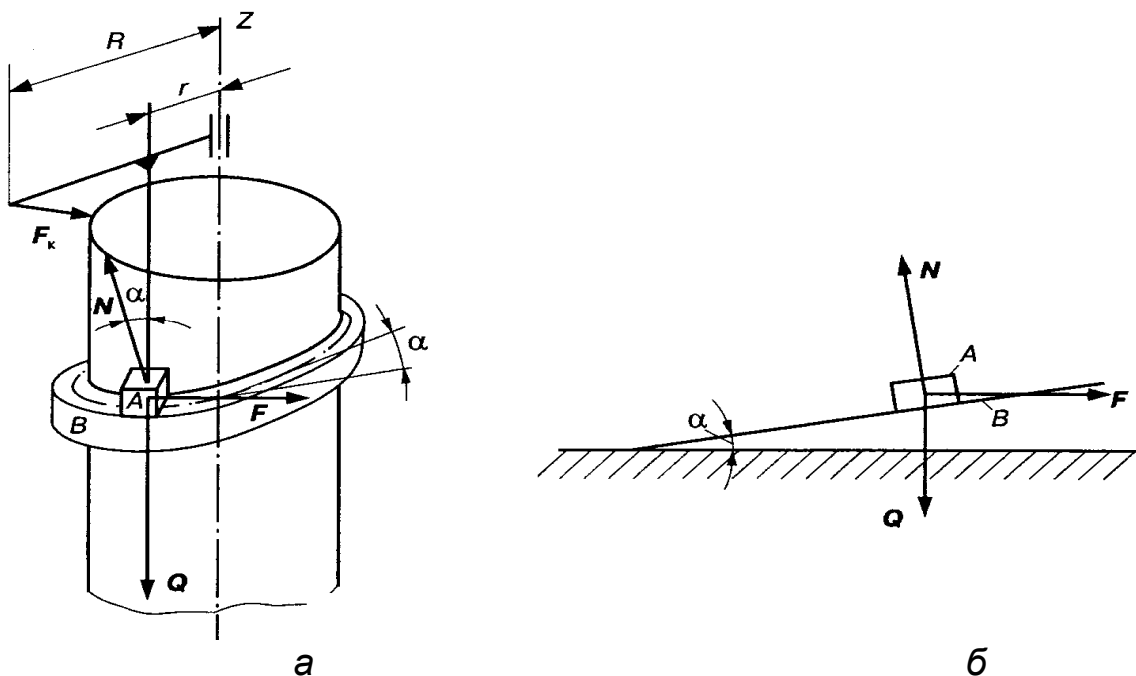


Рис. 2.14

По-друге, припускають, що дію сил у гвинтовій парі можна звести до
дії сил на повзун, розташований на похилій площині (рис. 2.14, б), тобто,

розгортаючи середню лінію гвинтової різі на площину, зводять просторову задачу до плоскої, для чого діють так.

Нехай на гайку A , яку зображаємо у вигляді елементарного кубика, діє деяка осьова сила Q і деяка пара сил у площині, перпендикулярній до осі гвинта z . Момент цієї пари можна вважати моментом сили F_k , прикладеної на відстані R від осі z : $M = F_k R$.

Для того щоб елемент гайки A рухався рівномірно вгору по гвинтовій поверхні, необхідно, щоб момент M дорівнював моменту сили F відносно цієї ж осі z :

$$F_k R = F r. \quad (2.16)$$

В останньому рівнянні F є сила, необхідна для рівномірного переміщення тіла A (гайки) по похилій площині B , кут підйому α якої дорівнює куту підйому гвинтової різі по середньому радіусу (рис. 2.14, б). З рівняння (2.9) випливає, що сила F визначається формулою

$$F = Q \operatorname{tg}(\alpha + \varphi), \quad (2.17)$$

отже, з урахуванням (2.16) і (2.17)

$$F_k = Q \frac{r}{R} \operatorname{tg}(\alpha + \varphi). \quad (2.18)$$

У випадку руху гайки A у напрямку, що збігається з напрямком сили Q (рух униз), формула (2.18) набуває вигляду

$$F_k = Q \frac{r}{R} \operatorname{tg}(\alpha - \varphi). \quad (2.19)$$

При $\alpha < \varphi$ у гвинтовій парі буде самогальмування.

Виведеними формулами можна користуватися при дослідженні гвинтових пар з **прямокутною** різзю. Якщо різь **трикутна** або **трапецеїдальна**, то таку кінематичну пару можна розглядати як похилу площину з клиновим повзуном (рис. 2.15), кут між вертикаллю і стінками жолоба якого дорівнює $(90^\circ - \beta)$, причому 2β – кут профілю різі.

Тоді зведений коефіцієнт тертя на основі (2.13) визначається формулою

$$f' = \frac{f}{\sin(90^\circ - \beta)} = \frac{f}{\cos \beta}. \quad (2.20)$$

Оскільки в гвинтовій парі з гострокутною різзю кут $\beta > 0$, то зведений коефіцієнт тертя f' , а відповідно, і сила тертя в такій парі є більшими, ніж у гвинтовій парі з прямокутною різзю. З цієї ж причини всі деталі нарізних з'єднань (болти, гвинти, шпильки, гайки), де треба усунути самовідгвинчування деталей, виготовляють з трикутною різзю, а в гвинтових передачах, де треба зменшити сили тертя, – з прямокутною, інколи з трапецеїдальною різзю.

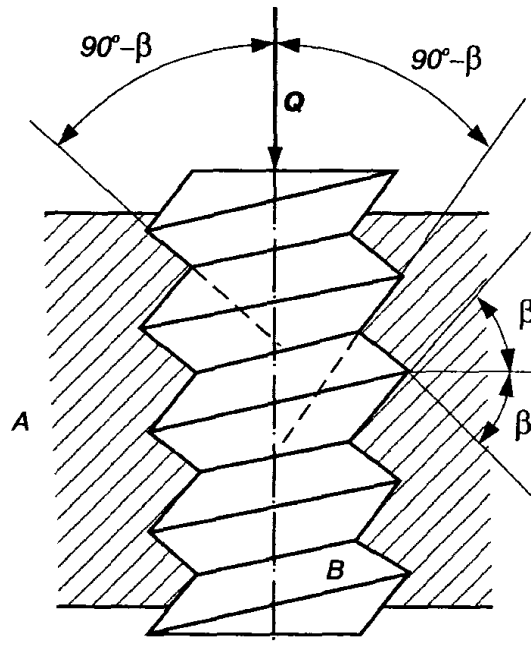


Рис. 2.15

Силу F_k , яку необхідно прикласти на кінці плеча радіуса R (див. рис. 2.14), визначають за формулами, аналогічними (2.18) і (2.19), у які замість кута тертя φ підставляють зведений кут тертя $\varphi' = \arctg f'$:

$$F_k = Q \frac{r}{R} \operatorname{tg}(\alpha \pm \varphi'). \quad (2.21)$$

Знак «+» беруть тоді, коли напрямок переміщення гайки не збігається з напрямком осьової сили Q , і, навпаки, – знак «–», коли ці напрямки збігаються.

Тертя в обертальних парах

Обертальні пари надзвичайно широко застосовуються в машинах. Прикладом такої пари може бути пара, утворена цапфою вала або осі та їх опорами.

Цапфою називають ту частину вала або осі, якою вони спираються на опори (рис. 2.16).

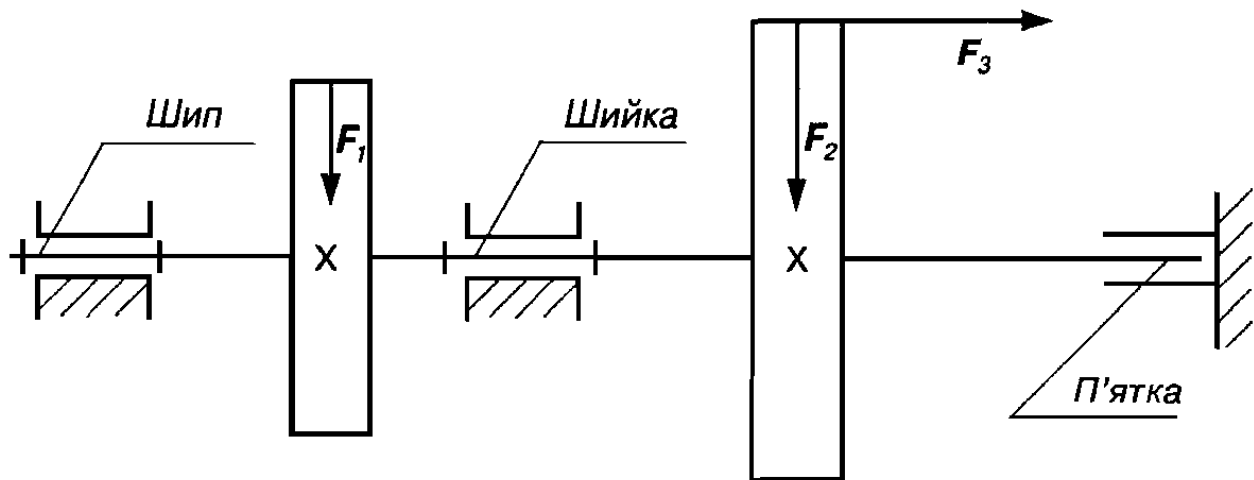


Рис. 2.16

Якщо цапфа передає на опори радіальні сили й розміщена на кінці вала, то її називають **шипом**, а якщо всередині вала, – **шийкою**.

Опори в таких випадках називають **підшипниками**. Якщо цапфа передає силу в осьовому напрямку, то її називають **п'яткою**, а опори – **підп'ятками**.

Тертя цапф у підшипниках

Під час виведення розрахункових формул у такій кінематичній парі використовують зазвичай дві гіпотези.

Для неприпрацьованих (нових) обертальних пар використовують гіпотезу, згідно з якою вважають, що питомий тиск p розподіляється рівномірно на проекції поверхні цапфи на горизонтальну площину (рис. 2.17), тобто

$$p = \frac{Q}{ld} = \text{const}, \quad (2.22)$$

де l – довжина цапфи; $d = 2r$ – її діаметр.

Для забезпечення рівномірного обертання вала 1, який притискається до підшипника 2 силою Q , необхідно прикласти рушійний момент M_p , що дорівнює моменту тертя, який виникає між ланками 1 і 2.

Для визначення цього моменту розглянемо елементарну ділянку $ds = ab$ поверхні цапфи, на яку діє нормальний тиск

$$dN = pds, \quad (2.23)$$

де $ds = rld\alpha$ – довжина цапфи.

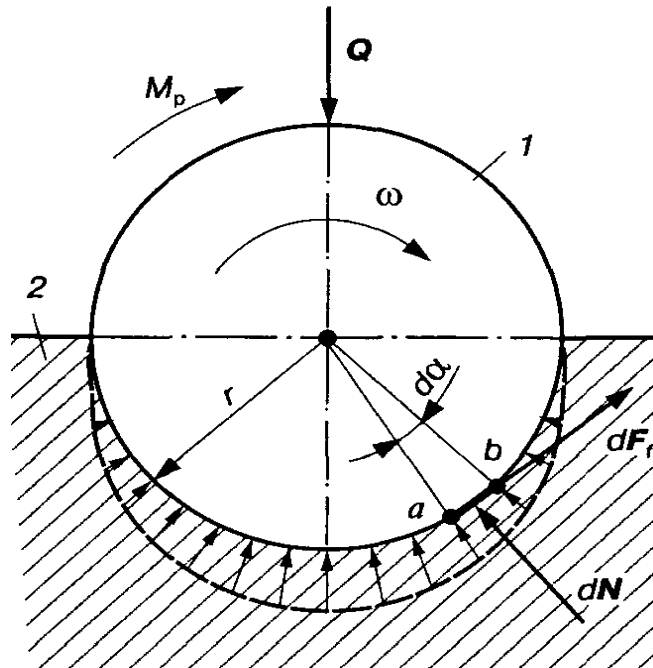


Рис. 2.17

Унаслідок дії сили dN на ділянці ds виникає елементарна сила тертя, яка за законом Амонтона – Кулона має вигляд

$$dF_f = fdN. \quad (2.24)$$

Ця сила створює при обертанні вала протидійний момент тертя $dM_f = dF_f r$. З урахуванням (2.23) і (2.24) маємо

$$dM_f = fr^2 pl d\alpha,$$

де $d\alpha$ – кут, який змінюється від $-\pi/2$ до $+\pi/2$.

Тоді момент тертя в обертальній парі має вигляд

$$dM_f = fr^2 pl \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\alpha = \frac{\pi}{2} f Q r.$$

Якщо позначити $(\pi/2)f = 1,57f = f'$ – зведений коефіцієнт тертя в обертальній парі, то остаточно отримаємо

$$M_f = f'Qr. \quad (2.25)$$

Одержана за цим припущенням ($p = const$) величина моменту тертя добре узгоджується з експериментальними даними для неприпрацьованих (нових) обертальних пар.

Для припрацьованих (старих) обертальних пар більше відповідає друга гіпотеза, згідно з якою спрацювання в напрямку дії сили однакове. Цапфи виготовляють з твердішого матеріалу, ніж підшипники, тому можна вважати, що під час роботи спрацьовується тільки підшипник, а цапфа переміщається на величину спрацювання в напрямку дії сили Q . На початку роботи (до спрацювання) центр цапфи розташовувався в точці O (рис. 2.18), через деякий час роботи він перемістився на величину спрацювання $\delta = OO_1$, на стільки ж перемістилися точки, які лежать на поверхні цапфи, тобто

$$ab = a'b' = a''b'' = const.$$

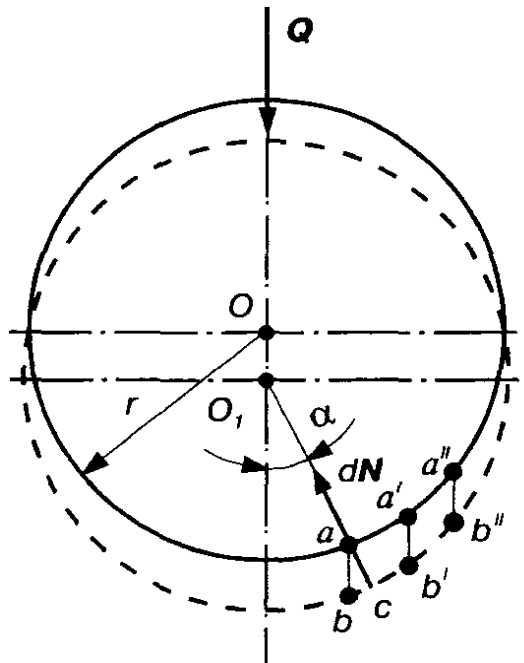


Рис. 2.18

Виділимо біля точки a нескінченно вузьку смужку поверхні цапфи, площа якої $ds = lrd\alpha$, де l – довжина цапфи.

Нормальний тиск на цю смужку $dN = plrd\alpha$, де p – змінний нормальний питомий тиск.

Сила тертя смужки $dF_f = fplrd\alpha$. Момент тертя смужки $dM_f = fplr^2d\alpha$. Повний момент тертя визначається формулою

$$M_f = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} fplr^2 d\alpha = flr^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} p d\alpha. \quad (2.26)$$

Оскільки p – змінна величина, то вона залишилась під знаком інтеграла. Виразимо p через кут α . Постійне спрацювання $\delta = ab$ у напрямку сили Q і змінне радіальне спрацювання $\delta_n = ac$ зв'язані між собою співвідношенням $\delta_n = \delta \cos \alpha$.

З іншого боку, радіальне спрацювання δ_n буде прямо пропорційним питомому тиску p і відносній швидкості ковзання $v_s = \omega r$: $\delta_n = kp\omega r$, де k – невідомий коефіцієнт пропорційності. Отже, $\delta \cos \alpha = kp\omega r$, звідки

$$p = \frac{\delta}{k\omega r} \cos \alpha = c \cos \alpha,$$

$$\text{де } c = \frac{\delta}{k\omega r} = \text{const}.$$

Підставивши значення p у вираз (2.26) і зінтегрувавши, знайдемо

$$M_f = flr^2 \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} c \cos \alpha d\alpha = 2flr^2 c. \quad (2.27)$$

У формулі (2.27) стала c є невідомою. Щоб визначити її, візьмемо суму проєкцій усіх сил на вертикаль: $N_y - Q = 0$, де N_y – сума проєкцій елементарних реакцій dN на вертикальну вісь, звідки

$$N_y = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \cos \alpha dN.$$

Підставивши в цей вираз значення $dN = plr d\alpha$ і $p = c \cos \alpha$, візьмемо інтеграл:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} lrc \cos^2 \alpha d\alpha &= lrc \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\alpha \right) d\alpha = \\ &= lrc \left(\left| \frac{\alpha}{2} \right|_{-\pi/2}^{+\pi/2} + \left| \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right|_{-\pi/2}^{+\pi/2} \right) = \frac{\pi}{2} lrc = Q. \end{aligned}$$

Звідси $c = \frac{2Q}{\pi l r}$.

Підставивши c у вираз для моменту тертя (2.27), одержимо

$$M_f = \frac{4}{\pi} f Q r ,$$

або

$$M_f = f' Q r , \quad (2.28)$$

де f' – зведений коефіцієнт тертя, $f' = \frac{4}{\pi} f = 1,27 f$.

Круг тертя. Якщо цапфа є нерухомою, то нормальна реакція N підшипника проходить через центр цапфи O (рис. 2.19).

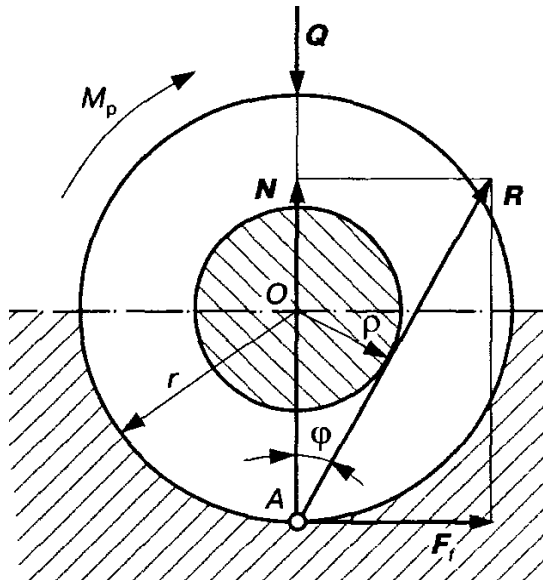


Рис. 2.19

Якщо ж до цапфи прикласти рушійний момент M_p , то вона почне обертатися в підшипнику, і при цьому виникає сила тертя, момент якої і є моментом тертя $M_f = F_f r$. Склавши силу тертя F_f з нормальною реакцією N , одержимо повну реакцію R , відхилену від нормальної реакції на кут тертя φ . Момент сили тертя відносно осі цапфи можна виразити також через момент реакції R :

$$M_f = R \rho , \quad (2.29)$$

де $\rho = r \sin \varphi$.

Круг радіусом ρ називають **кругом тертя**. Повна реакція R завжди дотикається до круга тертя. Круг тертя має всі властивості конуса тертя, а саме: якщо рівнодійна сил, прикладених до вала, проходить поза цим кругом, то вал рухається прискорено; якщо рівнодійна сил – дотична, то вал рухається рівномірно або знаходиться в стані спокою, тобто в рівновазі; якщо ж рівнодійна проходить усередині круга тертя, то вал рухається сповільнено або перебуває в стані спокою.

Тертя п'ятки в під'язку

Одним із різновидів обертальних пар є п'ятка, яка при роботі взаємодіє з під'язком в умовах тертя ковзання. Опорну поверхню вала можна виготовити у вигляді суцільного круга або кільця (рис. 2.20, а).

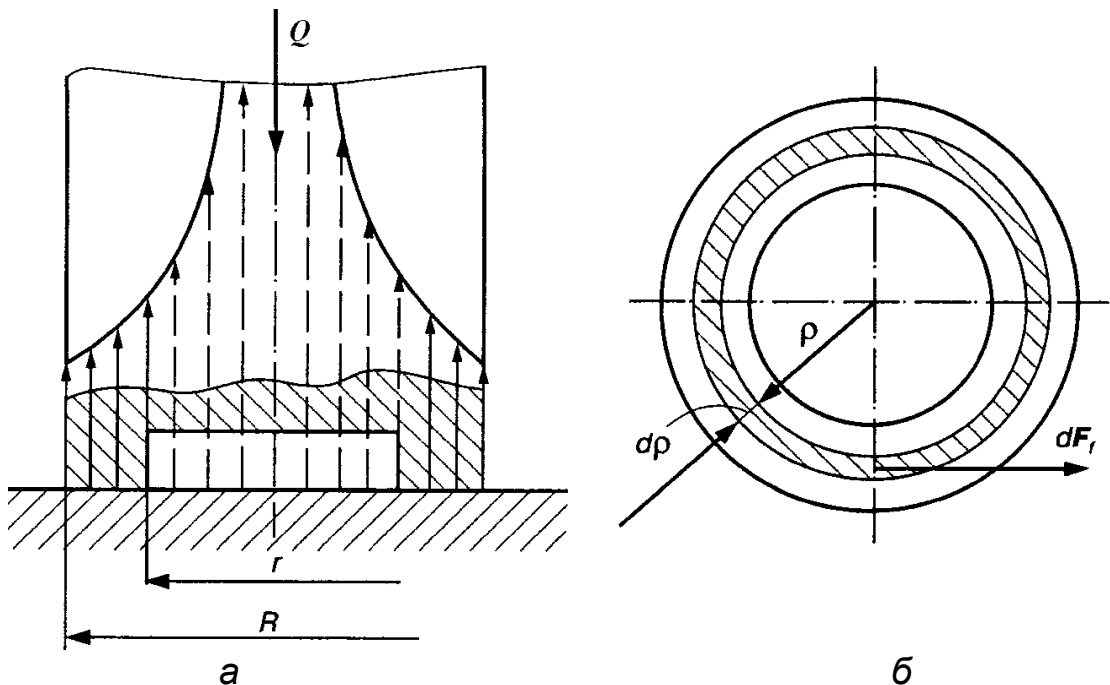


Рис. 2.20

Під час визначення моменту тертя в плоскій кільцевій п'ятці також користуються двома гіпотезами.

