

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського

"Харківський авіаційний інститут"

О.В. Третяк, М.В. Репетенко, Д.В. Громенко

КОНСПЕКТ З КУРСУ «АЕРОДИНАМІКА ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ»

Харків «ХАІ» 2023

УДК 533.6.013 : 629.735.45(075.8)

Г75

Конспект з курсу "Аеродинаміка літального апарату" 1 частина присвячений вивченню фізичних властивостей газу та їх параметрів, кінематики та динаміки рідини та газу, основних рівнянь руху рідини та газу, аеродинамічної подібності та поняття про аеродинамічні коефіцієнти. Також розглядається теорія ізентропних потоків газу та теорія стрибків ущільнення, у тому числі залежність кута нахилу косого стрибка ущільнення від кута повернення надзвукового потоку та ударна поляра. Цей курс є важливим для студентів, які вивчають аерокосмічну техніку, та може знайти застосування у проектуванні та виробництві літальних апаратів.

Рецензент: д.т.н., зав. кафедри аерокосмічної теплотехніки НАУ ХАІ,
доцент П.Г. Гакал

Третяк, О. В.

Г75 Аеродинаміка літального апарату [Текст]: конспект з курсу / О. В. Третяк, М. В. Репетенко, Д. В. Громенко. - Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського "Харків. авіац. ін-т", 2023. - 122с.

Abstract for the course "Aerodynamics of the aircraft" is devoted to the study of the physical properties of gas and their parameters, kinematics and dynamics of liquid and gas, the basic equations of motion of liquid and gas, aerodynamic similarity and the concept of aerodynamic coefficients. The theory of isentropic gas flows and the theory of shock waves are also considered, including the dependence of the angle of inclination of the oblique shock wave on the return angle of the supersonic flow and the shock polar. This course is important for aerospace engineering students and can find application in aircraft design and manufacturing.

Іл. 52. Табл. 0. Бібліогр.: 33 назв.

ISBN 978-617-619-275-6

© Третяк О.В., Репетенко М.В., Громенко Д.В., 2023

© Національний аерокосмічний
університет ім. М.Є. Жуковського
"Харківський авіаційний інститут", 2023

ВСТУП

Аеродинаміка є однією з фундаментальних профілюючих дисциплін, необхідних фахівцям, які працюють у галузі авіаційної та ракетно-космічної техніки. Вона має важливе значення для ряду суміжних наук. Дані аеродинаміки широко використовуються щодо льотно-технічних характеристик літального апарату, дослідженні його стійкості і керованості, розрахунку апарату на міцність.

Без міцних та глибоких знань аеродинаміки неможливо стати кваліфікованим інженером у галузі авіації, ракетобудування та космічної техніки.

Аеродинаміка - наука, що вивчає закони руху повітря (газів), закони взаємодії між повітряним середовищем і твердим тілом, що рухається в ній. Визначення сил і моментів, що діють на тверде тіло під час руху в повітряному середовищі, — одне з основних завдань аеродинаміки. Аеродинаміка є теоретичною основою авіаційної та ракетно-космічної техніки.

В першій частині конспекту лекцій розглянуті такі теми: Фізичні властивості, параметри та функції стану газу; Кінематика рідини (газу); Динаміка рідини та газу; Ізентропні потоки газу; Теорія стрибків ущільнення.

1. ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ, ПАРАМЕТРИ ТА ФУНКЦІЇ СТАНУ ГАЗУ

1.1. ГІПОТЕЗА СУЦІЛЬНОСТІ СЕРЕДОВИЩА. РІВНЯННЯ СТАНУ ГАЗУ

Гіпотеза суцільності середовища. Рух рідини та газу значно складніше руху твердого тіла, тому що в них відсутні жорсткі зв'язки, властиві твердому тілу.

Справжня будова рідини і газу - молекулярна, тобто середовище складається з великої кількості окремих молекул, що хаотично рухаються одна щодо одної з досить великими швидкостями. Однак при вивченні практичних питань силової взаємодії між середовищем і твердим тілом, що рухається в ній (у чому і полягає основне завдання аеродинаміки) рідина і газ можна розглядати як суцільне середовище, в якому відсутні порожнечі, міжмолекулярні проміжки і молекулярний рух. Це припущення називається гіпотезою безперервності чи суцільності середовища.

Гіпотеза суцільності дає можливість розглядати кінематичні та динамічні елементи (швидкість, тиск та ін) як безперервні функції координат x , y , z та часу t , що дозволяє використовувати добре відомий математичний апарат, що базується на цих безперервних функціях. Молекулярна будова рідин і газів при цьому враховується побічно через фізичні властивості середовища щільність, в'язкість, теплопровідність та ін.

Гіпотеза суцільності середовища не застосовується для сильно розріджених газів, коли довжина вільного пробігу молекул стає порівнянною з лінійними розмірами тіла, що обтікає.

У рамках гіпотези суцільності основними параметрами, що характеризують середовище, є щільність ρ , тиск p і температура T . У термодинаміці часто замість густини ρ використовується питомий обсяг $V = 1/\rho$.

Рівняння стану газу. Розглянемо деякі відомості з термодинаміки, які необхідні вивчення властивостей потоків газу. До них насамперед належить рівняння стану газу.

Досвід показує, що між основними параметрами, що характеризують стан газу (тиском, щільністю та температурою), існує певна залежність. Рівняння $f(p, \rho, T) = 0$, що встановлює зв'язок між цими параметрами, називається рівнянням стану. Тому стан будь-якого газу визначається двома параметрами (наприклад, щільністю та температурою), оскільки третій параметр (тиск) можна знайти з рівняння стану. Для ідеального газу рівняння стану можна подати у вигляді

$$p = R\rho T, \quad (1.1)$$

де $R = 8314/m$ — газова стала, що залежить від відносної молекулярної маси газу m . Для повітря $m = 29$, $R = 287$ Дж/(кг · К).

Під ідеальним газом прийнято розуміти газ, у якому взаємодія молекул між собою здійснюється за допомогою пружних зіткнень, а лінійний розмір молекул у порівнянні із середньою молекулярною відстанню малий.

Численні експерименти підтверджують справедливість рівняння (1.1) і реальних газів у широкому діапазоні зміни тиску і температури.

Істотне відхилення властивостей повітря від властивостей ідеального газу спостерігається при високих тисках та низьких температурах. При високій температурі термодинамічні властивості повітря можуть істотно відрізнятися від властивостей ідеального газу. В цьому; У разі молекулах збуджуються коливальні (внутрішні) ступеня свободи. За більш високої температури ($T > 2000$ К) відбувається дисоціація молекул, а при подальшому збільшенні температури ($T > 5000$ К) - іонізація газу. Ступені дисоціації та іонізації залежать від температури та тиску. Підвищення температури та зниження тиску призводять до збільшення ступенів дисоціації та іонізації.

До настання дисоціації відносна молекулярна маса m і газова стала не змінюються. Рівняння стану повітря в цих умовах збігається з рівнянням (1.1) де $R = \text{const}$.

Для дисоційованого та іонізованого повітря відносна молекулярна маса зменшується і залежить від температури та тиску $m = m(T, p)$, а газова стала R відповідно зростає: $R = R(T, p)$. Наприклад, при $T = 10\,000\text{ К}$ і $p = 10\text{ Па}$ газова постійна $R = 614,2\text{ Дж/(кг К)}$. У випадках, коли $R = R(T, p)$, рівняння, що встановлює зв'язок між параметрами стану газу, ускладнюється. При цьому замість рівняння стану можна скористатися відповідними таблицями термодинамічних функцій [30] чи діаграмами стану газу.

1.2. ПИТОМА ТЕПЛОЄМНІСТЬ ГАЗУ

Розглянемо якийсь довільний термодинамічний процес. Кількість теплоти dq , підведена до 1 кг газу в цьому процесі, виразимо через збільшення температури газу dT :

$$dq = c dT \quad (1.2)$$

Множник c , що є кількістю теплоти, необхідне для підігріву 1 кг газу на 1 град в даному процесі, називається питомою теплоємністю. Питома теплоємність залежить від характеру процесу.

Розглянемо теплоємності, що відповідають процесам, що відбуваються при постійних обсязі c_v та тиску порівн. Залежність між питомими теплоємностями ідеального газу c_v і c_p визначається наступним співвідношенням:

$$c_p - c_v = R. \quad (1.3)$$

У термодинаміці та газодинаміці важливе значення має відношення теплоємностей $k = c_p/c_v$. Величина k залежить передусім структури молекули газу. Так, для ідеальних одноатомних газів $k = 1,66$ для двоатомних газів, у тому числі і для повітря, $k = 1,4$, для багатоатомних газів $k = 1,33$.

Питома теплоємність реальних газів c_v , c_p залежить від температури — за її збільшення питомі теплоємності зростають. Як зазначалося вище, за високої температури властивості повітря істотно від властивостей ідеального газу з постійними теплоємностями.

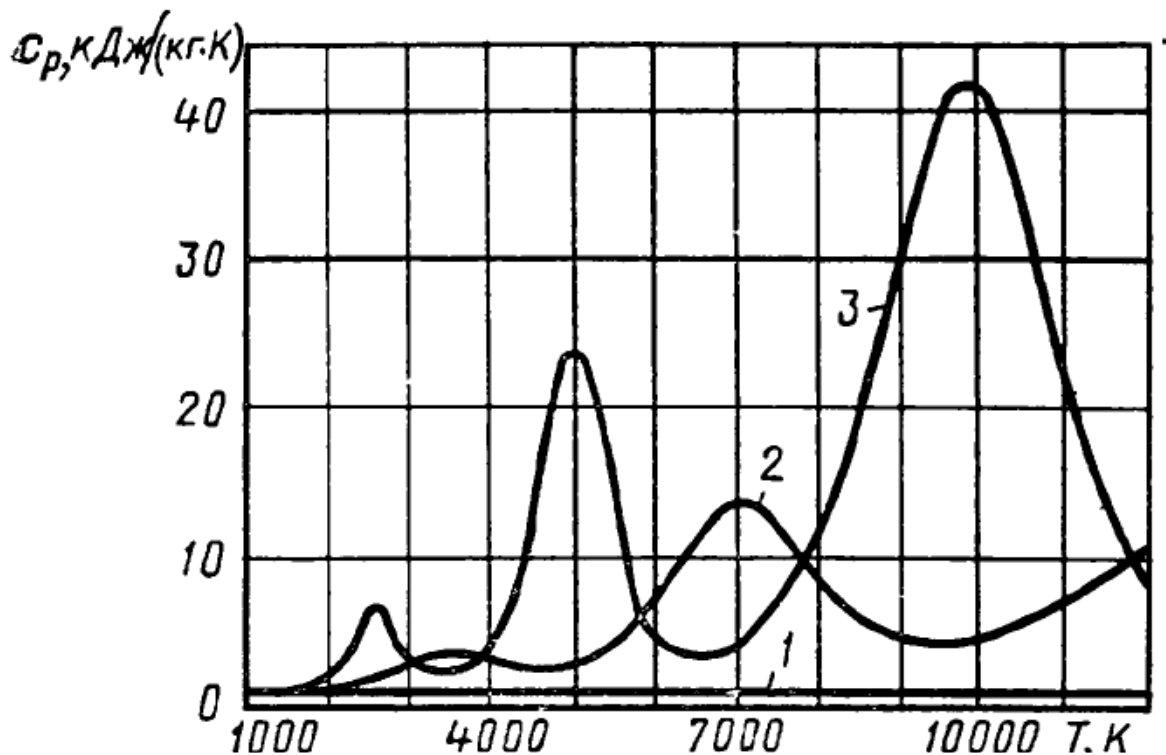


Рис. 1.1. Зміна питомої теплоємності повітря залежно від температури та тиску: 1 — $c_p = \text{const}$; 2 — $p = 100 \text{ кПа}$; 3 — $p = 100 \text{ Па}$

При збудженні внутрішніх ступенів свободи молекул, дисоціації молекул компонентів повітря та іонізації атомів теплота, що підводиться до повітря, йде не тільки на збільшення енергії поступального руху молекул, а й на збільшення енергії обертального, коливального руху атомів, подолання сил взаємодії між атомами при дисоціації та відрив електронів від атома під час

іонізації. Внаслідок цього теплоємність повітря за високої температури значно зростає.

Зважаючи на те, що теплоємності c_v , c_p залежать від температури, їх відношення k також змінюється з температурою — при її збільшенні воно зменшується. Оскільки при одній температурі зниження тиску призводить до посилення ефектів дисоціації та іонізації, то питомі теплоємності c_v , c_p та їх відношення залежать також від тиску: $c_v(T,p)$, $c_p(T,p)$, $k(T,p)$. Залежність c_p від температури при різних тисках повітря показана на рис. 1.1.

1.3. ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ. ФУНКЦІЇ СТАНУ ГАЗУ

Перший закон термодинаміки. Нехай деяка кількість газу знаходиться у рівноважному стані. Позначимо dQ кількість підведеної до газу ззовні теплоти. У загальному випадку підведення теплоти призводить до зміни внутрішньої енергії газу dU та об'єму. При зміні обсягу газ здійснює зовнішню роботу, що дорівнює $dL = pdV$. Тому

$$dQ = dU + pdV \quad (1.4)$$

або, відносячи всі величини до 1 кг маси газу, отримаємо

$$dq = du + pd(l/\rho), \quad (1.5)$$

де dq - сумарна теплота, підведена до 1 кг маси газу ззовні; du - Зміна внутрішньої енергії 1 кг маси газу; $pd(l/\rho)$ — робота, що витрачається на розширення ($1/\rho$ — обсяг, який займає 1 кг маси газу).

При постійному обсязі $dV = 0$, $dQ = dU$ або $dq = du$, тобто вся теплота, що підводиться ззовні до газу, цілком витрачається збільшення його внутрішньої енергії. Тому

$$du = c_v dT. \quad (1.6)$$

Нехтуючи залежністю c_v від температури та маючи на увазі, що при $T = 0$ та $u = 0$, маємо

$$u = c_v T. \quad (1.7)$$

Внутрішня енергія одна із функцій стану газу. Використовуючи формулу (1.6), рівняння (1.5) можна подати у вигляді

$$dq = c_v dT + p d(l/\rho). \quad (1.8)$$

Рівняння (1.5) та (1.8) є математичним виразом першого закону термодинаміки.

Ентальпія. Введемо ще одну функцію стану i , що визначається співвідношенням

$$di = c_p dT \quad (1.9)$$

або, нехтуючи зміною c_p , представимо (1.9) у вигляді

$$i = c_p T. \quad (1.10)$$

Ця функція називається ентальпією. З визначення ентальпії (1.9) випливає, що її збільшення di являє собою збільшення теплоти dq в процесі

$p = \text{const}$. Маючи це на увазі, з рівняння (1.8), інтегруючи його у припущенні $p = \text{const}$, отримаємо

$$i = u + p/\rho. \quad (1.11)$$

Використовуючи рівняння (1.1), а також вирази (1.3) та (1.10), маємо

$$i = [k/(k-1)]RT = [k/(k-1)]p/\rho. \quad (1.12)$$

З формули (1.12) випливає, що для ідеального газу ентальпія залежить тільки від температури та пропорційна їй. Зазначимо, що Для реальних газів ентальпія є функцією двох будь-яких параметрів стану, наприклад температури та тиску: $i = (T, p)$.

Ентропія. При вивченні течії газу часто користуються ще однією функцією стану газу s , яка називається ентропією. Ця функція визначається диференціальним співвідношенням

$$ds = dq/T. \quad (1.13)$$

Знайдемо вираз для ентропії у кінцевій формі, попередньо встановивши зв'язок між ентальпією та ентропією. Бо з (1.13) $Tds = dq$ то, як випливає з рівняння (1.5), $dq = du + p d(1/\rho) = d(u + p/\rho) - dp/\rho = di - dp/\rho$, то

$$Tds = di - dp/\rho. \quad (1.14)$$

Замінюючи di на $c_p dT$ та враховуючи, що на підставі рівняння стану (1.1) $dp/\rho = RdT - p d(1/\rho)$, отримуємо $ds = c_p dT/T - [RdT - p d(1/\rho)]/T$, звідки після простих перетворень маємо

$$ds = R\{[1/(k-1)]dT/T + d(1/\rho)(1/\rho)\}. \quad (1.15)$$

Інтегруючи диференціальне рівняння (1.15), знаходимо вираз для ентропії:

$$s = R \ln (T^{1/(k-1)} / \rho) + \text{const.} \quad (1.16)$$

З формули (1.16) випливає, що ентропія s є функцією стану газу, яка залежить від двох незалежних параметрів стану (в даному випадку T і ρ). Користуючись рівнянням стану (1.1), неважко висловити ентропію через інші параметри, наприклад через p , ρ :

$$s = c_v \ln(p/\rho^k) + \text{const.} \quad (1.17)$$

Реальні течії супроводжуються незворотними втратами енергії та теплообміном із навколишнім середовищем. У незворотних термодинамічних процесах ентропія зростає ($ds > 0$), а оборотних процесах вона залишається незмінною ($ds = 0$). З виразу (1.17) випливає, що якщо ентропія $s = \text{const}$, то

$$p/\rho^k = \text{const.} \quad (1.18)$$

Процеси, що протікають із постійною ентропією, називають ізентропічними. Використовуючи вирази (1.18) та рівняння (1.1), для ізентропічних течій отримаємо наступні співвідношення:

$$p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)^k ; \rho_2/\rho_1 = (T_2/T_1)^{1/(k-1)} ; p_2/p_1 = (T_2/T_1)^{k/(k-1)}, \quad (1.19)$$

де індекси 1 і 2 відносяться до будь-яких двох станів газу в ізентропічному процесі.

1.4. СТИСНІСТЬ ГАЗУ. ШВИДКІСТЬ ЗВУКУ

Важливою властивістю газу є стисливість - властивість газу змінювати об'єм, а отже, і щільність при зміні тиску та температури. Припустимо, що зміна тиску на величину Δp викликає зміну густини на величину $\Delta \rho$. При цьому стисливість газу характеризується ставленням $\Delta p / \Delta \rho$. Чим більше Δp при заданому $\Delta \rho$ (чим менше відношення $\Delta p / \Delta \rho$), тим більша стисливість газу. Це відношення при $\Delta p \rightarrow 0$ та $\Delta \rho \rightarrow 0$ визначає швидкість розповсюдження малих збурень — швидкість звуку:

$$a = (dp/d\rho)^{0.5}. \quad (1.20)$$

У нестерпному середовищі $a = \infty$. Цю формулу легко отримати, користуючись відомою формулою поширення звуку в пружному середовищі

$$a = (E/\rho)^{0.5}. \quad (1.21)$$

де E - модуль об'ємної пружної деформації.

Зміна тиску на малу величину dp в середовищі, що стискається, викликає зміну об'єму на dV , причому $dp = -EdV/V$. Тут $dV/V = -dp/\rho$. Це безпосередньо впливає із закону збереження маси $d(pV) = 0$ або $\rho dV + Vd\rho = 0$. Тоді

$$E/\rho = dp/d\rho. \quad (1.22)$$

Підставляючи (1.22) (1.21), отримуємо (1.20).

Для ізентропічних течій, використовуючи (1.18), маємо $dp/d\rho = kp/\rho$. Отже,

$$a = (kp/\rho)^{0.5}. \quad (1.23)$$

Враховуючи, що $p/\rho = RT$, вираз (1.23) можна подати у такому вигляді:

$$a = (kRT)^{0.5}. \quad (1.24)$$

Таким чином, в середовищі, що стискається, малі обурення поширюються з кінцевою швидкістю a , що залежить від температури.

При дисоціації та іонізації повітря швидкість звуку відрізняється від значень, обчислених за формулою (1.24). При цьому швидкість звуку залежить не лише від температури, а й від тиску. Характер залежності від T і p при високих температурах наведено на рис. 1.2.

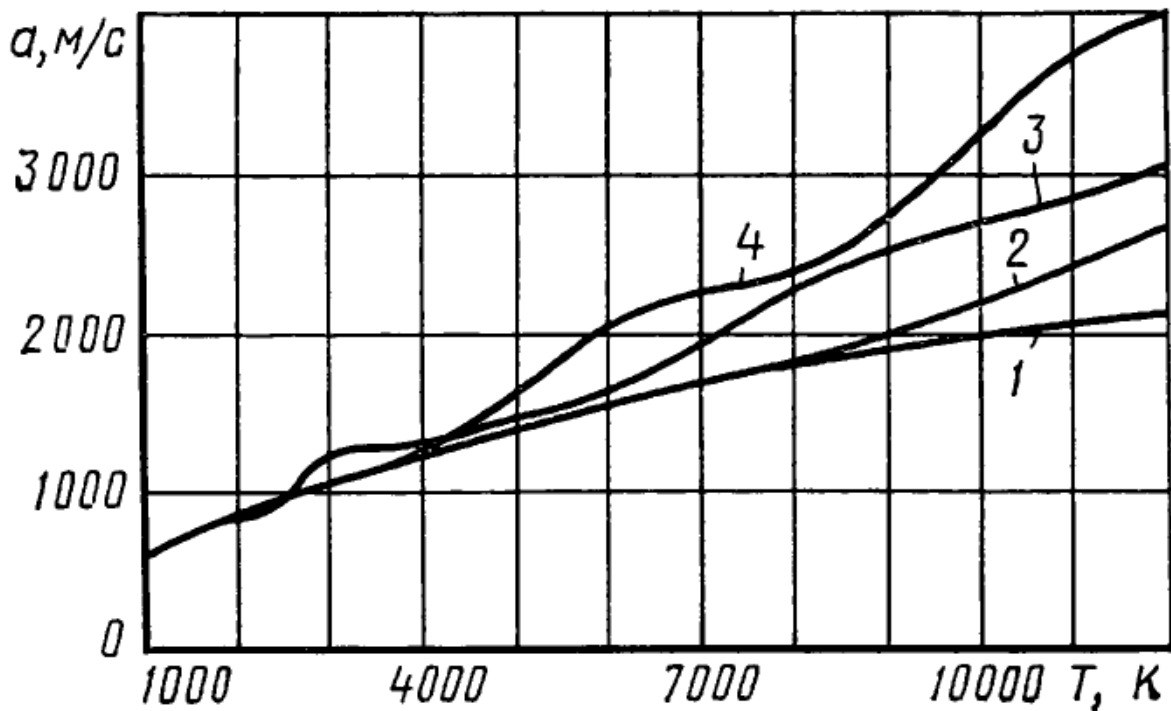


Рис.1.2. Залежність швидкості звуку від температури і тиску:
1- $a=(kRT)^{0,5}$; 2 - $p=100$ Па; 3 - $p=100$ кПа; 4 — $p=100$ МПа

Відношення швидкості потоку до місцевої швидкості звуку називається числом M ; $M = v/a$. Це число є одним із основних критеріїв подібності при великих швидкостях потоку (див. 3.3).

Як зазначалося, впливом стисливості повітря можна знехтувати лише за малих швидкостях $v \ll a$, $M \ll 1$. У разі повітря можна як нестискаємого середовище, вважаючи приблизно $\rho = \text{const}$.

Нехтування фактором стисливості при: малих швидкостях руху з математичної точки зору стирає різницю між рідиною і повітрям, а знайдені за умови закони руху виявляються однаково застосовними як до рідини, і до повітря.

1.5. В'ЯЗКІСТЬ І ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ

В'язкість. Розглянемо рух рідини чи газу вздовж твердої плоскої стінки (рис. 1.3). Якби рідина була нев'язкою (ідеальною), то швидкості всіх

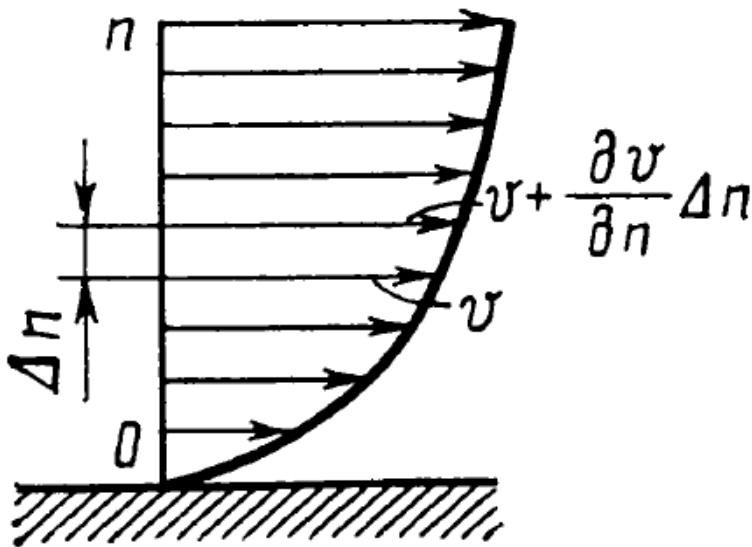


Рис. 1.3. Течія в'язкої рідини

частинок, що знаходяться в даний момент часу на нормалі $0n$ до поверхні, були б однаковими. Насправді частинки: реальної рідини, що безпосередньо примикають до поверхні під дією молекулярних сил зчеплення, прилипають до неї і швидкість таких частинок виявляється

рівною нулю. При віддаленні стінки швидкість частинок збільшується. Характер розподілу швидкості нормалі до поверхні залежить від режиму перебігу в'язкого середовища. Перебіг рідини (газу) може бути ламінарним або турбулентним. Упорядкований перебіг рідини (газу), що відбувається паралельними шарами, називається ламінарним перебігом.

Турбулентна течія на відміну від ламінарного супроводжується безладним рухом частинок, що призводить до поперечного перемішування в'язкого середовища і до пульсації параметрів потоку (швидкості, тиску, щільності та температури). Значення дотичних напруг, що виникають у в'язкому середовищі, у разі ламінарного перебігу можна визначити за допомогою закону Ньютона. Сутність цього закону полягає в тому, що напруга тертя τ (Н/м²), що виникає між шарами, залежить від в'язкості та відносної швидкості ковзання одного шару по відношенню до іншого. Формула Ньютона має вигляд:

$$\tau = \mu \frac{\partial v}{\partial n}, \quad (1.25)$$

де μ - динамічна в'язкість, Па·с; $\partial v / \partial n$ - градієнт швидкості нормалі до поверхні, що характеризує швидкість руху одного шару рідини щодо іншого.

Звідси випливає, що в'язкість проявляється тільки в тому випадку, коли градієнт швидкості нормалі до поверхні відмінний від нуля, тобто в безпосередній близькості від поверхні обтіканого тіла. Тонкий шар рідини або газу, що примикає до поверхні тіла, називається приграничним шаром.

Динамічна в'язкість залежить від виду рідини (газу) та температури. У разі збільшення температури динамічна в'язкість газу зростає. За високих температур коефіцієнт μ залежить також від тиску $\mu(T, p)$. Для характеристики в'язкості газу крім величини вводять також кінематичну в'язкість: $\nu = \mu / \rho$ (м²/с).

Вирішення завдань аеродинаміки з урахуванням в'язкості викликає великі математичні проблеми. Разом з тим у ряді випадків в'язкість не має великого значення і нею можна знехтувати. В цьому випадку можна користуватися спрощеною моделлю ідеальної (нев'язкої) рідини. Слід зазначити, що поняття «ідеальний газ» та «ідеальна рідина» мають різний зміст. Ідеальний газ - газ, що задовольняє рівняння стану (1.1), а ідеальна рідина - нев'язка рідина (газ).

Теплопровідність. Процес теплопровідності у газі, як і походження сил в'язкості, пов'язані з молекулярним будовою газу.

Питомий тепловий потік, переданий у вигляді теплопровідності, визначається за законом Фур'є:

$$q = -\lambda \operatorname{grad} T. \quad (1.26)$$

де λ — теплопровідність, Вт/(м К).

Коефіцієнт λ так само як коефіцієнт μ , залежить від виду газу і температури. У разі збільшення температури значення λ зростає. При високих температурах теплопровідність реальних газів залежить від двох параметрів стану – температури та тиску .

1.6. ПОНЯТТЯ ПРО СТАНДАРТНУ АТМОСФЕРУ

Усі параметри атмосфери Землі – тиск, щільність, температура, швидкість звуку, динамічна та кінематична в'язкості, теплопровідність та ін. – змінюються з висотою. Тиск та щільність повітря з висотою зменшуються. Наприклад, тиск на висоті 11 000 м порівняно з тиском на рівні моря виявляється меншим майже в 4,5 рази, а щільність - приблизно в 3,35 рази; до висоті 20 000 м тиск падає у 18,3 рази, а щільність – у 13,8 рази. На великих висотах значення тиску та щільності повітря відрізняються від земних значень у десятки тисяч разів. Наприклад, до висоти 80 000 м тиск зменшується приблизно 96,5 тис. раз, а щільність — 66,5 тис. раз.

Немонотонний характер зміни температури зумовив прийнятий поділ атмосфери різні верстви: тропосфера (умовно до 11 000 м); стратосфера (умовно до 20 000 м); хемосфера, що тягнеться до 80 000 м; далі йдуть іоносфера та мезосфера.

Багаторічні спостереження стану атмосфери показують, що, крім того, тиск, густина, температура повітря змінюються як протягом доби, так і протягом року. Вони залежать і від географічної широти, метеорологічних явищ, сонячної активності та ін. У зв'язку з цим для практичного використання запроваджено умовні характеристики атмосфери Землі у вигляді стандартної атмосфери, в якій представлені статистично середні значення фізичних параметрів атмосфери для широти $45^{\circ}32'33''$, що відповідають середньому рівню сонячної активності в залежності від висоти (ГОСТ 440-73) В даний час накопичуються і уточнюються відомості про будову атмосфери та інших планет - Марса, Венери, Юпітера .

2. КІНЕМАТИКА РІДИНИ (ГАЗУ)

2.1. МЕТОДИ КИНЕМАТИЧНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ РІДИНИ (ГАЗУ)

Завдання кінематичного аналізу руху рідини полягає у визначенні значень швидкості в кожній точці рідини, що рухається для будь-якого моменту часу t . Знаючи значення швидкостей, можна, як показано нижче, знайти розподіл тиску, а отже, і сили, що діють у рідині. Рух рідини можна вивчати методами Ейлера та Лагранжа.

Метод Ейлер. У методі Ейлера фіксується точка простору з координатами x, y, z і досліджується зміна швидкості у цій точці з часом. Сукупність величин x, y, z, t називають змінними Ейлера. Отже, рух рідини за методом Ейлера визначається наступним чином:

$$v_x = f_1(x, y, z, t); v_y = f_2(x, y, z, t); v_z = f_3(x, y, z, t). \quad (2.1)$$

Припускаючи рух рідини безперервним, вважатимемо зазначені функції однозначними, безперервними і функціями, що диференціюються, координат x, y, z і часу t .