Для неприпрацьованих (нових) пар вважають, що питомий тиск p розподіляється рівномірно по поверхні п'ятки, тобто

$$p = \frac{Q}{\pi(R^2 - r^2)} = \text{const}. \quad (2.30)$$

Елементарний момент сил тертя dM_f на нескінченно вузькому кільці

завширшки $d\rho$ (рис. 2.20, б) визначається формулою

$$dM_f = dF_f \rho, \quad (2.31)$$

де dF_f – сила тертя, що виникає при обертанні вала в зоні елементарного кільця. Згідно з формулою Амонтона – Кулона маємо

$$dF_f = f dN. \quad (2.32)$$

Нормальний тиск, що припадає на це кільце,

$$dN = p ds, \quad (2.33)$$

де $ds = 2\pi\rho d\rho$ – площа кільця.

Підставивши (2.32), (2.33) у формулу (2.31), маємо

$$dM_f = 2\pi f p \rho^2 d\rho. \quad (2.34)$$

Повний момент тертя кільцевої поверхні має вигляд

$$M_f = \int_r^R dM_f = 2\pi f p \int_r^R \rho^2 d\rho = 2\pi f p \frac{R^3 - r^3}{3}.$$

Якщо врахувати (2.30), то остаточно одержимо

$$M_f = \frac{2}{3} f Q \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}. \quad (2.35)$$

Величина $\rho = \frac{2}{3} \frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2}$ – радіус тертя. Тоді $M_f = f \rho Q$.

Якщо п'ятка буде суцільною, то $r = 0$, а тому момент тертя має вигляд

$$M_f = \frac{2}{3} f Q R. \quad (2.36)$$

Для припрацьованих (старих) пар згідно з другою гіпотезою спра-

цювання в напрямку дії сили Q є однаковим. У цьому випадку, перш ніж брати інтеграл функції (2.34), треба виразити p як функцію від ρ , оскільки $p \neq const$.

Позначимо спрацювання в напрямку сили Q через δ , яке в кожній точці кільцевої поверхні буде прямо пропорційним питомому тиску і швидкості ковзання $v_s = \omega \rho$, тобто $\delta = c p v_s = c p \rho \omega = const$, де c – невідомий коефіцієнт пропорційності. Звідси

$$p = \frac{\delta}{c \omega} \frac{1}{\rho}.$$

Уведемо позначення $\frac{\delta}{c \omega} = k$. Тоді

$$p = \frac{k}{\rho}. \quad (2.37)$$

Підставивши p у вираз (2.34), після інтегрування маємо

$$M_f = \int_r^R 2\pi f p \rho^2 d\rho = 2\pi f k \int_r^R \rho d\rho = \pi f k (R^2 - r^2). \quad (2.38)$$

Щоб визначити невідому сталу k , візьмемо суму проекцій усіх сил на вісь вала:

$$\int_r^R dN - Q = 0.$$

Ураховуючи (2.33), одержуємо

$$Q = \int_r^R dN = \int_r^R 2\pi p \rho d\rho = 2\pi k \int_r^R \rho d\rho = 2\pi k (R - r),$$

звідси

$$k = \frac{Q}{2\pi(R - r)}.$$

Підставивши k у вираз (2.38), знайдемо момент тертя за другою гі-

$$M_f = \frac{1}{2} f Q (R - r). \quad (2.39)$$

Для суцільної п'ятки при $r = 0$ момент тертя $M_f = \frac{1}{2} f Q R$.

Як показує досвід, суцільна п'ятка і підп'яток спрацьовуються нерівномірно, причому більше спрацювання має місце на більшому радіусі. З умови (2.37) видно, що для суцільної п'ятки питомий тиск розподіляється за законом рівнобічної гіперболи (див. рис. 2.20). Очевидно, що при $\rho = 0$ теоретично має бути $p = \infty$. Практика підтверджує, що тиск у центрі п'ятки дійсно набуває досить великих значень. Значні нерівномірності тисків призводять до того, що з часом роботи тертьові поверхні втрачають свою початкову плоску форму.

У кільцевій п'ятці спрацювання є рівномірнішим, що робить її більш вигідною й зручною в експлуатації.

Тертя ковзання змащених тіл

При рідинному терті дві поверхні, які рухаються одна відносно іншої, не стикаються, оскільки між цими поверхнями є проміжний мастильний шар рідини. При відносному русі поверхонь окремі шари рідини зсуваються один відносно іншого. Отже, тертя в рідинному шарі зводиться до в'язкого зсуву.

При вивченні рідинного тертя використовують поняття коефіцієнта тертя. На відміну від коефіцієнта сухого тертя коефіцієнт рідинного тертя f залежить від швидкості v руху шарів мастила один відносно іншого, навантаження p і коефіцієнта в'язкості μ , тобто $f = f(v, p, \mu)$.

І. Ньютон визначив, що сила, необхідна для переміщення одного шару рідини паралельно до іншого, дорівнює

$$F = S \mu \frac{dv}{dy}, \quad (2.40)$$

де F – сила в'язкого зсуву; S – площа поверхні ковзання; μ – коефіцієнт абсолютної в'язкості; dv/dy – зміна швидкості по висоті шару.

Вимоги, необхідні для заміни сухого тертя рідинним сформулював засновник гідродинамічної теорії тертя М. П. Петров, а саме:

- 1) мастильна рідина в зазорі між ковзними поверхнями повинна затримуватись у зазорах;
- 2) у шарі мастила при відносному ковзанні змащуваних поверхонь по-

винен виникати й підтримуватися внутрішній тиск, який зрівноважує зовнішнє навантаження, що притискує ковзні поверхні одну до одної;

3) мастильна рідина повинна повністю відокремлювати ковзні поверхні;

4) шар рідини між ковзними поверхнями повинен мати товщину, не меншу від певної мінімальної границі.

Для здійснення першої вимоги необхідно, щоб при змочуванні твердих тіл мастильною рідиною сили зчеплення між поверхнями твердих тіл і прилеглим шаром рідини були більшими за сили зчеплення між частинами мастильної рідини.

Для задоволення другої вимоги, необхідно, щоб між ковзними поверхнями безперервно нагніталася мастильна рідина або щоб між ними був клиновий зазор. Стосовно цапфи, що лежить у підшипнику (рис. 2.21), це досягається тим, що радіуси R підшипника і r цапфи – різні. Завдяки цьому між цапфою й підшипником створюється клиноподібний зазор, у який при обертанні цапфи нагнітається мастильна рідина. При цьому в мастильному шарі виникають сили, що зрівноважують зовнішнє навантаження на цапфу, і цапфа ніби «спливає» на шарі мастильної рідини.

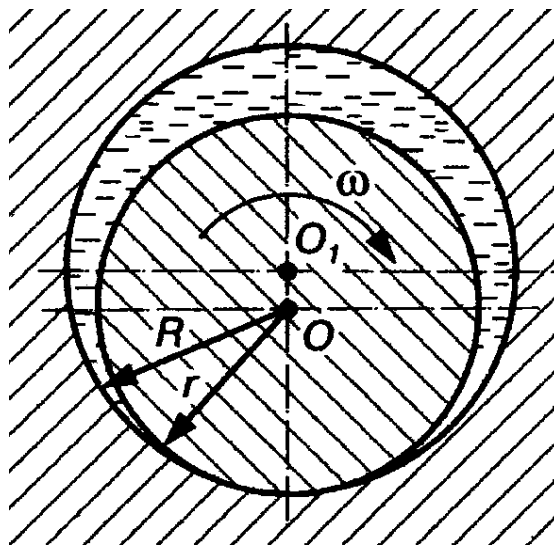


Рис. 2.21

Третя й четверта вимоги стосуються забезпечення такої обробки поверхні цапфи й підшипника, при якій зменшилися б можливі нерівності і шорсткість на їх поверхнях; крім того, необхідно прагнути до менших деформацій цапфи й очищати мастильну рідину від сторонніх домішок.

Тертя кочення

Тертям кочення називають опір, який виникає при перекочуванні одного тіла по поверхні іншого. Цей опір виникає головним чином від того,

що тіла не абсолютно тверді й завжди дещо деформуються в місцях їх стикання.

Фізичні явища, які приводять до тертя кочення, вивчені мало. У технічних розрахунках користуються в основному даними, одержаними при експериментальних дослідженнях.

На подолання опору під час перекошування тіл витрачається робота, яка йде на деформацію стичних поверхонь. Якщо на нерухомий коток 1, який лежить на горизонтальній площині 2 (рис. 2.22, а), діє тільки сила $\bar{Q}$, то деформація котка й опорної поверхні є симетричними відносно лінії дії $\bar{Q}$. Унаслідок деформації коток та опорна поверхня дотикаються не в одній точці (лінії), а деякою малою площиною контакту завширшки АВ. Реакція з боку опорної поверхні буде розподілена по всій площині контакту. При цьому крива напружень є симетричною, а отже, напрямком рівнодійної $\bar{N}$ цих напружень збігається з напрямком сили $\bar{Q}$. За модулем нормальна реакція $\bar{N}$ дорівнює силі $\bar{Q}$ і напрямлена в протилежний від неї бік.

Якщо коток рухається під дією деякої горизонтальної сили $\bar{F}$, то деформація котка й опорної поверхні буде вже несиметричною відносно лінії дії сили $\bar{Q}$ ($BC > AC$) (рис. 2.22, б).

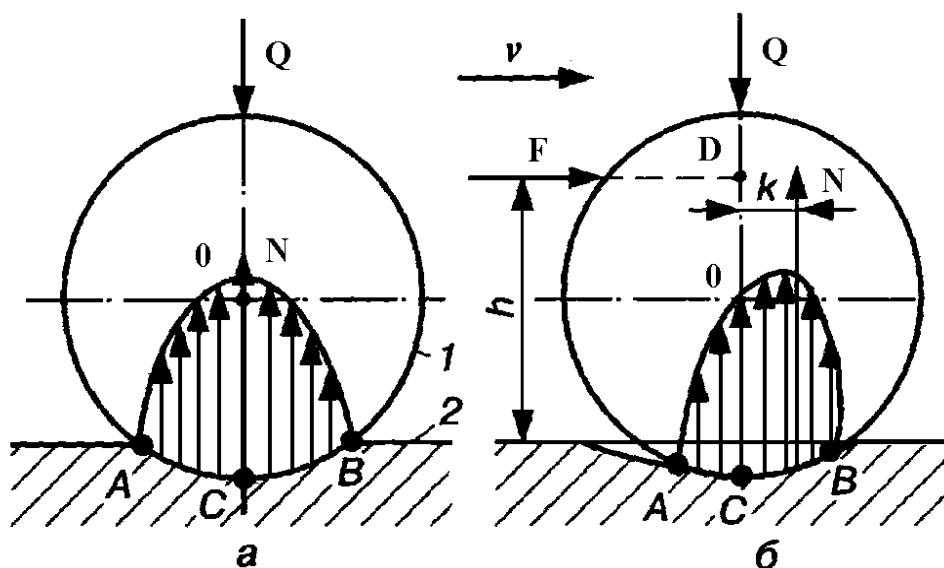


Рис. 2.22

Це пояснюється тим, що ділянка BC лежить у зоні зростання деформації, а ділянка AC — у зоні спадання деформацій. Завдяки внутрішньому тертю в матеріалі тіл, що деформуються, має місце незбіжність кривих навантаження й розвантаження матеріалу (явище пружної післядії і гістерезису). Тому крива напружень у зоні CB буде вище від кривої в зоні AC , а отже, розподіл напружень відносно лінії дії сили $\bar{Q}$ буде несиметричним з ма-

ксимальним зміщенням у бік руху котка. Отже, рівнодійна $\bar{N}$ напружень буде зміщена в бік руху від точки С на величину k , яку називають плечем сили, або **коефіцієнтом тертя кочення**.

Ураховуючи, що деформація тіл при коченні є незначною порівняно з розмірами тертьових тіл, можна брати $CD = h$. Тоді, записавши рівняння моментів сил, що діють на коток, відносно точки С, маємо

$$\sum_{i=1}^n M_c(\bar{F}) = Nk - Fh = 0. \quad (2.41)$$

Величину $M_k = Nk$ називають моментом тертя кочення, а $M_p = Fh$ – рушійним моментом. Якщо врахувати, що $N = Q$, то момент тертя кочення

$$M_k = Qk. \quad (2.42)$$

Тут коефіцієнтом пропорційності є плече тертя k . Як видно з рис. 2.22 і формули (2.42), коефіцієнт тертя кочення k , який виражається в одиницях довжини (міліметрах), визначає максимальне значення зміщення нормальної реакції $\bar{N}$ відносно лінії дії сили $\bar{Q}$.

Коефіцієнт тертя кочення залежить від пружних властивостей матеріалів тертьових тіл, стану їх поверхні та радіусів кривизни. Наприклад, для загартованих сталених шариків і роликів $k = 0,01$ мм, сталених колеса й рейки $k = 0,05$ мм, для дерева і сталі $k = 0,3 - 0,4$ мм.

З рівнянь (2.41) і (2.42) знаходимо силу $\bar{F}$, яку необхідно прикласти до котка, щоб він рівномірно перекочувався по площині:

$$F = \frac{k}{h} Q. \quad (2.43)$$

На практиці користуються безрозмірною величиною – **зведеним коефіцієнтом тертя кочення**

$$f' = \frac{k}{h}. \quad (2.44)$$

Тоді залежність (2.43) набуває такого самого вигляду, як і при терті ковзання:

$$F = f' Q. \quad (2.45)$$

Втрати енергії при терті кочення є значно меншими, ніж при терті ковзання. Тому в техніці широко використовується колісний транспорт, підшип-

ники кочення.

Оскільки на практиці звичайно тертя кочення супроводжується тертям ковзання, то важливо розглянути, при яких умовах яке тертя має місце. Тут можливі три випадки:

1. Якщо $\frac{k}{h}Q < F$, а $fQ > F$, то коток буде тільки котитися (f – коефіцієнт тертя ковзання). Умова **чистого кочення**

$$\frac{k}{h} < f. \quad (2.46)$$

2. Якщо $fQ < F$, а $\frac{k}{h}Q > F$, то циліндр буде тільки ковзати. Умова **чистого ковзання** має вигляд

$$\frac{k}{h} > f. \quad (2.47)$$

3. Умова **спільного кочення й ковзання**

$$\frac{k}{h} = f. \quad (2.48)$$

Отже, при наявності сил тертя змінюються модуль і напрямок сил, що діють у кінематичних парах.

У поступальній парі при наявності тертя ковзання вектор сили взаємодії ланок відхиляється від загальної нормалі до поверхонь ковзання на кут тертя (див. рис. 2.9).

В обертальній парі вектор сили взаємодії також відхиляється від нормалі до тертьових поверхонь і проходить не через центр шарніра, а по дотичній до кола, центр якого збігається з центром шарніра (див. рис. 2.19).

Сила тертя завжди напрямлена проти відносної швидкості ланок. У цьому виявляється гальмівна дія тертя.

У вищій кінематичній парі плоского механізму можливими є два види відносного руху: ланки можуть ковзати і перекочуватися одна по одній. Отже, має місце тертя ковзання й кочення. Гальмівна дія тертя кочення є малою. Тертя ковзання виявляється у вищих кінематичних парах так само, як і в нижчих.

3. СИЛОВИЙ РОЗРАХУНОК ПЛОСКИХ МЕХАНІЗМІВ

3.1. Задачі силового розрахунку

Визначення сил, що діють на ланки механізмів, має велике практичне значення для розрахунків ланок на міцність, жорсткість, вібростійкість, довговічність, для визначення втрат енергії на тертя, для підрахунку енергетичного балансу машини та виконання інших розрахунків.

Основними задачами силового розрахунку механізмів є:

- 1) **визначення невідомих зовнішніх сил**, що діють на ланки механізмів;
- 2) **визначення реакцій у кінематичних парах**, тобто сил взаємодії ланок у місцях їх стикання;
- 3) **визначення зрівноважувальної сили або зрівноважувального моменту сил**.

Розв'язуючи задачі силового розрахунку механізмів, припускають, що закон руху початкової ланки задано, а маси й моменти інерції ланок є відомими. Отже, завжди можна визначити ті сили інерції, які є необхідними для розв'язання задач силового розрахунку.

У першому наближенні силовий розрахунок проводять без урахування сил тертя в кінематичних парах.

У загальному випадку, при наявності прискорень, виникають сили інерції, і щоб розв'язати задачу про знаходження сил, використовують принцип Даламбера, згідно з яким рухома система тіл у кожний момент часу перебуває в рівновазі під дією зовнішніх сил, включаючи сили інерції.

Розв'язання задачі динаміки методами статички називають кінетостатичним розрахунком.

3.2. Статична визначеність кінематичних ланцюгів

Статично визначеною системою називають таку систему, у якій кількість невідомих сил дорівнює кількості рівнянь рівноваги, які можна скласти для їх знаходження. З курсів теоретичної механіки відомо, що задача про знаходження сил легко розв'язується для статично визначених систем.

Тому, перш ніж розв'язувати задачу знаходження невідомих сил, треба з'ясувати, для яких кінематичних ланцюгів виконується умова статичної визначеності. Для прикладу розглянемо плоский механізм, до складу якого входить n рухомих ланок, p_5 кінематичних пар V класу і p_4 кінематичних пар IV класу. Для того щоб визначити реакції в кінематичних парах, необхідно, щоб були відомі всі зовнішні сили (включаючи сили інерції), які діють на ланки механізму. Для кожної ланки плоского механізму можна скласти три рівняння, тому для n ланок – $3n$ рівнянь. Будь-яка сила характеризується трьома параметрами: величиною, напрямком і точкою прикладення. Розглянемо, які з цих параметрів є відомими, а які – невідомими

для сил реакцій у різних кінематичних парах плоских механізмів.

Сили реакцій (сили взаємодії) між двома тілами (ланками), які стикаються, при відсутності тертя завжди напрямлені нормально до стичних поверхонь. Тому в обертальній кінематичній парі (рис. 3.1, а) реакція $\bar{R}_{21}$, прикладена до ланки 2 з боку ланки 1, буде завжди проходити через центр шарніра О. Величина й напрямок дії цієї сили $\bar{R}_{21}$ є невідомими, тому що вони залежать від сил, прикладених до ланок 1 і 2.

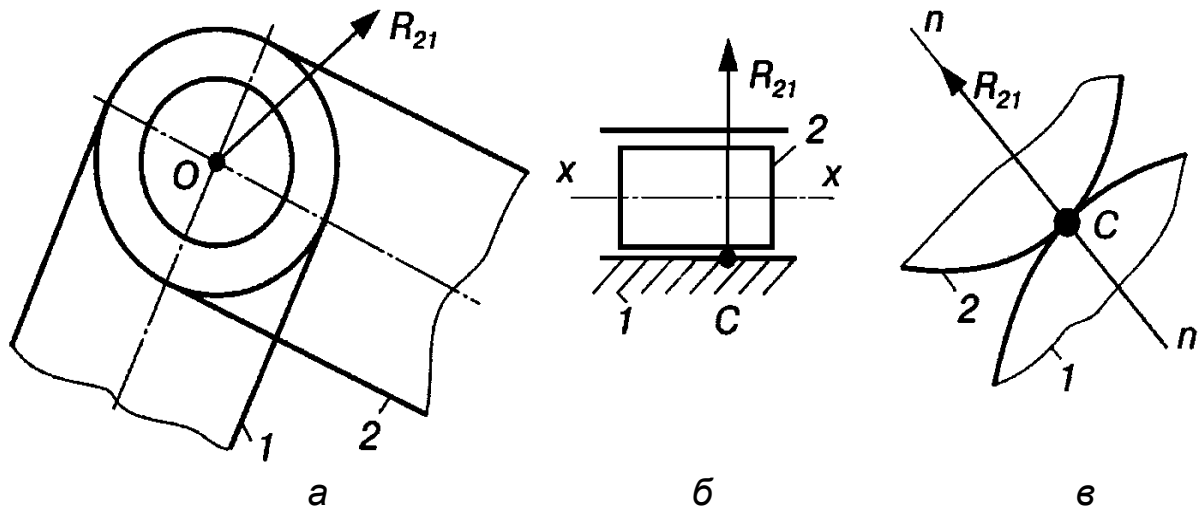


Рис. 3.1

Це повністю стосується й реакції $\bar{R}_{21}$, прикладеної до ланки 1 з боку ланки 2, тому що сили взаємодії зв'язані між собою третім законом Ньютона: $\bar{R}_{21} = -\bar{R}_{12}$.

У поступальній парі (рис. 3.1, б) результуюча реакція $\bar{R}_{21}$ буде напрямлена перпендикулярно до осі руху $x-x$ ланок цієї пари, причому невідомими є її величина й точка прикладення С.

У вищій парі IV класу (рис. 3.1, в) реакція $\bar{R}_{21}$ напрямлена вздовж спільної нормалі $n-n$ (без урахування сил тертя) і прикладена в точці дотику С. Тому в такій кінематичній парі відомими є точка прикладення й напрямок сили реакції. Невідомою є її величина.

Тоді для плоского кінематичного ланцюга кількість невідомих дорівнюватиме $2p_5 + p_4$.

Кінематичний ланцюг буде статично визначеним, якщо кількість невідомих параметрів дорівнює кількості рівнянь, тобто повинна виконуватися рівність

$$3n - 2p_5 - p_4 = 0. \quad (3.1)$$

Вираз у лівій частині рівності (3.1) показує кількість ступенів вільності плоского кінематичного ланцюга.

Якщо в ланцюзі немає кінематичних пар IV класу, то

$$3n - 2p_5 = 0.$$

Отже, статично визначеними є кінематичні ланцюги з нульовим ступенем вільності. Такими кінематичними ланцюгами є структурні групи (групи Ассура). Звідси випливає, що структурні групи є статично визначеними, а тому при силовому розрахунку доцільно розглядати рівновагу окремих структурних груп.

Умова (3.1) справджується для плоскої системи зовнішніх сил, які діють на ланки механізму. Статично визначений механізм не повинен мати зайвих зв'язків. Наявність таких зв'язків збільшує кількість невідомих складових реакцій, і для їх визначення додатково до рівнянь статички необхідно скласти рівняння деформацій.

3.3. Силовий розрахунок згідно з методом Бруєвича

При силовому розрахунку згідно з методом Бруєвича механізм розбивають на структурні групи, тобто на статично визначені ланцюги.

Таким чином, силовий розрахунок механізмів зводиться до розрахунку окремих структурних груп. При цьому, на відміну від кінематичного дослідження механізмів, силовий розрахунок починають з останньої приєднаної структурної групи й закінчують силовим розрахунком початкової ланки.

До ланок структурних груп прикладають усі зовнішні сили, включаючи сили (моменти сил) інерції.

Дію основного механізму на ланки групи замінюють реакціями.

Під дією всіх цих сил група перебуває в рівновазі, а тому можна скласти відповідну кількість рівнянь рівноваги, розв'язуючи які відносно невідомих складових реакцій, знайти їх.

Розглянемо послідовність силового розрахунку структурних груп II класу (рис. 3.2).

Для групи першого виду (рис. 3.2, а):

1) для ланки 2 складаємо рівняння рівноваги моментів усіх сил, що діють на ланку, відносно точки В

$$\sum M_B(\vec{F}_i) = 0, \quad (3.2)$$

звідки знаходимо значення R_{21}^r ;

2) для ланки 3 теж складаємо рівняння рівноваги моментів сил (3.2) відносно точки В і знаходимо значення R_{34}^r ;

3) для групи складаємо векторне рівняння рівноваги у формі сил, що діють на групу:

$$\sum(\vec{F}_i) = 0, \quad (3.3)$$

звідки знаходимо значення R_{21}^n і R_{34}^n ;

4) для ланки 2 складаємо векторне рівняння рівноваги (3.3) у формі сил, що діють на ланку, і знаходимо значення й напрямки R_{23} .

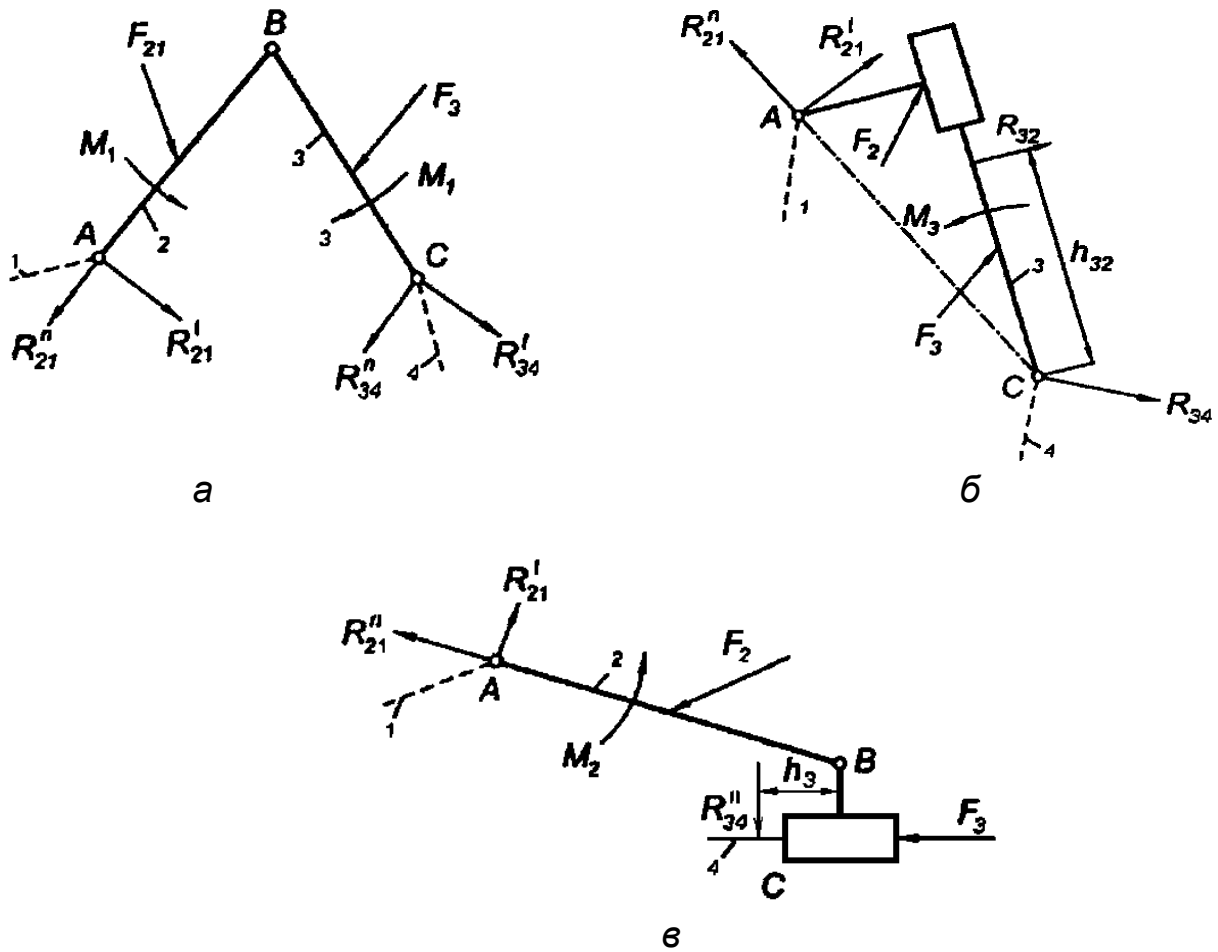


Рис. 3.2

Для групи другого виду (рис. 3.2, в):

1) для ланки 2 складаємо рівняння рівноваги моментів усіх сил, що діють на ланку, відносно точки В (3.2), звідки знаходимо значення R_{21}^r ;

2) для групи складаємо векторне рівняння рівноваги у формі сил, що діють на групу (3.3), звідки знаходимо значення R_{21}^n і R_{34} ;

3) для ланки 2 складаємо векторне рівняння рівноваги у формі сил, що діють на ланку (3.3), і знаходимо значення й напрямки R_{23} ;

4) для ланки 3 складаємо рівняння рівноваги моментів сил, що діють на ланку, відносно точки В (3.2), звідки знаходимо параметр h_3 .

Для групи третього виду (рис. 3.2, б):

1) для групи складаємо рівняння рівноваги моментів усіх сил, що діють на ланки групи, відносно точки С (3.2), звідки знаходимо значення R_{21}^r ;

2) для ланки 2 складаємо векторне рівняння рівноваги у формі сил, що діють на ланку (3.3), звідки знаходимо значення R_{21}^n і R_{23} ;

3) для ланки 3 складаємо векторне рівняння рівноваги у формі сил, що діють на ланку (3.3), знаходимо значення й напрямки R_{34} ;

4) для ланки 3 складаємо рівняння рівноваги моментів сил (3.2), що діють на ланку, відносно точки С, звідки знаходимо параметр h_{32} .

Приклад

Методику й порядок силового розрахунку плоских механізмів розглянемо на прикладі кривошипно-повзункового механізму компресора.

Вхідні дані:

1) кінематична схема механізму;

2) маси й моменти інерції ланок, положення їх центрів мас $m_1, J_{1S}, m_2, J_{2S}, m_3$;

3) кутова швидкість ω_1 і кутове прискорення ε_1 ланки 1;

4) сила опору, прикладена до поршня F_3 ;

5) сили тяжіння всіх ланок G_1, G_2, G_3 .

Визначимо послідовність виконання силового розрахунку.

Для розглянутого положення механізму створюємо план механізму (рис. 3.3).

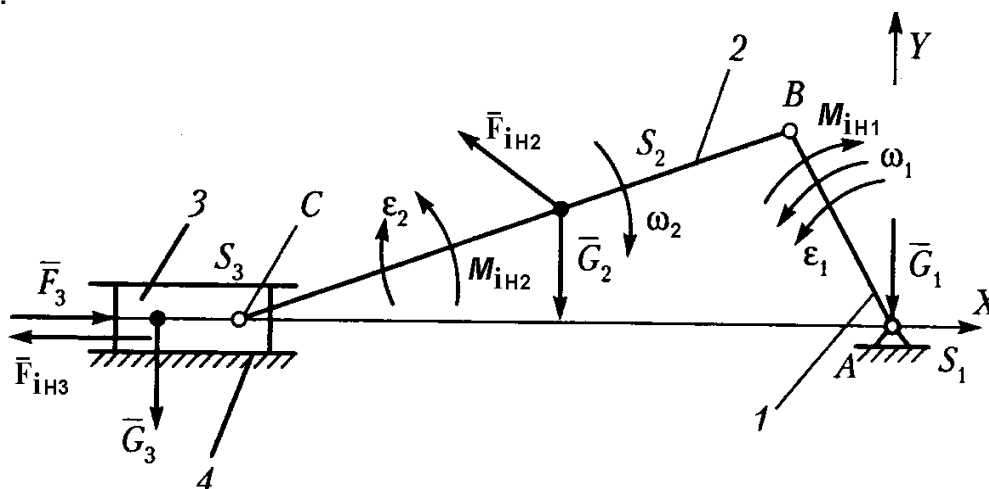


Рис. 3.3

Записуємо векторні рівняння швидкостей і прискорень, будуємо плани швидкостей (рис. 3.4, а) і прискорень (рис. 3.4, б).

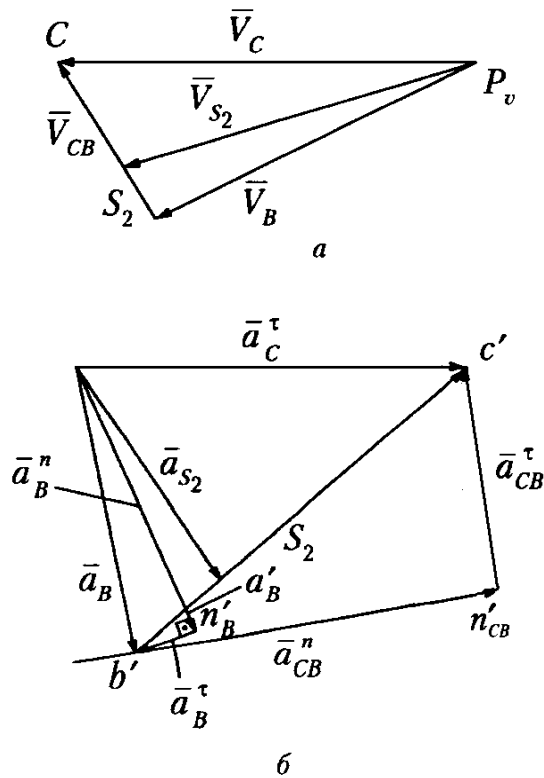


Рис. 3.4

Для визначення швидкостей:

$$\begin{aligned} V_B &= \omega_1 l_{AB}; \\ \bar{V}_C &= \bar{V}_B + \bar{V}_{CB}; \\ \mu &= \left[\frac{\text{М}}{\text{с} \cdot \text{мм}} \right]. \end{aligned}$$

Для визначення прискорень:

$$\begin{aligned} a_B &= a_B^n + a_B^\tau; \\ a_C &= a_C^\tau = a_B^n + a_B^\tau + a_{CB}^n + a_{CB}^\tau; \\ \mu &= \left[\frac{\text{М}}{\text{с}^2 \cdot \text{мм}} \right]. \end{aligned}$$

Далі знаходимо значення головних векторів сил інерції ($\bar{F}_{iH2}, \bar{F}_{iH3}$) і головних моментів сил інерції ($\bar{M}_{iH1}, \bar{M}_{iH2}$) і наносимо їх на розрахункову схему механізму (див. рис. 3.3).

Необхідно визначити реакції (внутрішні сили) у всіх кінематичних парах і зрівноважувальний момент, прикладений до кривошипа.

Поділимо механізм на дві частини: структурну групу (ланки 2 і 3) і основний (первинний) механізм (рис. 3.5, а, б).

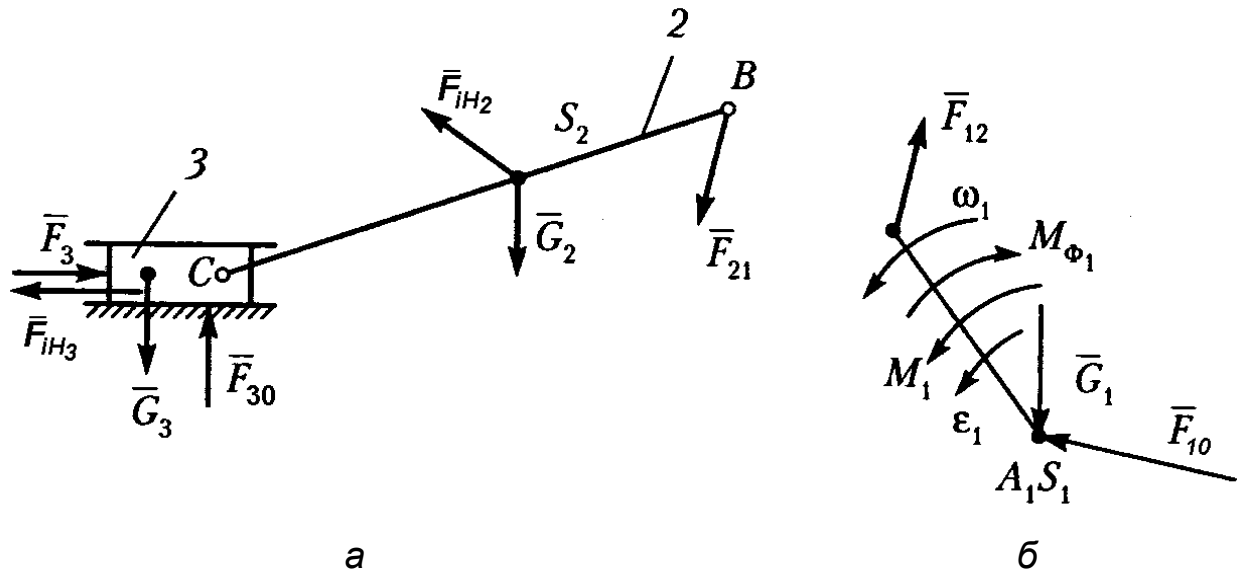


Рис. 3.5

Силовий розрахунок структурної групи (рис. 3.6). Розглянемо рівновагу групи 2 – 3:

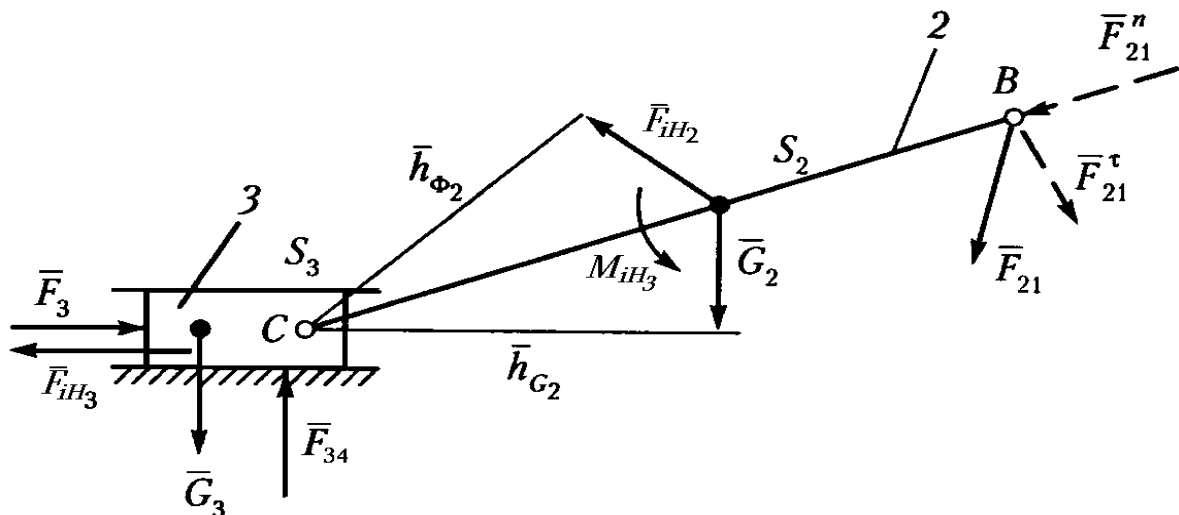


Рис. 3.6

$$\sum \bar{F}_{23} = 0;$$

$$\bar{F}_{34} + \bar{F}_3 + \bar{F}_{iH3} + \bar{G}_3 + \bar{F}_{iH2} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{21} = 0. \quad (3.5)$$

Оскільки в рівнянні (3.5) три невідомих, воно не розв'язується. Для визначення одного з невідомих запишемо рівняння рівноваги для ланки 2, попередньо розклавши силу F_{21} на нормальну F_{21}^n і дотичну F_{21}^τ (див. рис. 3.6):

$$\sum M_{C(2)};$$

$$M_{C(G_2)} + M_{C(\Phi_{S2})} + M_{C(F_{21}^\tau)} + M_{\Phi_{S2}} = 0;$$

$$M_C(G_2) + M_C(\Phi_{S2}) + M_C(F_{21}^\tau) = 0;$$

$$F_{21}^\tau = \frac{\sum M_{c(2)}}{l_{CB}}. \quad (3.6)$$

Після визначення F_{21}^τ , розв'язуємо векторне рівняння (3.5):

$$\bar{F}_{34} + \bar{F}_3 + \bar{\Phi}_{S3} + \bar{\Phi}_{S2} + \bar{G}_2 + \bar{F}_{21}^\tau + \bar{F}_{21}^n = 0.$$

За масштабом $\mu_F = \left[\frac{\text{Н}}{\text{мм}} \right]$ будемо план сил (рис. 3.7) для останнього рівняння.

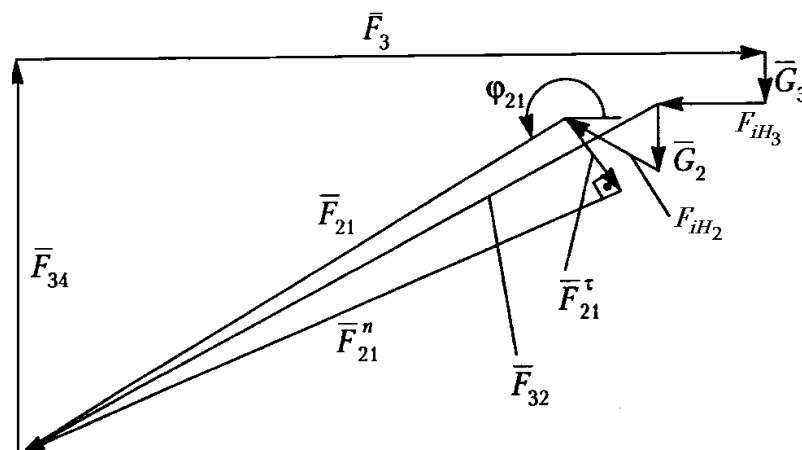


Рис. 3.7

З плану сил визначаємо сили F_{34} і F_{21} :

$$F_{21} = \frac{F_{21}}{\mu_F}; \quad F_{34} = \frac{F_{34}}{\mu_F}.$$

Визначаємо кутову координату φ_{21} сили F_{21} , відклавши її від додаткового напрямку осі x і вимірявши.

Розглянемо рівновагу ланки 3 (рис. 3.8).

З умови рівноваги ланки 3 $\sum F_3 = 0$ визначаємо силу (реакцію) F_{32} і плече сили $F_{34} - h_{F_{34}}$:

$$\bar{F}_3 + \bar{G}_3 + \bar{\Phi}_{S_3} + \bar{F}_{34} + \bar{F}_{32} = 0; \quad (3.7)$$

$$\sum M_{C(3)} = 0;$$

$$M(G_3) + M(F_{34}) = 0; \quad (3.8)$$

$$h_{F_{34}} = \frac{G_3 l_{CS3}}{F_{34}}.$$

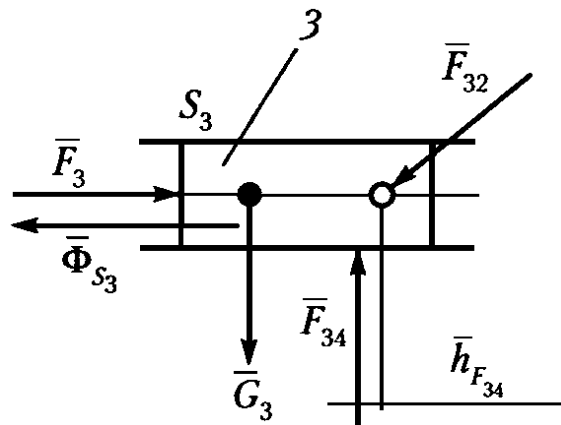


Рис. 3.8

Силовий розрахунок основного механізму. До кривошипа 1 (рис. 3.9) прикладаємо всі зовнішні сили, включаючи сили інерції, які діють на нього ($\bar{F}_{iH1}$, $\bar{G}_1$).

Крім того, на кривошип 1 у точці B діє реакція $\bar{R}_{12}$ з боку ланки 2 групи Ассура, приєднаної до нього. Ця реакція дорівнює за величиною реакції $\bar{R}_{21}$, але напрямлена протилежно. Реакцію $\bar{R}_{21}$ уже визначено при силовому розрахунку приєднаної структурної групи, тобто $\bar{R}_{12} = -\bar{R}_{21}$. Крім того, у

кінематичній парі A на кривошип діє сила реакції $\bar{R}_{10}$ з боку стояка. Цю реакцію треба визначити.

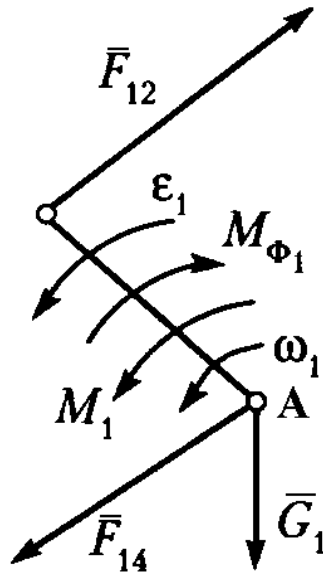


Рис. 3.9

Проте кривошип під дією прикладених до нього сил, у тому числі й сил інерції, не перебуває в рівновазі, тому що при одній рухомій ланці й одній парі V класу кількість рівнянь рівноваги, які можна скласти, буде на одиницю більше кількості невідомих, які треба визначити, тобто

$$3n - 2p_5 = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = 1.$$

Для забезпечення рівноваги кривошипа необхідно додатково ввести силу або пару сил, які зрівноважують усі сили, прикладені до нього. Цю силу називають зрівноважувальною силою $\bar{F}_{зр}$, а момент пари сил – зрівноважувальним моментом $M_{зр}$. Точка прикладення й напрямок зрівноважувальної сили (моменту) мають бути задані або визначені з конструкції приводу початкової ланки. Наприклад, якщо вал кривошипа 1 зв'язаний з двигуном з допомогою муфти, то треба прикласти до кривошипа зрівноважувальний момент $M_{зр}$, якщо цей вал з'єднаний з двигуном з допомогою зубчастої передачі, то до кривошипа треба прикласти зрівноважувальну силу, яка діятиме вздовж нормалі до профілю зубів. Залежно від того, що діє – сила $F_{зр}$ чи момент $M_{зр}$, реакція R_{10} у кінематичній парі A буде різ-

ною.