Проекції прискорення рідких частинок у змінних Ейлера

$$w_x = dv_x/dt, w_y = dv_y/dt, w_z = dv_z/dt,$$

Використовуючи правило диференціювання складної функції, отримуємо

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

або тому що

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z,$$

то

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} . \quad (2.2)$$

Аналогічно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dv_y}{dt} &= \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} ; \\ \frac{dv_z}{dt} &= \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} . \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Слід зазначити, що коли беруться повні похідні (2.2) і (2.3), то враховується як зміна складових швидкості за часом t , а й зміна залежно від координат частки рідини x, y, z . Ці похідні називаються конвективними. Частні похідні за часом беруться, як завжди, при фіксованих значеннях координат x, y, z називаються локальними похідними.

Метод Лагранжа. Другий шлях вивчення руху рідини, званий методом Лагранжа, на відміну від методу Ейлера розглядає рух індивідуальних рідких частинок вздовж їхньої траєкторії, оскільки рідких частинок незліченна безліч, то цю частинку слід якось характеризувати. Це можна зробити, якщо як характеристику рідкої частинки вибрати її координати в початковий момент часу $t = 0$. Нехай при $t = 0$ координати частинки будуть a, b, c . Це означає, що з усієї незліченної сукупності траєкторій частинці належить та, яка проходить через точку a, b, c . Таким чином, координати рідкої частинки x, y, z , що розглядається, залежать від величин a, b, c, t , званих змінними Лагранжа, тобто.

$$x = \varphi_1(a, b, c, t); \quad y = \varphi_2(a, b, c, t); \quad z = \varphi_3(a, b, c, t). \quad (2.4)$$

Вирази (2.4) є рівняння сімейства траєкторій, що заповнюють весь простір, зайняте рідиною; величини a, b, c є параметрами, що визначають траєкторію.

Таким чином, якщо в методі Ейлера траєкторії рідких частинок виходять шляхом інтегрування диференціальних рівнянь, метод Лагранжа вони виявляються заданими рівняннями (2.4). Користуючись рівняннями (2.4), знаходимо проекції швидкості та прискорення частинок:

$$\left. \begin{aligned} v_x &= \partial x / \partial t, \quad v_y = \partial y / \partial t, \quad v_z = \partial z / \partial t; \\ w_x &= \partial^2 x / \partial t^2, \quad w_y = \partial^2 y / \partial t^2, \quad w_z = \partial^2 z / \partial t^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Метод Ейлера отримав переважне застосування в аеродинаміці, тому що він більш простий і дає можливість широко використовувати добре розвинений розділ математики векторний аналіз.

Класифікація рухів рідини (газу). Проекції швидкості v_x, v_y, v_z в найбільш загальному випадку руху рідини (газу), що не встановився, є функціями координат x, y, z і часу t :

$$v_x = f_1(x, y, z, t); \quad v_y = f_2(x, y, z, t); \quad v_z = f_3(x, y, z, t). \quad (2.6)$$

Якщо фіксованою точкою простору величини v_x, v_y, v_z . Згодом не змінюються, то рух називається встановленим. В цьому випадку

$$v_x = f_1(x, y, z); \quad v_y = f_2(x, y, z); \quad v_z = f_3(x, y, z). \quad (2.7)$$

Рух рідини (газу) називається плоскопаралельним, якщо всі частинки, що знаходяться на тому самому перпендикулярі до деякої фіксованої площини, рухаються паралельно цій площині з однаковими швидкостями. У плоскопаралельному ($v_z=0$) невстановленому потоці $v_x=f_1(x,y,z,t)$; $v_y=f_2(x,y,z,t)$, а в потоці, що встановився $v_x=f_1(x,y,z)$; $v_y=f_2(x,y,z)$.

Якщо рух рідини (газу) симетричний щодо деякої осі, тобто однаковий у всіх площинах, що проходять через вісь симетрії, то така течія називається

осесиметричною. Осесиметричними є рухи рідини і газу в соплах і дифузорах круглого перерізу, а також перебіг, що виникає при обтіканні будь-якого тіла обертання потоком, спрямованим уздовж осі.

У деяких випадках, наприклад, при обтіканні конуса під кутом атаки, швидкість зберігає постійне значення вздовж прямих, проведених з певної фіксованої точки. Така течія називається конічною, а фіксована точка - полюсом конічної течії.

2.2. ЛІНІЯ СТРУМУ

Розглянемо в момент часу t якусь точку простору, заповненого рідиною. Нехай швидкість частинки рідини, що знаходиться в ній, зображується

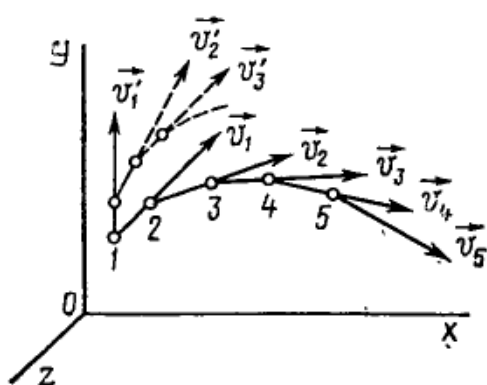


Рис. 2.1. Побудова лінії струму

вектором $\vec{v}_1$ (рис. 2.1). У цей момент часу t візьмемо на векторі швидкості $\vec{v}_2$ точку 2, нескінченно близьку до точки 1. У цій точці знаходиться інша частка рідини. Оскільки точка 2 має інші координати, ніж точка 1, то й швидкість у ній інша, що зображується вектором $\vec{v}_2$. У той же час t візьмемо на векторі швидкості $\vec{v}_2$ точку 3, нескінченно близьку до точки 2. У ній вектор швидкості $\vec{v}_3$ і т. д. В результаті такої побудови (в даний момент часу) виходить ламана 1-2-3- 4-5- володіє тисєю властивістю, що вектор швидкості, відповідний початковій точці будь-якої її ланки, спрямований уздовж цієї ланки.

Будемо необмежено збільшувати кількість ланок ламаної, спрямовуючи до нуля довжину кожної її ланки. Тоді межі (рис. 2.2) вийде крива, звана лінією струму.

Отже, лінія струму має ту властивість, що кожна частка рідини (газу), що знаходиться на ній в даний момент часу, має швидкість, що збігається у напрямку з дотичної до цієї лінії.

Розглянемо розподіл швидкостей у час t^1 .

Якщо рух, що не встановився, то в момент t^1 у точці 1 швидкість v_1 відмінна від вектора $\vec{v}_1$. Отже, щоб пересунутись у сусідню нескінченно близьку точку, потрібно рухатися за новим напрямком, зображеному на рис. 2.1 пунктиром. Звідси випливає, що моменту t^1 лінія струму інша. Це означає, що при русі, що не встановився, сукупність ліній струму змінюється за часом.

Якщо ж рух встановився, тобто швидкості в точках 1, 2 та інших не змінюються за часом, то очевидно, що лінії струму не змінюються з часом. У разі руху руху лінії струму і траєкторії збігаються. Складемо диференціальне рівняння ліній струму. З умови збігу в даній точці лінії струму вектора швидкості $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ з дотичною до цієї лінії $d\vec{s}(dx, dy, dz)$ випливає, що

$$dx/[v_x(x, y, z, t)] = dy/[v_y(x, y, z, t)] = dz/[v_z(x, y, z, t)]. \quad (2.8)$$

Вираз (2.8) є диференціальне рівняння ліній струму.

Введемо поняття про трубку струму. Для цього проведемо в рідині деякий малий замкнутий контур C , що не є лінією струму, і через кожну точку контуру проведемо лінію струму. Сукупність проведених таким чином ліній струму утворює поверхню, яка називається трубкою струму. Рідина, що протікає всередині трубки струму, прийнято називати цівком (струйкою).

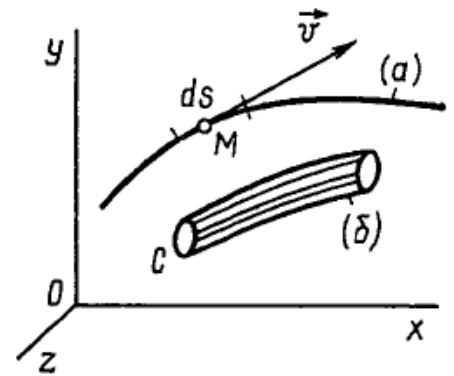


Рис. 2.2. Лінія струму (а) та трубка струму (б)

2.3. ЦИРКУЛЯЦІЯ ШВИДКОСТІ

В аеродинаміці, як теоретичної, і прикладної, винятково велике значення має поняття про циркуляцію швидкості. З величиною циркуляції пов'язується поняття інтенсивності (напруги) вихорів. Від закону розподілу циркуляції з розмаху крила залежить значення сил і моментів, що діють це крило.

Виділимо в рідині, що рухається, довільний фіксований у просторі замкнутий контур C (рис. 2.3). Нехай у деякій його точці M швидкість зображується вектором $\vec{v}$. Складемо добуток $v_s ds$, де v_s - проекція вектора швидкості на напрямок дотичної до контуру в точці M . Візьмемо від цього виразу криволінійний інтеграл по дузі AB . Тоді

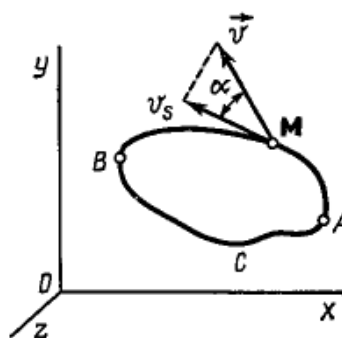


Рис. 2.3. Визначення циркуляції швидкості

$$\Gamma = \int_{AB} v_s ds. \quad (2.9)$$

Цей вираз називається циркуляцією швидкості дугою AB . Зазвичай циркуляцію Γ визначають по всьому замкнутому контуру C :

$$\Gamma = \oint_C v_s ds. \quad (2.10)$$

Напрямок обходу контуру C будемо вважати позитивним, якщо охоплювана контуром C область залишається при цьому зліва. Замінюючи у виразі (2.10) v_s на $\vec{v} \cdot \cos \alpha$, отримаємо

$$\Gamma = \oint_C v \cos \alpha ds. \quad (2.11)$$

Помічаючи, що підінтегральний вираз у формулі (2.10) є скалярним утворенням векторів $\vec{v}$ та $d\vec{s}$, циркуляцію представимо у такому вигляді:

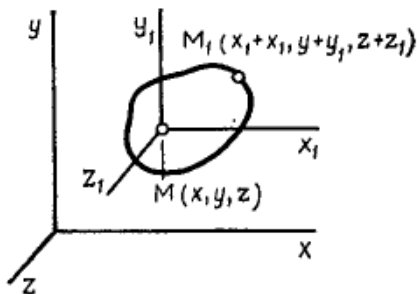
$$\Gamma = \oint_C v_x dx + v_y dy + v_z dz, \quad (2.12)$$

де v_x, v_y, v_z - складові швидкості потоку

2.4. РУХ РІДКОЇ ЧАСТИНИ

У кінематиці твердого тіла доводиться, що у випадку рух твердого тіла у кожен час складається з поступального переміщення і обертання навколо деякої осі, званої миттєвої віссю обертання. Рух рідини набагато складніший, тому що будь-яка рідка частка при своєму русі не тільки переміщається поступально і обертально, а й деформується.

Розглянемо у якийсь момент часу t рух нескінченно малої рідкої частинки. Нехай у певній точці $M(x, y, z)$ усередині частки (рис. 2.4) проекції швидкості суть $v_x(x, y, z)$, $v_y(x, y, z)$, $v_z(x, y, z)$. Тоді проекції швидкості у певній точці $M_1(x+x_1, y+y_1, z+z_1)$ на поверхні частки можна подати у вигляді



$$v_{x1} = v_x(x+x_1, y+y_1, z+z_1); \quad v_{y1} = v_y(x+x_1, y+y_1, z+z_1); \quad v_{z1} = v_z(x+x_1, y+y_1, z+z_1).$$

Рис. 2. 4. Рух частинки рідини

Скориставшись розкладанням у ряд Тейлора і утримуючи у ньому лише величини першого порядку малості, т. е. члени, які містять x_1, y_1, z_1 у ступені не вище за перший, отримаємо наступний

вираз для швидкостей:

$$\left. \begin{aligned} v_{x1} &= v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_x}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_x}{\partial z} z_1; \\ v_{y1} &= v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_y}{\partial z} z_1; \\ v_{z1} &= v_z + \frac{\partial v_z}{\partial x} x_1 + \frac{\partial v_z}{\partial y} y_1 + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1, \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

де для краткості покладемо $v_x = v_x(x, y, z)$, $v_y = v_y(x, y, z)$, $v_z = v_z(x, y, z)$.

Перетворимо ці вирази, для чого додамо до правої частини першого рівняння (2.13) величини $\pm \frac{1}{2} \frac{\partial v_y}{\partial x} y_1$ і $\pm \frac{1}{2} \frac{\partial v_z}{\partial x} z_1$ перегрупуємо члени. В результаті матимемо

$$v_{x1} = v_x + \frac{\partial v_x}{\partial x} x_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) y_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) z_1 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) z_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) y_1.$$

Аналогічними перетвореннями з другого та третього рівнянь (2.13) можна отримати:

$$v_{y1} = v_y + \frac{\partial v_y}{\partial y} y_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) x_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) z_1 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) x_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) z_1; \\ v_{z1} = v_z + \frac{\partial v_z}{\partial z} z_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) x_1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) y_1 + \\ + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) y_1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) x_1.$$

Введемо позначення:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \\ \omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right); \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

$$\varepsilon_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad (2.15)$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right); \quad (2.15')$$

$$e_x = \partial v_x / \partial x, \quad e_y = \partial v_y / \partial y, \quad e_z = \partial v_z / \partial z. \quad (2.16)$$

Тоді отримані вище вирази для v_{x1} , v_{y1} , v_{z1} можна уявити у вигляді

$$\left. \begin{aligned} v_{x1} &= v_x + (\omega_y z_1 - \omega_z y_1) + e_x x_1 + (\varepsilon_y z_1 + \varepsilon_z y_1); \\ v_{y1} &= v_y + (\omega_z x_1 - \omega_x z_1) + e_y y_1 + (\varepsilon_z x_1 + \varepsilon_x z_1); \\ v_{z1} &= v_z + (\omega_x y_1 - \omega_y x_1) + e_z z_1 + (\varepsilon_y x_1 + \varepsilon_x y_1). \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

Розглянемо допоміжну квадратичну функцію

$$\Phi = (1/2) (e_x x_1^2 + e_y y_1^2 + e_z z_1^2 + 2\varepsilon_x y_1 z_1 + 2\varepsilon_y x_1 z_1 + 2\varepsilon_z x_1 y_1), \quad (2.18)$$

похідні якої за координатами x_1, y_1, z_1 мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \partial\Phi/\partial x_1 &= e_x x_1 + \varepsilon_y z_1 + \varepsilon_z y_1; \\ \partial\Phi/\partial y_1 &= e_y y_1 + \varepsilon_x z_1 + \varepsilon_z x_1; \\ \partial\Phi/\partial z_1 &= e_z z_1 + \varepsilon_x y_1 + \varepsilon_y x_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

За допомогою функції Φ вирази для проекцій можна подати у такому компактному вигляді

$$\left. \begin{aligned} v_{x1} &= v_x + (\omega_y z_1 - \omega_z y_1) + \partial\Phi/\partial x_1; \\ v_{y1} &= v_y + (\omega_z x_1 - \omega_x z_1) + \partial\Phi/\partial y_1; \\ v_{z1} &= v_z + (\omega_x y_1 - \omega_y x_1) + \partial\Phi/\partial z_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

З'ясуємо фізичний зміст виразів (2.20). Члени v_x, v_y, v_z являють собою, очевидно, проекції швидкості поступального переміщення частки, що розглядається, в просторі твердого тіла; члени $(\omega_y z_1 - \omega_z y_1), (\omega_z x_1 - \omega_x z_1), (\omega_x y_1 - \omega_y x_1)$ - проекції кутової швидкості частинки рідини (так само як твердого тіла) навколо миттєвої осі, що проходить через точку М. Такий обертальний рух частинок рідини називається вихровим рухом, а компоненти кутової швидкості $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - компонентами вихору.

Як впливає з рівностей (2.14),

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \vec{v}. \quad (2.21)$$

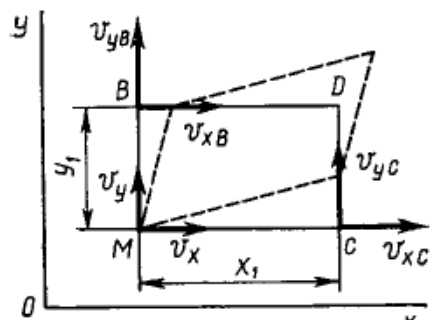


Рис. 2.5. Деформація частинки рідини

З'ясуємо зміст доданків $\partial\Phi/\partial x_1, \partial\Phi/\partial y_1, \partial\Phi/\partial z_1$. Насамперед із фізичних міркувань ясно, що рідка частка при русі деформується. Члени $\partial\Phi/\partial x_1, \partial\Phi/\partial y_1,$

$\partial\Phi/\partial z_1$ є компонентами швидкості деформації частинки. Покажемо це на простому прикладі.

Нехай нескінченно мала рідка частка має у момент часу t форму прямокутного паралелепіпеда. Для спрощення розглянемо проекцію цієї частки на площину x, y , тобто нескінченно малий прямокутник $MBDC$ (рис. 2.5). Якщо компоненти швидкості у точці $M(x, y)$ прямокутника позначити v_x, v_y , то складові швидкості в точках $C(x + x_1, y)$ та $B(x, y + y_1)$ можна уявити у вигляді (з точністю до малих першого порядку)

$$\left. \begin{aligned} v_{xC} &= v_x + (\partial v_x / \partial x) x_1, & v_{yC} &= v_y + (\partial v_y / \partial x) x_1; \\ v_{xB} &= v_x + (\partial v_x / \partial y) y_1, & v_{yB} &= v_y + (\partial v_y / \partial y) y_1. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Оскільки розглядається відносно переміщення точок C і B (щодо точки M), наведемо рівності (2.22) у такому вигляді:

$$\begin{aligned} v_{xC} - v_x &= (\partial v_x / \partial x) x_1, & v_{yC} - v_y &= (\partial v_y / \partial x) x_1; \\ v_{xB} - v_x &= (\partial v_x / \partial y) y_1, & v_{yB} - v_y &= (\partial v_y / \partial y) y_1. \end{aligned}$$

Очевидно, що швидкість $(\partial v_x / \partial x) x_1 = e_x x_1$, $(\partial v_y / \partial y) y_1 = e_y y_1$ є швидкостями лінійної деформації ребер прямокутника $MBDC$; швидкості $(\partial v_x / \partial x) x_1$, $(\partial v_y / \partial y) y_1$ вказують на поворот ребер MC та MB (рис. 2.5), тобто є швидкостями деформації скошування прямокутника $MBDC$ до деякого косокутника (пунктир на рис. 2.5). Очевидно, що ребро MC повертається з кутовою швидкістю $\partial v_x / \partial x$, а ребро MB - з кутовою швидкістю $\partial v_x / \partial y$. Так як швидкість зміни прямого кута BMC складається з кутових швидкостей обертання ребер MC і MB , то, отже, вона є сумою: $\partial v_x / \partial x + \partial v_x / \partial y = 2\varepsilon_x$.

Проводячи аналогічні міркування для інших граней паралелепіпеда (або їх проекцій на координатні площини), можна просто показати, що величина $(\partial v_z / \partial z) z_1 = e_z z_1$ є швидкістю лінійної деформації вздовж осі z і значення кутових швидкостей скошування інших прямих кутів паралелепіпеда виражаються співвідношеннями $\partial v_z / \partial y + \partial v_y / \partial z = 2\varepsilon_x$ та $\partial v_z / \partial x + \partial v_x / \partial z = 2\varepsilon_y$.

З викладеного випливає, що величини $\partial\Phi/\partial x_1$, $\partial\Phi/\partial y_1$, $\partial\Phi/\partial z_1$ дійсно є компонентами швидкості деформації рідкої частинки, причому величини ε_x , ε_y ,

ε_z характеризують деформацію скошування, а величини e_x , e_y , e_z - лінійну деформацію (розтягування чи стиск). Звертаючись знову до формул (2.20), фізичний зміст яких тепер повністю з'ясований, можна дійти такого висновку.

Елементарне переміщення частинки рідини (газу) складається з поступального переміщення її центру зі швидкістю $\vec{v}(v_x, v_y, v_z)$ обертання щодо деякої осі, що проходить через цей центр із кутовою швидкістю $\vec{\omega}(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$, та деформаційного руху, що характеризується функцією $\Phi(x_1, y_1, z_1)$.

2.5. ПОНЯТТЯ ПРО ПОТЕНЦІЙНУ ТЕЧІЮ

При дослідженні обтікання тіл у багатьох випадках можна прийняти, що рух рідини потенційний.

Потенційним рухом рідини називається безвихровий рух, тобто такий рух, в якому компоненти вихору ω_x , ω_y , ω_z рівні нулю. З умови відсутності вихорів $\omega_x = (1/2)(\partial v_z/\partial y - \partial v_y/\partial z) = 0$, $\omega_y = (1/2)(\partial v_x/\partial z - \partial v_z/\partial x) = 0$, $\omega_z = (1/2)(\partial v_y/\partial x - \partial v_x/\partial y) = 0$ слід, що

$$\partial v_z/\partial y = \partial v_y/\partial z, \quad \partial v_x/\partial z = \partial v_z/\partial x, \quad \partial v_y/\partial x = \partial v_x/\partial y. \quad (2.23)$$

Розглянемо тепер диференціальний тричлен $v_x dx + v_y dy + v_z dz$. Як відомо, рівності (2.23) є необхідними та достатніми умовами того, щоб цей диференціальний тричлен був повним диференціалом певної функції, тобто. $v_x dx + v_y dy + v_z dz = d\varphi(x, y, z)$.

Функцію φ називають потенціалом швидкості. Розкриваючи повний диференціал $d\varphi$, т. е. $v_x dx + v_y dy + v_z dz = (\partial\varphi/\partial x)dx + (\partial\varphi/\partial y)dy + (\partial\varphi/\partial z)dz$, і порівнюючи коефіцієнти при dx , dy , dz , маємо

$$v_x = \partial\varphi/\partial x, \quad v_y = \partial\varphi/\partial y, \quad v_z = \partial\varphi/\partial z, \quad (2.24)$$

тобто проекція швидкості на координатну вісь дорівнює частиній похідній від потенціалу швидкості відповідної координати.

Це важливе властивість потенціалу швидкості зберігається й у довільного напрямки, тобто проекція швидкості на довільний напрям дорівнює похідної від потенціалу швидкості у цьому напрямі.

2.6. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ВИХОРІВ

Вивчення вихрового руху рідини та газу в аеродинаміці має винятково важливе практичне значення. Як показано нижче, на вихровій теорії засновані методи визначення аеродинамічних характеристик крил нескінченного та кінцевого розмаху. При обтіканні тіл реальним потоком може відбуватися відрив потоку з утворенням вихорів, які істотно впливають на їх аеродинамічні характеристики. Розглянемо основні тези теорії вихорів.

Вихрові лінії. Обертальні рухи частинок характеризуються кутовими швидкостями:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= (1/2) (\partial v_z / \partial y - \partial v_y / \partial z); \\ \omega_y &= (1/2) (\partial v_x / \partial z - \partial v_z / \partial x); \\ \omega_z &= (1/2) (\partial v_y / \partial x - \partial v_x / \partial y). \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

Це означає, що у кожній точці простору обертання рідких частинок можна охарактеризувати вектором кутової швидкості $\vec{\omega}$, модуль якої

$$\omega = (\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)^{0.5}. \quad (2.26)$$

Кожний такий вектор $\vec{\omega}$ характеризує місцеве обертання рідини (газу). Припустимо, що в даний момент часу t в будь-якій точці 1 вектор кутової швидкості дорівнює $\vec{\omega}_1$ (рис. 2.6). Візьмемо в цей момент часу на цьому векторі близьку до точки 1 точку 2 і будемо відповідний їй вектор кутової швидкості $\vec{\omega}_2$. Продовжуючи цю побудову, на даний момент часу отримаємо ламану лінію 1-2-3-4-..., яка в преділі, тобто при прагненні довжини кожної ланки ламаної нанівець перетворюється на так звану вихрову лінію. Вихровою лінією

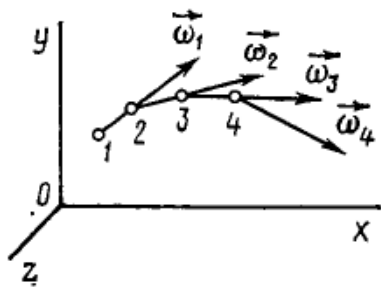


Рис. 2.6. Побудова вихрової лінії

називається лінія, проведена в даний момент часу в потоці рідини (газу), в кожній точці якої вектор кутової швидкості дотичений до неї.

Диференціальне рівняння вихрових ліній має вигляд

$$dx/\omega_x = dy/\omega_y = dz/\omega_z. \quad (2.27)$$

Вихрові трубки. Розглянемо довільний малий замкнутий контур C , що не є вихровою лінією, і проведемо через кожну точку цього контуру вихрову лінію. Тоді сукупність цих ліній утворює поверхню, яку називають вихровою трубкою (рис. 2.7), Рідина (газ), укладена в ній, називається вихровим шнуром,

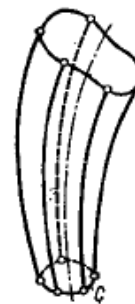


Рис. 2.7. Вихрова трубка

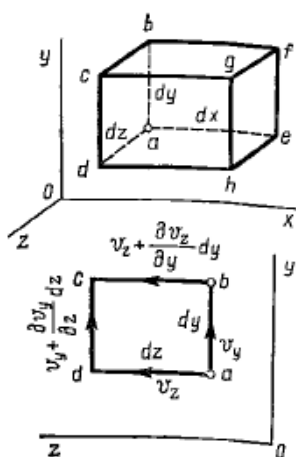


Рис. 2.8. Схема обчислення циркуляції по нескінченно малому прямокутному контуру

вихровою ниткою або вихором.

Під напругою чи інтенсивністю вихору розуміють величину $\chi = 2 \iint \sigma \omega d\sigma$, де σ - площа нормального (поперечного) перерізу вихрової трубки. Нехтуючи зміною ω по перерізу вихрової трубки, отримаємо

$$\chi = 2\omega\sigma \quad (2.28)$$

Значення напруги (інтенсивності) вихор χ пов'язане з циркуляцією Γ , що виникає навколо вихору. Установленню цього зв'язку присвячена теорема Стокса.

Теорема Стокс. Розглянемо в рідині, що рухається, вихрове поле, тобто припустимо, що в рідині безперервно розподілені вихори (вектори $\vec{\omega}$). Виділимо нескінченно малий обсяг у формі прямокутного паралелепіпеда з ребрами dx, dy, dz (рис. 2.8). Розглянемо у площині yz нескінченно малий прямокутник $abcd$ зі сторонами dy і dz , що є проекцією паралелепіпеда, що

розглядається, на площину yz . Підрахуємо циркуляцію Γ_x по елементарному контуру $abcd$, приписуючи індексу x значення обходу навколо осі, паралельної осі x .

Нехай v_y и v_z - проекції вектора швидкості точки a на осі y, z . Підрахуємо значення швидкостей, спрямованих уздовж сторін bc та dc у точках b та d , тобто $(v_z)_b = v_z + (\partial v_z / \partial y) dy$, $(v_y)_d = v_y + (\partial v_y / \partial z) dz$.

Циркуляція $d\Gamma_x$ по контуру $abcd$ складається, очевидно, з циркуляції вздовж нескінченно малих сторін, рівних добутку швидкості довжини відповідних сторін прямокутника. Таким чином, $d\Gamma_x = v_y dy + [v_z + (\partial v_z / \partial y) dy] dz - [v_y + (\partial v_y / \partial z) dz] dy - v_z dz$.

Знак «-» вздовж сторін cd и da береться тому, що напрямок обходу зворотній напрямку швидкості. Звідси $d\Gamma_x = (\partial v_z / \partial y - \partial v_y / \partial z) dy dz$, чи, позначаючи $dy dz = d\sigma_x$ отримаємо

$$d\Gamma_x = 2\omega_x d\sigma_x. \quad (2.29a)$$

Аналогічно, для контурів, розташованих у площинах, перпендикулярних до осей y та z ,

$$d\Gamma_y = 2\omega_y d\sigma_y. \quad (2.29б)$$

$$d\Gamma_z = 2\omega_z d\sigma_z. \quad (2.29в)$$

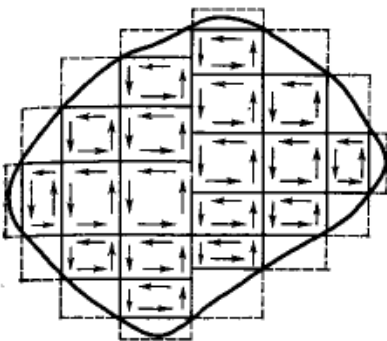


Рис. 2.9. Схема обчислення циркуляції по замкнутому плоскому контуру

Поширюючи отриманий результат на довільно розташований у просторі нескінченно малий прямокутний майданчик $d\sigma$, маємо

$$d\Gamma = 2\omega_n d\sigma, \quad (2.30)$$

де ω_n — проекція кутовий швидкості $\vec{\omega}$ на нормаль до майданчика.

Таким чином, циркуляція по нескінченно малому прямокутному контуру дорівнює напрузі вихору, що пронизує цей контур.