Зрівноважувальна сила або зрівноважувальний момент є такою силою або моментом, які необхідно прикласти до початкової ланки, щоб вона рухалася за заданим законом.

Розглянемо рівновагу кривошипа (див. рис. 3.9) у формі моментів сил, що діють на нього відносно точки A , і визначимо зрівноважувальний момент:

$$\sum M_A; \\ M_A(F_{12}) + M_{\Phi_{S1}} + M_{\partial 1} = 0. \quad (3.9)$$

Для знаходження реакції $\bar{R}_{10}$ складаємо векторне рівняння рівноваги у формі сил:

$$\sum \bar{F}_i; \\ \bar{F}_{12} + \bar{G}_1 + \bar{F}_{14} = 0. \quad (3.10)$$

У цьому рівнянні невідомою є тільки реакція $\bar{R}_{10}$. Значення сили F_{14} і напрямку (кутову координату φ_{14}) знаходимо з плану сил (рис. 3.10).

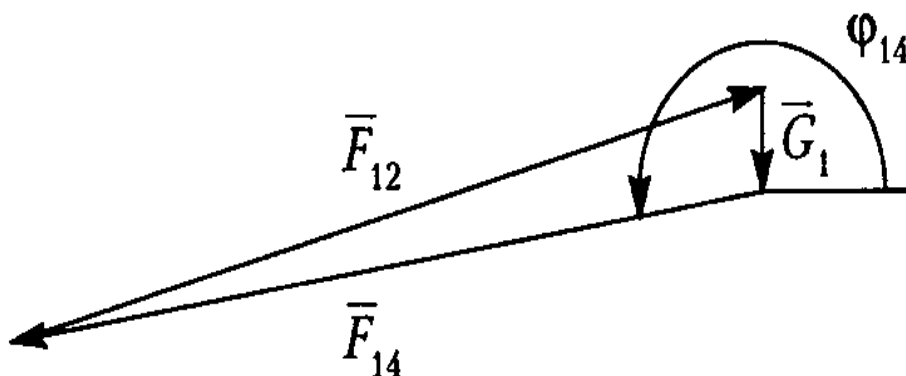


Рис. 3.10

Якщо на початкову ланку діє зрівноважувальна сила $\bar{F}_{зп}$, то її величину теж знайдемо з рівняння рівноваги кривошипа відносно точки A , записавши рівняння моментів усіх сил, що діють на нього по типу (3.9):

$$F_{зп} l_{OA} + R_{12} h_1 - G_1 h'_1 = 0; , \\ F_{зп} = \frac{R_{12} h_1 - G_1 h'_1}{l_{OA}},$$

де h_1 і h_2 – плечі сил відносно точки О.

Для визначення реакції $\bar{R}_{10}$, як і раніше, складаємо векторне рівняння рівноваги у формі сил. Підкреслимо, що методика силового розрахунку не змінюється, змінюється лише величина й напрямок реакції $\bar{R}_{10}$.

3.4. Розрахунок зрівноважувального моменту згідно з методом Жуковського

Якщо немає потреби робити повний силовий розрахунок механізму, унаслідок якого визначаються реакції в кінематичних парах, то задача зводиться тільки до визначення зрівноважувальної сили або зрівноважувального моменту, який прикладають до початкової ланки. Реакції в кінематичних парах можуть бути невідомими, як і внутрішні сили для всього механізму в цілому. У таких випадках для знаходження зрівноважувальної сили використовують метод (правило) так званого «жорсткого» важеля Жуковського. Правило Жуковського ґрунтується на використанні принципу можливих переміщень.

Для механізму, у якому ланки здійснюють визначений рух, можливі переміщення стають дійсними переміщеннями. Тоді, якщо на ланки механізму діє кілька сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n$, принцип можливих переміщень можна записати в такому вигляді:

$$\sum_{i=1}^n \bar{F}_i ds_i \cos \alpha_i = 0, \quad (3.12)$$

де ds_i – дійсне нескінченно мале переміщення точки прикладення сили $\bar{F}_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$); α_i – кут між напрямком сили $\bar{F}_i$ і напрямком переміщення точки прикладення цієї сили.

Поділивши рівняння (3.12) на dt , одержимо

$$\sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^n P_i = 0, \quad (3.13)$$

де $v_i = \frac{ds}{dt}$ – швидкість точки прикладення сили $\bar{F}_i$; P_i – миттєва потужність, що розвивається силою $\bar{F}_i$.

Рівняння (3.13) показує, що принцип можливих переміщень можна виразити через суму миттєвих потужностей сил, що діють на ланки механізму.

Для окремо взятої ланки AB (рис. 3.11, а), на яку діє сила $\vec{F}_i$, прикладена в точці C (швидкість точок A і B задано, точка P – миттєвий центр швидкостей), миттєва потужність, яку розвиває ця сила, $P_i = F_i v_i \cos \alpha_i$ може бути виражена по-іншому.

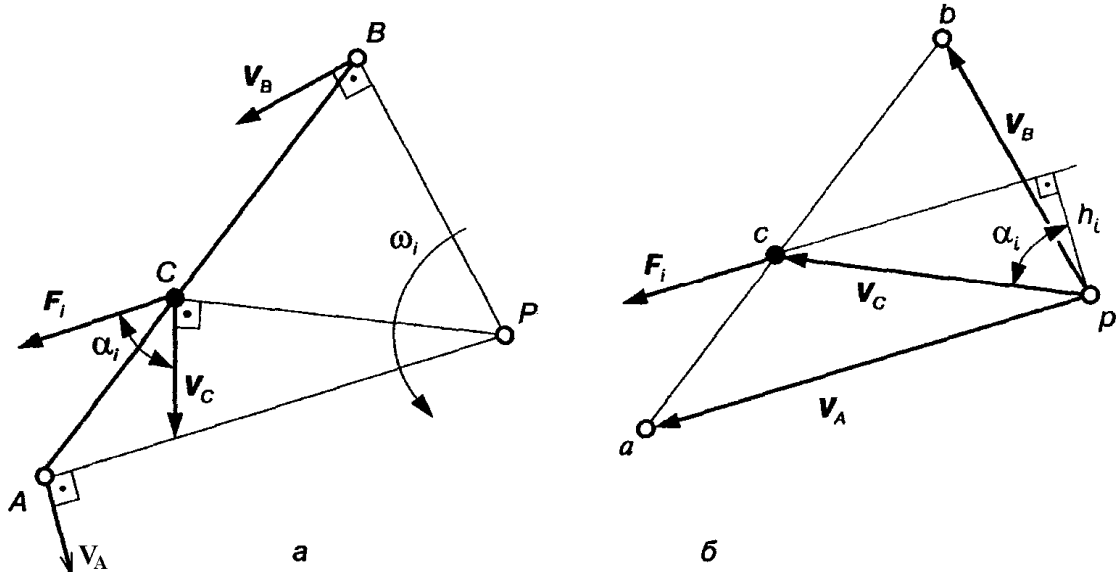


Рис. 3.11

Для цього побудуємо повернутий на 90° проти миттєвого обертання ланки AB план швидкостей цієї ланки (рис. 3.11, б), у точку C якого прикладаємо силу $\vec{F}_i$, і запишемо момент сили $\vec{F}_i$ відносно полюса p :

$$M_p = F_i h_i = F_i (pc) \cos \alpha_i, \quad (3.14)$$

де h_i – плече сили $\vec{F}_i$ відносно полюса p ; pc – відрізок на плані швидкостей, який у масштабі μ_i визначає швидкість точки C , тобто $v_C = (pc) \mu_v$. Тоді, помноживши ліву й праву частини (3.14) на μ_v , маємо

$$F_i h_i \mu_v = F_i v_C \cos \alpha_i.$$

Такі самі вирази можна записати й для сил, що діють на інші ланки механізму. Просумувавши їх, дістанемо рівняння, яке буде тотожним рівнянню (3.13), сума членів якого дорівнює нулю, тобто

$$F_1 v_1 \cos \alpha_1 + F_2 v_2 \cos \alpha_2 + \dots + F_n v_n \cos \alpha_n = F_1 h_1 \mu_1 + F_2 h_2 \mu_2 + \dots + F_n h_n \mu_n = 0.$$

Після скорочення на μ_v маємо

$$\sum_{i=1}^n F_i h_i = 0. \quad (3.15)$$

Рівняння (3.15) – це записане в математичній формі правило важеля Жуковського, яке можна сформулювати так.

Переносимо всі задані сили, що діють у певний момент часу на ланки механізму, у тому числі й сили інерції, в однойменні точки повернутого плану швидкостей, не змінюючи при цьому величини й напрямку сили. Розглядаємо повернутий план швидкостей як деякий жорсткий важіль, який перебуває в рівновазі відносно полюса плану швидкостей під дією всіх прикладених сил. Тоді сума моментів усіх цих сил, включаючи зрівноважувальну силу, відносно полюса плану швидкостей дорівнює нулю.

Якщо на ланки механізму крім сил $\bar{F}_i$ є ще й пара сил, моментом яких є M_i то при використанні правила Жуковського кожний момент M_i (рис. 3.12) розкладають на пару сил $\bar{F}_i'$, які прикладають у дві точки, наприклад A і B . Величину й напрямок кожної сили $\bar{F}_i'$ визначають при умові, що

$$M_i = F_i' l_i,$$

де $F_i' = M_i / l_i$, l_i – плече сил $\bar{F}_i'$, що дорівнює в цьому випадку довжині ланки AB ($l_i = l_{AB}$).

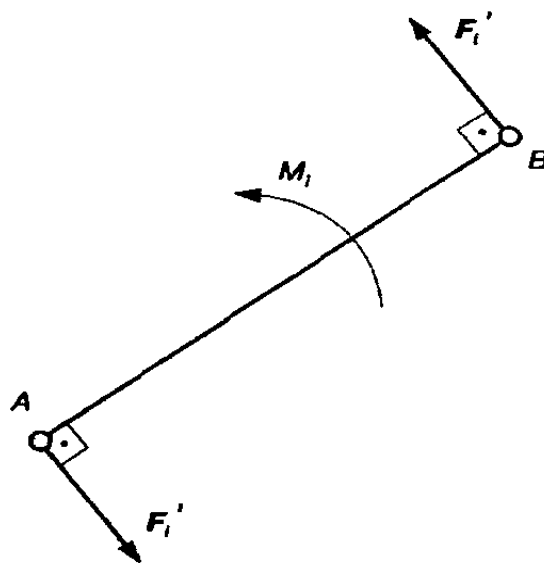


Рис. 3.12

При цьому напрямок моменту пари сил $\bar{F}_i'$ повинен збігатися з напрямком моменту M_i . Треба мати на увазі, що напрямок цього моменту сил $\bar{F}_i'$ на важелі Жуковського може не збігатися з напрямком моменту M_i на схемі механізму. Це буває тоді, коли положення A і B на ланці та на плані швидкостей (a і b) не збігаються.

Розглянемо приклад визначення зрівноважувальної сили $\bar{F}_{3B}$ за допомогою правила важеля Жуковського.

Приклад

Задано кінематичну схему кривошипно-повзункового механізму (рис. 3.13, а), на ланки якого діють сили $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$, момент сил M_2 , швидкість обертання кривошипа OA ω_1 . Зрівноважувальну силу прикласти до кривошипа OA у точці A і надати напрямку, перпендикулярного до лінії OA .

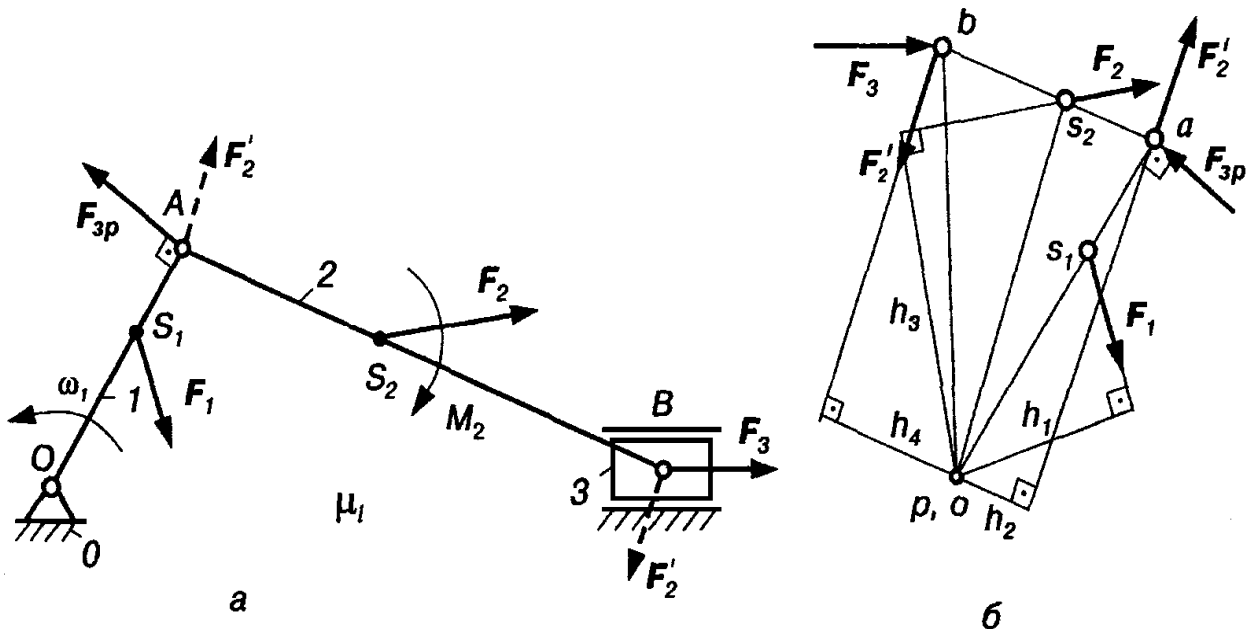


Рис. 3.13

Будуємо для заданого положення механізму повернутий на 90° проти миттєвого обертання кривошипа ω_1 план швидкостей (рис. 3.13, б), у відповідних точках якого прикладаємо сили $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, F_{3p}$; момент M_2 розкладаємо на пару сил $F_2' = M_2 / l_{AB}$ (на рис. 3.13, а сили F_2' показано штриховою лінією), які прикладаємо відповідно у точках a і b перпендикулярно до AB ($ab \parallel AB$).

Ураховуючи, що під дією цих сил, включаючи зрівноважувальну силу, механізм перебуває в рівновазі, можна записати таке рівняння моментів

сил, прикладених до повернутого плану швидкостей, який умовно вважаємо жорстким важелем:

$$\sum M_p = F_{зр}(pa) - F_1 h_1 + F_2 h_2 - F_2 h_3 + F_2' h_4 - F_3(pb) = 0,$$

звідки

$$F_{зр} = \frac{F_1 h_1 - F_2 h_2 + F_2 h_3 - F_2' h_4 + F_3(pb)}{pa}, \quad (3.16)$$

де $h_1, \dots, h_4$ – плечі відповідних сил відносно полюса повернутого плану швидкостей, мм. Напрямок вектора зрівноважувальної сили $\bar{F}_{зр}$ вибрано правильно, якщо після числового розрахунку (3.16) одержимо $\bar{F}_{зр}$ зі знаком «плюс», і навпаки, якщо буде «мінус», то треба змінити напрямок вектора сили $\bar{F}_{зр}$ на протилежний.

Викладений метод є загальним для механізмів будь-якого класу.

3.5. Урахування сил тертя

Основні положення силового розрахунку механізмів з урахуванням тертя є такими самими, що й розрахунку без урахування тертя. Це пояснюється тим, що через тертя не змінюється кількість невідомих у кінематичних парах. Отже, структурні групи Ассура й при врахуванні тертя є статично визначеними. Силовий розрахунок виконують за групами Ассура з використанням рівнянь кінетостатики, у які тепер необхідно додати сили й моменти тертя. Остання обставина ускладнює обчислення.

Академік І. І. Артоблевський запропонував метод послідовних наближень.

У першому наближенні силовий розрахунок виконують без урахування сил тертя й отримують сили взаємодії (реакції) у всіх кінематичних парах. Для розрахунку в другому наближенні визначають сили й моменти тертя в кінематичних парах і використовують їх під час силового розрахунку. Порядок розрахунку в другому наближенні такий самий, що й у першому наближенні. Під час силового розрахунку в другому наближенні отримують уточнені значення реакцій у кінематичних парах. За значеннями реакцій знаходять уточнені сили й моменти тертя, а потім починають розрахунок у третьому наближенні. Досвід показує, що достатньо виконати два-три наближення силового розрахунку.

4. ВИЗНАЧЕННЯ ЗАКОНУ РУХУ МЕХАНІЗМІВ

Для визначення закону руху механізму під дією заданих зовнішніх (активних) сил необхідно розв'язати рівняння його руху – це так звана обернена задача динаміки.

Основою для складання рівняння руху механізму є теорема про зміну кінетичної енергії, згідно з якою зміна кінетичної енергії механічної системи за будь-який проміжок часу дорівнює сумі робіт усіх прикладених сил, що діють на цю систему протягом цього ж проміжку часу:

$$\Delta T = T - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i, \quad (4.1)$$

де T , T_0 – кінетична енергія механічної системи в кінці й на початку проміжку часу; $\sum_{i=1}^n A_i$ – сума робіт усіх прикладених до системи сил.

З рівняння (4.1) для кожного положення вхідної ланки можна одержати швидкості всіх ланок механізму. Але рівняння містить багато невідомих, і тому ця задача для розрахунку багатоланкового механізму є занадто важкою.

Перехід від багатьох невідомих до одного здійснюється з допомогою методу зведення сил і мас. Для цього від реального механізму переходимо до моделі, тобто замінюємо весь складний механізм умовною ланкою. Це означає, що необхідно визначити закон руху всього лише однієї з його ланок, яка буде початковою.

Положення механізму, що має один ступінь вільності, цілком визначається однією координатою, яку називають узагальненою координатою. За узагальнену координату найчастіше беруть кутову координату ланки, що здійснює обертальний рух. У цьому випадку динамічна модель матиме вигляд, який зображено на рис. 4.1. На рисунку:

$\varphi_1 = \varphi_M$ – узагальнена кутова координата моделі;

$\omega_1 = \omega_M$ – кутова швидкість моделі;

M_{3B} – сумарний момент (узагальнена сила) – еквівалент фактичних сил і моментів сил, прикладених до ланок механізму;

J_{3B} – сумарний момент інерції, що є еквівалентом інерційності всіх ланок механізму.

У разі зведення фактично діючі сили й моменти замінюємо сумарним зведеним моментом, прикладеним до динамічної моделі, а фактичні маси ланок – сумарним моментом інерції.

Слід зазначити, що зроблена заміна не повинна порушити закони руху механізму, який визначається дією фактично прикладених сил і моментів.

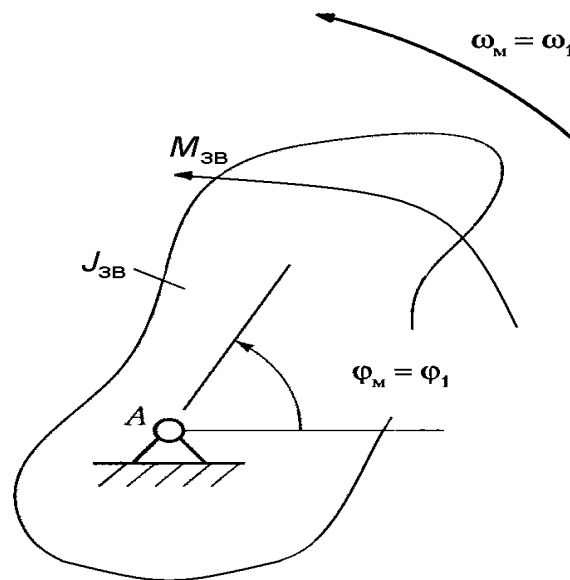


Рис. 4.1

4.1. Зведення сил і моментів сил

При динамічному дослідженні руху механізмів зручно всі сили, що діють на різні ланки механізму, замінити однією силою або моментом сил, прикладених до однієї з ланок механізму. Таку силу, що замінює всі інші сили, називають зведеною силою, а момент сили – зведеним моментом. Для того щоб така заміна була еквівалентною, необхідно, щоб робота зведеної сили (моменту сили) на деякому можливому переміщенні її точок прикладення або потужність, яку вона розвиває, дорівнювала сумі робіт, прикладених до механізму сил на тому самому переміщенні їх точок прикладення, або сумі потужностей, що розвиваються цими силами. Це і є умовою зведення сил або моментів сил.

Ланку механізму, до якої прикладають зведену силу, називають ланкою зведення, а точку їх прикладення – точкою зведення. Якщо механізм має один ступінь вільності, то для вивчення його руху достатньо знати закон руху однієї з його ланок, тобто знати закон змінення узагальненої координати.

Зазвичай за ланку зведення беруть початкову ланку механізму. У робочих машинах ланкою зведення вибирають головний вал, у машинах-двигунах – вихідний вал. Тоді, замість того щоб розглядати всі ланки механізму, можна розглянути тільки одну ланку, наприклад кривошип ОА (рис. 4.2), узагальнена координата якого – кут φ_1 .

Для визначення зведених сил зручно використовувати рівність потужностей

$$P_{3B} = \sum_{i=1}^n P_i, \quad (4.2)$$

де P_{3B} – потужність, яку розвиває зведена сила F_{3B} або зведений момент M_{3B} ; P_i – потужність, що розвивають сили й моменти пар сил, які прикладені до i -ї ланки й мають бути зведені ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

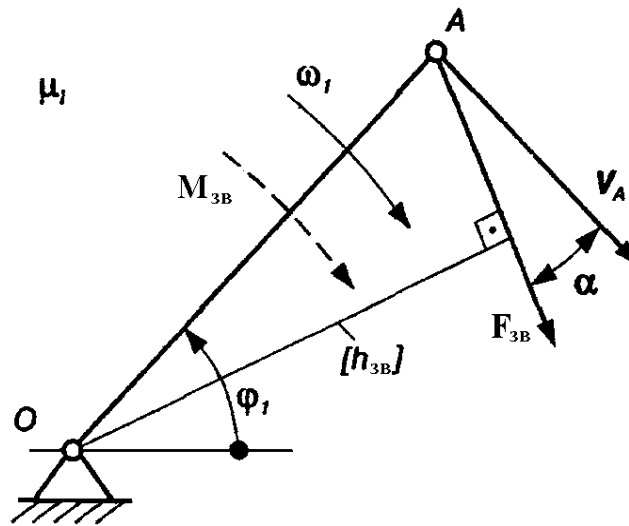


Рис. 4.2.

Ці потужності можна записати в такому вигляді:

$$P_{3B} = F_{3B} v_A \cos \alpha = M_{3B} \omega_1; \quad (4.3)$$

$$\sum_{i=1}^n P_{3B} = \sum_{i=1}^n F_i v_i \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^n M_i \omega_i,$$

де F_{3B} – зведена до точки A сила; v_{3B} – швидкість точки зведення A ; α – кут між напрямком зведеної сили і швидкістю точки зведення; ω_1 – кутова швидкість ланки зведення; F_j , M_j – сила і момент сили, які прикладені до i -ї ланки; v_i – швидкість точки, у якій прикладена сила F_i ; α_i – кут між напрямком векторів $\vec{F}_i$ і $\vec{v}_i$; ω_i – кутова швидкість i -ї ланки.

Підставивши вирази (4.3) у рівняння (4.2), одержимо

$$F_{3B} = \frac{1}{\cos \alpha} \left[\sum_{i=1}^n F_i \frac{v_i}{v_A} \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{v_A} \right];$$

$$M_{3B} = \sum_{i=1}^n F_i \frac{v_i}{\omega_i} \cos \alpha_i + \sum_{i=1}^n M_i \frac{\omega_i}{\omega_1}.$$
(4.4)

З рівнянь (4.4) видно, що при заданих силах F_i і моментах M_i визначення зведеної сили F_{3B} або зведеного моменту M_{3B} не становить значних труднощів і може бути зроблене, якщо для всіх положень, які досліджуються, визначено швидкості ланок механізму. Для визначення F_{3B} і M_{3B} за формулами (4.4) необов'язково знати дійсні швидкості точок і ланок, тому що вони входять у рівняння у вигляді відношення двох швидкостей, які не залежать від швидкості руху механізму, а тільки від положень його ланок, і можуть бути подані через відповідні відрізки плану швидкостей. Цей план можна будувати для довільно вибраної кутової швидкості ланки зведення, тобто в невизначеному масштабі.

Цілком очевидно, що між зведеною силою і зведеним моментом сил існує такий зв'язок:

$$M_{3B} = F_{3B} h_{3B},$$

де h_{3B} – плече вектора F_{3B} відносно центра обертання кривошипа ОА.

Зведену силу можна визначити також з допомогою правила важеля Жуковського, ураховуючи, що $\bar{F}_{3B} = -\bar{F}_{3B}$. Це пояснюється тим, що зведена сила замінює дію всіх сил, що діють на ланки механізму, а зрівноважувальна сила забезпечує рівновагу механізму під дією цих сил. Тому згідно з третім законом Ньютона існує ця рівність.

Приклад

На ланки кривошипно-повзункового механізму (рис. 4.3, а) діють сили $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$ і момент сил M_2 . Визначити зведений момент сил, який прикласти до кривошипа 1. План швидкостей механізму зображено на рис. 4.3, б.

Для розв'язання цієї задачі використовуємо рівність потужностей:

$$P_{3B} = M_{3B} \omega_1, \quad \sum_{i=1}^n P_i = P_1 + P_2 + P_3.$$
(4.5)

Тут P_1, P_2, P_3 – потужності, які розвивають сили, прикладені відповідно до ланок 1, 2, 3:

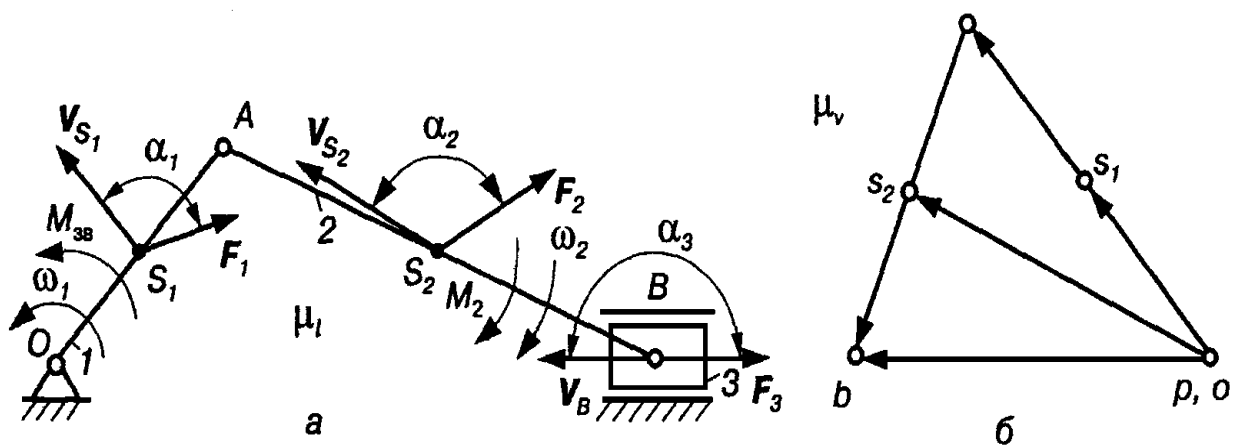


Рис. 4.3

$$P_1 = F_1 v_1 \cos \alpha_1, P_2 = F_2 v_2 \cos \alpha_2, P_3 = F_3 v_3 \cos \alpha_3, \quad (4.6)$$

де v_{s_i} – швидкості точок прикладення S_i – сили $\bar{F}_i$ ($v_{s_3} = v_B$); α_i – кути між векторами $\bar{F}_i$ і v_{s_i} (див. рис. 4.3, а). Підставляючи рівності (4.5) і (4.6) у рівняння (4.2), знаходимо

$$M_{зв} = F_1 \frac{v_{s_1}}{\omega_1} \cos \alpha_1 + F_2 \frac{v_{s_2}}{\omega_2} \cos \alpha_2 + M_2 \frac{\omega_2}{\omega_1} F_3 v_B. \quad (4.7)$$

Тут $\alpha_3 = \pi$, а тому $\cos \alpha_3 = -1$.

4.2. Зведення мас і масових моментів інерції

Так само як і сили, маси й масові моменти інерції всіх ланок замінімо однією зведеною масою $m_{зв}$ або одним зведеним моментом інерції $J_{зв}$. При цьому необхідно, щоб кінетична енергія зведеної маси (моменту інерції) у відповідних положеннях механізму дорівнювала сумі кінетичних енергій усіх ланок цього механізму:

$$T_{зв} = \sum_{i=1}^n T_i, \quad (4.8)$$

де $T_{зв}$ – кінетична енергія ланки зведення (моделі); T_i – кінетична енергія i -ї ланки ($i = 1, 2, 3, \dots, n$).

Якщо, наприклад, вибрати за ланку зведення кривошип ОА (див. рис. 4.2), а за точку зведення – центр шарніра А, то кінетична енергія зве-

дення ланки кривошипа ОА у цьому випадку визначається формулою

$$T_{3B} = \frac{m_{3B} v_A^2}{2} \quad (4.9)$$

або

$$T_{3B} = \frac{J_{3B} \omega_1^2}{2}. \quad (4.10)$$

Тут m_{3B}, J_{3B} – зведена маса і зведений момент інерції механізму; v_A – швидкість точки зведення А; ω_1 – кутова швидкість ланки зведення, у цьому випадку кривошипа ОА.

Кінетична енергія всіх ланок механізму може бути виражена як сума кінетичних енергій мас, які здійснюють поступальний, обертальний і плоский рух:

$$\sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n \frac{m_i v_{S_i}^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{J_{S_i} \omega_i^2}{2}. \quad (4.11)$$

Підставляючи (4.9) – (4.11) у загальну рівність (4.8), знаходимо

$$m_{3B} = \frac{2 \sum_{i=1}^m T_i}{v_A^2} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_{S_i}}{v_A} \right)^2 + \sum_{i=1}^n J_{S_i} \left(\frac{\omega_i}{v_A} \right)^2; \quad (4.12)$$

$$J_{3B} = \frac{2 \sum_{i=1}^m T_i}{\omega_1^2} = \sum_{i=1}^n m_i \left(\frac{v_{S_i}}{\omega_1} \right)^2 + \sum_{i=1}^n J_{S_i} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2.$$

У формулах (4.11) і (4.12) m_i і J_{S_i} – це відповідно маса i -ї ланки та її момент інерції відносно осі, що проходить через центр маси; v_{S_i} – швидкість центра мас i -ї ланки; ω_i – її кутова швидкість.

Звичайно, буде зберігатися залежність $J_{3B} = m_{3B} l_{OA}^2$.

Якщо врахувати, що в більшості механізмів маси ланок і їх моменти інерції під час руху не змінюються, то, як видно з формул (4.12), зведені маси і моменти інерції залежать тільки від співвідношень швидкостей, які,

у свою чергу, залежать від положень ланок механізму, тобто від положення ланки зведення, і є завжди величинами додатними.

Зведені маси й моменти інерції можуть бути сталими і змінними. У більшості важільних і кулачкових механізмів зведені маси і зведені моменти інерції є змінними і залежать від кута повороту φ початкової ланки. У таких механізмах, як зубчасті, фрикційні й гвинтові передачі, зведені маси (моменти інерції) – сталі.

Приклад

Для кривошипно-повзункового механізму, кінематичну схему якого показано на рис. 4.3, а, визначити зведений момент інерції, якщо відомо маси й моменти інерції ланок відносно осей, що проходять через їх центри мас. Швидкості центрів мас і кутові швидкості задано планом швидкостей (див. рис. 4.3, б), кутові швидкості наведено на схемі механізму (див. рис. 4.3, а). Ланкою зведення вибрати кривошип ОА.

Для розв'язання цієї задачі будемо використовувати умову зведення мас (4.8). У цьому випадку кінетична енергія ланки зведення визначається залежністю (4.10), тобто

$$T_{\text{зв}} = \frac{J_{\text{зв}} \omega_1^2}{2}.$$

Кінетична енергія механізму складатиметься з кінетичної енергії п'яти ланок:

$$\sum_{i=1}^{n=3} T_i = T_1 + T_2 + T_3,$$

де

$$T_1 = \frac{J_0 \omega_1^2}{2} = \left(J_{S_1} + m_1 l_{OS_1}^2 \right) \frac{\omega_1^2}{2}; \quad T_2 = \frac{m_2 v_{S_2}^2}{2} + \frac{J_{S_2} \omega_2^2}{2}; \quad T_3 = \frac{m_3 v_B^2}{2}. \quad (4.13)$$

Підставляючи вирази (4.10) і (4.13) у залежність (4.8), знаходимо зведений момент інерції механізму:

$$J_{\text{зв}} = J_{S_1} + m_1 l_{OS_1}^2 + m_2 \left(\frac{v_{S_2}}{\omega_1} \right)^2 + J_{S_2} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 + m_3 \left(\frac{v_B}{\omega_1} \right)^2. \quad (4.14)$$

4.3. Рівняння руху механізмів

Виконавши зведення сил і мас, будь-який механізм з одним ступенем вільності (наприклад важільний, зубчастий, кулачковий), хоч би яким складним він не був, можна замінити його динамічною моделлю (див. рис. 4.1). Ця модель у загальному випадку має змінний зведений момент інерції $J_{зв}$ і до неї додано зведений момент $M_{зв}$.

Як уже було зазначено, основою для складання рівняння руху механізму з одним ступенем вільності є теорема про зміну кінетичної енергії. З теоретичної механіки відомо, що теорема має інтегральну й диференціальну форми, тому й рівняння руху механізму можна записати в інтегральній (енергетичній) і диференціальній формах.

Складемо рівняння руху в **енергетичній (інтегральній) формі**. Інтегральна форма теореми про зміну кінетичної енергії механічної системи має вигляд (4.1), тобто

$$\Delta T = T - T_0 = \sum_{i=1}^n A_i,$$

де $T = \frac{m_{зв} V_{зв}^2}{2}$, $T_0 = \frac{m_{зв.0} V_{зв.0}^2}{2}$ – кінетична енергія механічної системи від-

повідно в кінці й на початку проміжку часу, який розглядається; $\sum_{i=1}^n A_i$ – сума робіт усіх прикладених до системи сил; $i=1, 2, 3, \dots, n$ – кількість сил. Тут $m_{зв}$, $m_{зв.0}$ – зведені маси механізму відповідно в кінці й на початку проміжку часу; $V_{зв}$, $V_{зв.0}$ – швидкості точки зведення, які відповідають цим положенням механізму.

Розглядаючи механізм або машину як змінну систему, праву частину цього рівняння можна виразити через суму робіт рушійних сил A_p , сил корисного $A_{ко}$ і шкідливого $A_{шк}$ опору:

$$\sum_{i=1}^n A_i = A_p - A_{ко} - A_{шк}. \quad (4.15)$$

Крім цього, якщо звести всі сили й маси до вибраної ланки зведення, рівняння (4.1) з урахуванням (4.15) можна записати так:

$$\frac{m_{зв} V_{зв}^2}{2} - \frac{m_{зв.0} V_{зв.0}^2}{2} = A_p - A_{ко} - A_{шк}. \quad (4.16)$$

При обертальному русі ланки зведення рівняння (4.1) можна записати в такому вигляді:

$$\frac{J_{3B}\omega^2}{2} - \frac{J_{3B.0}\omega_0^2}{2} = A_p - A_{ко} - A_{шо}, \quad (4.17)$$

де J_{3B} , $J_{3B.0}$ – зведені моменти інерції механізму; ω , ω_0 – кутові швидкості ланки зведення відповідно в кінці й на початку проміжку часу, який розглядається.

Теорема про зміну кінетичної енергії, записана у вигляді рівнянь (4.16) і (4.17), має назву рівняння руху механізму в енергетичній формі.

Ураховуючи, що роботу зведених рушійних сил і сил опору можна виразити через зведений момент $M_{3B} = M_p + M_o$ рушійних сил і сил опору, прикладений до ланки зведення,

$$\sum_{i=1}^n A_i = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B} d\varphi, \quad (4.18)$$

рівняння (4.17) набуває вигляду

$$\frac{J_{3B}\omega^2}{2} - \frac{J_{3B.0}\omega_0^2}{2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B} d\varphi, \quad (4.19)$$

де φ – узагальнена координата (кут повороту ланки зведення); φ_0 – значення кута φ на початку руху.

У рівнянні (4.19) шуканою величиною є кутова швидкість ω початкової ланки механізму. У загальному випадку верхня межа φ інтегрування вважається змінною.

Якщо все навантаження, прикладене до механізму, залежить тільки від його положення, то й сумарний зведений момент M_{Σ} є функцією тільки координати φ_1 . У цьому випадку рівняння (4.19) розв'язується безпосередньо відносно шуканої величини ω :

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \int_{\varphi_0}^{\varphi} M_{3B}(\varphi) d\varphi}{J_{3B}} + \frac{J_{3B.0}\omega_0^2}{J_{3B}}}. \quad (4.20)$$

Зазначимо, що інтеграл під коренем має знак, який треба враховувати.

Рівняння руху в диференціальній формі. Це рівняння можна одержати з рівняння кінетичної енергії в диференціальній формі

$$dT = dA. \quad (4.21)$$

При обертальному русі початкової ланки після зведення сил і мас маємо

$$dT = d\left(J_{3B} \frac{\omega^2}{2}\right); \quad dA = M_{3B} d\varphi. \quad (4.22)$$

Підставляючи (4.22) у рівняння (4.21), можна записати

$$M_{3B} = \frac{d}{d\varphi} \left(\frac{J_{3B} \omega^2}{2} \right) = J_{3B} \frac{2\omega}{2} \frac{d\omega}{d\varphi} \frac{dt}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{3B}}{d\varphi}; \quad (4.23)$$

$$J_{3B} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\omega^2}{2} \frac{dJ_{3B}}{d\varphi} = M_{3B},$$

де $d\omega/dt = \varepsilon$ – кутове прискорення ланки зведення; $\omega = d\varphi/dt$ – кутова швидкість цієї ланки.

Рівняння (4.23) і є рівнянням руху в диференціальній формі, оскільки шукана змінна величина – кутова швидкість ω початкової ланки механізму – стоїть під знаком похідної. При використанні рівняння (4.23) слід пам'ятати, що зведений момент M_{3B} , а також похідна $\frac{dJ_{3B}}{d\varphi}$ – величини алгебричні, і їх підставляють зі своїми знаками.

У тому випадку, коли досліджується механізм, який має $J_{3B} = const$ (наприклад, зубчастий механізм з круглими колесами), рівняння його руху спрощується і набуває такого вигляду:

$$J_{3B} \frac{d\omega}{dt} = M_{3B}. \quad (4.24)$$

Такий самий вигляд має диференціальне рівняння руху механізму при прямолінійному русі початкової ланки:

$$m_{3B} a + \frac{v^2}{2} \frac{dm_{3B}}{ds} = F_{3B}, \quad (4.25)$$

де s, v, a – відповідно переміщення, швидкість й прискорення ланки зведення; F_{3B}, T_{3B} – зведені сили й маси механізму.

Рівняння руху в диференціальній формі (4.23), (4.25) можна отримати також і з рівнянь Лагранжа 2-го роду.

Для визначення кутового прискорення ε початкової ланки використовуємо рівняння (4.23). Розв'яжемо його відносно $\varepsilon = \frac{d\varphi}{dt}$:

$$\varepsilon = \frac{M_{3B}}{J_{3B}} - \frac{\omega^2}{2J_{3B}} \frac{dJ_{3B}}{d\varphi}. \quad (4.26)$$

Величини M_{3B} і $\frac{dJ_{3B}}{d\varphi}$ підставляють у рівняння (4.26) зі своїми знаками. Якщо кутове прискорення ε вийде зі знаком, протилежним знаку кутової швидкості ω , то це означає, що початкова ланка механізму рухається уповільнено.

Похідна $\frac{dJ_{3B}}{d\varphi}$ визначається або числовим диференціюванням на ЕОМ, або графічним диференціюванням.

4.4. Режими руху механізмів

Процес руху в роботі механізму в загальному випадку складається з трьох періодів: розбігу; усталеного руху; вибігу.

На рис. 4.4 показано приклад залежності швидкості руху початкової ланки механізму від часу t . Час усталеного руху $t_{y.p}$ залежить від часу одного циклу $t_{ц}$ і кількості циклів k ($t_{y.p} = k t_{ц}$). Кількість циклів визначається технологічним процесом, який виконується.

Розбіг і вибіг належать до несталених режимів, які характеризуються неперіодичним змінням швидкості початкової ланки (головного вала). Такий режим руху називають перехідним.

Перехідний режим руху механізму має місце тоді, коли механізму надають руху, і він, набираючи швидкість, виходить на усталений режим, а також тоді, коли для зупинки механізму двигун вимикають і механізм продовжує рухатися за рахунок накопиченого запасу кінетичної енергії; при цьому механізм поступово втрачає швидкість через дії сил тертя або будь-

яких інших сил опору, у тому числі й спеціальних гальмівних сил. У цих випадках необхідно знати, наскільки швидко відбуваються перехід із нерухомого стану в робочий і зворотний перехід до повної зупинки. Дослідження несталої режиму руху дає можливість визначити час спрацювання механізму, що є необхідним для проектування багатьох механізмів і приладів, таких, як засоби автоматичного захисту, механізми випускання шасі літаків, механізми розгортання панелі сонячних батарей, механізми роботи рулів літаків.

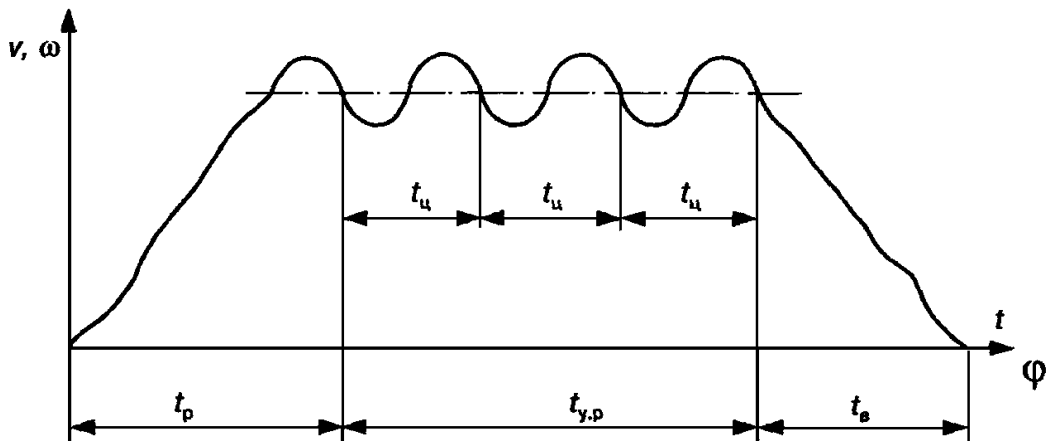


Рис. 4.4

За період розбігу (пуску) швидкість руху початкової ланки збільшується від нуля ($v_0 = 0$) до деякої середньої (робочої) швидкості ($v = v_p$).

Рівняння руху механізму (4.16) набирає вигляду

$$\frac{m_{зв} v_p^2}{2} = A_p - A_{ко} - A_{шо}.$$

Ураховуючи, що $m_{зв} v_p^2 > 0$, то для періоду пуску механізму виконується така нерівність:

$$A_p > A_{ко} + A_{шо}. \quad (4.27)$$

З цього випливає, що в період пуску механізму робота рушійних сил має бути більшою за суму робіт сил корисного й шкідливого опору. Надлишок роботи A_p витрачається на збільшення кінетичної енергії механізму, тобто на збільшення швидкості рухомих мас.

При вибігу (зупинці) машини насамперед треба зупинити подачу рушійної енергії машини (вимкнути двигун), тобто A_p дорівнює нулю. Кінцевим станом буде спокій, при якому швидкість початкової ланки $v = 0$, а по-

чаткова швидкість $v_0 = v_p$. Для цього випадку рівняння руху машини набуває вигляду

$$\frac{m_{зв} v_p^2}{2} = A_{ко} + A_{шо}. \quad (4.28)$$

З рівняння (4.28) видно, що зупинка машини відбувається тільки тоді, коли вся накопичена машиною кінетична енергія рухомих мас буде поглинута роботою сил корисного й шкідливого опору.