Отриманий результат можна легко поширити на довільний кінцевий плоский контур L (рис. 2.9). Для цього розіб'ємо площу, обмежену контуром

L, системою взаємно ортогональних прямих на нескінченно велику кількість елементарних прямокутників. Розглядаючи зовнішні сторони прямокутників, розташованих на периферії, помічаємо, щоб вони становили багатокутник, вписаний в даний контур. Розглянемо циркуляцію вздовж сторін кожного нескінченно малого прямокутника окремо. Згідно з доведеним, циркуляція дорівнює напрузі пронизливого його вихору. Підсумовуючи циркуляції по всіх нескінченно малих прямокутниках, зауважуємо, що циркуляції по суміжних сторонах прямокутників взаємно знищуються, як різні за знаком. Отже, у межі при необмеженому збільшенні числа нескінченно малих прямокутників сумарна циркуляція дає циркуляцію вздовж контуру L (оскільки у межі вписаний багатокутник перетворюється на контур L) і тому

$$\Gamma = 2 \iint_S \omega_n d\sigma. \quad (2.31)$$

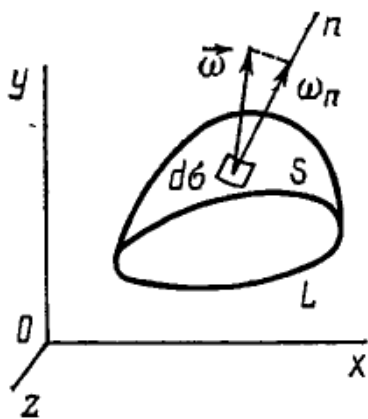


Рис. 2.10. Довільна поверхня, що пронизується потоком вихорів

Формулу (2.31) можна узагальнити у разі довільної поверхні S, що спирається на довільний контур L (рис. 2.10). Справді, розіб'ємо, як і вище, поверхню S на нескінченно велику кількість нескінченно малих майданчиків $d\sigma$.

Тоді, вважаючи майданчики $d\sigma$ внаслідок їх малості плоскими, для будь-якої з них циркуляцію $d\Gamma$ можна визначити за формулою (2.30).

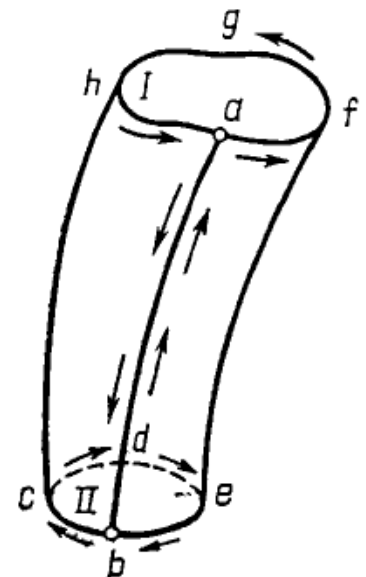


Рис. 2.11. Контур, розташований на поверхні вихрової трубки

Підсумовуючи вираз (2.30) по всіх майданчиках і переходячи до межі, одержуємо формулу (2.31). Формула (2.31) називається інтегральною формулою Стокса. Вона показує, що циркуляція за довільним контуром у

просторі дорівнює сумі напруг (інтенсивностей) вихорів, що пронизують поверхню, що спирається на цей контур.

Теорема Гельмгольца про вихори. Сформулюємо ряд теорем про вихори, що становлять поряд з теоремою Стокса основу теорії вихорів. Однією з основних є така теорема: напруга по довжині трубки вихрової не змінюється. Для доказу розглянемо частину вихрової трубки (рис. 2.11), укладену між двома довільними перерізами I та II. Очевидно, теорема буде доведена, якщо доведемо, що напруга в перерізах I та II однакова, тобто що $\chi_I = \chi_{II}$. Для цього з'єднаємо точки a та b обох перерізів довільною лінією ab, що лежить на поверхні вихрової трубки, і розглянемо циркуляцію по контуру abcdebafgha. Так як цей контур є простим замкнутим контуром і лежить на поверхні вихрової трубки, то $\Gamma = 0$. Але циркуляція по ньому складається з циркуляції контурами I, II і лініях ab і ba. Отже, $\Gamma_I + \Gamma_{ab} - \Gamma_{II} + \Gamma_{ba} = 0$. Оскільки очевидно, що $\Gamma_{ab} = -\Gamma_{ba}$, то $\Gamma_I = \Gamma_{II}$ і, отже, виходячи з теореми Стокса $\chi_I = \chi_{II}$.

З цієї теореми можна зробити висновок про можливі форми існування вихорів. Важливим наслідком цієї теореми є те, що через сталість напруги вздовж вихрової трубки, вихор не може обриватися в рідині. ($\sigma \neq 0$), тому що в іншому випадку (при $\sigma = 0$) $\omega \rightarrow \infty$, що фізично неможливо.

Вихори можуть бути замкнутими, утворюючи вихрові кільця, можуть спиратися на граничні області - на поверхню твердого тіла або поверхню розділу двох середовищ з різною щільністю. Вихори теоретично можуть мати також нескінченну довжину. Однак форма існування вихору у вигляді нескінченного або напівнескінченного вихрового шнура можлива лише у нев'язкому газі (в ідеальній рідині). У реальних умовах під дією в'язкості вихор поступово руйнується (загасає).

У нев'язкому газі (ідеальній рідині), де відсутні дотичні сили - сили в'язкості, що гальмують обертання, вихори не зникають. З цієї причини в ідеальній рідині вихори не виникають. Розглядаючи вихори у нев'язкому середовищі, вивчають модель явища, причиною якого є в'язкість.

Формула Біо-Савара про вихровий вплив. Знайдемо швидкість, що викликається вихором довільної форми з напругою Γ у будь-якій точці рідини A (рис. 2.12). Для цього виділимо елемент dL . Позначимо відстань від точки A до елемента dL ; α - кут, що утворюється радіусом r з дотичною до осі елемента вихору dL . Тоді швидкість dv , що індукується елементом вихору dL у точці A ,

$$dv = [\Gamma/(4\pi r^2)] \sin \alpha dL. \quad (2.32)$$

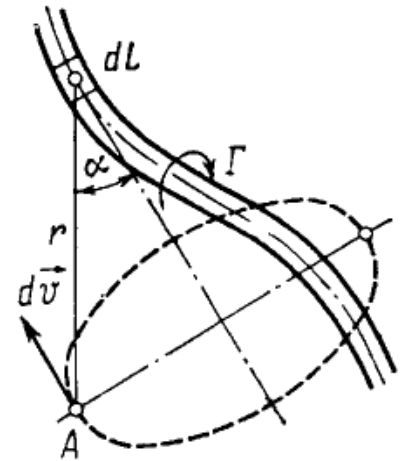


Рис. 2.12. Схема вихрового впливу

Ця формула називається формулою Біо-Савара. Для визначення повної швидкості, що індукується всім вихором у точці A , вираз (2.32) треба проінтегрувати по довжині вихору:

$$v = [\Gamma/(4\pi)] \int_L \sin \alpha / r^2 \quad (2.33)$$

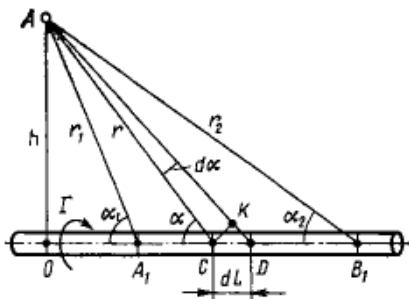


Рис. 2.13. Схема для визначення швидкостей, що індукуються прямолінійним нескінченно довгим вихором

Застосуємо формулу (2.33) на випадок нескінченно довгого прямолінійного вихору з напругою $\chi = \Gamma$. Спочатку знайдемо швидкість v , що індукується в точці A кінцевою ділянкою цього вихору (рис. 2.13).

Радіус-вектори r_1, r_2 та кути α_1, α_2 , відповідні точкам A_1, B_1 , а також довжину перпендикуляра h , опущеного з точки A на вісь вихору, вважаємо заданими (задана також величина Γ). Виділимо на ділянці A_1B_1 вихору нескінченно малий елемент $CD = dL$. Із трикутників CKD і CAK знаходимо $CD = dL = r d\alpha / \sin \alpha$.

З іншого боку, із трикутника OAC маємо $r = h / \sin \alpha$.

Підставляючи значення r і dL формулу (2.32), отримуємо

$$dv = [\Gamma / (4\pi h)] \sin \alpha d\alpha.$$

Для визначення швидкості, що індукується вихором A_1B_1 в точці A , цей вираз треба проінтегрувати в межах від α_2 , до α_1 . Тоді

$$v = [\Gamma / (4\pi h)] (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1). \quad (2.34)$$

Позначаємо $OA_1 = x_1$ і $OB_1 = x_2$, формулі (2.34) можна придати вигляд

$$v = [\Gamma / (4\pi h)] \left(x_2 / \sqrt{x_2^2 + h^2} - x_1 / \sqrt{x_1^2 + h^2} \right). \quad (2.35)$$

Розглянемо два окремі випадки.

Перший випадок: напівнескінченний вихор, що тягнеться від точки O до нескінченності. При цьому $\alpha_1 = \pi/2$, $\alpha_2 = 0$ і, отже,

$$v = \Gamma / (4\pi h) \quad (2.36)$$

Другий випадок: нескінченно довгий вихровий шнур, що тягнеться в обидві сторони до нескінченності. При цьому $\alpha_1 = \pi$, $\alpha_2 = 0$ і формула (2.34) набуває вигляду

$$v = \Gamma / (2\pi h) \quad (2.37)$$

Формулами (2.36) та (2.37) широко користуються при розгляді теорії крила кінцевого та нескінченного розмаху.

3. ДИНАМІКА РІДИНИ ТА ГАЗУ

3.1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ РУХУ РІДИНИ ТА ГАЗУ

Розглянемо довільний просторовий перебіг газу, що не встановився. В цьому випадку при заданих масових силах рух газу можна вважати відомим, якщо відомі три проекції швидкості потоку v_x , v_y , v_z і параметри стану газу тиск p , щільність ρ і температура T .

Для визначення шести зазначених невідомих величин слід скласти шість рівнянь. Виведемо основні рівняння руху газу. При цьому користуватимемося методом Ейлера, в якому досліджується зміна v_x , v_y , v_z , ρ , p , T залежно від положення точки (координат x , y , z) та часу. Для руху, що встановився, ці величини залежать тільки від координат.

Для того щоб сформулювати загальні закони механіки стосовно рідкого або газоподібного середовища, необхідно виділити в цьому середовищі деяку її частину і замінити дію навколишнього середовища відповідними силами. У тому випадку, коли в результаті розв'язання задачі повинні бути відомі розподілені характеристики (розподіл швидкості та тиску), застосовується метод елементарних обсягів. При цьому з рідкого або газоподібного середовища виділяється елементарний об'єм, в межах якого зміною швидкості та густини можна знехтувати. Стосовно цього обсягу можна скласти відповідні рівняння механіки, що належать до динаміки точки. Тоді в результаті граничного переходу при стягуванні елементарного об'єму точку виходять диференціальні рівняння руху.

При складанні диференціальних рівнянь шукані функції (швидкість, тиск, щільність) передбачаються безперервними функціями координат, що диференціюються. Як показано в 5, це не завжди можливо.

У деяких випадках (наприклад, при визначенні сумарних аеродинамічних характеристик тіл - аеродинамічної підйомної сили, опору та моменту аеродинамічних сил) можна застосовувати метод кінцевих обсягів. Для цього в рідкому або газоподібному середовищі виділяють кінцевий об'єм, в межах якого необхідно враховувати зміну швидкості та густини. Стосовно всієї маси,

укладеної в цьому обсязі, можна скласти рівняння механіки, що стосується системи матеріальних точок (наприклад, теореми про зміну кількості руху). При цьому для визначення сил з необхідною точністю у ряді випадків достатньо знати розподіл швидкості дуже приблизно. Рівняння, отримані за допомогою методу кінцевих об'ємів, можна застосовувати і до областей з розривною зміною параметрів потоку.

3.2. РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ

Рівняння нерозривності є рівнянням збереження маси стосовно нерозривних течій рідини і газу.

Для виведення цього рівняння розглянемо в потоці газу фіксований у просторі об'єм V у вигляді прямокутного паралелепіпеда з ребрами dx , dy , dz , паралельними осям координат і з центром у точці C (рис. 3.1). Позначимо v_x , v_y , v_z , ρ складові швидкості

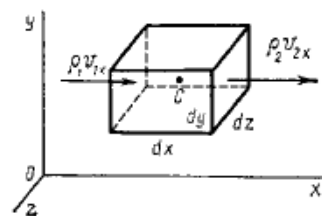


Рис.3.1. Схема для виведення рівняння нерозривності

потoku і щільність газу в точці C в момент часу t . Маса газу, що впливає з об'єму V у напрямку осі x в одиницю часу, $(\rho_2 v_{2x} - \rho_1 v_{1x}) dy dz$, де індекси 1 і 2 - щільність і складові швидкості v_x на лівій та правій гранях паралелепіпеда.

Так як $\rho v_x = f(x, y, z, t)$, то $\rho_2 v_{2x}$ та $\rho_1 v_{1x}$ з точністю до малих першого порядку можна подати в наступному вигляді:

$$\rho_2 v_{2x} = f(x + dx/2, y, z, t) = \rho v_x + [\partial(\rho v_x)/\partial x] dx/2;$$

$$\rho_1 v_{1x} = f(x - dx/2, y, z, t) = \rho v_x - [\partial(\rho v_x)/\partial x] dx/2.$$

Тоді

$$(\rho_2 v_{2x} - \rho_1 v_{1x}) dy dz = [\partial(\rho v_x)/\partial x] dx dy dz.$$

Аналогічні вирази можна навести для маси газу, що витікає з паралелепіпеда в напрямку осей y та z :

$$\partial (\rho v_y)/\partial y] dx dy dz, \quad [\partial (\rho v_z)/\partial z] dx dy dz.$$

Якщо ці вирази скласти, то отримаємо сумарну масу газу, що витікає з паралелепіпеда в одиницю часу:

$$[\partial (\rho v_x)/\partial x + \partial (\rho v_y)/\partial y + \partial (\rho v_z)/\partial z] dx dy dz. \quad (3.1)$$

Згідно із законом збереження маси для нерозривних течій, вираз (3.1) повинен дорівнювати зміні маси газу в об'ємі V за одиницю часу. Маса газу обсягом V на момент часу t дорівнює $\rho dx dy dz$, а в момент часу $t + dt$ буде $[\rho + (\partial \rho / \partial t) dt] dx dy dz$. Отже, в одиницю часу маса газу обсягу V змінюється на величину

$$(\partial \rho / \partial t) dx dy dz, \quad (3.2)$$

причому при позитивному знаку виразу (3.1) маса газу обсягом V зменшується, тобто при цьому $\partial \rho / \partial t < 0$. Прирівнюючи вирази (3.1) та (3.2) з урахуванням їхнього знаку, отримуємо $\partial (\rho v_x) / \partial x + \partial (\rho v_y) / \partial y + \partial (\rho v_z) / \partial z = - \partial \rho / \partial t$ або

$$\partial \rho / \partial t + \partial (\rho v_x) / \partial x + \partial (\rho v_y) / \partial y + \partial (\rho v_z) / \partial z = 0. \quad (3.3)$$

Рівняння (3.3) є рівнянням нерозривності.

Його можна уявити у вигляді

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0, \quad (3.4)$$

або

$$(1/\rho) d\rho/dt + \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (3.4')$$

У окремому випадку встановився рух $\partial\rho/\partial t = 0$. Тоді рівняння нерозривності набуде вигляду

$$\partial(\rho v_x)/\partial x + \partial(\rho v_y)/\partial y + \partial(\rho v_z)/\partial z = 0; \quad (3.5)$$

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0. \quad (3.6)$$

Для нестискаємого середовища ($\rho = \text{const}$)

$$\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y + \partial v_z/\partial z = 0; \quad (3.7)$$

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (3.8)$$

Виведемо рівняння нерозривності стосовно плоского потоку. У цьому випадку, приймаючи за площину потоку площину x, y , будемо мати $v_x(x, y, t)$, $v_y(x, y, t)$, $v_z = 0$, $\rho(x, y, t)$. Тоді замість рівнянь (3.3), (3.5) та (3.7) отримаємо

$$\left. \begin{aligned} \partial\rho/\partial t + \partial(\rho v_x)/\partial x + \partial(\rho v_y)/\partial y &= 0; \\ \partial(\rho v_x)/\partial x + \partial(\rho v_y)/\partial y &= 0; \\ \partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Щоб скласти рівняння нерозривності в циліндричних та сферичних координатах, достатньо скористатися формулами для обчислення дивергенції у відповідних системах координат.

Наведемо рівняння нерозривності для потоку, що має осьову симетрію (осесиметричний потік), для якого у всіх меридіональних площинах течії газу однакові. Розглянемо спочатку сферичну систему координат і скористаємося виразом дивергенції у сферичних координатах:

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \rho v_r) \right] + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\rho v_\psi)}{\partial \psi} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \rho v_\theta) \Bigg], \quad (3.10)$$

де r — довжина радіус-вектора; θ — полярний кут; ψ — довгота.

У разі осесиметричного потоку $v_\psi = 0$, а v_r , v_θ та щільність ρ залежать тільки від r , θ та t . Тоді з виразу (3.10)

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \partial(\rho v_r)/\partial r + (1/r) \partial(\rho v_\theta)/\partial \theta + (2/r) \rho v_r + (1/r) \rho v_\theta \operatorname{ctg} \theta.$$

Підставляючи цей вираз у рівняння (3.4) і (3.6), отримуємо рівняння нерозривності для неустановившогося і осесиметричного потоку в наступному вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \partial \rho / \partial t + \partial(\rho v_r) / \partial r + (1/r) \partial(\rho v_\theta) / \partial \theta + (2/r) \rho v_r + (1/r) \rho v_\theta \operatorname{ctg} \theta &= 0; \\ r \partial(\rho v_r) / \partial r + \partial(\rho v_\theta) / \partial \theta + 2 \rho v_r + \rho v_\theta \operatorname{ctg} \theta &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.11)$$

Аналогічно, використовуючи відповідний вираз $\operatorname{div}(\rho \vec{v})$, можна скласти рівняння нерозривності у циліндричних координатах. Для осесиметричного потоку рівняння нерозривності у циліндричних координатах має вигляд

$$r \partial \rho / \partial t + \partial(r \rho v_x) / \partial x + \partial(r \rho v_r) / \partial r = 0.$$

Тут v_r , v_x — складові швидкості по осях циліндричної системи координат. У разі одновимірного руху газу, що встановився, можна користуватися також рівнянням нерозривності у формі масової витрати:

$$\rho v F = \text{const},$$

де F — площа поперечного перерізу трубки струму.

Для стисканого середовища ($\rho = \text{const}$) це рівняння можна подати у формі об'ємної витрати: $v F = \text{const}$.

3.3. ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ РУХУ НЕВ'ЯЗКОГО ГАЗУ (ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ) У ФОРМІ ЕЙЛЕРА (ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ) У ФОРМІ ЕЙЛЕРА

Рівняння руху нев'язкого газу можна отримати як окремий випадок із рівнянь руху в'язкого середовища. Розглянемо виведення цих рівнянь в іншій послідовності - спочатку дамо висновок рівнянь руху нев'язкого газу, а потім

докладно вивчимо протягом в'язкого газу. Це дозволить перш за все чітко уявити вплив в'язкості на поверхневі сили і відзначити складності, що

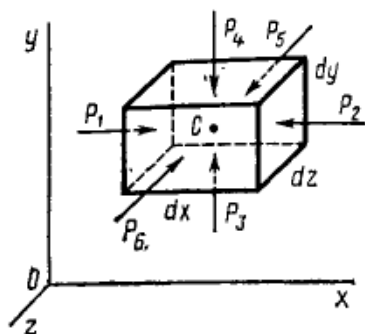


Рис.3.2. Поверхневі сили, що діють на частинку ідеальної рідини.

виникають при вирішенні задачі руху в'язкої рідини в порівнянні з ідеальною. Для виведення диференціальних рівнянь руху нев'язкого газу скористаємося методом елементарних обсягів і виділимо в потоці малу частинку у формі прямокутного паралелепіпеда з центром у заданій точці простору C та з довжинами ребер dx , dy , dz (рис. 3.2). Маса частки $\rho dx dy dz$. Застосовуючи принцип Даламбера, розглянемо рівновагу сил, які діють на виділену частку. Сили які діють у рідині,

можна подати як масові і поверхневі сили. Слід зазначити, що поверхневі сили щодо руху газу є основними.

Масові сили розподілені по всьому об'єму рідини і пропорційні масі частинки, що розглядається. Позначимо $\vec{f}$ вектор масової сили, віднесеної до одиниці маси, X , F , Z — його проекції на осі координат. Приклад масової сили є сила тяжіння. При цьому $X = 0$, $Y = -g$, $Z = 0$. Проекції масової сили, що діє на цю частину, у загальному випадку можна подати у вигляді $\rho X dx dy dz$, $\rho Y dx dy dz$, $\rho Z dx dy dz$. З боку довкілля на частинку діють поверхневі сили, розподілені за межами паралелепіпеда. У разі нев'язкого середовища вектор поверхневої сили – сили тиску – спрямований по внутрішній нормалі до поверхні. Позначимо p_1 , p_2 тиску по гранях, перпендикулярним до осі x , p_3 , p_4 і p_5 , p_6 — тиску по гранях, перпендикулярним осям y і z . Тоді проекція поверхневих сил, що діють на частинку, у напрямку осі x буде дорівнювати $(p_1 - p_2) dy dz$, в точці C тиск $p = f(x, y, z, t)$. Тиск на лівій та правій гранях паралелепіпеда з точністю до малих першого порядку може бути представлений у такому вигляді:

$$p_1 = f(x - dx/2, y, z, t) = p - (\partial p / \partial x) (dx/2);$$

$$p_2 = f(x + dx/2, y, z, t) = p + (\partial p / \partial x) (dx/2),$$

а сумарна проекція сил тиску у напрямку осі x буде $-(\partial p/\partial x)dxdydz$. Аналогічно отримаємо проекції сил тиску на напрями осей y і z , тобто $-(\partial p/\partial y)dxdydz$, $-(\partial p/\partial z)dxdydz$.

Сумарні проекції всіх сил, що діють на частку, у напрямку осей x, y, z :

$$F_x = [X - (1/\rho)(\partial p/\partial x)] \rho dxdydz;$$

$$F_y = [Y - (1/\rho)(\partial p/\partial y)] \rho dxdydz;$$

$$F_z = [Z - (1/\rho)(\partial p/\partial z)] \rho dxdydz.$$

Згідно з принципом Даламбэра, поверхневі і масові сили, що діють на частинку, в кожний момент часу повинні врівноважуватися силами інерції.

Проекції інерційної сили:

$$-(dv_x/dt) \rho dxdydz, -(dv_y/dt) \rho dxdydz, -(dv_z/dt) \rho dxdydz.$$

Тоді, прирівнюючи проекції сил інерції проекціям, сумарної сили, що діє на частинку, отримаємо рівняння руху нев'язкого середовища (ідеальної рідини) у формі Ейлера:

$$\left. \begin{aligned} dv_x/dt &= X - (1/\rho) \partial p/\partial x; \\ dv_y/dt &= Y - (1/\rho) \partial p/\partial y; \\ dv_z/dt &= Z - (1/\rho) \partial p/\partial z. \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

Рівняння (3.12) застосовні для дослідження руху як стисливого, так і нестисливого середовища. Кожен член рівнянь є прискоренням; dv_x/dt , dv_y/dt , dv_z/dt — проекції повного прискорення руху; X, Y, Z — проекції прискорення частки газу, що викликається масовими силами, а $-(1/\rho)\partial p/\partial x$, $-(1/\rho)\partial p/\partial y$, $-(1/\rho)\partial p/\partial z$ — проекції прискорення частки від сил тиску. Повне прискорення руху частинки складається з прискорень, що викликаються масовими та поверхневими силами (силами тиску).

Враховуючи, що складові швидкості потоку v_x, v_y, v_z є функціями координат x, y, z часу t , рівняння (3.12) представимо у такому вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \partial v_x/\partial t + v_x \partial v_x/\partial x + v_y \partial v_x/\partial y + v_z \partial v_x/\partial z &= X - (1/\rho) \partial p/\partial x; \\ \partial v_y/\partial t + v_x \partial v_y/\partial x + v_y \partial v_y/\partial y + v_z \partial v_y/\partial z &= Y - (1/\rho) \partial p/\partial y; \\ \partial v_z/\partial t + v_x \partial v_z/\partial x + v_y \partial v_z/\partial y + v_z \partial v_z/\partial z &= Z - (1/\rho) \partial p/\partial z. \end{aligned} \right\} \quad (3.12')$$

Рівняння Ейлера наведемо також у векторній формі:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - (1/\rho) \text{grad } p. \quad (3.13)$$

3.4. ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ РУХУ В'ЯЗКОГО ГАЗУ.

РІВНЯННЯ НАВ'Я — СТОКСА

В'язкість призводить не тільки до появи дотичних напруг, але і до зміни нормальних напруг у порівнянні з їх значеннями в нев'язкому середовищі (в ідеальній рідині). Це значно ускладнює диференціальні рівняння руху в'язкого газу, порівняно з рівняннями Ейлера.

Розглянемо рух частинки газу у вигляді елементарного паралелепіпеда з ребрами, паралельними осям координат з центром у точці С (рис. 3.3).

Відмінність у поверхневих силах порівняно з нев'язким середовищем полягає в тому, що в цьому випадку на межі частинки діють не тільки нормальні напруги, але і дотичні, так як поверхневі сили у в'язкому газі не ортогональні до поверхні, що розглядається. Це означає, що напрямок поверхневої сили, що діє на кожну грань паралелепіпеда, не збігається з нормаллю до грані і, отже, кожна така сила має три проекції на координатні осі.

Введемо такі позначення. Для кожної проекції вектора напруги чинного на розглянуту грань, приймемо два індекси: перший вказує напрямок нормалі до грані, а другий — вісь, на яку проектується поверхнева сила (напруга), що діє на цю грань. У цих позначеннях складові поверхневої напруги, що діє на ліву грань, перпендикулярну до осі x , можна подати у вигляді p_{xx} , τ_{xy} , τ_{xz} : складові, що діють на межу (на грань), перпендикулярну до осі y , — у вигляді τ_{yx} , p_{yy} , τ_{yz} а складові поверхневої напруги, що діють на межу (на грань),

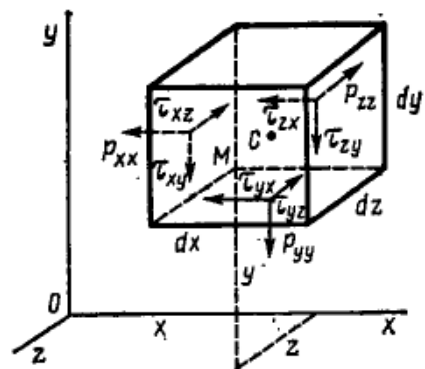


Рис. 3.3. Поверхневі сили, що діють на частку в'язкої рідини

перпендикулярну до осі z , — у вигляді $\tau_{zx}, \tau_{zy}, p_{zz}$, де p_{xx}, p_{yy}, p_{zz} — нормальні напруги, що діють на грані елементарного паралелепіпеда, що розглядається; $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yx}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ — дотичні напруги.

За позитивні напрямки нормальних складових приймемо напрямки вздовж зовнішніх нормалей до граней. На трьох гранях, що проходять через точку M , за позитивні напрямки дотичних складових приймемо негативні напрямки осей координат, а на решті трьох гранях - у бік позитивного напрямку координатних осей.

Розглянемо проекції на вісь x поверхневих сил, що діють на виділену частку газу. Проекції на вісь x дають нормальні напруги, що діють на ліву та праву грані:

$$- p_{xx} dydz; [p_{xx} + (\partial p_{xx} / \partial x) dx] dx dy;$$

дотичні напруги, що діють на задню та передню грані:

$$- \tau_{zx} dx dy; [\tau_{zx} + (\partial \tau_{zx} / \partial z) dz] dx dy,$$

а також дотичні напруги, прикладені до нижньої та верхньої граней:

$$- \tau_{yx} dx dz; [\tau_{yx} + (\partial \tau_{yx} / \partial y) dy] dx dz.$$

Сумарна проекція на вісь x поверхневих сил, що діють на всі межі (грані) паралелепіпеда,

$$(\partial p_{xx} / \partial x + \partial \tau_{yx} / \partial y + \partial \tau_{zx} / \partial z) dx dy dz.$$

Проекції масових сил, віднесених до одиниці маси, як і раніше, позначимо X, Y, Z . Тоді проекція на вісь x усіх сил

$$F_x = [X + (1/\rho) (\partial p_{xx} / \partial x + \partial \tau_{yx} / \partial y + \partial \tau_{zx} / \partial z)] \rho dx dy dz.$$

Використовуючи принцип Даламбера, отримуємо:

$$- (dv_x / dt) \rho dx dy dz + [X + (1/\rho) (\partial p_{xx} / \partial x + \partial \tau_{yx} / \partial y + \partial \tau_{zx} / \partial z)] \rho dx dy dz = 0;$$

$$dv_x / dt = X + (1/\rho) (\partial p_{xx} / \partial x + \partial \tau_{yx} / \partial y + \partial \tau_{zx} / \partial z).$$

(3.14)

Аналогічно можна отримати ще два рівняння:

$$\left. \begin{aligned} dv_y/dt &= Y + (1/\rho) (\partial \tau_{xy}/\partial x + \partial p_{yy}/\partial y + \partial \tau_{zy}/\partial z); \\ dv_z/dt &= Z + (1/\rho) (\partial \tau_{xz}/\partial x + \partial \tau_{yz}/\partial y + \partial p_{zz}/\partial z). \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

Покажемо, що із шести дотичних напруг незалежними є лише три, причому $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Складемо рівняння моментів, що діють на частину сил щодо осей, що проходять через центр частки і паралельних осям координат. Моменти масової сили та нормальних складових поверхневих сил щодо зазначених осей дорівнюють нулю. Тому при складанні рівнянь моментів необхідно враховувати тільки моменти від сил, що визначаються напругою. Наприклад, рівняння моментів щодо осі, паралельної осі z , має вигляд

$$\begin{aligned} & -\tau_{yx} dx dz dy / 2 - [\tau_{yx} + (\partial \tau_{yx} / \partial y) dy] dx dz dy / 2 + \\ & + \tau_{xy} dy dz dx / 2 + [\tau_{xy} + (\partial \tau_{xy} / \partial x) dx] dy dz dx / 2 = 0. \end{aligned}$$

Звідси, відкидаючи малі члени четвертого порядку, отримуємо $\tau_{xy} = \tau_{yx}$. Аналогічно, з рівнянь моментів щодо осей x і y маємо $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$. Система трьох рівнянь (3.14) і (3.15) містить шість напруг - три нормальні p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} і три дотичних $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{xz} = \tau_{zx}$.