Для періоду вибігу механізму виконується така нерівність:

$$A_{ко} + A_{шо} > A_p. \quad (4.29)$$

Тобто в період вибігу механізму робота рушійних сил має бути меншою за суму робіт сил корисного й шкідливого опору.

При усталеному русі машини швидкість початкової ланки (головного вала) механізму або машини змінюється у межах середнього значення, яке відповідає робочій швидкості цієї ланки. Проміжок часу, по закінченні якого положення, швидкості й прискорення початкової ланки механізму набирають початкових значень, називають періодом зміни кінетичної енергії механізму, або циклом $t_{ц}$ усталеного руху.

Швидкості початкової ланки на початку і в кінці циклу усталеного руху є однаковими ($v_0 = v = v_p$). Тоді рівняння руху (4.16) набуває вигляду

$$A_p = A_{ко} + A_{шо}. \quad (4.30)$$

Отже, при усталеному русі механізму (машини) робота рушійних сил за один цикл дорівнює сумі робіт корисного й шкідливого опору. У середині циклу ця рівність може не виконуватися, а тому мають місце змінення швидкості початкових ланок механізму. Очевидно, коли $A_p > A_{ко} + A_{шо}$, рух механізму буде прискорений і навпаки, коли $A_p < A_{ко} + A_{шо}$, – уповільнений, тому в обох випадках умова $v_p = const$ буде порушена.

Таким чином, у період розбігу кінетична енергія машини збільшується за рахунок надлишку роботи рушійних сил над роботою сил опору ($A_p > A_0$); у період усталеного руху кінетична енергія на початку і в кінці кожного циклу (періоду) є однаковою ($A_p = A_0$); нарешті, у період вибігу – кінетична енергія повністю поглинається роботою всіх сил опору.

4.5. Нерівномірність руху механізмів

Залежність швидкості руху початкових ланок механізмів від часу роботи при **усталеному русі** (див. рис. 4.4), а також аналіз рівнянь руху ланок зведення (4.23) і (4.25) показують, що їх швидкості не є постійними, а змінюються, періодично набуваючи однакових значень. Це пояснюється періодичністю змінення наведених величин. Їх значення визначаються положеннями вхідних ланок. Якщо вхідна ланка здійснює обертальний рух, то період змінення значень наведених величин і швидкостей ланок зведення дорівнює $t_{\text{ц}} = 2\pi$.

При усталеному русі (див. рис. 4.4) мають місце максимальні ω_{max} і мінімальні ω_{min} значення швидкості вхідних ланок. Для зручності вивчення періодичних коливань під час усталеного руху введемо поняття середньої швидкості ланки зведення механізму:

$$\omega_{\text{сеп}} = \frac{\omega_{\text{max}} + \omega_{\text{min}}}{2}. \quad (4.31)$$

Отже, швидкість усталеного руху, що дорівнює середній швидкості $\omega_{\text{сеп}}$, є інтегральною характеристикою руху ланки зведення.

У паспорті механізму або двигуна середню швидкість указано як номінальну швидкість. Відносно неї визначають відхилення миттєвих значень швидкостей для j -го положення ланки зведення.

Для оцінювання величини цих відхилень використовують **коефіцієнт нерівномірності руху механізму** δ , який визначається відношенням різниці максимального й мінімального значень швидкості до її середнього значення:

$$\delta = \frac{\omega_{\text{max}} - \omega_{\text{min}}}{\omega_{\text{сеп}}}. \quad (4.32)$$

Розв'язуючи спільно рівняння (4.31) і (4.32), отримуємо

$$\begin{aligned} \omega_{\text{max}} &= \omega_{\text{сеп}} (1 + \delta / 2); \\ \omega_{\text{min}} &= \omega_{\text{сеп}} (1 - \delta / 2). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Якщо вхідна ланка здійснює поступальний рух, то за аналогією з рівняннями (4.31) – (4.33) матимемо:

$$v_{\text{сеп}} = \frac{v_{\text{max}} + v_{\text{min}}}{2};$$

$$\delta = \frac{v_{\text{max}} - v_{\text{min}}}{v_c};$$

$$v_{\text{max}} = v_{\text{сеп}}(1 + \delta / 2);$$

$$v_{\text{min}} = v_{\text{сеп}}(1 - \delta / 2).$$

При великій різниці максимального й мінімального значень швидкостей у механізмі збільшуються динамічні навантаження, що знижує надійність і довговічність його роботи.

Практикою експлуатації машин різного типу встановлено оптимальні величини коефіцієнтів нерівномірності руху механізмів.

Середні значення діапазонів:

- для насосів – 0,45;
- сільськогосподарських машин – 0,4;
- металообробних верстатів – 0,01;
- двигунів внутрішнього згоряння – 0,01;
- авіаційних двигунів, роторних двигунів – 0,005.

Чим меншою є величина δ при створенні машини, тим вищими є її експлуатаційні властивості.

Слід мати на увазі, що коефіцієнт нерівномірності руху не характеризує динаміку руху ланки зведення в середині циклу усталеного руху. При одних і тих же значеннях δ при різних законах руху ланки зведення динамічні властивості механізму можуть бути різними.

Для характеристики динамічних властивостей механізмів під час проектувальних розрахунків і синтезу їх кінематичних ланцюгів використовують **коефіцієнт динамічності**

$$k_d = \varepsilon_{\text{max}} / \omega_{\text{сеп}}^2,$$

де ε_{max} – максимальне кутове прискорення ланки зведення за цикл усталеного руху.

5. ДОСЛІДЖЕННЯ РЕЖИМІВ РУХУ МЕХАНІЗМІВ

5.1. Метод Віттенбауера

Метод Віттенбауера впливає з відомої залежності кінетичної енергії механізму

$$T = \frac{J_{\text{зв}} \omega^2}{2}, \quad (5.1)$$

де $J_{\text{зв}}$ – зведений момент інерції; ω – кутова швидкість ланки зведення механізму (машини). Залежність (5.1) можна записати так:

$$\omega = \sqrt{\frac{2T}{J_{\text{зв}}}}. \quad (5.2)$$

Таким чином, кутову швидкість ланки зведення в кожному положенні можна визначити, знаючи відношення його кінетичної енергії до зведеного моменту інерції, узятото для цього ж положення. Інакше кажучи, треба мати залежність $T = T(J_{\text{зв}})$, яка встановлює зв'язок між кінетичною енергією T і зведеним моментом інерції $J_{\text{зв}}$. Цю задачу зручно розв'язувати графічно. Спочатку будують діаграми кінетичної енергії $T = T(\varphi)$ і зведеного моменту інерції $J_{\text{зв}} = J_{\text{зв}}(\varphi)$ залежно від кута повороту ланки зведення, потім на основі цих діаграм будують діаграму $T = T(J_{\text{зв}})$, виключивши спільний параметр φ . Якщо побудова діаграми $J_{\text{зв}} = J_{\text{зв}}(\varphi)$ не становить труднощів, то для побудови діаграми $T = T(\varphi)$ необхідно мати діаграми зведених моментів рушійних сил $M_p = M_p(\varphi)$ і сил опору $M_o = M_o(\varphi)$. Такі діаграми будують на основі механічних характеристик двигунів і робочих машин. Практично це досить складні задачі, які зазвичай розв'язуються з певними припущеннями.

Нехай задано діаграми зведених моментів рушійних сил $M_p = M_p(\varphi)$ і сил опору $M_o = M_o(\varphi)$ у функції кута повороту початкової ланки (рис. 5.1, а). Маючи такі діаграми, можна знайти роботи рушійних сил і сил опору на вибраному інтервалі за допомогою таких формул:

$$A_p = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_p d\varphi, \quad A_o = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} M_o d\varphi, \quad (5.3)$$

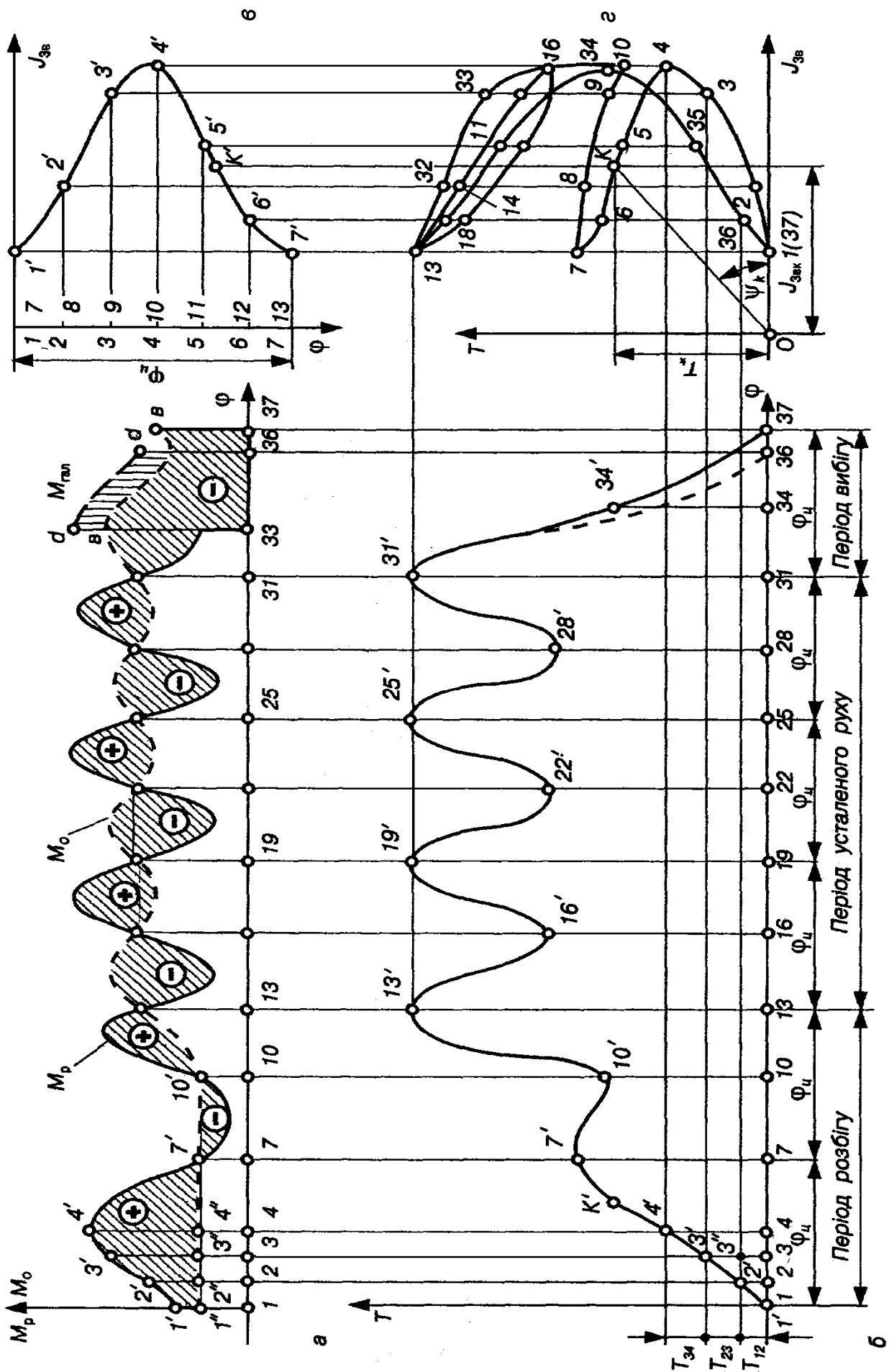


Рис. 5.1

де кут φ – кут повороту ланки зведення.

Величина цих робіт виражається в масштабі площею, обмеженою відповідно кривою $M_p = M_p(\varphi)$ або $M_0 = M_0(\varphi)$, віссю φ і крайніми координатами вибраного інтервалу $\Delta\varphi$.

Приріст кінетичної енергії механізму за будь-який проміжок часу, що виражається рівнянням

$$\Delta T = A_p - A_0, \quad (5.4)$$

дорівнює різниці площі кривих $M_0 = M_0(\varphi)$ і $M_p = M_p(\varphi)$, помноженій на відповідні масштаби моментів μ_M і кута повороту μ_φ .

Отже, зміна кінетичної енергії завжди пропорційна площі між кривими моментів рушійних сил і сил опору (на рис. 5.1, а ці площі заштриховано). Цим площам треба приписувати знак «+» або залежно від того, яка робота буде більшою від моменту рушійних сил чи моменту сил опору. Підрахувавши площі вказаних площадок, можна побудувати діаграму $T = T(\varphi)$ змінення кінетичної енергії ланки зведення у функції кута повороту φ (рис. 5.1, б). Побудову почнемо з першого інтервалу 1–2. Обчислюємо площу (12'2"1") у квадратних міліметрах. Нехай ця площа дорівнює S_{12} , мм², тоді приріст кінетичної енергії на цьому інтервалі буде

$$\Delta T_{12} = T_2 - T_1 = \mu_M \mu_\varphi S_{12}.$$

Оскільки механізм почав рухатися з положення, що відповідає точці 1, то очевидно, що початковий запас кінетичної енергії T дорівнює нулю і повний запас кінетичної енергії механізму в положенні 2 виразиться величиною $T_2 = \Delta T_{12}$. Цю величину відкладаємо у вигляді відрізка 2–2' у масштабі $\mu_T = \mu_M \mu_\varphi$ на ординаті, проведеній у точці 2 (рис. 5.1, б).

Маємо

$$T_2 = \mu_M \mu_\varphi S_{12} = \mu_T (2 - 2').$$

Далі обчислюємо наступну площу $S_{23} = (2''2'3'3'')$, мм². На підставі попереднього маємо $\Delta T_{23} = T_3 - T_2 = \mu_M \mu_\varphi S_{23} = \mu_T (3'' - 3')$, тобто приріст кінетичної енергії на ділянці 2–3 виражається площею (2''23'3''), мм², помноженою на добуток масштабів μ_M і μ_T . Знайдену величину ΔT_{23} відкладаємо на ординаті в точці 3 у вигляді відрізка 3'' – 3' у масштабі μ_T , додаючи його до попереднього відрізка: $(3 - 3') = (2 - 2') + (3'' - 3')$ і т.д.

Ординати діаграми кінетичної енергії збільшуються до положення 7, де в точці 7' вона має вершину, що відповідає одному з максимумів кінетичної енергії. Далі на ділянці 7–10 крива опускається, оскільки заштрихована площа, що міститься між цими точками осі абсцис, має знак «>» ($M_0 > M_p$).

Починаючи з точки 10, крива кінетичної енергії піднімається до положення 13, де ця крива знову має вершину в точці 13' і т.д. На ділянці 13–31, де діаграма описує усталений рух, крива повторюється через кожний цикл руху механізму, що відповідає куту $\varphi_{\text{ц}}$, причому ордината її набуває то максимуму, то мінімуму. У положенні 31 ордината кривої $T = T(\varphi)$ має останній максимум, після чого спадає завдяки наявності на ділянці 33–37 тільки сил опору, а на ділянці 31–33 $M_0 > M_p$. Точка 37 відповідає моменту зупинки механізму, тобто повному вичерпанню кінетичної енергії, накопиченої в період розгону. Очевидно, що витрати цієї енергії можна прискорити, увівши додаткові опори (гальма).

На рис. 5.1, а, б гальмівний момент $M_{\text{гал}}$ і кінетичну енергію T відповідно зображено штриховими лініями.

Отже, за весь час роботи механізму від точки 1 до точки 37 приріст кінетичної енергії дорівнює нулю, тобто сума всіх заштрихованих площадок зі знаком «+» повинна дорівнювати сумі площадок зі знаком «-», оскільки в момент пуску механізму і в момент його зупинки швидкість ланки зведення дорівнює нулю. Така сама рівність повинна мати місце і за час усталеного руху (13–31), оскільки в цьому випадку швидкість ланки зведення механізму через кожний цикл набуває попереднього значення. На рис. 5.1, а умовно показано три повних цикли $\varphi_{\text{ц}}$ усталеного руху. Практично кількість цих циклів може бути різною залежно від часу безперервної роботи машини.

Діаграму зведених моментів інерції достатньо побудувати тільки для одного циклу $\varphi_{\text{ц}}$ роботи механізму (рис. 5.1, в), оскільки $J_{\text{зв}}$ є функцією положень механізму φ . Для зручності наступної побудови кривої Віттенбауера діаграму $J_{\text{зв}} = J_{\text{зв}}(\varphi)$ повернуто на 90° .

Маючи діаграми $T = T(\varphi)$ і $J_{\text{зв}} = J_{\text{зв}}(\varphi)$, будуємо діаграму $T = T(J_{\text{зв}})$ (рис. 5.1, г), для чого на осі ординат відкладаємо значення кінетичної енергії, що визначаються відрізками 1–1', 2–2', 3–3' діаграми $T = T(\varphi)$, а на осі абсцис – значення зведеного моменту інерції, що визначається відрізками 1–1', 2–2', 3–3' діаграми $J_{\text{зв}} = J_{\text{зв}}(\varphi)$. Знайдені точки 1, 2, 3 у системі координат $T - J_{\text{зв}}$ послідовно з'єднуємо плавною кривою й одержуємо криву кінетичної енергії T у функції зведеного моменту інерції, тобто залежність $T = T(J_{\text{зв}})$. Цю криву називають кривою Віттенбауера на ім'я австрійського вченого, який запропонував цей метод.

З допомогою кривої Віттенбауера легко визначити залежність кутової

швидкості ланки зведення від кута повороту φ . Для цього виберемо на кривій $T = T(J_{3B})$ будь-яку точку K і з'єднаємо її з точкою O – початком координат (рис. 5.1, а). Позначимо кут, утворений прямою OK з віссю абсцис, через ψ_K . Оскільки по осі абсцис відкладено зведений момент інерції J_{3BK} у масштабі μ_j , а по осі ординат – кінетичну енергію T_K у масштабі μ_T , які відповідають точці K , то очевидно, що відношення цих величин дасть тангенс кута ψ_K нахилу кривої OK до осі J_{3B} , тобто

$$\frac{T_K}{J_{3BK}} = \frac{\mu_T}{\mu_j} \operatorname{tg} \psi_K, \quad (5.5)$$

де $J_{3B} = OK_1 \mu_j$, $T_K = OK_2 \mu_T$, $OK_2 / OK_1 = \operatorname{tg} \psi_K$.

Тоді швидкість ланки зведення в положенні, яке визначається точкою K , знаходимо за формулою (5.2):

$$\omega_K = \sqrt{\frac{2\mu}{\mu_j} \operatorname{tg} \psi_K}. \quad (5.6)$$

Аналогічно визначаємо швидкості ланки зведення в інших положеннях механізму. Використовуючи ці значення, можна побудувати графік кутової швидкості ω ланки зведення у функції кута φ (див. рис. 4.4), тобто графік $\omega = \omega(\varphi)$.

Графік часу t руху у функції кута може бути побудований, якщо використати умову $\omega = d\varphi / dt$, оскільки будь-який проміжок часу від початку руху до певного моменту часу t_i визначається формулою

$$t_i - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi_i} \frac{d\varphi}{\omega(\varphi)}. \quad (5.7)$$

Інтеграл у правій частині формули (5.7) можна визначити графічно, якщо побудувати графік величини $\omega(\varphi)$ у функції кута φ , оскільки функція $\omega = \omega(\varphi)$ є відомою. За графіками $\omega = \omega(\varphi)$ і $t = t(\varphi)$ можна побудувати графік $\omega = \omega(t)$. Кутове прискорення ε ланки зведення визначається графічним диференціюванням функції $\omega = \omega(t)$.

Знаючи кутову швидкість ω і кутове прискорення ε ланки зведення, можна визначити швидкості, прискорення й сили інерції окремих ланок, а

також виконати силовий розрахунок механізму в умовах нерівномірного обертального руху ланки зведення.

Таким чином, з допомогою кривої Віттенбауера можна повністю дослідити рух машинного агрегата при силах, що залежать від положення ланки зведення.

5.2. Перехідний режим руху. Визначення тривалості процесу

Розбіг і гальмування можуть відбуватися з великим прискоренням. Це викликає значне динамічне навантаження механізму, що, у свою чергу, може призвести до перенапруження і навіть до поломок.

Під час розбігу й вибігу кутова швидкість багатьох машин проходить через критичну (резонансну) зону.

Щоб уникнути динамічного перевантаження механізму й можливої аварії прохід цієї зони повинен бути досить швидким, що треба забезпечити під час проектування, виконавши розрахунок обох фаз несталого режиму. Розв'язання багатьох інших динамічних задач також пов'язане з дослідженням цього режиму.

Таким чином, вивчення перехідних процесів має велике значення для грамотного динамічного проектування механізму, машини або приладу.

Для визначення закону руху механізму при несталому режимі повинні бути відомими такі вихідні дані: кінематична схема механізму; характеристики геометрії мас усіх рухомих ланок; механічні характеристики сил і моментів; початкові умови руху. Останнє є важливим для дослідження саме несталого режиму.

Розглянемо механізм, навантажений силами й моментами, які є функціями тільки переміщення своїх точок прикладення. Нехай зведений момент інерції розглянутого механізму є змінною величиною: $J_{\Sigma} = \text{var}$. Необхідно визначити залежність швидкості початкової ланки від кута її повороту, тобто $\omega(\varphi)$. Подібне завдання є досить поширеним. Як приклади можна привести механізми випускання й прибирання шасі літака, розгортання сонячних батарей супутників, випускання й прибирання передкрилків і закрилків літака.

Для дослідження перехідних режимів руху механізмів будемо діаграми

$$J_{3B} = J_{3B}(\varphi), M_{3B} = M_{3B}(\varphi). \quad (5.8)$$

Таким чином, динамічна задача зводиться до такого: відомо залежності (5.8), необхідно визначити закон змінення кутової швидкості й кутового прискорення ланки зведення.

Для розв'язання цієї задачі потрібно скласти рівняння руху в енергетичній формі:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(\sum A + T_0)}{J_{3B}}}. \quad (5.9)$$

Порядок визначення шуканої кутової швидкості є таким:

1. Виконують зведення мас і будують сумарну діаграму зведеного моменту інерції

$$J_{3B} = J_{3B}(\varphi).$$

2. За механічними характеристиками будують діаграми зведеного рушійного моменту, потім діаграму сумарного зведеного моменту

$$M_{3B} = M_{3B.KO} + M_{3B.P}.$$

Якщо сили тягіння й сили тертя є значними, то їх зведені моменти мають бути складовою частиною величини M_{3B} , тобто

$$M_{3B} = M_{3B.KO} + M_{3B.P} + M_{3B.ШО} + M_{3B.G_i}.$$

3. Графічним інтегруванням будують діаграму роботи сумарного зведеного моменту.

4. За рівнянням (5.9) з урахуванням початкових умов визначають кутову швидкість початкової ланки (моделі) і будують залежність

$$\omega = \omega_1 = \omega(\varphi).$$

Якщо $\omega_0 = 0$, то

$$\omega_1 = \omega = \sqrt{\frac{2\sum A}{J_{3B}}}. \quad (5.10)$$

Якщо $\omega_0 \neq 0$, то

$$T_0 = \frac{\omega_0^2 J_{03B}}{2}.$$

5. Для визначення кутового прискорення початкової ланки (моделі) записують рівняння руху в диференціальній формі й розв'язують його відносно ε_1 :

$$\varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{M_{3B}}{J_{3B}} - \frac{\omega_1^2}{2J_{3B}} \frac{dJ_{3B}}{d\varphi_1}. \quad (5.11)$$

З рівняння видно, що для підрахунку величини ε необхідно знати M_{3B} і ω_1 у тому положенні початкової ланки, для якого визначається ε_1 , а також необхідно знати залежність $J_{3B} = J_{3B}(\varphi)$, за якою знаходять $\frac{dJ_{3B}}{d\varphi_1}$.

6. Похідну визначають графічним диференціюванням:

$$\frac{dJ_{3B}}{d\varphi_1} = \frac{\mu_\varphi}{\mu_J} \operatorname{tg} \psi,$$

де μ_J і μ_φ – масштаби по осях J_{3B} і φ_1 (рис. 5.2).

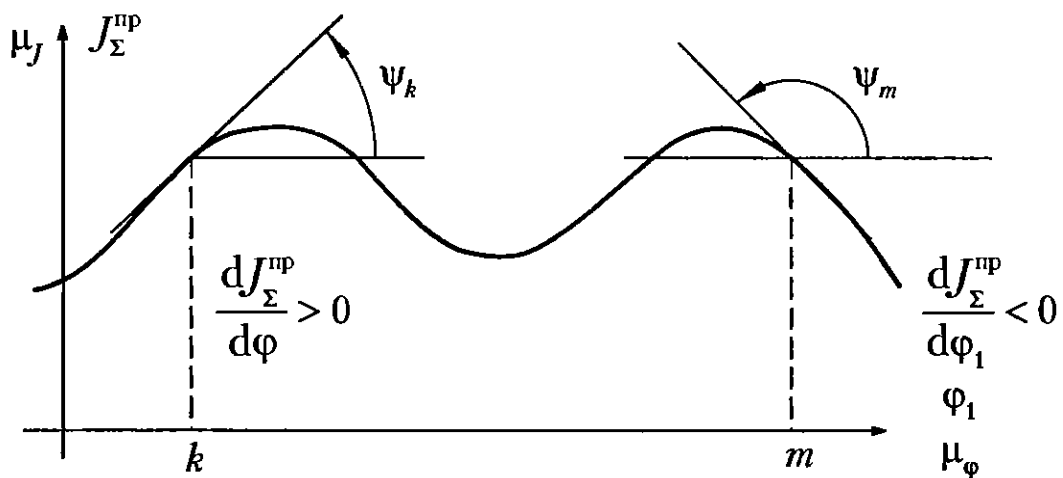


Рис. 5.2

Слід нагадати, що величини M_{3B} і $\frac{dJ_{3B}}{d\varphi_1}$ підставляють у рівняння (5.10) зі своїми знаками. Зауважимо, що графічне диференціювання залежності $J_{3B} = J_{3B}(\varphi)$ вносить деяку помилку в другий член рівняння.

Для тихохідних машин другий член рівняння (5.11) є малим порівняно з першим, тому помилка істотного значення не має.

Для швидкохідних машин другий доданок, що залежить від квадрата кутової швидкості, може бути досить значним. У цьому випадку слід точно визначити похідну $\frac{dJ_{3B}}{d\varphi_1}$.

Існує інший, менш точний, але більш простий спосіб визначення ε_1 , що ґрунтується на застосуванні діаграми $\omega_1 = \omega_1(\varphi_1)$, – метод піднормалей.

Відомо, що

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \frac{d\varphi}{d\varphi} = \omega \frac{d\omega}{d\varphi}, \quad (5.12)$$

де $\mu_\varepsilon = \frac{\mu_\omega^2}{\mu_\varphi}$ – масштаб кутового прискорення, $\frac{ab}{ac} = \operatorname{tg}\psi$ (за побудовою).

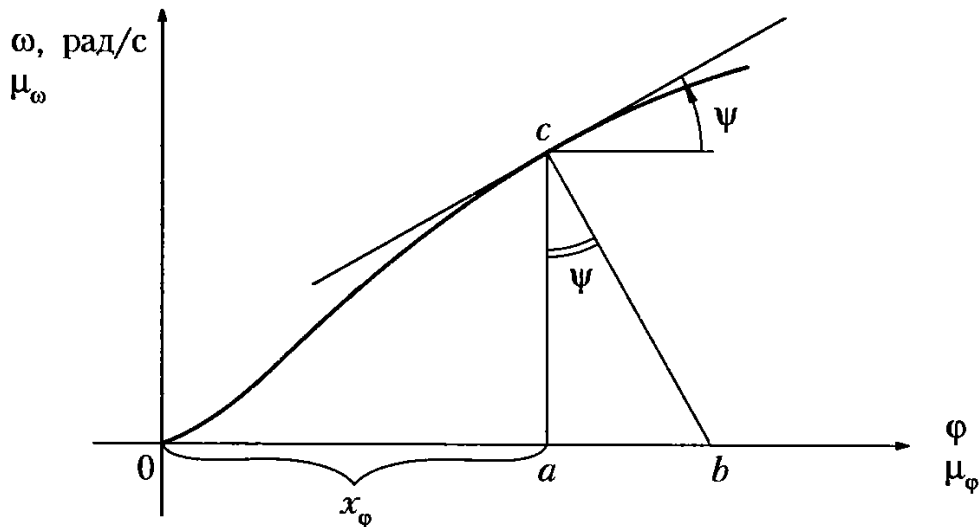


Рис. 5.3

Величину і знак похідної визначають за діаграмою (ω, φ) (рис. 5.3)

аналогічно визначенню похідної $\frac{dJ_{3B}}{d\varphi_1}$ (ψ_i – кут нахилу дотичної, проведеної до кривої (ω, φ) , до додатного напрямку осі x):

$$\varepsilon = \left(\frac{ac}{\mu_\omega} \right) \frac{d\left(\frac{ac}{\mu_\omega} \right)}{d\left(\frac{x_\varphi}{\mu_\varphi} \right)} = \frac{\mu_\varphi}{\mu_\omega^2} ac \frac{d(ac)}{d(x_\varphi)} = \frac{\mu_\varphi}{\mu_\omega^2} ac \operatorname{tg}\psi = \frac{\mu_\varphi}{\mu_\omega^2} ab; \varepsilon = \frac{\mu_\varphi}{\mu_\omega^2} ab.$$

Визначення тривалості перехідного процесу. Відомо, що

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}; dt = \frac{d\varphi}{\omega};$$

$$t - t_0 = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{d\varphi}{\omega}.$$

Розглянемо побудову кривої часу (рис. 5.4) за заданою діаграмою (ω, φ) .

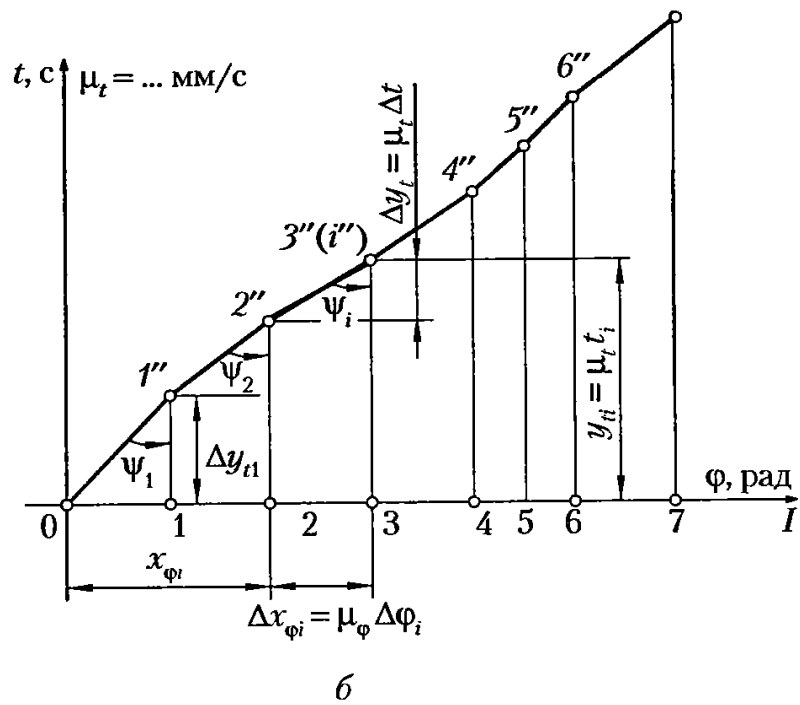
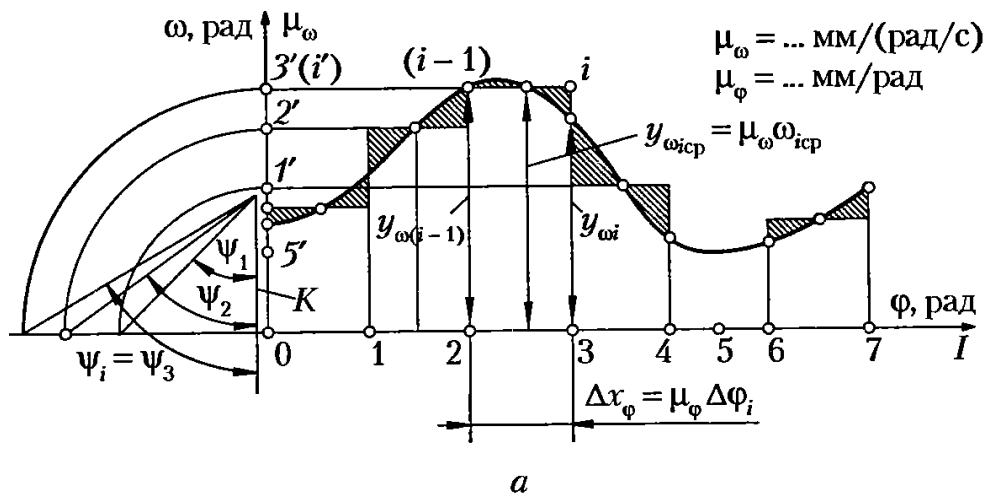


Рис. 5.4

Під час інтегрування оберненої функції застосовуємо метод трапецій. У межах вибраних ділянок 0–1, 1–2, ... криву (ω, φ) замінюємо східчастим графіком з координатами $\varphi_{\omega_{1\text{сеп}}}, \varphi_{\omega_{2\text{сеп}}}, \dots, \varphi_{\omega_{i\text{сеп}}}$.

Величини зазначених ординат визначаються з умови рівності площ криволінійних трапецій і відповідних прямокутників. Ординати $\varphi_{\omega_{1\text{сеп}}}, \varphi_{\omega_{2\text{сеп}}}, \dots, \varphi_{\omega_{i\text{сеп}}}$ переносимо на вісь ординат, потім на від'ємну піввісь абсцис та отримуємо точки $1', 2', \dots, i'$. Відклавши на осі ординат відрізок інтегрування, з'єднуємо точки $1', 2', \dots, i'$ з кінцем відрізка інтегрування. На діаграмі (t, φ) у межах кожної ділянки проводимо лінії, паралельні лініям $1'K, 2'K, \dots, i'K$ і т.д. Через точки $0, 1'', 2'', \dots, i''$ проводимо криву часу $t(\varphi_M)$ у масштабі μ_t , мм/с. Масштаб μ_t обчислюємо з умови рівності кутів на кривих $\omega(\varphi)$ і $t(\varphi)$:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \psi_i &= \frac{\omega_{i\text{сеп}} \mu_\omega}{k}; \quad \operatorname{tg} \psi_i = \frac{\Delta \varphi \mu_\omega}{\Delta t \mu_t}; \\ \frac{\omega_{i\text{сеп}} \mu_\omega}{k} &= \frac{\Delta \varphi \mu_\omega}{\Delta t \mu_t}; \quad \frac{\omega_{i\text{сеп}} \mu_\omega}{k} = \frac{d\varphi_M \mu_\omega}{dt \mu_t}; \\ \mu_t &= \frac{\mu_\varphi k}{\mu_\omega}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

5.3. Усталений режим руху. Визначення коефіцієнта нерівномірності руху

Якщо побудовано діаграму $T = T(J_{\text{зв}})$, то неважко визначити значення коефіцієнта нерівномірності руху в усталеному режимі. На ділянці усталеного руху ця крива має бути замкненою, оскільки ті самі значення величин T і $J_{\text{зв}}$ періодично повторюються через кожний цикл. На рис. 5.5 зображено частину кривої $T = T(J_{\text{зв}})$, що відповідає періоду усталеного руху.

Для визначення коефіцієнта δ необхідно мати значення максимальної ω_{max} і мінімальної ω_{min} швидкості ланки зведення (4.32).

З формули (5.6) випливає, що максимальна кутова швидкість ω_{max} за час усталеного руху відповідає максимальному значенню тангенса кута ψ_{max} (див. рис. 5.5), мінімальна кутова швидкість ω_{min} відповідає значенню

тангенса кута $\psi_{\min}$.

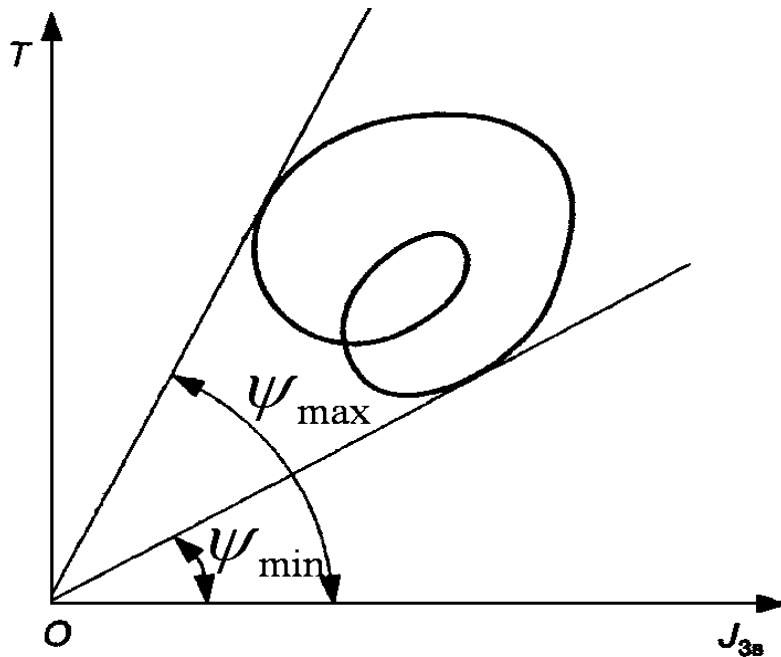


Рис. 5.5

Для визначення цих кутів проводимо з точки O до кривої $T = T(J_{3B})$ дві дотичні: під найбільшим кутом $\psi_{\max}$ і найменшим кутом $\psi_{\min}$. Тоді згідно з рівнянням (5.6) можна записати

$$\omega_{\max}^2 = \frac{2\mu_T}{\mu_j} \operatorname{tg} \psi_{\max}; \quad \omega_{\min}^2 = \frac{2\mu_T}{\mu_j} \operatorname{tg} \psi_{\min}, \quad (5.14)$$

де μ_T і μ_j – масштаби кінетичної енергії і зведеного моменту інерції.

Помноживши чисельник і знаменник правої частини формули (4.32) на $(\omega_{\max} + \omega_{\min})$, маємо

$$\delta = \frac{\omega_{\max} - \omega_{\min}}{\omega_c} \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{\omega_{\max} + \omega_{\min}} = \frac{\omega_{\max}^2 - \omega_{\min}^2}{2\omega_c^2}, \quad (5.15)$$

оскільки $\omega_{\text{сеп}} = \frac{\omega_{\max} + \omega_{\min}}{2}$.

Підставивши у формулу (5.15) вирази (5.14), одержуємо

$$\delta = \frac{\mu_T}{\mu_j} \frac{\operatorname{tg} \psi_{\max} - \operatorname{tg} \psi_{\min}}{\omega_{\text{сеп}}^2}. \quad (5.16)$$

Кути $\psi_{\max}$ і $\psi_{\min}$ визначаються безпосередньо з рисунка.

Коефіцієнт нерівномірності руху механізму або машини можна також визначити за діаграмою швидкостей, побудованою на рис. 4.4. Для цього знаходимо $\omega_{\max}$ і $\omega_{\min}$ для періоду усталеного руху й підставляємо їх значення у формулу (4.32).

5.4. Механічний коефіцієнт корисної дії

З рівняння руху механізму для періоду усталеного руху видно, що $A_p = A_{\text{ко}} + A_{\text{шо}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, тобто вся енергія рушійних сил, яка витрачається в машині, поділяється на дві частини: одна частина йде на подолання сил виробничих (корисних) опорів, інша – на подолання шкідливих опорів (сил тертя, опору середовища). Механізм і машина вважаються тим досконалішими, чим більше підведеної енергії (за рівних інших умов) витрачається на подолання корисних опорів. Ефективність використання енергії в машині характеризується так званим механічним коефіцієнтом корисної дії (ККД).

Механічним ККД η називають відношення роботи сил корисного опору до роботи рушійних сил за цикл усталеного руху:

$$\eta = \frac{A_{\text{ко}}}{A_p} < 1. \quad (5.17)$$

У реальних машинах механічний ККД завжди є меншим за одиницю. Це пояснюється тим, що робота сил корисного опору завжди є меншою від роботи рушійних сил. Дійсно, із рівняння (4.30) видно, що $A_{\text{ко}} = A_p - A_{\text{шо}}$, а оскільки робота сил шкідливого опору $A_{\text{шо}} \neq 0$, то $A_{\text{ко}} < A_p$ і $\eta < 1$.

Залежність (5.17) можна записати також у такому вигляді:

$$\eta = \frac{A_p - A_{\text{шо}}}{A_p} = 1 - \frac{A_{\text{шо}}}{A_p}. \quad (5.18)$$

Відношення роботи сил шкідливого опору до роботи рушійних сил називають механічним коефіцієнтом втрат ψ . Відповідно до цього (5.18) можна записати так:

$$\eta = 1 - \psi. \quad (5.19)$$

Із (5.18) випливає, що механічний ККД може дорівнювати нулю, якщо робота рушійних сил дорівнює роботі всіх невиробничих опорів, які існують у механізмі. За такої умови рух механізмів є можливим, але без виконання будь-якої корисної роботи. Такий рух механізму називають рухом вхолосту. ККД не може бути меншим від нуля, оскільки для цього необхідно, щоб відношення робіт $A_{\text{шо}} / A_p$ було більшим від одиниці: тобто $A_{\text{шо}} > A_p$. У таких випадках має місце явище самогальмування у межах

$$0 \leq \eta < 1. \quad (5.20)$$

Тоді з рівнянь (5.19) і (5.20) випливає, що коефіцієнт втрат змінюється у межах $0 < \psi \leq 1$.

Слід зауважити, що механічний коефіцієнт корисної дії і коефіцієнт втрат не дають повної характеристики машини, за цими коефіцієнтами неможливо судити про продуктивність машини, безпеку праці, вартість і якість виготовленої продукції. Коефіцієнти характеризують тільки ефективність використання енергії. ККД і коефіцієнт втрат можна використовувати тільки для порівняння машин і пристроїв однакового призначення. У деяких машинах корисне навантаження є дуже малим (наприклад, у поліграфічних і текстильних машинах, машинах швейної промисловості тощо), а тому і ККД є невеликим.

ККД і коефіцієнт втрат можна виразити і через відношення відповідних потужностей.

Під час руху машини ККД і коефіцієнт втрат не є сталими, тому що під час руху машини змінюються сили, які діють на ланки машин, а отже, змінюються сили тертя й робота сил шкідливого опору (робота сил корисного опору також може змінюватися). На практиці зазвичай обмежуються визначенням середнього значення ККД для будь-якого проміжку часу, найчастіше для одного циклу періоду усталеного руху.

Такий ККД називають цикловим. При обчисленні ККД для певного положення механізму одержують миттєвий коефіцієнт корисної дії.

Для кожної машини існує деяка найвигідніша швидкість, при якій її ККД набуває максимального значення. Більш високий ККД мають механізми й машини із суто обертальним рухом ланок – ротаційні машини. Машини зі зворотно-поступальним рухом ланок – поршневі машини, механізми періодичної дії – мають частіше низький ККД через несприятливу дію динамічних сил (сил інерції).

Сучасні машини зазвичай складаються з багатьох механізмів, ККД яких є відомими або їх можна легко знайти. Проте загальний ККД машини залежить не тільки від ККД окремих механізмів, що входять до її складу, але й від способу з'єднання цих механізмів у машині. Розрізняють три способи з'єднання механізмів у машині: послідовне, паралельне і змішане.