Представимо нормальну напругу в наступному вигляді:

$$p_{xx} = -p + \pi_{xx}, \quad p_{yy} = -p + \pi_{yy}, \quad p_{zz} = -p + \pi_{zz}, \quad (3.16)$$

де π_{xx} , π_{yy} , π_{zz} - додаткові нормальні напруги, що залежать від в'язкості. У нев'язкому середовищі і в в'язкому середовищі, що покоїться. $\pi_{xx}, \pi_{yy}, \pi_{zz} = 0$.

Скористаємося гіпотезою пропорційності напруги відповідним швидкостям деформаційного руху. Відповідно до цієї гіпотези, дотичні напруги пропорційні швидкостям деформації скошування кута, а нормальні напруги π_{xx} , π_{yy} , π_{zz} , залежні від в'язкості, пропорційні відповідним швидкостям лінійної деформації (у разі стисканого середовища), швидкостям

лінійної та об'ємної деформації (у разі середовища, що стискається):

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xy} = \tau_{yx} &= \mu (\partial v_x / \partial y + \partial v_y / \partial x); \\ \tau_{xz} = \tau_{zx} &= \mu (\partial v_x / \partial z + \partial v_z / \partial x); \\ \tau_{yz} = \tau_{zy} &= \mu (\partial v_y / \partial z + \partial v_z / \partial y); \end{aligned} \right\} \quad (3.17)$$

$$\left. \begin{aligned} \pi_{xx} &= 2\mu \partial v_x / \partial x + \tilde{\mu} \operatorname{div} \vec{v}; \\ \pi_{yy} &= 2\mu \partial v_y / \partial y + \tilde{\mu} \operatorname{div} \vec{v}; \\ \pi_{zz} &= 2\mu \partial v_z / \partial z + \tilde{\mu} \operatorname{div} \vec{v}, \end{aligned} \right\} \quad (3.18)$$

де μ — динамічна в'язкість, а $\tilde{\mu}$ — величина, яка залежить від коефіцієнта μ .

Зокрема, із рівнянь (3.17) можна отримати відомий закон Ньютона для одномірного перебігу рідини паралельними шарами. Справді, вважаючи, що рідина рухається вздовж осі x ($v_y = v_z = 0$), з першого виразу (3.17) отримуємо $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \mu \partial v / \partial y$ або $\tau = \mu \partial v / \partial n$, тобто співвідношення (3.17) є узагальненням закону тертя Ньютона. З формул (3.18) випливає, що у випадку $\pi_{xx} \neq \pi_{yy} \neq \pi_{zz}$, тобто нормальні напруження p_{xx} , p_{yy} , p_{zz} за трьома взаємноперпендикулярними майданчиками, проведеними через точку M , різні. Прийmemo за тиск у даній

точці в'язкого середовища величину:
$$p = - (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) / 3. \quad (3.19)$$

Підставляючи в рівність (3.19) вирази (3.16) і (3.18), отримуємо, що в середовищі, що не стискається, воно виконується тотожно, так як при цьому $\operatorname{div} \vec{v} = 0$, а для його виконання в стисливому середовищі необхідно, щоб

$$2\mu + 3\tilde{\mu} = 0, \quad \tilde{\mu} = - (2/3) \mu. \quad (3.20)$$

В результаті, використовуючи (3.16), (3.18) та (3.20), маємо

$$\left. \begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \partial v_x / \partial x - (2/3) \mu \operatorname{div} \vec{v}; \\ p_{yy} &= -p + 2\mu \partial v_y / \partial y - (2/3) \mu \operatorname{div} \vec{v}; \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \partial v_z / \partial z - (2/3) \mu \operatorname{div} \vec{v}. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

Підставимо вирази (3.21) та (3.17) у рівняння (3.14) та (3.15) та подаємо в них проєкції повного прискорення dv_x/dt , dv_y/dt , dv_z/dt у розгорнутому вигляді:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z},$$

$$\frac{dv_y}{dt} = \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z},$$

$$\frac{dv_z}{dt} = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Тоді отримуємо рівняння руху в'язкого середовища

$$\left. \begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) &= \rho X - \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \bar{v} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \right]; \\ \rho \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) &= \rho Y - \frac{\partial p}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \bar{v} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \right. \right. \\ &+ \left. \left. \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right]; \\ \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) &= \rho Z - \frac{\partial p}{\partial z} + \\ &+ \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(2 \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \operatorname{div} \bar{v} \right) \right] + \\ &+ \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (3.22)$$

Диференціальні рівняння (3.22) називаються рівняннями Нав'є – Стокса.

У цих рівняннях шість невідомих величин: v_x , v_y , v_z , p , ρ , T . Динамічна в'язкість залежить від температури. У рівняннях (3.22) закон зміни μ залежно від температури вважається відомим. Уявімо рівняння (3.22), припускаючи, що

коефіцієнт в'язкості є постійною величиною ($\mu = \text{const}$), у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ &+ \nu \Delta v_x + \frac{\nu}{3} \frac{\partial (\text{div } \vec{v})}{\partial x}; \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \\ &+ \nu \Delta v_y + \frac{\nu}{3} \frac{\partial (\text{div } \vec{v})}{\partial y}; \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \\ &+ \nu \Delta v_z + \frac{\nu}{3} \frac{\partial (\text{div } \vec{v})}{\partial z}, \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

де $\nu = \mu/\rho$ — кінематична в'язкість.

У векторній формі рівняння (3.23) мають вигляд

$$d\vec{v}/dt = \vec{f} - (1/\rho) \text{grad } p + \nu \Delta \vec{v} + (\nu/3) \text{grad } (\text{div } \vec{v}). \quad (3.24)$$

Тут Δ - оператор Лапласа.

У декартових координатах

$$\Delta \vec{v} = \partial^2 \vec{v} / \partial x^2 + \partial^2 \vec{v} / \partial y^2 + \partial^2 \vec{v} / \partial z^2.$$

Рівняння (3.24) порівняно з рівняннями Ейлера (3.13) мають два додаткові члени: перший з них враховує вплив в'язкості в середовищі, що не стискається, коли $\text{div } \vec{v} = 0$, а другий - додатковий вплив в'язкості з урахуванням стисливості (тобто при $\text{div } \vec{v} \neq 0$).

3.5. РІВНЯННЯ ЕНЕРГІЙ ДЛЯ В'ЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВІДНОГО ГАЗУ

Виведемо рівняння енергії для частки газу у вигляді прямокутного паралелепіпеда з масою $\rho dx dy dz$. Відповідно до закону збереження енергії, зміна повної енергії частки дорівнює сумі роботи всіх сил, прикладених до

частки, і кількості теплоти, що підводиться ззовні, внаслідок теплопровідності.

Приріст енергії частки за час dt

$$\rho dx dy dz d(u + v^2)/dt,$$

де u — внутрішня енергія частки, віднесена до одиниці маси ($u = c_p T$).

Складемо вираз для роботи зовнішніх сил, що діють на частинку. Робота масових сил під час переміщення частки за час dt

$$\rho (X v_x + Y v_y + Z v_z) dx dy dz dt.$$

Робота поверхневих сил, що діють у напрямку осі x ,

$$[\partial(p_{xx} v_x)/\partial x + \partial(\tau_{yx} v_x)/\partial y + \partial(\tau_{zx} v_x)/\partial z] dx dy dz dt.$$

Аналогічно представимо вирази роботи сил, що діють у напрямку осей y і z :

$$[\partial(\tau_{xy} v_y)/\partial x + \partial(p_{yy} v_y)/\partial y + \partial(\tau_{zy} v_y)/\partial z] dx dy dz dt;$$

$$[\partial(\tau_{xz} v_z)/\partial x + \partial(\tau_{yz} v_z)/\partial y + \partial(p_{zz} v_z)/\partial z] dx dy dz dt.$$

У цих виразах нормальні напруження рівні $p_{xx} = -p + \pi_{xx}$, $p_{yy} = -p + \pi_{yy}$, $p_{zz} = -p + \pi_{zz}$.

Визначимо приплив енергії внаслідок теплопровідності газу. Позначимо $q_x dy dz dt$ кількість теплоти, яке за час dt протікає через ліву грань паралелепіпеда. Тоді кількість теплоти, що втікає за час dt через ліву та праву межі(грані) частки,

$$q_x dy dz dt - [q_x + (\partial q_x / \partial x) dx] dy dz dt = - (\partial q_x / \partial x) dx dy dz dt.$$

де, згідно із законом Фур'є, $q_x = -\lambda \partial T / \partial x$, $q_y = -\lambda \partial T / \partial y$, $q_z = -\lambda \partial T / \partial z$; λ — теплопровідність, Вт/(м · К).

Прирівнюючи зміну енергії частки за час dt сумі роботи всіх сил та припливу теплоти через усі межі паралелепіпеда, після деяких спрощень отримуємо рівняння енергії для в'язкого теплопровідного газу:

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} \left(c_v T + \frac{v^2}{2} \right) = & \rho (Xv_x + Yv_y + Zv_z) - \left[\frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial x} (\pi_{xx}v_x + \tau_{xy}v_y + \tau_{xz}v_z) + \frac{\partial}{\partial y} (\tau_{yx}v_x + \pi_{yy}v_y + \\ & + \tau_{yz}v_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\tau_{zx}v_x + \tau_{zy}v_y + \pi_{zz}v_z) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right). \end{aligned} \quad (3.25)$$

Перетворимо рівняння (3.25). Для цього помножимо рівняння (3.14) та (3.15) відповідно на v_x , v_y , v_z ; складемо їх та отримане рівняння віднімемо з рівняння (3.25). Тоді

$$\begin{aligned} \rho \frac{d}{dt} (c_v T) = & -p \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \left(\pi_{xx} \frac{\partial v_x}{\partial x} + \pi_{yy} \frac{\partial v_y}{\partial y} + \right. \\ & + \pi_{zz} \frac{\partial v_z}{\partial z} \left. \right) + \tau_{xy} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) + \tau_{xz} \left(\frac{\partial v_z}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) + \\ & + \tau_{yz} \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right). \end{aligned}$$

Використовуючи рівняння нерозривності (3.3) та рівняння стану ідеального газу $p = R\rho T$, отримуємо

$$-p \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{p}{\rho} \frac{d\rho}{dt} = \frac{dp}{dt} - R\rho \frac{dT}{dt}.$$

Врахуємо, що $c_p - c_v = R$. Крім того,

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) = \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T);$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = \operatorname{div} \bar{v}.$$

Тоді, підставляючи замість дотичних та нормальних напруг $\tau_{xy}, \tau_{xz}, \dots, \pi_{xx}, \pi_{yy}, \pi_{zz}$, вирази з формул (3.17) та (3.18) і припускаючи, що $c_p = \text{const}$, маємо

$$\begin{aligned} \rho c_p \frac{dT}{dt} = \frac{dp}{dt} + \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + \mu \left\{ 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \right. \\ \left. + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \bar{v})^2 \right\}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

У рівнянні (3.26) члени правої частини, укладені у фігурні дужки, є теплою, що підводиться до одиниці обсягу в одиницю часу внаслідок тертя. Ці члени називаються членами розсіювання чи дисипації енергії, а функція

$$\begin{aligned} \Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 + \\ + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right)^2 - \frac{2}{3} (\operatorname{div} \bar{v})^2 \end{aligned} \quad (3.27)$$

називається дисипативною функцією.

Ввівши функцію Φ , рівняння (3.26) можна подати у вигляді

$$\rho c_p dT/dt = dp/dt + \operatorname{div} (\lambda \operatorname{grad} T) + \mu \Phi. \quad (3.28)$$

Ліва частина рівняння (3.28) є сумарною кількістю теплоти, що підводиться до одиниці об'єму газу в одиницю часу. Воно складається з кількості теплоти, що підводиться до частки внаслідок теплопровідності $\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad} T)$, роботи сил тиску dp/dt та сил тертя $\mu \Phi$.

З рівняння (3.25) легко отримати рівняння енергії для невязкого та нетеплопровідного газу (без урахування масових сил):

$$\rho(d/dt)(c_v T + v^2/2) = - [\partial(pv_x)/\partial x + \partial(pv_y)/\partial y + \partial(pv_z)/\partial z]. \quad (3.29)$$

Перетворимо рівняння (3.29) стосовно до встановленого руху. В цьому випадку

$$\partial(pv_x)/\partial x + \partial(pv_y)/\partial y + \partial(pv_z)/\partial z = dpldt + p \operatorname{div} \vec{v} \quad (3.30)$$

$$\text{Тут } p \operatorname{div} \vec{v} = -dp/dt + R\rho dT/dt.$$

Підставляючи вирази (3.30) до рівнянь (3.29), маємо $(d/dt)(v^2/2 + c_v T) = -RT/dt$.

Звідси

$$(d/dt)(v^2/2 + c_p T) = 0 \text{ або } (d/dt)(v^2/2 + i) = 0, \quad (3.31)$$

де $i = c_p T = [k/(k-1)]RT = [k/(k-1)]p/\rho$ — ентальпія газу [см. (1.12)].

У разі одномірної течії, що встановилася, це рівняння можна представити у вигляді

$$v^2/2 + i = \text{const}. \quad (3.32)$$

3.6. ПОВНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ СУСПІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА.

ПОЧАТКОВІ І ГРАНИЧНІ УМОВИ

Розглянемо систему рівнянь невязкого газу. У цьому випадку для несжимаемого середовища невідомими величинами є три складові швидкості v_x , v_y , v_z і тиск p , а повна система рівнянь складається з рівнянь Ейлера і рівняння нерозривності:

$$d\vec{v}/dt = \vec{f} - (1/\rho) \operatorname{grad} p, \operatorname{div} \vec{v} = 0. \quad (3.33)$$

З урахуванням стисливості повна система рівнянь повинна включати шість незалежних рівнянь для визначення шести невідомих величин — складових швидкості v_x , v_y , v_z , тиска p , щільності ρ та температури T . До них відносяться рівняння руху, нерозривності і рівняння стану газу. Як шосте

рівняння необхідно скласти рівняння термодинамічного процесу. Для ізентропічних течій $s = c_v \ln p / \rho^k = \text{const}$ залежність між тиском та щільністю описується рівнянням $p / \rho^k = \text{const}$. У диференціальній формі це рівняння стосовно руху газу має вигляд

$$\begin{aligned} (d/dt) p / \rho^k &= 0; \\ (\partial/\partial t) p / \rho^k + v_x (\partial/\partial x) p / \rho^k + v_y (\partial/\partial y) p / \rho^k + v_z (\partial/\partial z) p / \rho^k &= 0 \end{aligned}$$

або

$$(\partial/\partial t) p / \rho^k + \vec{v} \text{grad} (p / \rho^k) = 0. \quad (3.34)$$

Використовуючи рівняння (3.34), отримуємо повну систему рівнянь для невязкого газу, що стискається:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{f} - (1/\rho) \text{grad} p, \quad \partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0, \\ p &= R\rho T, \quad (\partial/\partial t) (p/\rho^k) + \vec{v} \text{grad} (p/\rho^k) = 0. \end{aligned} \quad (3.35)$$

У разі в'язкого несжимаемого середовища повна система рівнянь складається з рівняння Нав'є - Стокса і рівняння

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{f} - (1/\rho) \text{grad} p + \nu \Delta \vec{v}, \quad \text{div} \vec{v} = 0. \quad (3.36)$$

Тут невідомими є складові швидкості та тиск.

У загальному випадку в'язкого середовища, що стискається, необхідно використовувати рівняння руху в'язкого стисливого газу (3.22), рівняння нерозривності (3.4), рівняння енергії для в'язкого теплопровідного газу (3.28) і рівняння стану газу (1.1).

Рішення системи рівнянь повинні задовольняти початковим і граничним умовам. Початкові умови необхідні при вирішенні задачі для руху, що не встановився, і визначають значення шуканих функцій в певний заданий момент часу.

Граничні умови задаються при розв'язанні завдання як встановленого, так і руху газу, що не встановився, і повинні виконуватися в кожний момент часу. У незбуреному потоці $\vec{v} = \vec{v}_\infty$, $p = p_\infty$, $\rho = \rho_\infty$, $T = T_\infty$.

Під час розгляду задачі обтікання тіла потоком невязкого газу має виконуватися умова безвідривності обтікання (умова непротікання). Оскільки вектор швидкості потоку спрямований по дотичній до поверхні, то нормальна складова швидкості у кожній точці поверхні дорівнює нулю: $(v_n)_S = 0$. Якщо поверхня задана рівнянням $f(x, y, z) = 0$, то напрямок нормалі до поверхні в будь-якій точці збігається з напрямком вектора:

$$\text{grad } f = \vec{i} \partial f / \partial x + \vec{j} \partial f / \partial y + \vec{k} \partial f / \partial z.$$

На підставі умови безвідривності обтікання вектори швидкості $\vec{v}$ і $\text{grad } f$ у кожній точці поверхні повинні бути ортогональними, тобто скалярний добуток цих векторів повинен дорівнювати нулю. Тоді умову безвідривності обтікання $(v_n)_S = 0$ можна подати у такому вигляді: $(\vec{v} \text{grad } f) = 0$, або

$$v_x \partial f / \partial x + v_y \partial f / \partial y + v_z \partial f / \partial z = 0. \quad (3.37)$$

Отже, у разі невязкого газу необхідно задати значення $v_x, v_y, v_z, p, \rho, T$ на нескінченності, а на поверхні визначається одна умова — рівність нулю лінійної комбінації v_x, v_y, v_z зі змінними коефіцієнтами (3.37).

При дослідженні обтікання тіла потоком вязкого газу поверхні тіла виконуються граничні умови прилипання вязкої середовища до поверхні, тобто умова рівності нулю швидкості потоку $(v_n)_S = 0$.

Крім того, на поверхні необхідно встановити граничні умови для температури газу. Залежно від розв'язуваного завдання ці умови можуть бути сформульовані по-різному: а) задана температура поверхні тіла $(T)_S = T_{\text{ст}}$; б) у кожній точці поверхні та у будь-який момент часу може бути заданий питомий тепловий потік q . Оскільки питомий тепловий потік, здійснюваний за допомогою теплопровідності, згідно із законом Фур'є, можна подати у вигляді $q = -\lambda \partial T / \partial n$, то в цьому випадку гранична умова еквівалентно заданим

значенням похідної температури нормалі до поверхні тіла, $\partial T/\partial n$. У разі теплоізолюваної стінки $\partial T/\partial n = 0$; в) заданий зв'язок між невідомими значеннями $T_{\text{ст}}$ и $(\partial T/\partial n)_s$:

$$\alpha(T_{\text{ст}} - T_r) = -\lambda \partial T/\partial n, \quad (3.38)$$

де α — коефіцієнт тепловіддачі, Вт/(м²·К); T_r — температура відновлення, К.

При малих швидкостях значення T_r близько до T_∞ , а при великих швидкостях руху газу воно може бути значно вищим (див. 12).

Слід зазначити, що у разі в'язкого газу повна система диференціальних рівнянь має перший порядок щодо тиску та щільності та другий порядок щодо складових швидкості та температури. Тому визначення тиску і щільності як і досить задати одне умова (на нескінченності), а знаходження v_x, v_y, v_z і T необхідні дві умови — на нескінченності і поверхні тіла.

3.7. ІНТЕГРАЛИ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ РУХУ НЕВ'ЯЗКОГО ГАЗУ

Інтеграли диференціальних рівнянь (3.12') можуть бути отримані у двох окремих випадках — для потенційної течії (рівняння Лагранжа) і для руху (рівняння Бернуллі).

Рівняння Лагранжа. Розглянемо випадок потенційного руху газу, що не встановився. При цьому $\omega = \text{rot} \vec{v}/2 = 0$, $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$. Отсюда $\partial v_y/\partial z = \partial v_z/\partial y$, $\partial v_x/\partial z = \partial v_y/\partial x$, $\partial v_y/\partial x = \partial v_x/\partial y$.

Перетворимо ліві частини рівнянь (3.12'). Використовуючи умову потенційності течії, отримуємо:

$$\begin{aligned} \partial v_x/\partial t &= (\partial/\partial t)(\partial\phi/\partial x) = (\partial/\partial x)(\partial\phi/\partial t); \quad v_y \partial v_x/\partial y = v_y \partial v_y/\partial x = \\ &= (\partial/\partial x)(v_y^2/2); \quad v_z \partial v_x/\partial z = v_z \partial v_z/\partial x = (\partial/\partial x)(v_z^2/2). \end{aligned}$$

Тоді

$$dv_x/dt = (\partial/\partial x)(\partial\phi/\partial t + v^2/2), \quad (3.39a)$$

де $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$.

Аналогічно,

$$dv_y/dt = (\partial/\partial y)(\partial\phi/\partial t + v^2/2); \quad dv_z/dt = (\partial/\partial z)(\partial\phi/\partial t + v^2/2). \quad (3.39b)$$

Для того, щоб перетворити праві частини рівнянь (3.12'), введемо функцію тиску P , що визначається зі співвідношення $dp/\rho = dP$ або $\int dp/\rho = P$. Тоді

$$(1/\rho) \partial p/\partial x = \partial P/\partial x; \quad (1/\rho) \partial p/\partial y = \partial P/\partial y; \quad (1/\rho) \partial p/\partial z = \partial P/\partial z. \quad (3.40)$$

Якщо відома однозначна залежність між тиском і густиною $\rho(\rho)$, функцію тиску визначити легко.

Крім того, прийнемо, що масові сили мають потенціал. Визначимо потенціал одиничної масової сили U . При цьому

$$X = \partial U/\partial x, \quad Y = \partial U/\partial y, \quad Z = \partial U/\partial z. \quad (3.41)$$

Для сили тяжіння $U = -gy$.

Підставляючи вирази (3.39) - (3.41) в систему рівнянь (3.12') отримуємо:

$$\begin{aligned} (\partial/\partial x) \left(\partial\phi/\partial t + v^2/2 + \int dp/\rho - U \right) &= 0; \quad (\partial/\partial y) \left(\partial\phi/\partial t + v^2/2 + \right. \\ &\left. + \int dp/\rho - U \right) = 0; \quad (\partial/\partial z) \left(\partial\phi/\partial t + v^2/2 + \int dp/\rho - U \right) = 0. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що вираз $\partial\phi/\partial t + v^2/2 + \int dp/\rho$ не залежить від координат, тобто має однакові значення для будь-яких точок потенційного потоку. У разі руху, що не встановився, воно є функцією тільки часу:

$$\partial\phi/\partial t + v^2/2 + \int dp/\rho - U = C(t). \quad (3.42)$$

Рівняння (3.42) називається рівнянням Лагранжа.

У разі встановленого потенційного перебігу $\partial\varphi/\partial t = 0$ величина C не залежить від часу. Тоді інтеграл (3.42) набуде вигляду

$$v^2/2 + \int dp/\rho - U = \text{const.} \quad (3.43)$$

Інтеграл (3.43) називається рівнянням Лагранжа - Бернуллі.

Рівняння Бернуллі. Розглянемо рух газу, що встановився. При цьому $\partial v_x/\partial t = \partial v_y/\partial t = \partial v_z/\partial t = 0$, $p = p(x, y, z)$. Перетворимо ліву частину першого рівняння системи рівнянь (3.12):

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_x^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{v_y^2}{2} \right) + \\ &+ v_y \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v_z^2}{2} \right) + v_z \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right); \\ \frac{dv_x}{dt} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2} \right) + 2(v_z \omega_y - v_y \omega_z), \end{aligned}$$

де вираз $(v_z \omega_y - v_y \omega_z)$ — проекція вектора $[\vec{\omega} \vec{v}]$ на напрям осі x .

Тоді

$$\partial v_x / \partial t = (\partial/\partial x) (v^2/2) + 2 [\vec{\omega} \vec{v}]_x. \quad (3.44)$$

Аналогічно для похідних dv_y/dt и dv_z/dt

$$dv_y/dt = (\partial/\partial y) (v^2/2) + [\vec{\omega} \vec{v}]_y; \quad dv_z/dt = (\partial/\partial z) (v^2/2) + [\vec{\omega} \vec{v}]_z. \quad (3.45)$$

Тут $[\vec{\omega} \vec{v}]_x$, $[\vec{\omega} \vec{v}]_y$, $[\vec{\omega} \vec{v}]_z$ — проекція вектора $[\vec{\omega} \vec{v}]$ по осям координат.

Підставимо вирази (3.44) та (3.45) у рівняння (3.12). Крім того, введемо функцію тиску (3.40) та потенціал одиничної масової сили U (3.41).

Тоді

$$\begin{aligned}
(\partial/\partial x) \left(v^2/2 + \int dp/\rho - U \right) &= -2 [\vec{\omega} \vec{v}]_x; \quad (\partial/\partial y) \left(v^2/2 + \right. \\
&+ \left. \int dp/\rho - U \right) = -2 [\vec{\omega} \vec{v}]_y; \quad (\partial/\partial z) \left(v^2/2 + \int dp/\rho - U \right) = \\
&= -2 [\vec{\omega} \vec{v}]_z.
\end{aligned}$$

Помножимо перше рівняння на dx , друге - на dy , третє - на dz і почленно складемо. В результаті для руху, що встановився

$$d \left(v^2/2 + \int dp/\rho - U \right) = -2 ([\vec{\omega} \vec{v}] d\vec{s}),$$

де $d\vec{s}$ — вектор елементарної дуги з проекції dx , dy , dz .

Скалярне множення $([\vec{\omega} \vec{v}] d\vec{s}) = 0$ вздовж лінії струму і вздовж вихрової лінії, тому що вектори $[\vec{\omega} \vec{v}]$ та $d\vec{s}$ перпендикулярні. Таким чином, вздовж ліній струму та вихрових ліній

$$d(v^2/2 + \int dp/\rho - U) = 0; \quad d(v^2/2 + \int dp/\rho - U) = \text{const}, \quad (3.46)$$

де значення постійної різне для різних ліній струму і вихрових ліній.

Рівняння (3.46) називається рівнянням чи інтегралом Бернуллі. Це рівняння має фундаментальне значення теорії руху невязких рідин і газів і є теоретичною основою для практичних розрахунків.

Розглянемо рівняння Бернуллі для різних окремих випадків руху рідини та газу. Для несжимаемого середовища ($\rho = \text{const}$) функція тиску дорівнює $P = p/\rho$. Прийmemo $U = -gy$. Тоді рівняння (3.46) набуде вигляду

$$v^2/2 + p/\rho + gy = \text{const}. \quad (3.47)$$

Якщо знехтувати масовими силами, то (3.47) набуде вигляду

$$p + \rho v^2/2 = \text{const}. \quad (3.48)$$

З рівняння (3.48) випливає, що при русі несжимаемого середовища повний тиск, що дорівнює $p + \rho v^2/2$, вздовж лінії струму чи вихрової лінії залишається незмінним.

Для газу, що стискається без урахування масових сил

$$v^2/2 + \int dp/\rho = \text{const.} \quad (3.49)$$

Припустимо, що перебіг газу є ізентропічним. Тоді $p/\rho^k = C$. Звідси

$$dp = Ck\rho^{k-1} d\rho \text{ и } dp/\rho = Ck\rho^{k-2} d\rho, \quad \int dp/\rho = C[k/(k-1)] \rho^{k-1} = [k/(k-1)]p/\rho.$$

Підставляючи вираз інтеграла (3.49), отримуємо:

$$v^2/2 + [k/(k-1)] p/\rho = \text{const}; \quad (3.50)$$

$$v^2/2 + [k/(k-1)] RT = \text{const.} \quad (3.51)$$

Враховуючи що $[k/(k-1)]p/\rho = [k/(k-1)]RT = i$, маємо

$$v^2/2 + i = \text{const.} \quad (3.52)$$

Рівняння Бернуллі у формі (3.52) збігається з рівнянням енергії для нев'язкого та нетеплопровідного газу (3.32).

З'ясуємо, якою є помилка у визначенні тиску при використанні рівняння Бернуллі (3.48), отриманого без урахування стисливості. Припустимо, що потік повітря обтікає якесь тіло. Нехай на досить великій відстані від тіла швидкість потоку v_∞ , і тиск p_∞ . У критичній точці на поверхні швидкість дорівнює нулю, а тиск дорівнює тиску гальмування p_0 . Використовуємо рівняння Бернуллі для середовища, що не стискається (3.48). Постійну C визначимо з умов на нескінченності:

$$C = p_\infty + \rho v_\infty^2/2.$$

Підставляючи знайдене значення рівняння (3.48), знаходимо

$$p = p_{\infty} + \rho v_{\infty}^2/2 - \rho v^2/2.$$

Для визначення тиску в критичній точці покладемо $v = 0$. В результаті

$$p_0 = p_{\infty} + \rho v_{\infty}^2/2. \quad (3.53)$$

Визначимо тепер тиск у критичній точці з урахуванням стисливості. Для цього знайдемо постійну C у рівнянні (3.50) із умов на нескінченності:

$$C = [k/(k - 1)] p_{\infty} / \rho_{\infty} + v_{\infty}^2/2.$$

Підставляючи знайдене значення C рівняння (3.50) і використовуючи вираз $p/\rho^k = p_{\infty}/\rho_{\infty}^k$, отримуємо

$$[k/(k - 1)] (p_{\infty}/\rho_{\infty})(p/p_{\infty})^{(k-1)/k} + v^2/2 = [k/(k - 1)] p_{\infty}/\rho_{\infty} + v_{\infty}^2/2.$$

Поклавши у цьому рівнянні $v = 0$, що відповідає критичній точці, матимемо

$$[k/(k - 1)] (p_{\infty}/\rho_{\infty})(p/p_{\infty})^{(k-1)/k} = [k/(k - 1)] p_{\infty}/\rho_{\infty} + v_{\infty}^2/2.$$

або, враховуючи, що $k p_{\infty}/\rho_{\infty} = a_{\infty}^2$, $v_{\infty}/a_{\infty} = M_{\infty}$, після нескладних перетворень отримуємо

$$p_0/p_{\infty} = (1 + [(k - 1)/2] M_{\infty}^2)^{(k-1)/k}. \quad (3.54)$$

Формулу (3.54) можна використовувати для визначення тиску в критичній точці p_0 з урахуванням стисливості.

Оскільки впливом стисливості потоку можна знехтувати тільки за малих значень числа M_∞ , то, щоб з'ясувати межі застосування формули (3.53), отриманої без урахування стисливості, у формулі (3.54) приймемо $M_\infty \ll 1$. При цій умові розкладемо праву частину вирази (3.54) у ряд за ступенями $[(k - 1)/2] M_\infty^2 \ll 1$ за формулою бінома Ньютона:

$$\frac{p_0}{p_\infty} = 1 + \frac{k}{k-1} \frac{k-1}{2} M_\infty^2 + \frac{1}{2} \frac{k}{k-1} \left(\frac{k}{k-1} - 1 \right) \left(\frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right)^2 + \\ + \frac{1}{6} \frac{k}{k-1} \left(\frac{k}{k-1} - 1 \right) \left(\frac{k}{k-1} - 2 \right) \left(\frac{k-1}{2} M_\infty^2 \right)^3 + \dots,$$

або

$$p_0/p_\infty = 1 + (k/2) M_\infty^2 (1 + M_\infty^2/4 + [(2-k)/24] M_\infty^4 + \dots).$$

Звідси, враховуючи, що $(k/2)p_\infty M_\infty^2 = \rho_\infty v_\infty^2/2$, маємо

$$p_0 = p_\infty + \rho_\infty v_\infty^2/2 (1 + M_\infty^2/4 + [(2-k)/24] M_\infty^4 + \dots).$$

Представимо цей вираз у вигляді

$$p_0 = p_\infty + [(\rho_\infty v_\infty^2)/2] (1 + \varepsilon_p), \quad (3.55)$$

де

$$\varepsilon_p = 1 + M_\infty^2/4 + [(2-k)/24] M_\infty^4 + \dots \quad (3.56)$$

Порівнюючи формули (3.55) і (3.53), зауважуємо, що величина ε_p у формулі (3.55) є похибкою, віднесеною до швидкісного натиску при визначенні тиску в критичній точці без урахування стисливості. Величину ε_p можна трактувати також як відносну поправку, що враховує вплив стисливості. З формули (3.56) випливає, що величина ε_p залежить від числа M_∞ .

Нижче наведено значення ε_p залежно від M_∞ при $k = 1,4$:

$M_\infty \dots 0,1 \quad 0,2 \quad 0,3 \quad 0,4 \quad 0,5 \quad 0,6$

ε_p 0,25 1,0 2,25 4,0 62 90

Звідси випливає, що, припускаючись помилки не більше 2%, при визначенні тиску p_0 можна користуватися рівнянням Бернуллі, отриманим без урахування стисливості повітря при $M < 0,3$. При високих швидкостях ($M > 0,3$) помилка у визначенні p_0 зростає.

3.8. АЕРОДИНАМІЧНА ПОДІБНІСТЬ

Методи теорії подібності використовуються як при теоретичних, так і при експериментальних дослідженнях аеродинамічних характеристик літальних апаратів та їх елементів. Важливе значення теорія подоби має експериментальної аеродинаміці. Вона дозволяє встановити вимоги до моделей, умов проведення експерименту в аеродинамічних трубах і до обробки результатів випробувань моделей, які забезпечують можливість перенесення даних експерименту на натурні об'єкти.

Поняття про подібність потоків. Розглянемо два потоки, що обтікають натурний об'єкт та його модель. Назвемо подібними такі точки цих потоків, які геометрично подібно розташовані щодо тіл, що розглядаються, тобто координати таких точок задовольняють умові $x_2 = K_x x_1$, $y_2 = K_y y_1$, $z_2 = K_z z_1$ де K_l - лінійний масштаб. Аналогічно можна запровадити поняття про подібні моменти часу: $t_2 = K_t t_1$. Тут K_t - масштаб часу.

Два потоки називаються подібними, якщо всі фізичні величини для будь-яких подібних точок і в будь-які подібні моменти часу пропорційні один одному, тобто два подібні потоки в подібних просторово-часових точках різняться між собою лише масштабами характерних величин. Подібність потоків передбачає наявність геометричної, кінематичної та динамічної подоби. Кінематичне подібність означає, що у подібних точках геометрично подібних потоків у подібні моменти часу відношення швидкостей $v_2/v_1 = K_v$ однаково. Тут $K_v = K_l K_t^{-1}$ - масштаб швидкості. При геометричному та

кінематичному подоби відношення прискорень руху у подібних точках $K_w = w_2/w_1 = K_l K_t^{-2}$ також однаково.

Потоки називаються динамічно подібними, якщо сили, що діють на їх подібні елементи у подібні моменти часу, пропорційні, тобто при цьому має дотримуватися подібність сил - інерційної сили, сил тиску, в'язкості та масової сили відповідно.

Критерії подібності. Розглянемо умови динамічної подібності при обтіканні тіл потоком в'язкого газу, що стискається. Для цього складемо систему рівнянь - рівняння Нав'є - Стокса, нерозривності, рівняння енергії та стану газу, а також відповідні граничні та початкові умови у безрозмірній формі. При цьому рахуватимемо $\mu = \text{const}$, $\lambda = \text{const}$, $c_p = \text{const}$.

Прийmemo за характерну довжину певний лінійний розмір (наприклад, хорду крила чи довжину корпусу). Інші характерні величини — їх значення в непорушеному потоці: швидкість v_∞ , тиск p_∞ , щільність ρ_∞ , температура T_∞ , ентальпія i_∞ , кінематична в'язкість ν_∞ ; характерний час процесу $t_\infty = l/v_\infty$.

Введемо такі безрозмірні величини: $x' = x/l$, $y' = y/l$, $z' = z/l$, $t' = t/t_\infty$, $\vec{v}' = \vec{v}/v_\infty$, $p' = p/p_\infty$, $\rho' = \rho/\rho_\infty$. $T' = T/T_\infty$, $v' = v/v_\infty$, $\vec{f}' = \vec{f}/g$. Тут $\vec{f}$ - вектор одиничної масової сили.

Перетворимо спочатку рівняння Нав'є - Стокса (3.24) та рівняння нерозривності (3.4). Виражаючи в них усі розмірні величини через безрозмірні, отримуємо:

$$\begin{aligned} \frac{v_\infty}{t_\infty} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + \frac{v_\infty^2}{l} \left(v'_x \frac{\partial \vec{v}'}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial \vec{v}'}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial \vec{v}'}{\partial z'} \right) = g \vec{f}' - \\ - \frac{p_\infty}{\rho_\infty l} \frac{1}{\rho'} \text{grad}' p' + \frac{\nu_\infty v_\infty}{l^2} \left[\nu' \Delta' \vec{v}' + (\nu'/3) \text{grad}' (\text{div}' \vec{v}') \right]; \end{aligned} \quad (3.57)$$

$$\frac{\rho_\infty}{t_\infty} \frac{\partial \rho'}{\partial t'} + \frac{\rho_\infty v_\infty}{l} \text{div}' (\rho' \vec{v}') = 0. \quad (3.58)$$

Тут символи div' , grad' , Δ' означають, що диференціювання проводиться у безрозмірних координатах.

Рівняння (3.57) та (3.58) є розмірними. Однак у них розмірні величини представлені як коефіцієнти з однаковими розмірностями. У рівнянні (3.57) такими розмірними множниками є v_∞^2/l , $p_\infty/(\rho_\infty l)$, $v_\infty v_\infty^2/l$, v_∞/t_∞ , $g(m/c^2)$, а в рівнянні (3.58) - ρ_∞/t_∞ , $\rho_\infty v_\infty/l$ [кг/(м³·с)].

Поділивши на будь-який із зазначених розмірних множників, отримаємо рівняння у безрозмірній формі. Щоб отримати прийняті критерії подібності, розділимо обидві частини рівняння (3.57) на величину v_∞^2/l , а рівняння нерозривності (3.58) - на $\rho_\infty v_\infty/l$. Тоді

$$\frac{l}{v_\infty t_\infty} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + v'_x \frac{\partial \vec{v}'}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial \vec{v}'}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial \vec{v}'}{\partial z'} = \frac{gl}{v_\infty^2} \vec{f}' -$$

$$- \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \frac{1}{v_\infty^2} \frac{1}{\rho'} \text{grad}' p' + \frac{v_\infty}{v_\infty l} \left[v' \Delta' \vec{v}' + \frac{v'}{3} \text{grad}' (\text{div}' \vec{v}') \right]; \quad (3.59)$$

$$l/(v_\infty t_\infty) \partial \rho' / \partial t' + \text{div}' (\rho' \vec{v}') = 0. \quad (3.60)$$

Тут $p_\infty/\rho_\infty = a^2/k$ и $(p_\infty/\rho_\infty)(1/v_\infty^2) = 1/(kM_\infty^2)$.

У цих рівняннях міститься ряд безрозмірних параметрів, складених із розмірних величин: $v_\infty l/v_\infty = \mathbf{Re}$ — число Рейнольдса; $v_\infty/a_\infty = \mathbf{M}_\infty$ — число Маха; $v_\infty^2/gl = \mathbf{Fr}$ — число Фруда; $v_\infty t_\infty/l = \mathbf{Sh}$ — число Струхаля.

Число $\mathbf{Re}$ дорівнює відношенню розмірних величин v_∞^2/l , і $v_\infty v_\infty/l^2$, характеризують відповідно інерційні сили та сили в'язкості, і є критерієм в'язкості. Якщо для двох геометрично подібних потоків числа $\mathbf{Re}$ однакові ($\mathbf{Re} = \text{idem}$), то в них однаково проявляється вплив в'язкості.

Число $\mathbf{M}$ — критерій стисливості та характеризує відношення інерційної сили до сили тиску. Якщо двох геометрично подібних потоків однакові числа $\mathbf{M}$ ($\mathbf{M} = \text{idem}$), то в них вплив стисливості проявляється однаково.

Число $\mathbf{Fr}$ визначає відношення інерційної сили до тяжкості і є критерієм подібності, що враховує вплив сили тяжіння газу. У завданнях аеродинаміки в

більшості випадків число **Fr** не має суттєвого значення, оскільки, як правило, вплив ваги повітря в цих завданнях можна знехтувати.

Число **Sh** характеризує відношення конвективного прискорення руху частки до локального прискорення та враховує нестационарність руху.

Використовуючи безрозмірні числа **Re**, **M**, **Fr**, **Sh**, рівняння (3.59) та (3.60) представимо у наступному вигляді:

$$\frac{1}{Sh} \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t'} + v_x \frac{\partial \vec{v}'}{\partial x'} + v_y' \frac{\partial \vec{v}'}{\partial y'} + v_z' \frac{\partial \vec{v}'}{\partial z'} = \frac{1}{Fr} \vec{f}' - \frac{1}{kM_\infty^2} \frac{1}{\rho'} \text{grad}' p' + \frac{1}{Re} [v' \Delta' \vec{v}' + (v'/3) \text{grad}' (\text{div}' \vec{v}')]; \quad (3.61)$$

$$(1/Sh) \partial \rho' / \partial t' + \text{div}' (\rho' \vec{v}') = 0. \quad (3.62)$$

Аналогічно, у безрозмірному вигляді можна уявити рівняння енергії (3.28), замінюючи в ньому повну похідну виразом

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{\partial T}{\partial t} + v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} + v_z \frac{\partial T}{\partial z}; \\ \rho_\infty c_p \frac{T_\infty}{t_\infty} \rho' \frac{\partial T'}{\partial t'} + \rho_\infty c_p T_\infty \frac{v_\infty}{l} \rho' \left(v_x' \frac{\partial T'}{\partial x'} + v_y' \frac{\partial T'}{\partial y'} + v_z' \frac{\partial T'}{\partial z'} \right) &= \\ &= \frac{\rho_\infty}{t_\infty} \frac{dp'}{dt'} + \lambda \frac{T_\infty}{l^2} \text{div}' (\text{grad}' T') + \frac{\mu v_\infty^2}{l^2} \Phi', \end{aligned}$$

де Φ' — дисипативна функція, яка визначається за формулою (3.27), в якій розмірні величини складових швидкості та координат замінені відповідними безрозмірними параметрами.

Розділимо всі члени рівняння на величину $\rho_\infty c_p T_\infty v_\infty / l$. Крім того, врахуємо, що на підставі рівняння стану ідеального газу $p_\infty / \rho_\infty = RT_\infty$, де газова стала $R = c_p - c_v$, $c_p / c_v = k$. Тоді

$$\begin{aligned} \frac{1}{Sh} \rho' \frac{\partial T'}{\partial t'} + \rho' \left(v'_x \frac{\partial T'}{\partial x'} + v'_y \frac{\partial T'}{\partial y'} + v'_z \frac{\partial T'}{\partial z'} \right) = \\ = \frac{k-1}{k} \frac{1}{Sh} \frac{dp'}{dt'} + \frac{1}{Re} \frac{1}{Pr} \operatorname{div}' (\operatorname{grad}' T') + (k-1) \frac{M^2}{Re^2} \Phi'. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Тут $Pr = c_p \mu / \lambda$ — число Прандтля, є мірою відносної значимості впливу в'язкості та теплопровідності ($Pr < 1$; для повітря при $T < 1300$ К число $Pr < 0,72$). Таким чином, число Pr є критерієм подібності, що враховує одночасно вплив в'язкості та теплопровідності.

Рівняння стану газу у безрозмірній формі має вигляд

$$p' = \rho' T'. \quad (3.64)$$

До системи рівнянь (3.61) - (3.64) необхідно додати безрозмірні початкові та граничні умови. До граничних умов відносяться безрозмірні значення швидкості, тиску, температури в непорушеному потоці. Відповідно до обраних характерних величин, їх значення дорівнюють одиниці. На поверхні тіла, рівняння якої має бути в безрозмірних координатах, граничними умовами є рівність нулю безрозмірної швидкості ($v' = 0$), а також умова, що накладається на температуру. Граничні умови для швидкості та тиску нового критерію подібності не дають, а вимога виконання граничних умов температури призводить до додаткових умов подібності. Це впливає з граничної умови для температури (3.38), наведеної у безрозмірній формі:

$$(al/\lambda)(T'_{ст} - T'_r) = -\partial T'/\partial n'.$$

Тут $al/\lambda = Nu$ — число Нуссельта.

Безрозмірне відношення $T'_{ст}/T_\infty = T'_{ст}$ прийнято називати температурним фактором, $T'_r = T_r/T_\infty$ залежить від числа M_∞ (см. гл. 12). Число Nu можна виразити через числа Стантона $St = \alpha/(c_p \rho_\infty v_\infty)$, Re и Pr :

$$Nu = (c_p \mu / \lambda) (\rho_\infty v_\infty l / \mu) [\alpha / (c_p \rho_\infty v_\infty)] = Pr Re St.$$

Система рівнянь у безрозмірній формі дозволяє встановити умови, необхідні для подібності двох потоків.

Розглянемо два подібних потоки. З умови подібності випливає, що безрозмірні величини $\vec{v}', p', \rho', T'$ у подібних точках потоків та у подібні моменти часу повинні бути однакові. З іншого боку, параметри $\vec{v}', p', \rho', T'$ є рішеннями безрозмірної системи рівнянь (3.61) - (3.64) з безрозмірними граничними умовами. Отже, для обох потоків мають бути однаковими та рівняння з відповідними граничними умовами. Звідси випливає, що якщо два потоки в'язкого газу подібні, то числа **Re**, **M**, **Fr**, **Sh**, **Pr**, **St** та відношення c_p/c_v , а також температурний фактор $T_{ст}/T_\infty$ для цих потоків мають бути відповідно однаковими. У цьому випадку подібність потоків називається повною. Але у багатьох випадках можна обмежитися умовними часткової подібності, як зазначалося вище, у більшості завдань аеродинаміки впливом числа **Fr** можна знехтувати. При малих швидкостях потоку $M \ll 1$ можна знехтувати і впливом стисливості, тобто числом **M**. Тоді в разі руху для подібності таких потоків потрібна тільки рівність чисел **Re**.

При дозвукових і помірних надзвукових швидкостях основними критеріями подібності є числа *Re*, *M*, *Sh* (у разі руху, що не встановився), **St**, в гіперзвуковому потоці недисоційованого газу, крім того, повинні зберігатися величини температурного фактора, числа **Pr** і відношення питомих теплоємностей $k = c_p/c_v$.

3.9. ПОНЯТТЯ ПРО АЕРОДИНАМІЧНІ КОЕФІЦІЄНТИ.

ПОХІДНІ АЕРОДИНАМІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ

Аеродинамічні коефіцієнти. Розглянемо два подібних потоки: один - обтікає натурний об'єкт, а інший - обтікає його модель. Виділивши в потоках два подібні нескінченно малі елементи. Нехай ці елементи діють сили dR і dR_1 ,

створюють прискорення w і w_1 . Очевидно, можна скласти такі рівності: $dR = wdm$, $dR_1 = w_1 dm_1$, де dm , dm_1 — маси цих елементів.

Виразимо маси dm , dm_1 через щільність та лінійні розміри: $dm = \rho(dl)^3$, $dm_1 = \rho_1(dl)^3$. Тоді, підставляючи їх у вирази сил, отримуємо $dR = \rho(dl)^3 w$, $dR_1 = \rho_1(dl)^3 w_1$. Розділяючи ці рівності почленно, маємо $K_R = K_l^4 K_\rho K_t^{-2}$. Оскільки $K_w = K_l K_t^{-2}$ то вираз для K_R можна подати як $K_R = K_l^4 K_\rho K_t^{-2}$. Помічаючи, що $K_l^2 = K_v^2$, знаходимо

$$K_R = K_\rho K_v^2 K_l^2. \quad (3.65)$$

Отримане співвідношення для елементарних сил можна поширити і на сили R , R_1 , що діють кінцеві обсяги, так як будь-який кінцевий обсяг можна розбити на нескінченно велику кількість елементарних обсягів, для кожного з яких виконується вираз (3.65). Сили R , R_1 дорівнюють за величиною і протилежні за напрямом сил, що діють з боку потоку на тіла, що обтікаються. Сила впливу потоку на тіло називається аеродинамічною силою. Тоді, маючи на увазі під R , R_1 повні аеродинамічні сили, що діють на геометрично подібні тіла, можна вивести наступне співвідношення:

$$K_R = R_1/R = \rho_1 v_1^2 l_1^2 / (\rho v^2 l^2) \text{ або } R/(\rho v^2 l^2) = R_1/(\rho_1 v_1^2 l_1^2).$$

Враховуючи, що внаслідок геометричної подоби тіл $l_1^2/l^2 = S_1/S$, отримаємо

$$R/(\rho v^2 l^2) = R_1/(\rho_1 v_1^2 l_1^2) = c_R$$

або

$$R = c_R \rho v^2 l^2, \quad (3.66)$$

де c_R — безрозмірний коефіцієнт повної аеродинамічної сили; $\rho v^2/2 = q$ — швидкісний натиск, Па; S — характерна площа, якою може бути площа крила в плані або площа перерізу міделева корпусу.

Розподілені по поверхні тіла аеродинамічні сили (сили тиску і дотичної напруги) можна привести до результуючої сили $\vec{R}$ (повної аеродинамічної сили), прикладеної в обраній точці (у центрі мас - стосовно літального апарату), і до результуючого моменту (повного аеродинамічного), що діє щодо осі, що проходить через цю точку.

Замість векторів $\vec{R}$, $\vec{M}$ в аеродинаміці розглядають їх проекції по осям координат. Зазвичай використовуються дві системи координат - швидкісна та пов'язана, кожна з яких представляє собою декартову прямокутну праву систему осей координат.

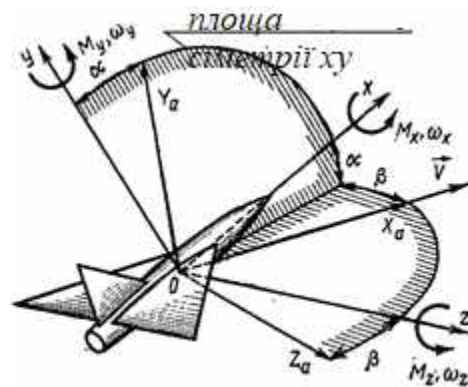


Рис. 3.4. Пов'язана $Ox_a y_a z_a$ та швидкісна $Oxyz$ системи координат

У швидкісній системі $Ox_a y_a z_a$ швидкісна вісь Ox_a спрямована вздовж швидкості польоту літального апарату (рис. 3.4), вісь підйомної сили Oy_a перпендикулярна до осі Ox_a і розташована в площині симетрії літального апарату; бічна вісь Oz_a перпендикулярна до площини $Ox_a y_a$.

У пов'язаній системі координат $Oxyz$ (рис. 3.4) поздовжня Ox і нормальна Oy осі розташовані в площині симетрії літального апарату, причому вісь Ox спрямована вперед або вздовж осі корпусу, або уздовж хорди крила, поперечна вісь перпендикулярна площині симетрії.

Орієнтація апарату щодо вектора швидкості визначається кутами атаки α , ковзання β . Кут атаки α - кут між проекцією вектора швидкості на площину симетрії апарату Oxy та поздовжньою віссю Ox , кут ковзання β - кут між вектором швидкості та площиною симетрії Oxy

Проеціюючи повну аеродинамічну силу $\vec{R}$ на осі швидкісної та зв'язаної систем, відповідно отримуємо X_a, Y_a, Z_a , і X, Y, Z , де X_a - сила лобового опору, Y_a - аеродинамічна підйомна сила (підйомна сила), Z_a - аеродинамічна бокова сила (бічна сила), X - аеродинамічна поздовжня сила, (подовжня сила), Y - аеродинамічна нормальна сила (нормальна сила), Z - аеродинамічна поперечна сила (поперечна сила).

Зважаючи на те, що проекція вектора $\vec{R}$ на вісь Ox_a завжди негативна, прийнято, що X_a і X - складові сили по осях Ox_a і Ox , взяті зі зворотним знаком.

Відповідно до формули (3.66) для проекцій сумарної аеродинамічної сили можна скласти такі вирази:

$$\left. \begin{aligned} X_a &= c_{xa} q S, & X &= c_x q S; \\ Y_a &= c_{ya} q S, & Y &= c_y q S; \\ Z_a &= c_{za} q S, & Z &= c_z q S, \end{aligned} \right\} \quad (3.67)$$

де c_{xa} — коефіцієнт лобового спротиву; c_{ya} — коефіцієнт аеродинамічної підйомної сили (коефіцієнт підйомної сили); c_{za} — коефіцієнт аеродинамічної бічної сили (коефіцієнт бічної сили); c_x — коефіцієнт аеродинамічної поздовжньої сили (коефіцієнт поздовжньої сили); c_y — коефіцієнт аеродинамічної нормальної сили (коефіцієнт нормальної сили); c_z — коефіцієнт аеродинамічної поперечної сили (коефіцієнт поперечної сили).

Повний аеродинамічний момент $\vec{M}$ зазвичай проектується на осі пов'язаної системи осей координат: M_x , M_y , M_z . Тут M_x - аеродинамічний момент крену, M_y - аеродинамічний момент нищпорення, M_z - аеродинамічний момент тангажу, або поздовжній момент. Позитивні напрямки моментів наведено на рис. 3.4.

Аналогічно (3.67) вводяться коефіцієнти моментів: $M_x = m_x q S l$, $M_y = m_y q S l$, $M_z = m_z q S L$, де m_x - коефіцієнт аеродинамічного моменту крену (коефіцієнт моменту крену); m_y - коефіцієнт аеродинамічного моменту ривання (коефіцієнт моменту ривання); m_z - коефіцієнт аеродинамічного моменту тангажу (коефіцієнт моменту тангажу); l , L - характерні лінійні розміри літального апарату.

Зазвичай щодо коефіцієнтів m_x , і m_y за характерний розмір приймають розмах крил, а коефіцієнта m_z — середню аеродинамічну хорду (див. 7.8). Однак в якості l і L можна використовувати й інші характерні розміри, наприклад як L довжину корпусу.

Аналогічно можна запровадити поняття коефіцієнт тиску p . Під коефіцієнтом тиску розуміють відношення різниці тиску в даній точці та

тиску в необуреному потоці ($p - p_\infty$) до швидкісного натиску необуреного потоку:

$$\underline{p} = (p - p_\infty)(\rho_\infty v_\infty^2 / 2). \quad (3.68)$$

Покажемо, що у подібних точках подібних потоків коефіцієнти тиску однакові. Для цього уявимо відношення різниці тисків ($p - p_\infty$) = Δp у розглянутих точках у такому вигляді:

$$\Delta p_1 / \Delta p = (\Delta R_1 / \Delta S_1) / (\Delta R / \Delta S) = (\Delta R_1 / \Delta R) (\Delta l)^2 / (\Delta l_1)^2.$$

Тут $\Delta S_1, \Delta S$ — елементарні подібні майданчики, а $\Delta R_1 / \Delta R = K_R$.

Звідси, використовуючи вираз (3.65), отримуємо $\Delta p_1 / \Delta p = \rho_1 v_1^2 / (\rho v^2)$ або $\Delta p_1 / (\rho_1 v_1^2) = \Delta p / (\rho v^2)$. Останній вираз означає, що $\underline{p}_1 = \underline{p}$. Відношення $\Delta p / (\rho v^2) = Eu$ називається числом Ейлера.

Перетворимо вираз швидкісного натиску:

$$\rho v^2 / 2 = (\rho a^2 / 2) M^2,$$

$$\text{де } a^2 = kRT = kp/p.$$

Тоді

$$\rho v^2 / 2 = kp M^2 / 2. \quad (3.69)$$

Підставляючи вираз (3.69) (3.68), отримуємо

$$\underline{p} = [2 / (k M^2)] (p / p_\infty - 1). \quad (3.70)$$

Для повітря при $k = 1,4$

$$\underline{p} = (1,43 / M_\infty^2) (p / p_\infty - 1) \quad (3.71)$$

Аеродинамічні коефіцієнти для заданої форми літального апарату або його частин є безрозмірними функціями параметрів. Такими безрозмірними величинами, очевидно, є відповідні критерії подібності, розглянуті у 3.3. Інші

параметри, що визначають рух літального апарату, - кути атаки α , ковзання β і кути відхилення органів управління δ_i тангажом, рисканням і креном, а також кутові швидкості літального апарату навколо пов'язаних осей ($\omega_x, \omega_y, \omega_z$). Крім того, у загальному випадку неусталеного руху літального апарату необхідно враховувати вплив зміни за часом кутів $d\alpha/dt, d\beta/dt, d\delta_i/dt$, кутових швидкостей $d\omega_x/dt, d\omega_y/dt, d\omega_z/dt$.

Введемо безрозмірні кінематичні параметри у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \bar{\omega}_x &= \frac{\omega_x l}{2v_\infty}, \quad \bar{\omega}_y = \frac{\omega_y l}{2v_\infty}, \quad \bar{\omega}_z = \frac{\omega_z b_A}{v_\infty}; \\ \bar{\dot{\alpha}} &= \frac{d\alpha}{dt} \frac{b_A}{v_\infty}, \quad \bar{\dot{\beta}} = \frac{d\beta}{dt} \frac{l}{2v_\infty}, \quad \bar{\dot{\delta}} = \frac{d\delta_B}{dt} \frac{b_A}{v_\infty}; \\ \bar{\dot{\delta}_H} &= \frac{d\delta_H}{dt} \frac{l}{2v_\infty}, \quad \bar{\dot{\delta}_\Delta} = \frac{d\delta_\Delta}{dt} \frac{l}{2v_\infty}, \quad \bar{\dot{\omega}_x} = \frac{d\omega_x}{dt} \frac{l^2}{4v_\infty^2}; \\ \bar{\dot{\omega}_y} &= \frac{d\omega_y}{dt} \frac{l^2}{4v_\infty^2}, \quad \bar{\dot{\omega}_z} = \frac{d\omega_z}{dt} \frac{b_A^2}{v_\infty^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.72)$$

Тут за характерні лінійні розміри прийняті середня аеродинамічна хорда b_A і половина розмаху крил $l/2$; $\delta_B, \delta_H, \delta_\Delta$ — кути відхилення органів управління тангажом (кермів висоти), рискання (кермом напрямку) і креном (елеронів).

Похідні аеродинамічних коефіцієнтів. Загалом залежність аеродинамічних коефіцієнтів від кутів α, β, δ_i та безрозмірних кінематичних параметрів (3.68) має складний нелінійний характер. У тому випадку, коли ці параметри малі, аеродинамічні коефіцієнти можна представити у вигляді рядів Тейлора поблизу $\alpha=\beta=\delta=\omega_x=\omega_y=\omega_z=\dot{\alpha}=\dot{\beta}=\dot{\delta}_i=\dot{\omega}_x=\dot{\omega}_y=\dot{\omega}_z=0$ з збереженням членів до першого чи другого порядку малості. Коефіцієнтами таких рядів є похідні від аеродинамічних коефіцієнтів за цими параметрами.

Частні похідні по якому-небудь куті $c_{\alpha_y}^{\alpha}, c_{\beta_y}^{\beta}, \dots, m_{\alpha_z}^{\alpha}, m_{\beta_z}^{\beta}, \dots, c_{\delta_z}^{\delta}, c_{\delta_H}^{\delta_H}, m_{\alpha_x}^{\alpha}, m_{\beta_x}^{\beta}, m_{\delta_H}^{\delta_H}$ називаються статичними похідними, а похідні за параметрами $\bar{\omega}_x, \bar{\omega}_y, \bar{\omega}_z$, а також за швидкістю зміни кутів $(\bar{\dot{\alpha}}, \bar{\dot{\beta}}, \bar{\dot{\delta}}_i)$ і кутовим прискоренням $(\bar{\dot{\omega}}_x, \bar{\dot{\omega}}_y, \bar{\dot{\omega}}_z)$ обертальними похідними.

Одні з розглянутих похідних характеризують аеродинамічні властивості літального апарату при $\delta_i = 0$ ($c_y^a, c_z^\beta, m_z^a, m_x^\beta, \dots, \overline{m_z^{\omega z}}, \overline{m_x^{\omega x}}, \dots$) а інші пов'язані з відхиленням органів управління ($c_z^{\delta B}, m_z^{\delta B}, m_x^{\delta \Theta}, \dots$). При цьому кожна цих похідних має певний фізичний зміст.

Статичні похідні c_y^a і c_z^β характеризують зміну нормальної та поперечної сил при зміні кутів атаки та ковзання, похідні $c_y^{\delta B}$ та $c_z^{\delta B}$ - при зміні кутів відхилення відповідних органів управління. Похідні c_y^a і c_z^β мають важливе значення для управління руху центру мас літального апарату в поздовжньому та бічному напрямках..

Статичні похідні $m_z^a, m_x^\beta, m_y^\beta$, дають уявлення про рівень зміни коефіцієнтів моментів m_z при зміні кута атаки; m_x і m_y - при зміні кутів ковзання і тому характеризують стійкість поздовжнього, поперечного та бічного рухів літального апарату. Похідні $m_z^{\delta B}, m_y^{\delta H}, m_x^{\delta \Theta}$, характеризують ефективність відповідних органів управління.