Послідовне з'єднання механізмів. Нехай маємо машину, яка складається з n послідовно з'єднаних механізмів (рис. 5.6), кожний з яких має відповідно ККД $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$. Загальний ККД машини визначається формулою

$$\eta_{\text{заг}} = \frac{A_{\text{ко}}}{A_p} = \frac{A_n}{A_p}. \quad (5.21)$$

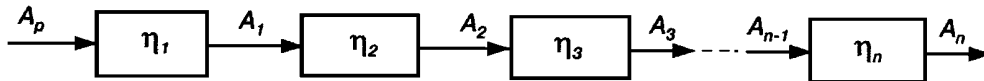


Рис. 5.6

Перший механізм приводиться в рух рушійними силами, що виконують роботу A_p . Оскільки корисна робота A_1 першого механізму буде роботою рушійних сил для другого механізму і відповідно у всьому ланцюзі механізмів корисна робота кожного попереднього механізму буде роботою рушійних сил для кожного наступного механізму, коефіцієнт корисної дії кожного механізму обчислюється так:

$$\eta_1 = \frac{A_1}{A_p}, \eta_2 = \frac{A_2}{A_1}, \eta_3 = \frac{A_3}{A_2}, \dots, \eta_n = \frac{A_n}{A_{n-1}}. \quad (5.22)$$

Перемножимо між собою ліві й праві частини рівнянь (5.22):

$$\eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n = \frac{A_1}{A_p} \frac{A_2}{A_1} \frac{A_3}{A_2} \dots \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{A_n}{A_p} = \eta_{\text{заг}}.$$

Отже, загальний механічний ККД послідовно з'єднаних механізмів (або машин) дорівнює добуткові механічних ККД окремих механізмів (або машин), що утворюють одну машину (або машинний агрегат):

$$\eta_{\text{заг}} = \eta_1 \eta_2 \eta_3 \dots \eta_n. \quad (5.23)$$

З формули (5.23) видно, що чим складнішою є машина, тим більшими є втрати енергії, тим меншим є ККД. Причому загальний ККД машини при послідовному з'єднанні механізмів завжди є меншим за найменший ККД механізмів, які входять до його складу ($\eta_{\text{заг}} < \eta_{\text{min}}$). Це свідчить про те, що при послідовному з'єднанні механізмів необхідно дуже

старанно виготовляти кожний механізм, кожний вузол машини, інакше не можна добитися високого ККД машини.

Паралельне з'єднання механізмів. На рис. 5.7 показано схему машини з паралельним з'єднанням механізмів.

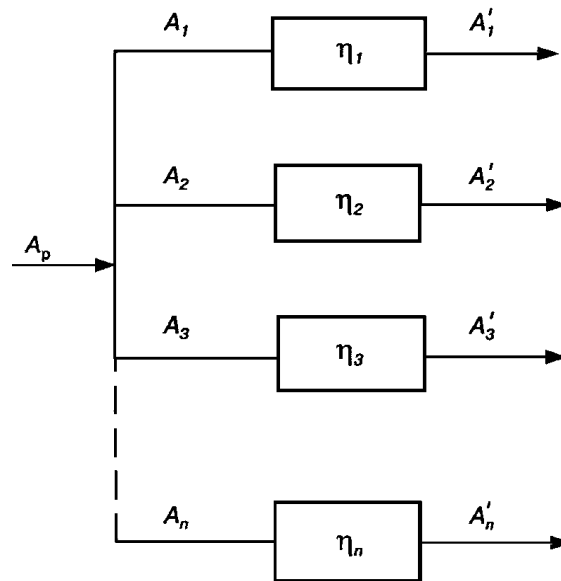


Рис. 5.7

Робота рушійних сил A_p , яка підводиться до машини, розподіляється між окремими механізмами відповідно $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, які є для кожного механізму рушійними роботами, а отже,

$$A_p = A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n = \sum_{i=1}^n A_i. \quad (5.24)$$

Кожний механізм відповідно виконує корисну роботу:

$$A'_1 = A_1 \eta_1, A'_2 = A_2 \eta_2, A'_3 = A_3 \eta_3, \dots, A'_n = A_n \eta_n, \quad (5.25)$$

де η_i – ККД i -го механізму.

Загальна корисна робота машини дорівнює сумі робіт усіх механізмів:

$$\begin{aligned} A_{\text{ко}} &= A'_1 + A'_2 + A'_3 + \dots + A'_n = \\ &= A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3 + \dots + A_n \eta_n = \sum_{i=1}^n A_i \eta_i. \end{aligned} \quad (5.26)$$

Тоді на основі (5.17) загальний ККД машини при паралельному з'єднанні механізмів має вигляд

$$\eta_{\text{заг}} = \frac{A_{\text{ко}}}{A_{\text{р}}} = \frac{\sum_{i=1}^n A_i \eta_i}{\sum_{i=1}^n A_i} = \frac{A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3 + \dots + A_n \eta_n}{A_1 \eta_1 + A_2 \eta_2 + A_3 \eta_3 + \dots + A_n \eta_n}. \quad (5.27)$$

З формули (5.27) випливає, що механічний ККД машини при паралельному з'єднанні механізмів залежить не тільки від ККД окремих механізмів, але й від характеру розподілу роботи рушійних сил між механізмами. Очевидно, чим більша частина всієї затраченої роботи поступатиме в механізм з найбільшим ККД, тим більшим буде ККД усієї машини, і, навпаки, ККД машини буде тим меншим, чим більша частина $A_{\text{р}}$ поступатиме в механізм з найменшим ККД.

Розглянемо окремі випадки ККД машини при паралельному з'єднанні механізмів. Зокрема, якщо роботу рушійних сил $A_{\text{р}}$ розподілити рівномірно між механізмами ($A_1 = A_2 = A_3 = \dots = A_n = A$), то ККД машини (5.27) матиме вигляд

$$\eta_{\text{заг}} = \frac{\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \dots + \eta_n}{n}, \quad (5.28)$$

де n – кількість механізмів.

Отже, загальний ККД машини при паралельному з'єднанні механізмів дорівнює середньому значенню ККД механізмів, які входять до складу машини. ККД машини при паралельному з'єднанні механізмів не може бути меншим за найменший і більшим за найбільший ККД складових механізмів, тобто $\eta_{\text{min}} \leq \eta_{\text{заг}} \leq \eta_{\text{max}}$. При паралельному з'єднанні низький ККД одного механізму менше впливає на значення ККД машини, ніж при послідовному з'єднанні механізмів.

При змішаному з'єднанні механізмів для визначення ККД машини користуються загальною формулою (5.17). Остаточні формули ККД машини залежать від схеми з'єднання механізмів, у якій завжди можна виділити послідовні ланцюги з'єднаних між собою механізмів.

6. РЕГУЛЮВАННЯ РУХУ МЕХАНІЗМІВ

Відомо, що швидкість початкової ланки механізму при усталеному русі є величиною змінною. Коливання швидкості цієї ланки спричиняють у кінематичних парах додаткові динамічні тиски, що знижують надійність і довговічність механізму. Крім того, коливання в ланках механізмів є небажаними з огляду на міцність цих ланок. Нарешті, коливання швидкостей можуть погіршити той технологічний процес, який виконується механізмом.

Коливання швидкості початкової ланки за час усталеного руху бувають двох типів:

1. Періодичні коливання швидкостей механізму – коливання, при яких швидкості всіх ланок у всіх їх положеннях мають цілком певні цикли, після закінчення яких ці швидкості набувають щоразу своїх початкових значень.

2. Неперіодичні коливання швидкостей – це коливання, які не мають певного циклу й залежать від різних причин, наприклад від раптової зміни корисних або шкідливих опорів.

Коливання швидкості під час усталеного руху можуть набрати такої величини, яка є неприпустимою з огляду на забезпечення всіх належних умов роботи механізму. Тоді виникає питання про регулювання величин цих коливань у наперед заданих межах.

Задача регулювання руху механізмів у період їх усталеного руху зводиться до підбору такого співвідношення між масами ланок механізмів і силами, що на них діють, при якому коефіцієнт нерівномірності руху не перевищуватиме наперед заданого значення.

6.1. Визначення моменту інерції маховика

Маховик – це деталь, з допомогою якої можна регулювати швидкість руху ланки зведення механізму або машини лише для періодичних і короткочасних неперіодичних коливань швидкості, тобто коли рушійні сили й сили опору змінюються протягом циклу за певним законом і робота рушійних сил за повний цикл дорівнює роботі сил опору.

Уже зазначалося, що з допомогою кривої Віттенбауера $T = T(J_{\text{зв}})$ для періоду усталеного руху можна визначити коефіцієнт нерівномірності руху механізму або машини. Тоді стає очевидним, що якщо при заданій зведеній масі й кінетичній енергії залежність між ними є відомою, тобто побудовано діаграму $T = T(J_{\text{зв}})$, то завжди можна з'ясувати питання, як мають бути змінені ці величини (зведений момент інерції $J_{\text{зв}}$ і кінетична енергія T) для того, щоб забезпечити заданий коефіцієнт нерівномірності δ . Для розв'язання цієї задачі запишемо формули, які дають змогу визначити значення кутів ψ_{max} і ψ_{min} (див. рис. 5.5), що відповідають заданим δ і

діаграмі $T = T(J_{3B})$.

Раніше вже було одержано співвідношення (4.33):

$$\omega_{\max} = \omega_c \left(1 + \frac{\delta}{2}\right); \quad \omega_{\min} = \omega_c \left(1 - \frac{\delta}{2}\right).$$

Піднесемо праві й ліві частини цих рівнянь до квадрата:

$$\begin{aligned} \omega_{\max}^2 &= \omega_{\text{cep}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega_{\text{cep}}^2 (1 + \delta); \\ \omega_{\min}^2 &= \omega_{\text{cep}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \omega_{\text{cep}}^2 (1 - \delta). \end{aligned} \tag{6.1}$$

При малих значеннях коефіцієнтів δ членом $\frac{\delta^2}{4}$ можна знехтувати. Підставимо в рівняння (6.1) вирази для $\omega_{\max}^2$ і $\omega_{\min}^2$ з формул (5.14) і здійснимо відповідні перетворення:

$$\begin{aligned} \text{tg} \psi_{\max} &= \frac{\mu_j}{2\mu_T} \omega_{\text{cep}}^2 \left(1 + \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \frac{\mu_j}{2\mu_T} \omega_{\text{cep}}^2 (1 + \delta); \\ \text{tg} \psi_{\min} &= \frac{\mu_j}{2\mu_T} \omega_{\text{cep}}^2 \left(1 - \delta + \frac{\delta^2}{4}\right) \approx \frac{\mu_j}{2\mu_T} \omega_{\text{cep}}^2 (1 - \delta). \end{aligned} \tag{6.2}$$

З допомогою рівнянь (6.2) для заданої кутової швидкості й для будь-якого значення коефіцієнта нерівномірності руху δ можна визначити відповідні кути $\psi_{\max}$ і $\psi_{\min}$.

Приклад

Нехай для періоду усталеного руху деякого механізму побудовано діаграму $T = T(J_{3B})$ (рис. 6.1).

Провівши з початку координат 0 до кривої Віттенбауера дотичні під кутами $\psi_{\max}$ і $\psi_{\min}$, знаходимо за формулою (5.16) коефіцієнт нерівномірності руху механізму. Припустимо, що коефіцієнт δ буде більшим від допустимого значення $\delta_{\text{доп}}$ для заданого типу машин. Тоді, підставивши в залежність (6.2) замість δ допустиме його значення $\delta_{\text{доп}}$,

знаходимо значення кутів $\psi'_{\max}$ і $\psi'_{\min}$, під якими проводимо дотичні до кривої Віттенбауера (див. рис. 6.1) і знаходимо точку їх перетину O' . Очевидно, якби початок координат діаграми $T = T(J_{3B})$ знаходився в точці O' , то коефіцієнт нерівномірності дорівнював допустимому значенню: $\delta = \delta_{\text{доп}}$. Іншими словами, якщо перейти від системи координат TOJ_{3B} до $T'O'J'_{3B}$, то задачу про регулювання руху механізму буде розв'язано.

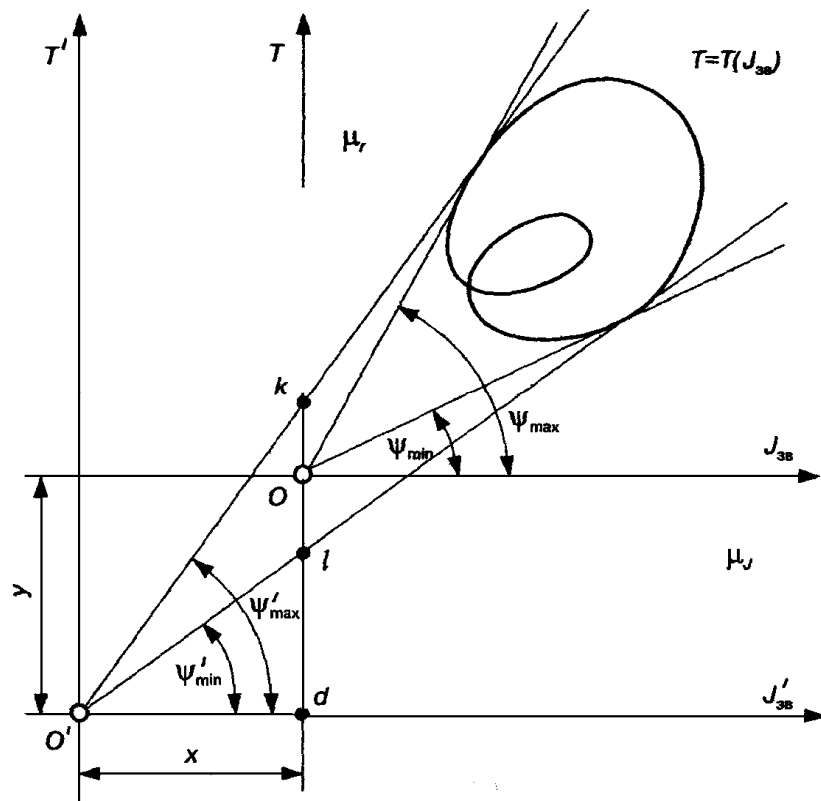


Рис. 6.1

При цьому переході кінетична енергія збільшується на величину T_0 , а зведений момент інерції – на величину J_0 . Відрізки x і y , виражені в міліметрах, зображують у вибраних масштабах μ_J і μ_T величини додаткового зведеного моменту інерції J_0 і додаткової кінетичної енергії T_0 , які є необхідними для того, щоб машина працювала з вибраним коефіцієнтом нерівномірності $\delta_{\text{доп}}$. Отже,

$$J_0 = x\mu_J; \quad T_0 = y\mu_T. \quad (6.3)$$

З побудови безпосередньо випливає, що чим менше коефіцієнт нерівномірності δ , тим менше різниця між кутами $\psi'_{\max}$ і $\psi'_{\min}$ і тим далі від

кривої $T = T(J_{зв})$, що відповідає часові усталеного руху, буде знаходитися початок координат, тобто при зменшенні величини δ збільшуються зведена маса машини та її кінетична енергія, потрібна для надання руху машині із заданою середньою швидкістю $\omega_{сеп}$. Отже, збільшення рівномірності руху ланки зведення можна досягти, збільшивши зведений момент інерції.

Збільшити зведені маси або зведений момент інерції можна шляхом збільшення мас окремих ланок механізму. Практично це збільшення мас здійснюється з допомогою посадки на один із валів машини додаткової деталі, що має певний момент інерції. Цю деталь називають маховим колесом, або **маховиком**. Момент інерції маховика

$$J_m = J_0 = \mu_j x_0. \quad (6.4)$$

З допомогою маховика можна регулювати періодичні коливання швидкості початкової ланки, які обумовлені властивостями самих механізмів або періодичною зміною співвідношень між величинами рушійних сил і сил опору. Підбором моменту інерції маховика можна змусити початкову ланку механізму рухатися з наперед заданим відхиленням від деякої її середньої швидкості. Маховик є ніби акумулятором кінетичної енергії механізмів і машини, який накопичує її в моменти прискорення руху механізмів і віддає назад у моменти сповільнення руху.

6.2. Визначення розмірів маховика

Конструкції маховиків можуть бути різними. Зазвичай маховики виготовляють сталевими або чавунними. Конструктивно маховики оформляють у вигляді дисків або кілець зі спицями і втулкою (рис. 6.2, а, б).

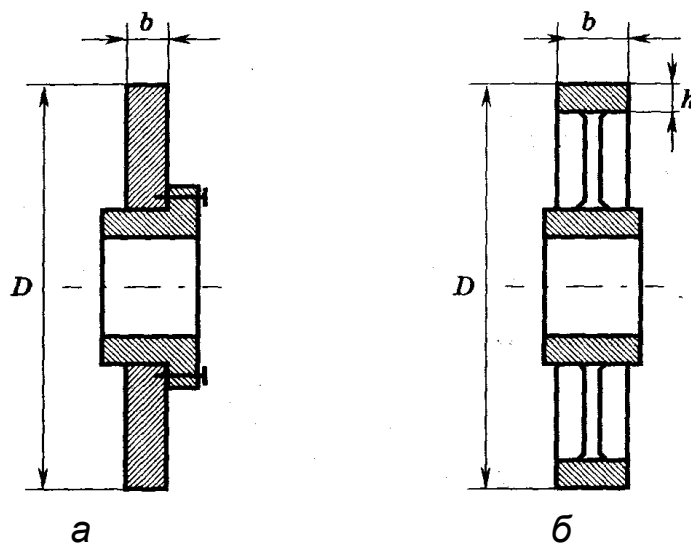


Рис. 6.2

Як маховики часто використовують диски гальм, диски муфт та інших деталей, що обертаються. У цих випадках їх розміри збільшують до отримання необхідного моменту інерції.

Для дискового маховика осьовий момент інерції

$$J_M = mD^2 / 8. \quad (6.5)$$

Якщо масу такого маховика m виразити через товщину b диска й густину матеріалу ρ , то діаметр диска можна обчислити за формулою

$$D = \sqrt[4]{32J_M / (\pi b \rho)}. \quad (6.6)$$

Для маховика у вигляді кільця (див. рис. 6.2, б) момент інерції без урахування спиць і втулки визначається як

$$J_M = mD^2 / 4. \quad (6.7)$$

Якщо масу m виразити через об'єм кільця завширшки b і завтовшки h і густину матеріалу ρ , то отримаємо середній діаметр кільця

$$D = \sqrt[3]{4J_M / (\pi b h \rho)}. \quad (6.8)$$

Аналіз виразів (6.6) і (6.8) показує, що матеріаломісткість маховиків є обернено пропорційною до їх діаметрів, а при однакових значеннях діаметра й ширини маса дискового маховика приблизно вдвічі більше маси маховика зі спицями.

Відомо, що момент інерції маховика є обернено пропорційним до квадрата кутової швидкості ланки зведення. Для зменшення його розмірів і матеріаломісткості доцільно встановлювати маховик на самому швидкохідному валу механізму. Однак необхідно враховувати режим роботи механізму, умови навантаження його ланок та умови роботи двигуна, який забезпечує рух механізму.

Якщо обертання передається до механізму від двигуна через передавальний механізм, наприклад зубчастий, і на механізм не впливають змінні режими навантаження з боку виконавчої ланки, то маховик встановлюють на валу двигуна.

Якщо механізм працює в змінному режимі навантаження з боку виконавчої ланки, то маховик встановлюють на валу механізму, розвантажуючи редуктор і двигун від різкої зміни навантаження.

6.3. Регулятори швидкості

Проте з допомогою маховика неможливо регулювати довготривалі й неперіодичні коливання швидкості, коли робота рушійних сил не дорівнює роботі сил опору. Наприклад, навантаження на двигун внутрішнього згоряння автомобіля значно збільшується через крутий підйом або спуск дороги. Це спричиняє значну зміну моменту сил опору на валу двигуна, унаслідок чого порушується відповідність між роботою рушійної сили двигуна й роботою сил опору руху автомобіля. У таких випадках треба змінювати роботу рушійних сил (додатковою подачею палива) або вводити додаткову роботу сил опору (гальмуванням). Це дає можливість зберігати відповідний баланс робіт і необхідну швидкість автомобіля.

Таким чином, для забезпечення коливань швидкості ланки зведення в заданих межах необхідно, щоб у машині за один цикл підтримувалася рівність робіт рушійних сил і сил опору $A_p = A_o$. Для цього встановлюють спеціальні механізми – пристрої, які називають **регуляторами швидкості**.

З допомогою регулятора можна встановити стаціонарний за законом змінення швидкості режим руху початкового вала механізму. Цього можна досягти вирівнюванням різниці між рушійними силами й силами опору. Так, якщо з якихось причин зменшився опір і механізм починає прискорювати свій рух, то регулятор автоматично зменшує рушійні сили або збільшує сили опору і навпаки.

Конструкції регуляторів і схеми регулювання бувають різними. Наприклад, застосовуються так звані відцентрові регулятори, у яких використовується відцентрова сила інерції, інерційні регулятори, у яких використовуються тангенціальні (дотичні) сили інерції тощо.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Кіницький, Я. Т. Короткий курс теорії механізмів і машин / Я. Т. Кіницький. – Л. : Афіша, 2004. – 268 с.

Теория механизмов и машин. Курсовое проектирование / А. Ф. Дашенко, И. М. Белоконов, К. И. Белоконов и др. – Одесса : Стандарт, 2007. – 242 с.

Тимофеев, Г. А. Теория механизмов и машин : курс лекций / Г. А. Тимофеев. – М. : Высш. образование, 2009. – 351 с.

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА	3
1. Задачі динаміки механізмів	3
2. Сили, що діють у механізмах	4
2.1. Класифікація сил	4
2.2. Рушійні сили й сили корисного опору	5
2.3. Сили інерції	8
2.4. Сили тертя	9
3. Силовий розрахунок плоских механізмів.....	33
3.1. Задачі силового розрахунку	33
3.2. Статична визначеність кінематичних ланцюгів	33
3.3. Силовий розрахунок згідно з методом Бруєвича	35
3.4. Розрахунок зрівноважувального моменту згідно з методом Жуковського.....	44
3.5. Урахування сил тертя	48
4. Визначення закону руху механізмів.....	49
4.1. Зведення сил і моментів сил.....	50
4.2. Зведення мас і масових моментів інерції.....	53
4.3. Рівняння руху механізмів.....	56
4.4. Режими руху механізмів.....	59
4.5. Нерівномірність руху механізмів.....	62
5. Дослідження режимів руху механізмів	64
5.1. Метод Віттенбауера	64
5.2. Перехідний режим руху. Визначення тривалості процесу	69
5.3. Усталений режим руху. Визначення коефіцієнта нерівномірності руху	74
5.4. Механічний коефіцієнт корисної дії	76
6. Регулювання руху механізмів	81
6.1. Визначення моменту інерції маховика	81
6.2. Визначення розмірів маховика	84
6.3. Регулятори швидкості	86
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК	86

Навчальне видання

**Меньшиков Василь Олександрович
Усик Віктор Васильович**

ДИНАМІКА МЕХАНІЗМІВ

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2016

Підписано до друку 17.06.2016

Формат 60x84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 4,9. Обл.-вид. арк. 5,5. Наклад 100 пр. Замовлення 207

Ціна вільна

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001