Обертальні похідні $\dot{\overline{m_z^{\omega z}}}, \dot{\overline{m_z^a}}$ визначають поздовжнє демпфування, $\overline{m_y^{\omega y}}, \dot{\overline{m_y^{\dot{\beta}}}}$ — демпфування ристання, а $\overline{m_x^{\omega x}}$ - крену. Похідна $\overline{m_y^{\omega x}}$ характеризує вплив обертання літального апарата навколо осі Ox значення коефіцієнта моменту m_y , а $\overline{m_x^{\omega y}}$ — вплив обертання навколо осі Oy на величину m_x .

4. ІЗЕНТРОПНІ ПОТОКИ ГАЗУ

4.1. БАЗОВІ КОЕФІЦІЄНТИ ДЛЯ ВСТАНОВЛЕНИХ ОДНОВИМІРНИХ ПОТОКІВ ІЗЕНТРОПНОГО ГАЗУ

Розглянемо ізенотропний потік газу по трубці струму (рис. 4.1).

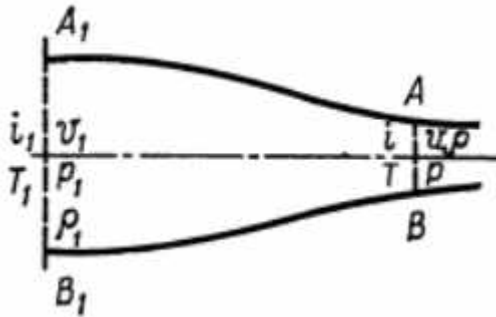


Рис. 4.1. Одновимірний потік газу.

Встановимо зв'язок між основними параметрами - швидкістю, тиском, густиною, температурою, швидкість звуку. Позначемо $v_1, i_1, T_1, p_1, \rho_1, a_1$ при параметрах потоку в поперечному перерізі A_1B_1 ; а v, i, T, p, ρ, a - це ті ж параметри в поперечному перерізі AB .

В ізенотропійному потоці газу ентропія по лінії струму не змінюється: $s = \text{const}$.

Ентропія є функцією стану і для ідеального газу вона визначається за формулою

$$s = c_v \ln (p/\rho^k).$$

Якщо $s = \text{const}$, то $p/\rho^k = \text{const}$. Тоді, розглядаючи два розрізи трубки течії A_1B_1 та AB отримуємо рівність

$$(p/p_1) = (\rho/\rho_1)^k.$$

Для тих же перерізів на основі рівняння стану ідеального газу отримуємо рівність:

$$p/p_1 = (T/T_1)(\rho/\rho_1).$$

Використовуючи цей вираз для ізенотропічних течій, отримаємо зв'язок між тиском і температурою газу

$$p/p_1 = (T/T_1)^{k/k-1}$$

а також - між густиною і температурою газу

$$\rho/\rho_1 = (T/T_1)^{1/k-1}$$

На основі рівнянь $[k(k-1)p/\rho] = [k(k-1)RT] = i$ та $v^2/2 + i = \text{const}$ для перерізів A_1B_1 та AB можна записати $v^2/2 + i = v_1^2/2 + i_1$. Якщо $v_1 = 0$ і одночасно $i = i_0$, то

$$v^2/2 + i = i_0 \quad (4.1)$$

або

$$v^2/2 + [k(k-1)RT] = [k/(k-1)]RT_0. \quad (4.1^1)$$

З цих виразів випливає, що при $i_0 = \text{const}$ зі зміною швидкості течії газу змінюється величина ентальпії (температура газу). Це одне з характерних відмінностей між потоками газу від нестисливої течії, температура якої змінюється тільки тоді, коли підводять тепло ззовні або при його відводі назовні. Умови протікання рідини, наприклад звуження або розширення струменя, не можуть викликати зміни його температури (якщо нехтувати тертям). У газі температура змінюється в залежності від умов його переміщення; зі зниженням швидкості течії підвищується температура газу. Найбільша температура досягається при $v = 0$. З іншого боку, з рівняння (4.1) видно, що швидкість руху газу, що має певне значення ентальпії у стані спокою, не може перевищувати деякого максимального значення $v_{\max}$, при наближенні до якого значення i , T , p , а наближуються до нуля. Швидкість потоку досягає максимального значення тоді, коли газ розширюється до абсолютного вакууму. У цьому випадку $i_0 = v_{\max}^2/2$, звідки

$$v_{\max} = \sqrt{2 i_0} \quad (4.2)$$

З виразу (4.2) можна зробити висновок, що максимальна швидкість $v_{\max}$ є функцією тільки ентальпії i_0 . Використовуючи формули $i_0 = [k/(k-1)]RT_0$, рівняння стану $p_0 = R\rho_0T_0$ та формулу швидкості звуку $a_0^2 = kRT_0$, то вираз (4.2) для $v_{\max}$ подамо у вигляді

$$v_{\max} = \sqrt{2 i_0} = \sqrt{\frac{2k}{k-1}RT_0} = \sqrt{\frac{2k}{k-1} \frac{p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{2}{k-1}} a_0 \quad (4.3)$$

Параметри газу, відповідні $v = 0$, називаються параметри гальмування. Тоді параметри відповідні цьому стану, такі як тиск, густина, температура і ентальпія називаються тиск (p_0), щільність (ρ_0), температура (T_0) і

ентальнія (i_0) гальмування. Формула (4.3) відображає взаємозв'язок між максимальною швидкістю потоку і значеннями параметрів гальмування. Тиск p_0 не впливає на значення v_{max} , а впливає лише на кількість газового потоку. Визначимо, в якій мірі підвищується температура газу при його гальмуванні (від деякої швидкості v до 0).

З рівняння (4.1¹)

$$\Delta T = T_0 - T = [(k-1)/(2k)] v^2/R.$$

При $k = 1,4$ і $R = 287$ Дж/(кг • К) маємо $\Delta T \sim v^2/2000$.

Щоб вивести формули для визначення тиску, густини, температура і швидкість звуку в залежності від швидкості потоку, необхідно використовувати рівняння (4.1), у вигляді

$$i/i_0 = T/T_0 = 1 - v^2/v_{max}^2. \quad (4.4)$$

Вважаючи потік газу як ізентропний і підставляючи вираз (4.4) у формули

$p/p_0 = (T/T_0)^{k/(k-1)}$, $\rho/\rho_0 = (T/T_0)^{1/(k-1)}$ можемо отримати:

$$p/p_0 = (1 - v^2/v_{max}^2)^{k/(k-1)} \quad (4.5)$$

$$\rho/\rho_0 = (1 - v^2/v_{max}^2)^{1/(k-1)} \quad (4.6)$$

$$T/T_0 = 1 - v^2/v_{max}^2 \quad (4.7)$$

Використовуючи формулу (4.6), можна встановити, що при малих швидкостях потоку, густина майже не змінюється.

Якщо розкласти ρ/ρ_0 в ряд, отримуємо:

$$\rho/\rho_0 = 1 - [1/(k-1)] v^2/v_{max}^2 + \{(2-k)/[2(k-1)^2]\} v^4/v_{max}^4 - \dots$$

Із ряду виключимо малі величини вищі 2 порядку, тоді

$$(\rho - \rho_0)/\rho_0 = - [1/(k-1)] v^2/v_{max}^2$$

Якщо прийняти $T_0 = 288$ К ($v_{max} = 756$ м/с), то при швидкостях $v < 75$ м/с

густина буде змінюватись в межах 2%. В цьому випадку для тиску, використовуючи формулу (4.5), можна знайти наступне співвідношення

$$p/p_0 = 1 - [k/(k-1)] v^2/v_{max}^2 + \dots$$

Підставляючи вираз (4.3) у вигляді $v_{max}^2 = [2k/(k-1)] p_0/\rho_0$ і відкидаючи малі складові вище другого порядку, маємо $p = p_0 - \rho v^2/2$. Тобто при малих

швидкостях газу тиск визначається з рівняння Бернуллі для нестисливого середовища.

Залежність тиску, густини і температури від швидкості потоку газу (в безрозмірних величинах) представлені на рис. 4.2.

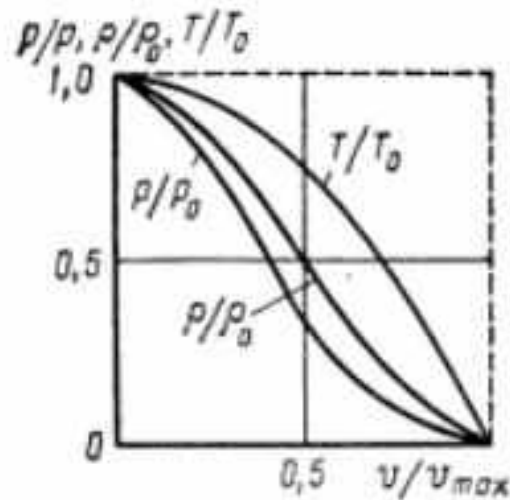


Рис. 4.2. Залежності тиску, густини і температура від швидкості потоку

В ізентропійному потоці газу збільшення його кінетичної енергії може виникнути тільки за умови зниження потенційної енергії газу. Тому збільшення швидкості потоку в ізентропійному потоці газу пов'язано зі зниженням його температури і тиску. Але з урахуванням того, що тиск падає інтенсивніше, ніж температура, то густина газу зі збільшенням швидкості буде зменшуватися.

Так як швидкість звуку в газовому потоці залежить від температури, то

$$\frac{a^2}{a_0^2} = \frac{T}{T_0} = 1 - \frac{v^2}{v_{max}^2} \quad (4.8)$$

де a_0 - швидкість звуку при $v = 0$.

Використовуючи формули (4.3),

отримуємо

$$a^2 = \frac{(k-1)/2}{k} (v_{max}^2 - v^2) \quad (4.9)$$

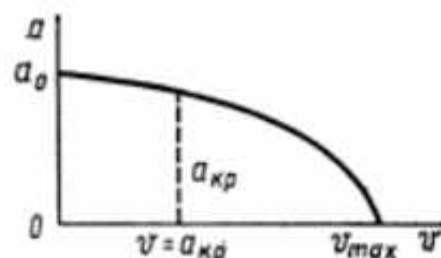


Рис. 4.3. Зміна швидкості звуку в залежності від швидкості потоку

З формули (4.9) випливає, що зі збільшенням швидкості потоку швидкість звуку знижується та при деякій швидкості потоку, стає рівною йому (рис. 4.3). Ця локальна швидкість потоку, що дорівнює локальній швидкості звуку, називається критичною швидкістю і позначається $a_{кр}$

Переріз трубки потоку, в якій локальна швидкість потоку дорівнює локальній швидкості звуку називається критичним.

Всі інші параметри потоку – тиск, густина, температура – при $v = a_{кр}$ також називаються критичними і позначаються відповідно $p_{кр}$, $\rho_{кр}$, $T_{кр}$.

Якщо у формулі (4.9) прийняти рівність $a = v = a_{кр}$, то

$$a_{кр}^2 = [(k - 1)/(k + 1)] v_{max}^2 \quad (4.10)$$

Для повітря ($k = 1,4$) критична швидкість: $a_{кр} = 0,408 v_{max}$.

З виразу (4.10) випливає, що критична швидкість залежить тільки від температури гальмування T_0 . Дійсно, підставляючи в (4.10) значення v_{max} за формулою (4.3), отримуємо

$$a_{кр}^2 = [(k - 1)/(k + 1)] 2i_0 = [2k/(k + 1)] RT_0 = [2k/(k + 1)] p_0/\rho_0 \quad (4.11)$$

Зокрема, за формулою (4.11) для повітря [$k = 1,4$; $R = 287$ Дж/(кг • К)]

$$a_{кр} = 18,3 \sqrt{T_0} \quad (4.12)$$

Якщо критична швидкість $a_{кр}$ виразити через критичну температуру $T_{кр}$, то виходячи з формули $a_{кр} = \sqrt{(kRT_{кр})}$

$$a_{кр} = 20,1 \sqrt{T_{кр}} \quad (4.13)$$

Для температури газу $T_{кр}$, що відповідає критичній швидкості, за формулою (4.7) отримуємо вираз

$$T_{кр}/T_0 = 1 - a_{кр}^2/v_{max}^2$$

звідки, використовуючи формулу (4.10), отримуємо

$$T_{кр} = [2/(k+1)] T_0 \quad (4.14)$$

Оскільки для ізентропного потоку $p_{кр}/p_0 = (T/T_0)^{k/k-1}$, $\rho_{кр}/\rho_0 = (T/T_0)^{1/k-1}$, тоді

$$p_{кр} = [2/(k+1)]^{k/k-1} p_0 \quad (4.15)$$

$$\rho_{кр} = [2/(k+1)]^{1/k-1} \rho_0 \quad (4.16)$$

Таким чином, всі параметри газу в поперечному перерізі, де швидкість потоку досягає швидкості звуку, є тільки функціями параметрів гальмування T_0, p_0, ρ_0 .

Формули (4.14)—(4.16) при $k = 1,4$ (для повітря) приймають вид

$$T_{кр} = 0,831 T_0; \quad p_{кр} = 0,636 p_0; \quad \rho_{кр} = 0,528 \rho_0 \quad (4.17)$$

Таким чином, при зміні швидкості потоку з $v = 0$ на $v = a_{кр}$ температура повітря знижується на 16,9%, густина – на 36,4%, а тиск – на 47, 2%.

Введемо безрозмірну величину, яку назовемо приведеною швидкістю

$$\lambda = v / a_{кр} \quad (4.18)$$

Приведена швидкість на відміну від числа M пропорційна швидкості потоку, так як критична швидкість в потоці при постійній температурі гальмування не змінюється.

У більшості випадків зручно використовувати формули для параметрів газу, як виражаються через M та λ .

$$p_0/p = [1 + (k-1)M^2/2]^{k/(k-1)} \quad (4.19)$$

$$\rho_0/\rho = [1 + (k-1)M^2/2]^{1/(k-1)} \quad (4.20)$$

$$T_0/T = 1 + (k-1)M^2/2 \quad (4.21)$$

$$p/p_0 = [1 - (k-1)\lambda^2/(k+1)]^{k/(k-1)} \quad (4.22)$$

$$\rho/\rho_0 = [1 - (k-1)\lambda^2/(k+1)]^{1/(k-1)} \quad (4.23)$$

$$T/T_0 = 1 - (k-1)\lambda^2/(k+1) \quad (4.24)$$

З формул (4.19)–(4.24) видно, що при збільшенні числа M і приведеної швидкості λ температура, швидкість звуку, тиск і густина гвзв зменшуються.

Формула (4.19) зазвичай використовують для знаходження числа M в дозвукових аеродинамічних трубах, під час визначення експериментального гальмуючого тиску p_0 і статичного тиску p в потоці.

З формули (4.21) випливає, що температура гальмування залежить від температури і числа M потоку:

$$T_0 = T [1 + (k-1)M^2/2] \quad (4.25)$$

для $k = 1,4$

$$T_0 = T [1 + 0,2 M^2] \quad (4.26)$$

При високих числах M температура гальмування значно перевищує температуру вхідного потоку. Наприклад, для $k = 1,4$ при $M = 1$ температура гальмування $T_0 = 1,2 T$; при $M = 5$ температура $T_0 = 6 T$; при $M = 10$ температура $T_0 = 21 T$;

У чисельних розрахунках ізентропних потоків зручно використання таблиць газодинамічних функцій, в яких наводяться значення співвідношень p/p_0 , ρ/ρ_0 , T/T_0 в залежності від числа M , і приведеною швидкістю λ .

4.2. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ШВИДКІСТЮ ПОТІКУ ГАЗУ І ФОРМОЮ ТРУБКИ СТРУМА

Щоб встановити зв'язок між змінами швидкості потоку і формою струменя скористаємося рівнянням неперервності $\rho v F = \text{const}$. В результаті диференціювання отримуємо

$$d\rho/\rho + dv/v + dF/F = 0 \quad (4.27)$$

Використовуючи формулу (4.6), висловлюємо $d\rho/\rho$ через відносну зміну швидкості dv/v :

$$d\rho/\rho = - (v^2/a^2) (dv/v) \quad (4.28)$$

Тоді, підставляючи вираз (4.28) в (4.27), отримаємо

$$dF/F = - (1 - v^2/a^2) dv/v \quad (4.29)$$

Розглянемо можливі випадки:

1. Швидкість руху газу менше швидкості звуку ($v < a$), $(1 - v^2/a^2) > 0$

З рівняння (4.29) випливає, що одночасно зі збільшенням швидкості площа поперечного перерізу струменя зменшується, тобто $dF < 0$.

2. Швидкість руху газу більше швидкості звуку ($v > a$).

В цьому випадку $(1 - v^2/a^2) < 0$, отже, знаки dv і dF збігаються. Це означає, що при збільшенні перерізу струменя швидкість потоку збільшується.

В обох розглянутих випадках характер залежності між швидкістю і тиском не змінюється. Наприклад, якщо швидкість зростає, то - тиск знижується, і навпаки. На характер залежності швидкості (або тиском) і перерізом струменя

істотно впливають відношення швидкості потоку до швидкості звуку, тобто число $M = v/a$ (рис. 4.4).

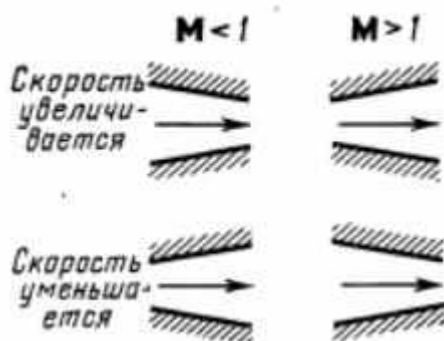


Рис. 4.4. Залежність від швидкості газового потоку від форми каналу

Швидкість потоку дорівнює швидкості звуку ($v = a$), $(1 - v^2/a^2) = 0$, тобто $dF = 0$.

Оскільки, при прискоренні дозвукового потоку площа поперечного перерізу струменя зменшується, а коли надзвуковий потік прискорюється, вони збільшуються, то з цього випливає, що в безперервному переході швидкості потоку від дозвукових значень до надзвукових, перерізи спочатку зменшують, а потім збільшуються.

У найменшому поперечному перерізі швидкість потоку досягає швидкості звуку ($v = a_{кр}$). Критичний перетин газового струменя - це його мінімальний переріз. На рисунку 4.5 представлена форма сопла, призначеної для отримання надзвукових швидкостей (сопло Лавалю) та показаний характер зміни швидкості і тиску по довжині такого сопла.

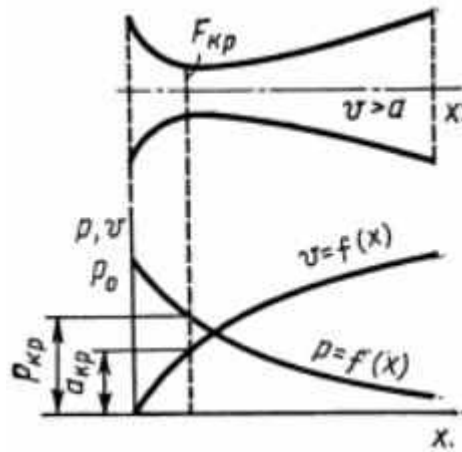


Рис. 4.5. Схема надзвукового сопла

Розглянемо залежність питомої витрати газу ρv від швидкості течії. Питому витрату можна представити таким чином:

$$\rho v = \rho_0 v \rho / \rho_0,$$

де ρ_0 – густина при швидкості газу, що дорівнює нулю.

Використовуючи формулу (4.6), маємо

$$\rho v = \rho_0 v (1 - v^2/v_{max}^2)^{1/(k-1)} \quad (4.30)$$

З виразу видно, що питома витрата газу дорівнює нулю при $v = 0$ і $v = v_{max}$.

Використовуючи умову $d(\rho v)/dv = 0$, легко показати, що питома швидкість потоку досягає свого максимального значення при $v = a_{кр}$. Залежність відносної величини питомої витрати від величини питомої витрати $\rho v / \rho_{кр} a_{кр}$ від приведеної швидкості λ показана на рис. 4.6.

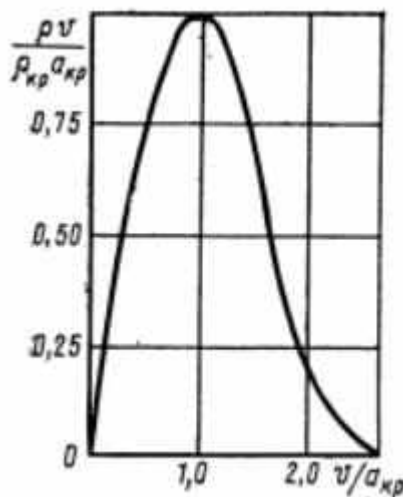


Рис. 4.6. Залежність відносної питомої витрати від приведеної швидкості

Знайдемо співвідношення площ $F/F_{кр}$ як функцію числа M . Для цього використовується рівняння неперервності $\rho v F = \rho_{кр} v_{кр} F_{кр}$, звідки отримуємо

$$F/F_{кр} = (\rho_{кр}/\rho) (a_{кр}/v) \quad (4.31)$$

У формулі (4.31) робимо наступну підстановку:

$$v = aM, \quad \rho_{кр} = [2/(k+1)]^{1/(k-1)} \rho_0;$$

$$\rho_0 = [1 + (k-1)M^2/2]^{1/(k-1)};$$

$$\frac{a_{кр}}{a} = \sqrt{\frac{T_{кр}}{T}} = \sqrt{\frac{2}{(k+1)} \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)} /$$

В результаті підстановки отримаємо:

$$\frac{F}{F_{кр}} = \frac{[1 + (k-1)M^2/2]^{(k+1)/(2(k-1))}}{[(k+1)/2]^{(k+1)/(2(k-1))} M}. \quad (4.32)$$

Для повітря при $k = 1,4$

$$F/F_{кр} = (1 + 0,2 M^2)^3 (1,73 M) \quad (4.33)$$

Значення залежності $F/F_{кр} = (\rho_{кр}/\rho) (a_{кр}/v)$ в залежності від числа M і λ наведені в таблицях газодинамічних функцій. З формул (4.32) і (4.33) або таблиць випливає, що відношення площ $F/F_{кр}$ залежить від числа M , яке необхідно отримати в даному перерізі (Рис. 4.7). При заданій конфігурації сопла формули (4.33) і (4.34) можна використовувати для визначення числа M в обраних перерізах. Тиск на цих ділянках можна знайти по формулі (4.22).

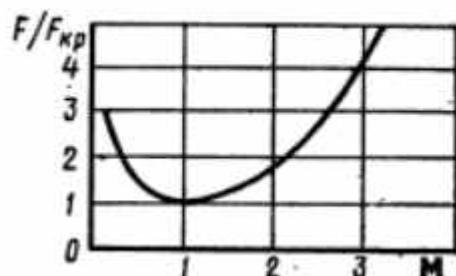


Рис. 4.7. Залежність відношення площі поперечного перерізу надзвукового сопла до площі критичного перерізу від числа M

Якщо розрахунковий тиск у перерізі надзвукового сопла дорівнює зовнішньому тиску (тиску середовища), куди виходить газ із сопла, то режим витоку називається розрахунковим. При цьому тиск буде безперервно знижуватись, вздовж сопла, від p_0 до зовнішнього тиску p_n (крива C_1 - C_2 - C_3 на рис. 4.8).

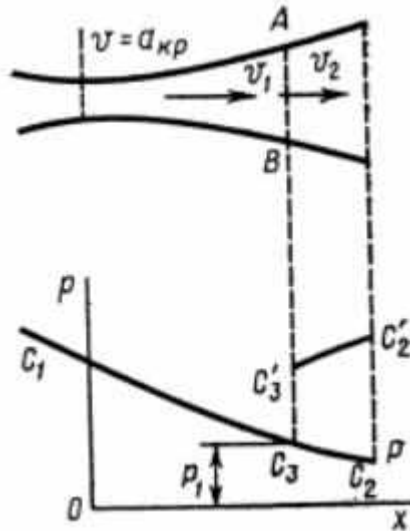


Рис. 4.8. Розрахункові та нерозрахункові режими роботи надзвукового сопла

Всі інші режими газового потоку, коли зовнішній тиск не дорівнює розрахунковому ($p \neq p_n$), називаються нерозрахунковими. При цьому можуть бути такі випадки:

- режим недорозширення, коли тиск на перерізі сопла більше зовнішнього тиску ($p > p_n$);
- режим перерозширення ($p < p_n$). Якщо зовнішній тиск p_n менше розрахункового, то в порівнянні з розрахунковим режимом, розподілу тиску вздовж сопла не змінюється. Зниження зовнішнього тиску в порівнянні з розрахунковим тиском, призводить тільки до розширення струменя після виходу із сопла.

Характер потоку газу за соплом і всередині нього може істотно змінюватися, якщо зовнішній тиск більше розрахункового тиску. В цьому випадку біля виходу із сопла може утворюватися система «стрибків ущільнення», які в майбутньому за рахунок підвищення зовнішнього тиску p_n може переміщатися

всередину сопла що призводить до значного відхилення в характері газового потоку в соплі від розрахункового.

На рисунку 4.8 показаний приблизний характер розподілу тиску по соплу при деякому значенні зовнішнього тиску що більше, ніж розрахунковий (крива $C_1-C_3-C'_3-C'_2$). Газ всередині сопла не є ізентропійним. Ентропія є постійною тільки на певних ділянках сопла - до стрибка ущільнення $s_1 = \text{const}$ і після нього $s_2 = \text{const}$ ($s_2 > s_1$).

4.3. ПОШИРЕННЯ ДРІБНИХ ЗБУРЕНЬ, У ПОТОЦІ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ. КОНУС ЗБУРЕНЬ

Розглянемо джерело невеликих збурень, розташованих в точці O . Такі збурення в спокійному газі ($v = 0$) поширюються у всі сторони однакові зі швидкістю звуку, утворюючи сферичні звукові хвилі, з центром в точці O . В рухомому газі ($v \neq 0$), може бути два випадки:

- 1) швидкість потоку дозвукова $v < a$;
- 2) надзвукова швидкість потоку $v > a$.

При $v \neq 0$ миттєвий центр збурень захоплюється потоком. Наприклад, до моменту $t = 1\text{с}$ ця точка знаходиться від точки O на відстані $v \cdot 1$, а радіус сферичної хвилі дорівнює $a \cdot 1$ (Рис. 4.9, 4.10).

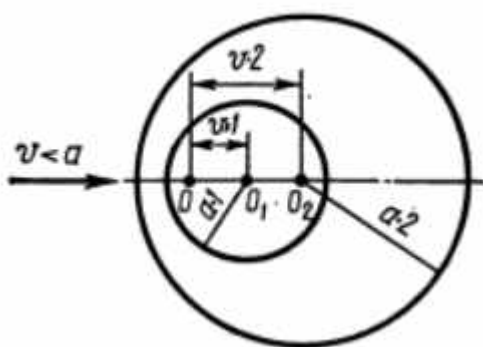


Рис. 4.9. Розподіл малих збурень дозвукового потоку

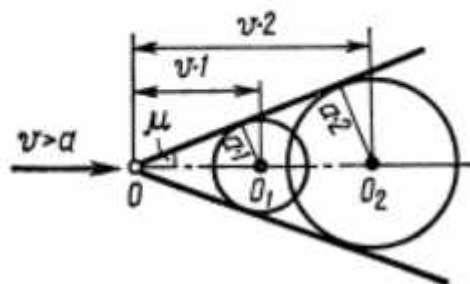


Рис. 4.10. Розповсюдження малих збурень в надзвуковому потоці

Тоді в дозвуковому потоці передній край хвилі збурення завжди буде знаходитись перед точкою O , а в надзвуковому потоці - за джерелом збурень, тобто в дозвуковому потоці. Тобто в дозвуковому потоці збурення від джерела O поширюються у всі сторони, в тому числі і проти течії, а в надзвуковому потоці збурень вперед - не поширюються.

Обтікаюча сферичних хвиль, побудована для різних моментів часу на $v > a$ (рис. 4.10), називається конусом збурень (Конус Маха) і являє собою межу збурених і незбурених потоків. Кут напіврозгорнення конуса збурення називається кутом збурень. На рисунку 4.10 видно, що $\sin \mu = at/(vt) = 1/M$; $\operatorname{tg} \mu = 1/\sqrt{(M^2 - 1)}$. Звідси випливає, що зі збільшенням числа M звужується зона збуреного руху. Обтікаюча звукових хвиль на площині складається з двох напівпрямих ліній, які називаються лініями збурення.

4.4. ОБТІКАННЯ ОПУКЛОГО ТУПОГО КУТА НАДЗВУКОВИМ ПОТОКОМ. ПОТІК ПРАНДТЛЯ – МАЙЄРА.

При надзвуковому обтіканні тупого кута більше 180° (рис. 4.11, а), відбувається безперервне прискорення потоку від швидкості v_1 на ділянці AO до швидкості v_2 на стінці OC . При цьому тиск, густина, температура за законами ізентропних течій, зменшуються.

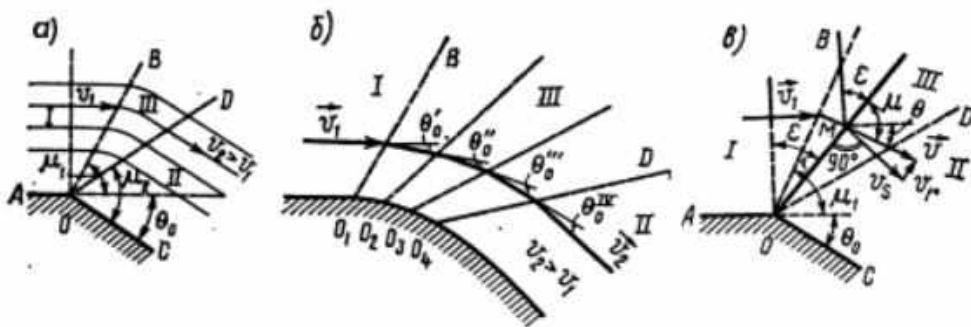


Рис. 4.11. Обтікання опуклого тупого кута надзвуковим потоком

Поворот потоку до кінцевого кута Θ_0 можна представити у вигляді послідовних поворотів на невеликі кути Θ_0' , Θ_0'' , Θ_0''' , ... (Рис. 4.11, б). В

результаті такої заміни ми отримуємо обтічність поверхні, що складається з плоских ділянок $O_1O_2, O_2O_3, O_3O_4, \dots$. При цьому в кожній кутовій точці $O_1, O_2, O_3, \dots$ спостерігається слабка хвиля збурень, компонент з напрямком швидкості в попередній ділянці це кут $\mu = \arcsin(1/M)$. У зв'язку з тим, що по ходу руху збільшується число M , кут збурення - зменшується. Тому, при обтіканні такої поверхні, створюється розбіжне сімейство слабких хвиль розрідження. При цьому перша лінія $OB [\mu_1 = \arcsin(1/M_1)]$ є межею I областей незбурених і збурених потоків, а остання лінія **OD** представляє межу II збурення області з постійною швидкістю v_2 і областю III, в якій відбувається безперервна зміна напрямку і значення швидкості потоку від v_1 до v_2 .

Якщо ділянка ломаної лінії $O_1-O_2-O_3\dots$ стягнути до точки, то замість розбіжного сімейства розрідження, отримуємо пучок променів розрідження (рис. 4.11, а).

Визначимо значення швидкості потоку в III області. Для цього введемо полярні координати r, ε , взявши початок координат в точці O (рис. 4.11, в). Кут відраховується від вертикалі вправо. Відповідно введемо складові швидкості в напрямку полярного радіуса v_r і в напрямку, перпендикулярному полярному радіусу v_s . Обидві ці складові швидкості залежать тільки від полярного кута ε , оскільки швидкість по лінії збурення постійна. Крім того, введемо потенціал швидкості $\varphi(r, \varepsilon)$. Тоді

$$v_r = \partial\varphi/\partial r = v_r(\varepsilon), \quad v_s = (1/r)(\partial\varphi/\partial\varepsilon) = v_s(\varepsilon). \quad (4.34)$$

Оскільки $\partial v_r / \partial \varepsilon = (\partial / \partial \varepsilon)(\partial \varphi / \partial r) = (\partial / \partial r)(\partial \varphi / \partial \varepsilon)$, то використовуючи вираз (4.34), отримаємо

$$\partial v_r / \partial \varepsilon = (\partial / \partial r)(r v_s) = v_s + r \partial v_s / \partial r. \quad (4.35)$$

Складові швидкості v_r, v_s не залежать від радіуса, тобто $\partial v_s / \partial r = 0, \partial v_r / \partial \varepsilon = dv_r / d\varepsilon$, отже

$$v_s = dv_r / d\varepsilon. \quad (4.36)$$

В якості другого рівняння знаходження компонентів швидкості, v_r, v_s використаємо рівняння Бернуллі:

$$(v_r^2 + v_s^2)/2 + [k/(k-1)] p/\rho = v_{\max}^2/2. \quad (4.37)$$

З огляду на те, що складова швидкості знаходиться перпендикулярно лінії збурення і завжди рівна швидкості звуку, отримуємо

$$v_s = a = \sqrt{k p / \rho}.$$

Отже

$$k p / \rho = v_s^2. \quad (4.38)$$

Використовуючи (4.389) і (4.36), приведемо рівняння (4.37) до виду

$$[(k+1)/(k-1)] (dv_r/d\varepsilon)^2 + v_r^2 = v_{\max}^2 \quad (4.39)$$

Звідси

$$dv_r/d\varepsilon = \sqrt{(k-1)/(k+1)} \sqrt{v_{\max}^2 - v_r^2}.$$

Інтегруючи це рівняння, маємо

$$v_r = v_{\max} \sin [\sqrt{(k-1)/(k+1)} (\varepsilon + C)], \quad (4.40)$$

де C - постійна інтегрування.

Використовуючи рівняння (4.36), знайдемо другу складову швидкості:

$$v_s = \sqrt{(k-1)/(k+1)} v_{\max} \cos [\sqrt{(k-1)/(k+1)} (\varepsilon + C)] \quad (4.41)$$

Тепер встановимо зв'язок між числом M і кутом повороту потоку Θ (рис. 4.11, в). Для цього у формулі (4.40) замінимо v_r на

$$v_r = v \cos \mu = v \sqrt{1 - 1/M^2},$$

а у формулі (4.41) $v \sin \mu = a$.

Тоді

$$v_r/v_s = \sqrt{M^2 - 1} = \sqrt{(k+1)/(k-1)} \operatorname{tg} \sqrt{(k-1)/(k+1)} (\varepsilon + C).$$

Звідки

$$\varepsilon + C = \sqrt{(k+1)/(k-1)} \operatorname{arctg} \sqrt{(k-1)/(k+1)} \sqrt{M^2 - 1}. \quad (4.42)$$

З рис. 4.11 видно, що кут повороту потоку дорівнює $\Theta = \mu + \varepsilon - \pi/2$, де $\pi/2 - \mu = \operatorname{arctg} \sqrt{M_1^2 - 1}$.

Тому

$$\varepsilon = \theta + \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}. \quad (4.43)$$

Підставляючи вираз (4.43) в рівняння (4.42), що встановлює залежність між кутами ε і Θ , отримаємо

$$C + \theta = \sqrt{(k+1)/(k-1)} \operatorname{arctg} \sqrt{(k-1)/(k+1)} \times \\ \times \sqrt{M^2 - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}. \quad (4.44)$$

Щоб визначити постійну інтеграції, достатньо використати граничну умову на лінії збурення OB , тобто коли $\Theta = 0$ число $M = M_1$. Тоді

$$C = \sqrt{(k+1)/(k-1)} \operatorname{arctg} \sqrt{(k-1)/(k+1)} \sqrt{M_1^2 - 1} - \\ - \operatorname{arctg} \sqrt{M_1^2 - 1}. \quad (4.45)$$

Звідси випливає, що для даного газу постійна інтеграції C залежить тільки від числа M_1 . При M_1 постійною $C = 0$. З порівняння формул (4.45 і 4.44), можна зробити висновок, що константа C представляє собою кут повороту звукового потоку до отримання зазначеного числа M_1 (рис. 4.12). Цей кут назовемо його *фіктивним кутом повороту потоку* і позначимо Θ_ϕ . Тоді

$$\theta + \theta_\phi = \sqrt{(k+1)/(k-1)} \operatorname{arctg} \sqrt{(k-1)/(k+1)} \sqrt{M^2 - 1} - \\ - \operatorname{arctg} \sqrt{M^2 - 1}. \quad (4.46)$$

Підставляючи в рівняння (4.46) $\Theta = \Theta_0$, отримаємо значення числа M_2 . Далі, використовуючи основні співвідношення для ізентропних течій (4.21-4.23), можна визначити температуру, тиск і густину.

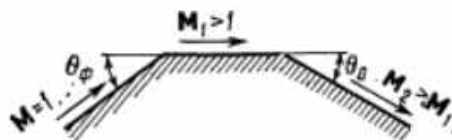


Рис. 4.12. Фіктивний і сумарний кути повороту потоку

Результати розрахунку числа M за формулою (4.46) в наводяться у вигляді таблиці значень M в залежності від кута повороту потоку Θ_0 при $M_1 = 1$. В таблиці також приведені значення p/p_0 , ρ/ρ_0 , T/T_0 . Цю таблицю можна використовувати для розрахунку параметрів потоку при будь-якому значенні M_1 . Для цього, використовуючи таблицю, за заданим значенням M_1 необхідно знайти фіктивний кут Θ_ϕ . Тоді за величиною $(\Theta_\phi + \Theta_0)$ сумарного кута повороту звукового потоку за таблицею можна знайти значення M_2 , p_2/p_0 , ρ_2/ρ_0 , T_2/T_0 .

За допомогою табличних значень для співвідношення p/p_o можна визначити і коефіцієнт тиску: $p = (p_2 - p_1)/(\rho_1 v_1^2/2)$. Згідно формули (3.70) отримаємо:

$$\bar{p} = -(2/k) (1/M_1^2) (1 - p_2/p_1), \quad (4.47)$$

де $p_2/p_1 = (p_2/p_o) 1/(p_1/p_o)$. Тут p_2/p_o визначається значенням сумарного кута повороту потоку $(\Theta_\phi + \Theta_0)$, а p_1/p_o - за відомим значення числа M_1 .

Знайдемо максимально можливий кут повороту потоку. Очевидно, що він являє собою кут повороту звукового потоку $v_1 = a_{кр}$, $M_1 = 1$ до тих пір, поки не буде отримана швидкість після повороту $v_2 = v_{max}$, $M_2 = \infty$.

Підставляючи в формулу (4.46) $\Theta_\phi = 0$, $M_2 = \infty$, отримуємо

$$\theta_{max} = (\pi/2) [V^{(k+1)/(k-1)} - 1] \quad (4.48)$$

При $k = 1,4$ кут $\Theta_{max} = 130,4^\circ$.

Граничний кут, під яким може повертатися надзвуковий потік залежить від числа M_1 :

$$\theta_{пр} = \theta_{max} - \theta_\phi(M_1). \quad (4.49)$$

Ця залежність показана на рис. 4.13. Якщо ви розглядаєте обтікання тупого кута при $\Theta_0 > \Theta_{пр}$, то після повороту потік слідує не по стіні, а по променю, що відповідає куту $\Theta_{пр}$. При цьому швидкість $v \rightarrow v_{max}$, а тиск і густина наближаються до нуля ($p \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$). Зауважимо, що ці результати отримані як межа теорії, заснованої на гіпотезі суцільності. Очевидно, що при $p \rightarrow 0$, $\rho \rightarrow 0$ гіпотеза суцільності не виконується.

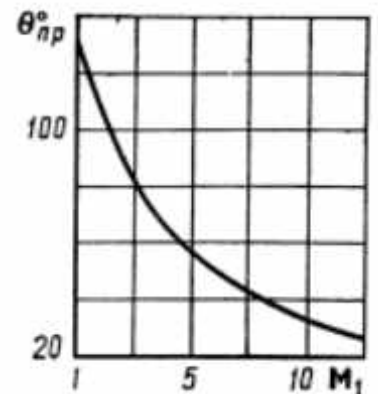


Рис. 4.13. Залежність граничного кута повороту потоку від числа M_1 .

5. ТЕОРІЯ СТРИБКІВ УЩІЛЬНЕННЯ

5.1. ВИНИКНЕННЯ СТРИБКІВ УЩІЛЬНЕННЯ

Одна з особливостей надзвукових течій полягає в тому, що у ряді випадків основні параметри, що характеризують рух та стан газу, не є безперервними функціями. При гальмуванні надзвукового потоку виникають поверхні, на

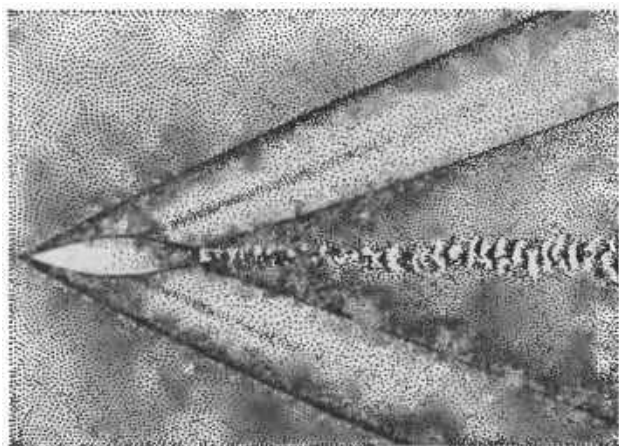


Рис. 5.1. Обтікання гостроногого тіла надзвуковим потоком

яких параметри потоку змінюються стрибкоподібно. Місця різкого стрибкоподібного збільшення тиску, щільності та температури та зменшення швидкості називають стрибками ущільнення.

На рис. 5.1 показано стрибки ущільнення, що виникають при обтіканні гостроногого тіла надзвуковим потоком. У цьому

випадку за певних умов (див. § 5.5) стрибок починається на гострій кромці тіла і називається приєднаним стрибком ущільнення.

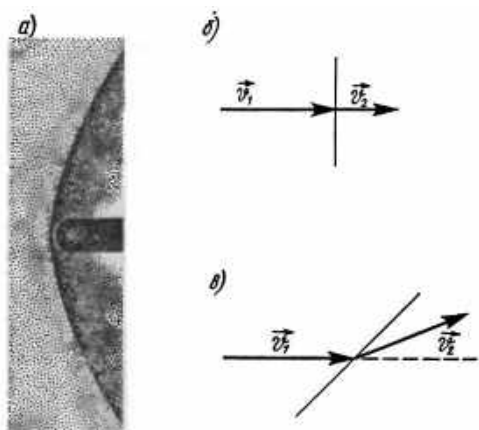


Рис. 5.2. Криволінійний стрибок ущільнення (а), елементи прямого (б) та косоногого (в) стрибків ущільнення

У багатьох випадках стрибок ущільнення утворюється на певній відстані від носової частини тіла, що обтікається, і має криволінійну форму (рис. 5.2, а). Такий стрибок ущільнення називається від'єднаним (що відійшов).

Поверхні стрибків ущільнення можуть бути перпендикулярними напрямку швидкості потоку, що набігає (рис. 5.2, б), і не перпендикулярними їй (рис. 5.2, в). У першому випадку стрибок ущільнення

називається прямим, тоді як у другому — косим. Очевидно, що криволінійний стрибок ущільнення (рис. 5.2 а) складається з елемента прямого стрибка (в центральній частині), плавно переходить в криволінійну поверхню, кожен елемент якої являє собою косий стрибок ущільнення.

Виникнення стрибків ущільнення пояснюється характером поширення збурень у надзвуковому потоці.

У дозвуковому потоці обурення поширюються у всіх напрямках, зокрема проти напрямку швидкості потоку. Тому хвиля підвищеного тиску, що виникає, наприклад, перед тілом, поширюючись вперед, деформує потік, що набігає, при цьому лінії струму викривляються вже перед тілом. Потік заздалегідь пристосовується до обтікання тіла, «відчуваючи» його присутність. Уздовж нульової лінії струму швидкість безперервно зменшується від v_∞ до $v = 0$ у критичній точці, а тиск зростає від p_∞ , до тиску гальмування p_0 . Тому у дозвуковому потоці стрибки ущільнення не виникають.

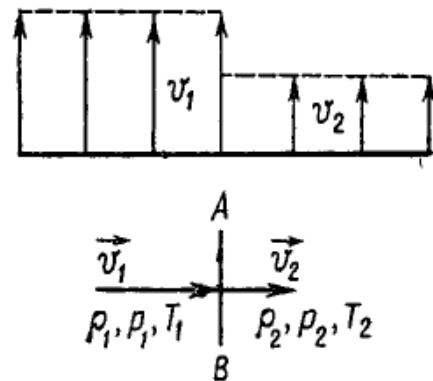
У надзвуковому потоці обурення не можуть поширюватися назустріч потоку, що набігає. Тому безпосередньо перед загостреним тілом із малим кутом напіврозчину ($\theta < \theta_{\max}$, (див. § 5.5) потік не обурений. При зустрічі з таким тілом напрямок швидкості потоку раптово змінюється. Це призводить до стрибкоподібної зміни значень швидкості потоку, тиску, щільності та температури. Тоді виникає приєднаний стрибок ущільнення.

При обтіканні затупленого або загостреного тіла при $\theta > \theta_{\max}$ з'являється сильна хвиля підвищеного тиску, яка поширюється назустріч потоку зі швидкістю, що перевищує швидкість звуку. У міру поширення хвилі підвищеного тиску інтенсивність падає. При цьому зменшується швидкість її поширення. Тому стрибок ущільнення виникає перед тілом і на такій відстані від нього, коли швидкість поширення хвилі підвищеного тиску стає рівною швидкості потоку, що набігає. Відстань між від'єднаним криволінійним стрибком ущільнення та тілом залежить від форми тіла та швидкості незбуреного потоку.

Очевидно, що чим більше v_∞ , тим ближче розташовується стрибок ущільнення до тіла.

Стрибок ущільнення є не поверхню, а шар, дуже малої товщини (порядку довжини вільного пробігу молекул). Тому математично стрибки ущільнення замінюють поверхнями розриву. Виняток становлять, наприклад, стрибки ущільнення, потоках розрідженого газу.

У стрибках ущільнення відбувається гальмування потоку - швидкість потоку зменшується ($v_2 < v_1$), тиск, щільність, температура, ентальпія зростають ($p_2 > p_1$, $\rho_2 > \rho_1$, $T_2 > T_1$, $i_2 > i_1$). При цьому збільшується і ентропія, так як у стрибках ущільнення відбуваються незворотні переходи механічної енергії до теплової.



5.2. ОСНОВНІ СПІВІДНОШЕННЯ ДЛЯ ПРЯМОГО СТРИБКА УЩІЛЬНЕННЯ

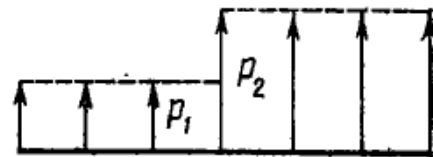


Рис. 5.3. Характер зміни швидкості та тиску в стрибку ущільнення

Розглянемо основні властивості стрибків ущільнення. Припустимо, що у деякому перерізі АВ надзвукового потоку газу утворився прямий стрибок ущільнення. Позначимо параметри стану газу до стрибка p_1, ρ_1, T_1 і швидкість v_1 , а після стрибка — p_2, ρ_2, T_2, v_2 . На рис. 5.3 показаний характер зміни швидкості та тиску у прямому стрибку ущільнення. Для визначення залежності між параметрами газу за стрибком ущільнення та перед ним використовуємо рівняння нерозривності, кількості руху, енергії та стану газу.

Рівняння нерозривності, що виражає рівність секундних мас газу до і після стрибка, представимо у вигляді

$$\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2 \quad (5.1)$$

Так як кількість руху газу при проходженні через площину стрибка змінюється внаслідок різниці тисків ($p_2 - p_1$), то

$$\rho_1 v_1(v_1 - v_2) = p_2 - p_1. \quad (5.2)$$

Рівність повної питомої енергії перед стрибком і за ним має вид

$$v_1^2 / 2 + i_1 = v_2^2 / 2 + i_2 = i_0. \quad (5.3)$$

Можливість застосування цього рівняння до перерізів трубки струму, розташованим з різних боків від площини стрибка, обумовлюється тим, що процес стиснення газу в стрибку ущільнення можна вважати адіабатичним. При проходженні газу через стрибок його повна енергія не змінюється, а відбувається лише перерозподіл різних видів енергії; внаслідок зменшення кінетичної енергії ентальпія газу збільшується. Використовуючи рівняння стану газу, маємо

$$p_2 = R \rho_2 T_2. \quad (5.4)$$

Система рівнянь (5.1)-(5.4) дозволяє визначити параметри тазу за стрибком за їх значеннями перед ним.

З умови сталості повної питомої енергії i_0 до та після стрибка ущільнення впливає, що температура гальмування у стрибку ущільнення не змінюється. Тоді, користуючись формулами (4.3) і (4.10), отримуємо, що в потоках до та після стрибка ущільнення максимальна $v_{\max}$ та критична $a_{\text{кр}}$ швидкості мають однакові значення. Отже, потоки до і після стрибка ущільнення значення питомих витрат ρv , повної питомої енергії i_0 , температури гальмування T_0 , максимальної $v_{\max}$ і критичної $a_{\text{кр}}$ швидкостей однакові.

Отримаємо формулу визначення швидкості потоку за стрибком ущільнення. З рівняння (5.2) $v_1 - v_2 = p_2/(\rho_2 v_2) - p_1/(\rho_1 v_1)$. Помножимо обидві частини цього рівняння на добуток швидкостей $v_1 v_2$:

$$v_1 v_2 (v_1 - v_2) = (p_2/\rho_2) v_1 - (p_1/\rho_1) v_2. \quad (5.5)$$

Запишемо співвідношення p/ρ через швидкість потоку. Для цього уявимо p/ρ у наступному вигляді: $p/\rho = a^2/k$, де a^2 можна визначити за формулою (4.9). Тоді

$$p/\rho = [(k-1)/(2k)] (v_{\max}^2 - v^2); \quad (5.6)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1/\rho_1 &= [(k-1)/(2k)] (v_{\max}^2 - v_1^2); \\ p_2/\rho_2 &= [(k-1)/(2k)] (v_{\max}^2 - v_2^2). \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

Підставляючи в рівняння (5.5) відносини p_2/ρ_2 та p_1/ρ_1 з (5.7), отримаємо

$$v_1 v_2 (v_1 - v_2) = [(k-1)/(2k)] [v_{\max}^2 (v_1 - v_2) - v_1 v_2 (v_1 - v_2)].$$

У стрибку ущільнення $v_1 \neq v_2$. Тому, скорочуючи обидві частини цього рівняння на різницю $(v_1 - v_2)$, в результаті простих перетворень маємо

$$v_1 v_2 = [(k-1)/(k+1)] v_{\max}^2, \text{ або } v_1 v_2 = a_{\text{кр}}^2. \quad (5.8)$$

Вираз (5.8) називається формулою Прандтля.

Позначимо наведену швидкість до стрибка ущільнення $\lambda_1 = v_1/a_1$, за стрибком — $\lambda_2 = v_2/a_2$. Тоді із формули (5.8)

$$\lambda_1 \lambda_2 = 1. \quad (5.9)$$

У формулах (5.8) та (5.9) швидкість потоку до стрибка ущільнення надзвукова: $v_1 > a_1 (\lambda_1 > 1)$. Тому швидкість за стрибком ущільнення, що дорівнює $v_2 = a_{кр}^2 / v_1$, завжди менша за швидкість звуку ($v_2 < a_2, \lambda_2 < 1$). Отже, під час переходу через прямий стрибок ущільнення надзвуковий потік стає дозвуковим.

Отримаємо формулу визначення відношення v_2/v_1 залежно від числа M_1 . З формули (5.8) отримаємо

$$v_2/v_1 = a_{кр}^2 / v_1^2. \quad (5.10)$$

Уявимо вираз $a_{кр}^2 / v_1^2$ у наступному вигляді:

$$\frac{a_{кр}^2}{v_1^2} = \frac{a_{кр}^2}{a_1^2} \frac{1}{M_1^2} = \frac{T_{кр}}{T_0} \frac{T_0}{T_1} \frac{1}{M_1^2} = \frac{2}{k+1} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right) \frac{1}{M_1^2}.$$

Підставляючи отриманий вираз у формулу (5.10), маємо

$$v_2/v_1 = [M_1^2 + 2/(k-1)] / \{ [(k+1)/(k-1)] M_1^2 \}. \quad (5.11)$$

З формули (5.11) випливає, що чим більше число M_1 тим більша відносна зміна швидкості в прямому стрибку ущільнення, тобто чим більше число M_1 тим інтенсивніший стрибок ущільнення.

Отримаємо формули визначення зміни тиску p_2/p_1 , щільності ρ_2/ρ_1 і температури T_2/T_1 у прямому стрибку ущільнення залежно від числа M_1 . З рівняння (5.2)

$$p_2/p_1 = 1 + (\rho_1/p_1) v_1^2 (1 - v_2/v_1).$$

Підставляючи сюди v_2/v_1 за формулою (5.11) та приймаючи $\rho_1/p_1 = k/a_1^2$, маємо

$$p_2/p_1 = [2k/(k+1)] M_1^2 - (k-1)/(k+1). \quad (5.12)$$

З формули (5.12) випливає, що зміна тиску в прямому стрибку ущільнення для цього газу залежить лише від числа M_1 (рис. 5.4). При $M_1=1$ відношення $p_2/p_1=1$, а за $M_1 \rightarrow \infty$ відношення необмежено зростає.

Для визначення відношення ρ_2/ρ_1 скористаємось рівнянням (5.1), тобто $\rho_2/\rho_1=v_1/v_2$. Підставляючи сюди відношення v_2/v_1 (5.11), маємо

$$\rho_2/\rho_1=[(k+1)/(k-1)]M_1^2/[M_1^2 + 2/(k-1)]. \quad (5.13)$$

Звідси випливає, що за $M_1=1$ співвідношення $\rho_2/\rho_1=1$, а

$$\lim_{M_1 \rightarrow \infty} \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{k+1}{k-1}.$$

Отже, при переході через прямий стрибок ущільнення щільність зростає, але не більше ніж $(k+1)/(k-1)$ разів (для повітря при $k=1,4$ не більше ніж у шість разів). Крива залежності від M_1 представлена на рис. 5.5.

Зростання температури можна визначити, користуючись рівнянням стану (5.4):

$$T_2/T_1=(p_2/p_1)^{1/k} / (\rho_2/\rho_1), \quad (5.14)$$

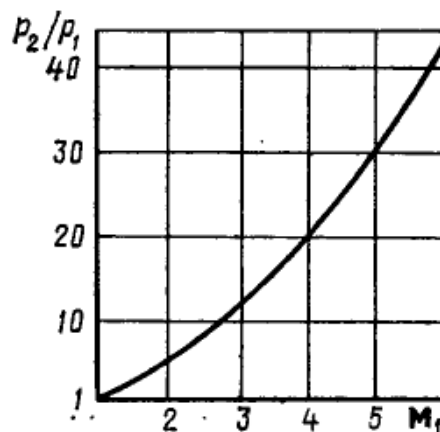


Рис. 5.4. Відносне зміна тиску у прямому стрибку ущільнення залежно від числа M_1

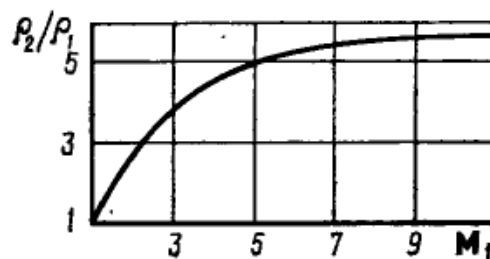


Рис. 5.5. Відносна зміна щільності у прямому стрибку ущільнення залежно від числа M_1

де відношення p_2/p_1 та ρ_2/ρ_1 можна знайти за формулами (5.12) та (5.13). Крива залежності відношення T_2/T_1 від M_1 показана на рис. 5.6.

З формули (5.14) випливає, що за $M_1 = 1$ відношення $T_2/T_1 = 1$, а за $M_1 \rightarrow \infty$ відношення температур T_2/T_1 необмежено зростає. Наприклад, при $M_1=10$ температура повітря за стрибком ущільнення більша за температуру перед стрибком приблизно в 20 разів.

За відомими відносинами v_2/v_1 з (5.11) и T_2/T_1 та (5.14) можна визначити число M_2 :

$$M_2 = M_1 (v_2/v_1) (T_1/T_2)^{0.5}.$$

Значення p_2/p_1 , ρ_2/ρ_1 , T_2/T_1 та M_2 при заданому значенні числа M_1 можна визначити, використовуючи таблиці газодинамічних функцій прямого стрибка ущільнення.

5.3. ПОРІВНЯННЯ СТИСКУВАННЯ У СТИБК ЩІЛЬННЯ З ІЗЕНТРОПІЧНИМ СТИСКУВАННЯМ

При ізентропічному перебігу зміна параметрів стану газу визначається співвідношенням

$$p_2/p_1 = (\rho_2/\rho_1)^k. \quad (5.15)$$

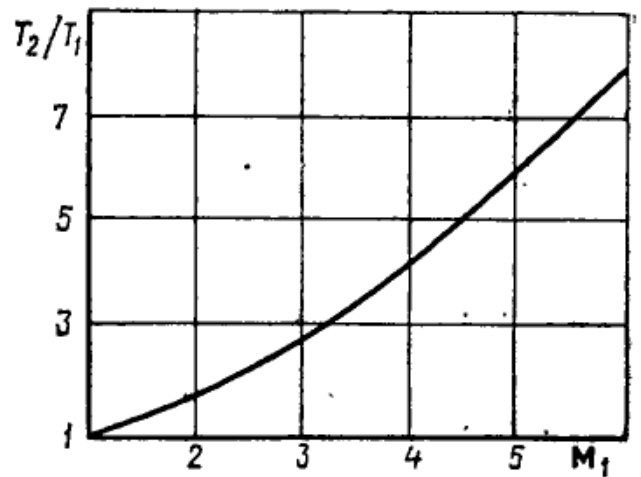


Рис. 5.6. Відносна зміна температури у прямому стрибку ущільнення в залежності від числа M_1

З рівняння (5.15) слід, що з необмеженому зростанні тиску щільність збільшується необмежено. Криву залежності тиску від густини при ізентропічному перебігу називають ізенетропой. Отримаємо співвідношення, що зв'язує тиск і щільність газу до та за стрибком ущільнення. Для цього скористаємось рівняннями (5.12) та (5.13). З рівняння (5.13)

$$M_1^2 = \left(\frac{2}{k-1} \frac{p_2}{p_1} \right) / \left(\frac{k+1}{k-1} - \frac{p_2}{p_1} \right);$$

підставимо цей вираз у рівняння (5.12). Тоді

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1} - 1 \right) / \left(\frac{k+1}{k-1} - \frac{p_2}{p_1} \right). \quad (5.16)$$

Співвідношення (5.16) виражає закон ударної адіабати Гюгоніо.

На рис. 5.7 зображено два закони: ізентропічний та закон ударної адіабати в координатах p_2/p_1 та ρ_2/ρ_1 .

Користуючись рівнянням стану газу до стрибка ущільнення $p_1 = R\rho_1 T_1$ і за стрибком $p_2 = R\rho_2 T_2$ для прямого стрибка ущільнення можна вивести залежність між відносинами тисків p_2/p_1 та температур T_2/T_1 . Для цього в рівнянні (5.16) треба виразити щільність через температуру та тиск:

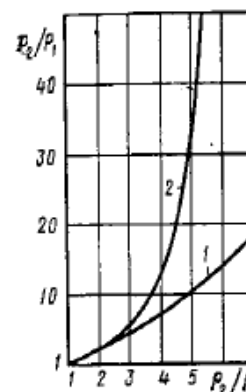


Рис. 5.7.
Ізентропа та
ударна
адіабата в
координатах
 p_2/p_1 , ρ_2/ρ_1 :
1 —
ізентропа; 2
— ударна
адіабата

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} - 1 \right) / \left(\frac{k+1}{k-1} - \frac{p_2}{p_1} \frac{T_1}{T_2} \right).$$

Вирішуємо це рівняння щодо T_2/T_1 :

$$\frac{T_2}{T_1} = \left[\frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1} + \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^2 \right] / \left(\frac{k+1}{k-1} \frac{p_2}{p_1} + 1 \right). \quad (5.17)$$

На рис. 5.8, як і на рис. 5.7, зображено два закони: ізентропічний і закон ударної адіабати, але тільки в координатах p_2/p_1 и T_2/T_1 . З рис. 5.8 випливає, що при однакових відносинах тисків температура при стрибкоподібному (ударному) стисканні більша, ніж при ізентропічному. Сильний розігрів газу в стрибку є причиною того, що густина газу за стрибком навіть при необмеженому зростанні тиску залишається кінцевою величиною.

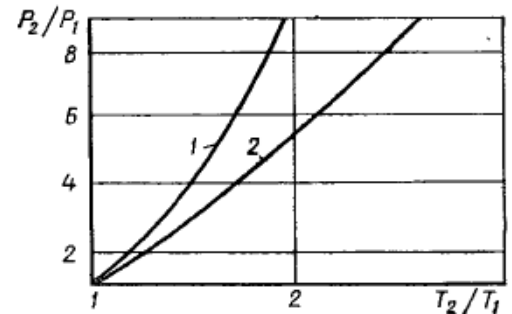


Рис. 5.8. Ізентропа та ударна адіабата в координатах p_2/p_1 .

5.4. ТИСК ГАЛЬМУВАННЯ ЗА ПРЯМИМ СТРИБКОМ УЩІЛЬНЕННЯ

Позначимо v_1 , ρ_1 , p_1 відповідно швидкість, щільність і тиск у надзвуковому потоці перед прямим стрибком ущільнення: v_2 , ρ_2 , p_2 — швидкість, щільність і тиск безпосередньо за стрибком ущільнення, а p_{01} і p_{02} — тиск ізентропічного гальмування і гальмування за прямим стрибком (Рис. 5.9). Відношення тисків гальмування

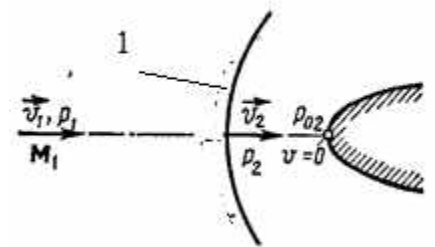


Рис. 5.9. Тиск гальмування за прямим стрибком ущільнення
1-поверхня стрибка ущільнення

$$p_{02}/p_{01} = \sigma \quad (5.18)$$

називається коефіцієнтом відновлення повного тиску.

Виведемо формули для визначення відношення p_{02}/p_1 та коефіцієнта σ .
Для цього представимо відношення p_{02}/p_1 у наступному вигляді:

$$p_{02}/p_1 = (p_2/p_1)(p_{02}/p_2). \quad (5.19)$$

Співвідношення p_2/p_1 знайдемо за формулою (5.12):

$$p_2/p_1 = [(k-1)/(k+1)] M_1^2 [2k/(k-1) - 1/M_1^2]. \quad (5.20)$$

За формулою (4.5) для ізентропічного перебігу

$$p_2/p_{02} = (1 - v_2^2/v_{\max}^2)^{k/(k-1)}$$

або, використовуючи формулу (5.8),

$$p_2/p_{02} = \{1 - [(k-1)/(k+1)]v_2/v_1\}^{k/(k-1)}.$$

Якщо у цій формулі замінити відношення швидкостей v_2/v_1 за формулою (5.11), то

$$p_2/p_{02} = [2(k-1)/(k+1)^2]^{k/(k-1)} (2k/(k-1) - 1/M_1^2)^{k/(k-1)}, \quad (5.21)$$

Підставляючи у вираз (5.19) значення p_2/p_1 і p_{02}/p_2 з (5.20) і (5.21), отримаємо шукану формулу для тиску в критичній точці за прямим стрибком ущільнення:

$$\frac{p_{02}}{p_1} = \frac{k-1}{k+1} \left[\frac{(k+1)^2}{2(k-1)} \right]^{k/(k-1)} \frac{M_1^2}{[2k/(k-1) - 1/M_1^2]^{1/(k-1)}}, \quad (5.22)$$

яка при $k = 1,4$ набуває вигляду

$$p_{02}/p_1 = 166,7 M_1^2 / (7 - 1/M_1^2)^{2,5}. \quad (5.22^1)$$

Формули (5.22) та (5.22') називаються формулами Релея.

Залежність p_{02}/p_1 від M_1 зображено на рис. 5.10. Для порівняння тут наведено криву, що визначає тиск у критичній точці p_{01}/p_1 з (4.21) за відсутності стрибка ущільнення (тиск ізентропічного гальмування).

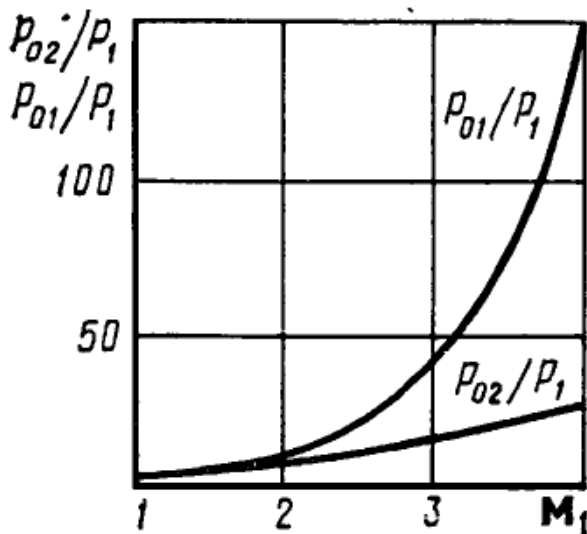


Рис. 5.10. Залежності відношень p_{02}/p_1 та p_{01}/p_1 від числа M_1

Виключаючи з формул (5.21) та (4.21) тиск p_1 отримуємо вираз для коефіцієнта $\sigma = p_{02}/p_1$:

$$\sigma = \frac{k-1}{k+1} \left[\frac{(k+1)^2}{2(k-1)} \right]^{k/(k-1)} \frac{M_1^2}{\left(\frac{2k}{k-1} - \frac{1}{M_1^2} \right)^{1/(k-1)} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \right)^{k/(k-1)}}; \quad (5.23)$$

за $k = 1,4$

$$\sigma = 166,7 M_1^2 / (7 - 1/M_1^2)^{2,5} (1 + 0,2 M_1^2)^{3,5}. \quad (5.23^1)$$

Залежність коефіцієнта σ від числа M_1 наведена на рис. 5.11. При $M_1 = 1$ коефіцієнт $\sigma = 1$ ($p_{02} = p_{01}$), а при $M_1 > 1$ коефіцієнт $\sigma < 1$. Зі зростанням числа M_1 коефіцієнт σ зменшується (втрати повного тиску зростають).

Значення p_{02}/p_1 та σ можна визначити також у таблиці газодинамічних функцій [12].

Формула Релея (5.22) дозволяє, зокрема, визначити число M_1 надзвукового потоку за вимірюваними значеннями тисків p_{02} та p_1 .

Для наочності ілюстрації незворотних втрат у стрибках ущільнення порівнюємо параметри потоку за стрибком ущільнення та при ізентропіческом гальмуванні. У прямому стрибку ущільнення ентропія по всіх лініях струму зростає на ту саму величину. Тому за таким стрибком ущільнення потік також ізентропічним ($s_2 = \text{const}$). Зважаючи на те, що температура гальмування T_0 , максимальна та критична швидкості в адіабатичних потоках до та після стрибка ущільнення однакові, для визначення ентропії за стрибком ущільнення достатньо побудувати сімейство з ентропій $p - p_0(1 - v^2/v_{\max}^2)^{k/(k-1)}$, відповідних різним ізентропіческим течіям з однаковою температурою гальмування T_0 і змінним тиском гальмування p_0 (рис. 5.12). Розглянемо можливі стрибкоподібні переходи з однієї з цих кривих на іншу.

Визначимо похідну:

$$dp/dv = -[p_0 k / (k-1)] (1 - v^2/v_{\max}^2)^{1/(k-1)} 2v/v_{\max}^2.$$

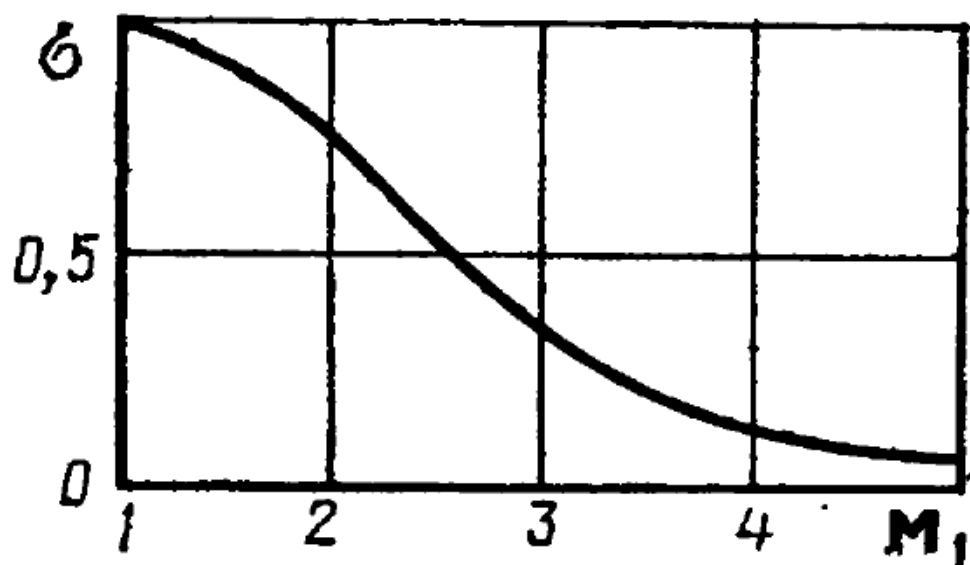


Рис. 5.11. Залежність коефіцієнта відновлення повного тиску від числа M_1

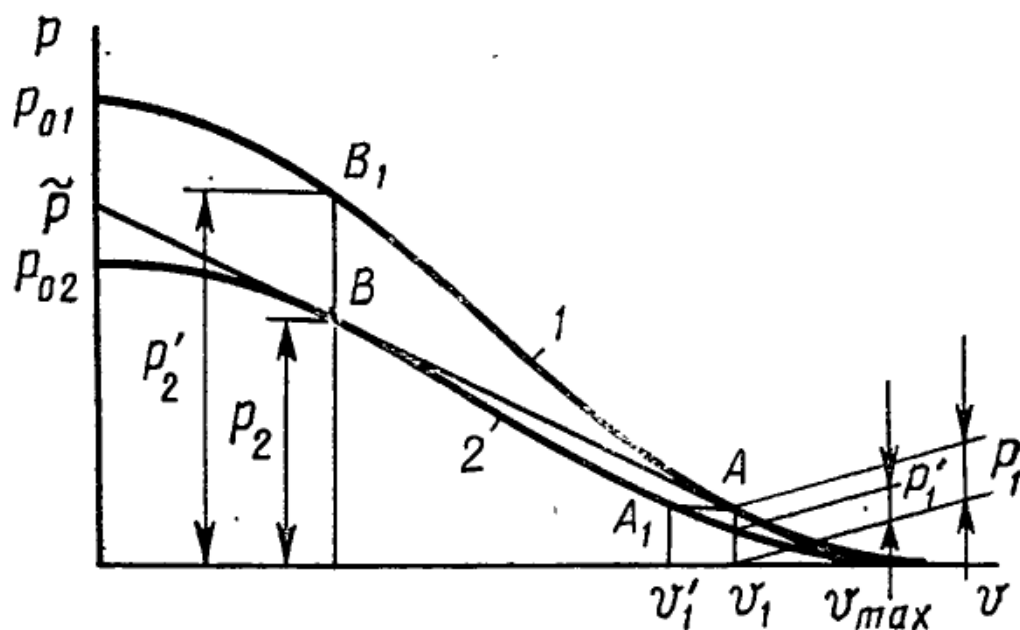


Рис. 5.12. Необоротні втрати у стрибках ущільнення

Звідси, використовуючи формули (4.3) та (4.6), отримаємо $dp/dv = -\rho v$. Так як у прямому стрибку ущільнення $\rho_1 v_1 = \rho_2 v_2$, то $(dp/dv)_1 = (dp/dv)_2$ тобто кути нахилу дотичних до зентроп до і після стрибка ущільнення при швидкостях відповідно v_1 і v_2 повинні бути однаковими.

Знайдемо відрізки, що відсікають на осі тиску. З рис. 5.12 випливає, що $\tilde{p} = p + \rho v^2$. Тоді, згідно з рівнянням (5.2), $\tilde{p}_1 = \tilde{p}_2$. Отже, стрибок з кривою 1 (з ентропією s_1) на криву 2 (з ентропією s_2) відбувається між точками А і В, у яких дотичні до кривих $p = p(v)$ збігаються.

З рис. 5.12 видно, що у стрибку ущільнення відбуваються незворотні втрати механічної енергії. Насамперед зазначимо, що у стрибку ущільнення тиск зростає менш інтенсивно, ніж іззентропическом гальмуванні до тієї ж швидкості $v_2(p_2 < p_2^1)$.

При прискоренні потоку за стрибком ущільнення до початкової швидкості v_1 тиск у потоці за стрибком ущільнення менше, ніж тиск у оборотному іззентропическом перебігу: $p_1^1 < p_1$. При прискоренні потоку за стрибком ущільнення до швидкості v_1^1 , коли тиск стає рівним початковому тиску p_1 , $v_1^1 < v_1$. За повного гальмування потоку ($v = 0$) $p_{02} < p_{01}$. При одній і тій самій швидкості v_1 в потоках до і після стрибка ущільнення відбуваються незворотні втрати тиску, при однаковому тиску p_1 втрати швидкості.

Таким чином, у стрибках ущільнення відбуваються незворотні перетворення механічної енергії на теплову. Чим сильніший стрибок ущільнення, що більше приріст ентропії, то більше в ньому втрати повного тиску.

Встановимо залежність між зміною ентропії у стрибку ущільнення та коефіцієнтом відновлення повного тиску σ . Значення ентропії перед стрибком ущільнення і його визначаються за формулами $s_1 = c_v \ln(p_1/\rho_1^k)$, $s_2 = c_v \ln(p_2/\rho_2^k)$. Представимо відносини p_1/ρ_1^k і p_2/ρ_2^k через відповідні параметри гальмування $p/\rho^k = p_0/\rho_0^k$. Підставляючи сюди p_0 із рівняння стану $1/\rho_0 = RT_0/p_0$, отримуємо $p/\rho^k = R^k T_0^k / p^{k-1}_0$. Використовуючи цей вираз і з огляду на те, що температура

гальмування при цьому не змінюється, знайдемо приріст ентропії в стрибку ущільнення:

$$s_2 - s_1 = -c_v \ln(p_{02}/p_{01})_{k-1}, \text{ или } s_2 - s_1 = -R \ln \sigma. \quad (5.24)$$

Звідси випливає, що чим більший приріст ентропії, тим менший коефіцієнт σ , тобто більше втрати повного тиску.

5.5. ОСНОВНІ СПІВДІЛЕННЯ ДЛЯ КОСОГО СТИБКА УЩІЛЬНЕННЯ

Розглянемо обтікання увігнутого тупого кута (клина з кутом напіврозчину, що дорівнює θ) надзвуковим потоком (рис. 5.13).

Як зазначалося в § 5.1, у своїй безперервність

течії порушується і за певних умов виникає косий стрибок ущільнення, появу якого можна обґрунтувати так. Через точку O проведемо дві лінії збурень: лінію BB' під кутом μ_1 до початкового напрямку швидкості потоку $\vec{v}_1$ [$\mu_1 = \arcsin(1/M_1)$] та лінію BB'' під кутом μ_2 до напрямку швидкості потоку $\vec{v}_2$ [$\mu_2 = \arcsin(1/M_2)$].

Зважаючи на те, що $\mu_2 > \mu_1$, лінія обурення OB'' розташовується перед лінією OB' тобто зміна параметрів газу має закінчитися на лінії обурення OB'' , що лежить в області, де ця зміна ще не починалася. Звідси випливає, що в цьому випадку безперервна зміна параметрів газу неможлива. При порівняльно-невеликих значеннях кута повороту потоку стрибок ущільнення розташовується між лініями обурення OB' і OB'' . Положення косого стрибка OK визначимо за допомогою кута β , що відраховується від напрямку швидкості незбуреного потоку $\vec{v}_1$.

Визначимо параметри потоку за косим стрибком ущільнення. Розкладемо вектори швидкостей $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ на дві складові: v_{in} , v_{2n} — за нормаллю до площини стрибка ущільнення та v_{1t} , v_{2t} — вздовж стрибка ущільнення (рис. 5.14). Для

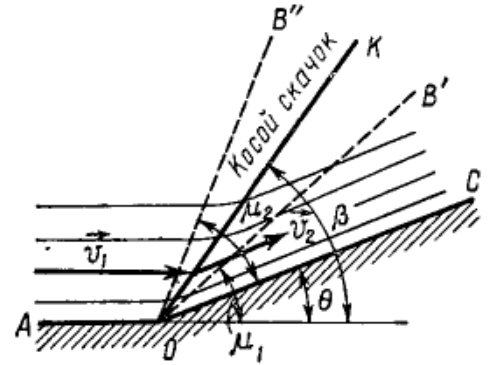


Рис. 5.13. Схема обтікання увігнутого тупого кута надзвуковим потоком

знаходження швидкості, тиску, щільності та температури газу за косим стрибком ущільнення використовуємо рівняння нерозривності, кількості руху, енергії та стану. Рівняння нерозривності у разі має вигляд

$$\rho_1 v_{in} = \rho_2 v_{2n}. \quad (5.25)$$

Використовуємо рівняння зміни кількості руху, застосувавши його для напрямку, перпендикулярного площині стрибка ущільнення. Це рівняння можна уявити так само, як і для випадку прямого стрибка, з тією лише відмінністю, що замість швидкостей v_1 і v_2 рівняння міститиме їх нормальні складові:

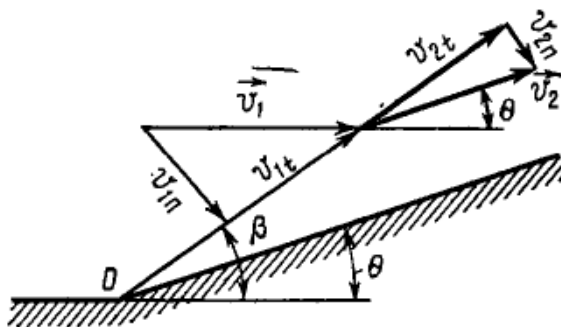


Рис. 5.14. Складові швидкості потоку до та за косим стрибком ущільнення

$$\rho_1 v_{in} (v_{in} - v_{2n}) = p_2 - p_1. \quad (5.26)$$

Представимо це рівняння для напрямку, паралельного площині стрибка ущільнення: $\rho_1 v_{in} (v_{1t} - v_{2t}) = 0$, звідки $v_{1t} = v_{2t} = v_t$ тобто дотична складова швидкості при переході через площину косого стрибка ущільнення не змінюється. Тому косий стрибок ущільнення - це стрибок нормальної складової швидкості.

При адіабатичній течії повна питома енергія в стрибку ущільнення не змінюється $v_1^2/2 + i_1 = v_2^2/2 + i_2 = i_0$, где $v_1^2 = v_{1n}^2 + v_t^2$, $v_2^2 = v_{2n}^2 + v_t^2$,

Підставляючи в рівняння енергії ці вирази, отримуємо

$$v_{1n}^2/2 + i_1 = v_{2n}^2/2 + i_2 = i_0 - v_t^2/2. \quad (5.27)$$

Порівнюючи рівняння (5.25)-(5.27) з відповідними рівняннями (5.1)-(5.3), зауважуємо, що основні рівняння для косого стрибка ущільнення можна отримати з рівнянь для прямого стрибка шляхом заміни в них швидкостей потоку v_1 і v_2 їх нормальним складовим v_{1n} , v_{2n} та заміни повної питомої енергії i_0 питомою енергією $i_0^* = i_0 - v_t^2/2$. Для визначення нормальної складової швидкості, тиску, щільності та температури потоку за косим стрибком ущільнення можна скористатися відповідними формулами для прямого стрибка з наступними змінами. У формулу (5.8) замість v_1 і v_2 необхідно підставити v_{1n} і v_{2n} , а $a_{кр}^2$ потрібно замінити величиною $a_{кр}^{*2}$, знайденої за питомою енергією $i_0^* = i_0 - v_t^2/2$:

$$a_{кр}^{*2} = [(k-1)/(k+1)]^2 (i_0 - v_t^2/2) = a_{кр}^{*2} - [(k-1)/(k+1)] v_t^2,$$

$$\text{де } a_{кр}^{*2} = [(k-1)/(k+1)]^2 i_0 = [(k-1)/(k+1)] v_{\max}^2.$$

Тоді для визначення нормальної складової швидкості за косим стрибком ущільнення отримаємо таку формулу:

$$v_{1n} v_{2n} = a_{кр}^{*2} - [(k-1)/(k+1)] v_t^2, \quad (5.28)$$

де

$$v_{1n} = v_1 \sin \beta; \quad v_t = v_1 \cos \beta. \quad (5.29)$$

З формули (5.28) випливає, що значення нормальної складової швидкості потоку v_{2n} залежить від v_1 і кута нахилу стрибка ущільнення, причому $v_{2n} < a_2$. Від тих самих параметрів залежить і швидкість $v_2 = (v_{2n}^2 + v_t^2)^{0.5}$. При $\beta = \pi/2$ складова швидкості $v_t = 0$ та формула (5.28) збігається з формулою (5.8) для прямого стрибка ущільнення. При порівняно слабких косих стрибках ущільнення (при малих кутах β) дотична складова швидкості за величиною мало відрізняється від v_1 . Тому швидкість v_2 може бути більшою за швидкість звуку. При сильних косих стрибках ущільнення з кутом β , близьким до $\pi/2$

швидкість потоку за стрибком ущільнення дозвукова. Отже, залежно від кута β потік за косим стрибком ущільнення може бути як надзвуковим, так і дозвуковим.

Виведемо формули для визначення тиску, щільності та тиску гальмування за косим стрибком ущільнення. Для цього у формулах (5.12), (5.13) і (5.23) для прямого стрибка ущільнення достатньо замінити число M_1 числом $M_1 \sin \beta$, знайденим за нормальною складовою швидкості потоку v_{1n} . В результаті отримаємо:

$$p_2/p_1 = [2k/(k+1)] M_1^2 \sin^2 \beta - (k-1)/(k+1); \quad (5.30)$$

$$\rho_2/\rho_1 = \frac{[(k+1)/(k-1)] M_1^2 \sin^2 \beta}{M_1^2 \sin^2 \beta + 2/(k-1)}; \quad (5.31)$$

$$\sigma = \left[\frac{k-1}{k+1} \right] \left[\frac{(k+1)^2}{2(k-1)} \right]^{k/(k-1)} M_1^2 \sin^2 \beta / \left[\left(\frac{2k}{k-1} - \frac{1}{M_1^2 \sin^2 \beta} \right)^{1/(k-1)} \left(1 + \frac{k-1}{2} M_1^2 \sin^2 \beta \right)^{k/(k-1)} \right]. \quad (5.32)$$

Відношення температур визначається, як і для прямого стрибка, виходячи з рівняння стану:

$$T_2/T_1 = (p_2/p_1)/(\rho_2/\rho_1). \quad (5.33)$$

Рівняння ударної адіабати для косого стрибка залишиться, очевидно, тим самим, що й прямого (5.16) чи (5.17), оскільки у нього не входять ні швидкість, ні повна енергія газу.

З формул (5.30) - (5.32) слід, що зміна параметрів потоку в косому стрибку ущільнення незрівнянно менше, ніж у прямому стрибку ущільнення.

При обтіканні тіл замість одного може виникнути система послідовно розташованих стрибків ущільнення. Така система, наприклад, виникає під час

обтікання тіл, утворених ламаними поверхнями. У цьому випадку розрахунок кожного наступного стрибка ущільнення проводиться за параметрами за попереднім стрибком. Сумарний коефіцієнт відновлення повного тиску представимо у такому вигляді:

$$\sigma = p_{0i}/p_{01} = (p_{02}/p_{01}) (p_{03}/p_{02}) \dots (p_{0(i+1)}/p_{0i}),$$

де p_{01} — тиск ізоентропічного гальмування; $p_{02}, / p_{03}, \dots$ — тиску гальмування за стрибками ущільнення (p_{02} — за першим, p_{03} — за другим стрибком і т. д.).

Враховуючи, що $p_{02}/p_{01} = \sigma_1, p_{03}/p_{02} = \sigma_2, p_{0(i+1)}/p_{0i} = \sigma_i$, отримаємо

$$\sigma = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_i, \quad (5.34)$$

Можна показати, що втрати повного тиску в системі стрибків ущільнення виявляються меншими, ніж в одному прямому стрибку ущільнення. Це використовується, зокрема, при гальмуванні потоку у надзвукових повітрозбірниках.

5.6. ЗАЛЕЖНІСТЬ КУТА НАХИЛУ КОСОГО СТРИБКА УЩІЛЬНЕННЯ ВІД КУТА ПОВЕРНЕННЯ ЗВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКУ

Формули, наведені в 5.5, показують, що всі параметри газу за косим стрибком ущільнення залежать від кута β — кута нахилу стрибка ущільнення до напрямку потоку, що набігає. Встановимо залежність кута β від кута повороту потоку θ . З рис. 5.14

$$\operatorname{tg}(\beta - \theta) = v_{2n}/v_t, \quad (5.35)$$

Перетворимо вираз (5.35), використовуючи співвідношення (5.28), (5.29) і ввівши число M_1 :

$$\operatorname{tg}(\beta - \theta) = \{ a_{\text{кр}}^2 / a_1^2 - [(k - 1)/(k + 1)] M_1^2 \cos^2 \beta \} / (M_1^2 \times \sin \beta \cos \beta). \quad (5.36)$$

Так як $a_{\text{кр}}^2/a_1^2 = T_{\text{кр}}/T_1 = (T_{\text{кр}}/T_0)T_0/T_1 = [2/(k + 1)] T_0/T_1$,
и $T_0/T = 1 + (k - 1)M_1^2/2$, то

$$a_{\text{кр}}^2/a_1^2 = [2/(k + 1)] [1 + (k - 1) M_1^2/2].$$

Підставляючи вираз для $a_{\text{кр}}^2/a_1^2$ в (5.36), отримуємо

$$\operatorname{tg}(\beta - \theta) = [2 + (k - 1) M_1^2 \sin^2 \beta] / [(k + 1) M_1^2 \sin \beta \cos \beta]. \quad (5.37)$$

Використовуючи співвідношення $\operatorname{tg}(\beta - \theta) = \operatorname{tg} \beta - \theta / (1 + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \theta)$, рівняння (5.37) можна подати у такому вигляді:

$$\operatorname{tg} \theta = \operatorname{ctg} \beta (M_1^2 \sin^2 \beta - 1) / \{ 1 + M_1^2 [(k + 1)/2 - \sin^2 \beta] \}. \quad (5.38)$$

На рис. 5.15 наведено сімейство кривих залежності кута від кута повороту потоку при різних значеннях M_1 . З рівняння (5.38) випливає, що кут повороту потоку θ дорівнює нулю у двох випадках:

а) коли $M_1^2 \sin^2 \beta - 1 = 0$,
тобто коли $\sin \beta = 1/M_1$ $\beta = \mu$.
Тут кут нахилу стрибка

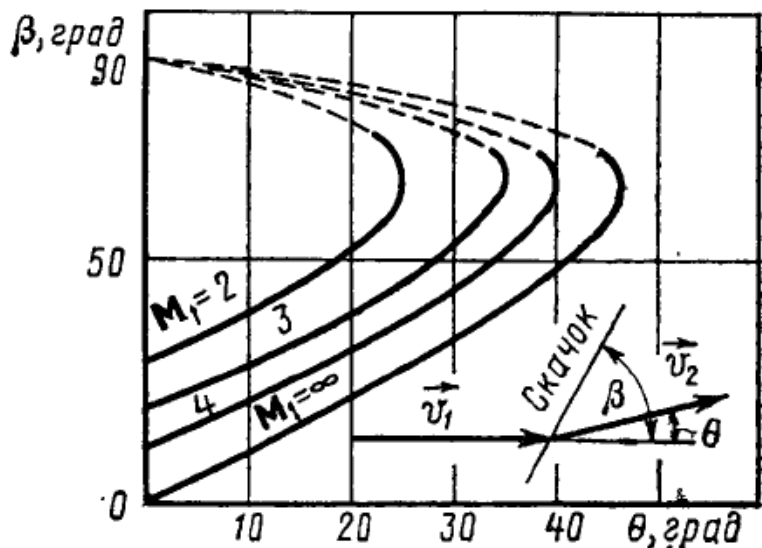


Рис.5.15. Залежність кута нахилу стрибка ущільнення від кута повороту потоку при різних значеннях числа M_1

ущільнення дорівнює куту обурення. І тут стрибок ущільнення перетворюється на слабку хвилю обурень;

б) коли $\operatorname{ctg}\beta = 0$, $\beta = \pi/2$, тобто у прямому стрибку ущільнення.

З рис. 5.15 слід також, що для кожного числа M_1 існує максимальне значення кута повороту потоку $\theta_{\max}$, на який надзвуковий потік може повернутися, пройшовши через косий стрибок ущільнення. Величина $\theta_{\max}$ зростає зі збільшенням числа M_1 . При заданому числі M_1 тому самому куті повороту потоку θ відповідають два положення стрибка, що належать сімейству порівняно слабких і сильних стрибків ущільнення (на рис. 5.15 ділянка кривої, що характеризує сильні стрибки ущільнення, проведений пунктирною лінією).

Якщо кут напіврозкриття клину $\theta_{\text{кл}}$ менше максимального кута відхилення потоку при даному значенні числа M_1 виникає з'єднаний (порівняно слабкий) косий стрибок ущільнення. При цьому для визначення кута нахилу приєднаного стрибка ущільнення потрібно користуватися суцільними кривими, зображеними на рис. 5.15, вважаючи при цьому, що кут повороту потоку дорівнює куту напіврозкриття клину ($\theta = \theta_{\text{кл}}$).

Якщо кут $\theta_{\text{кл}}$ більше $\theta_{\max}$ для даного числа M_1 , то утворюється від'єднаний криволінійний стрибок ущільнення, розташований на деякій відстані від тіла. На нульовій лінії струму кут нахилу стрибка ущільнення дорівнює $\pi/2$, тобто є елемент прямого стрибка ущільнення. У міру віддалення від нульової лінії струму кут нахилу стрибка безперервно зменшується від $\pi/2$ до μ . При цьому ніде в стрибку ущільнення кут повороту потоку не дорівнює $\theta_{\text{кл}}$. Уздовж криволінійного стрибка ущільнення кут повороту потоку змінюється залежно від кута β . На нульовій лінії струму $\theta = 0$, потім він зростає до $\theta_{\max}$, а при подальшому видаленні зменшується до $\theta = 0$.

5.7. УДАРНА ПОЛЯРА

Оскільки кут нахилу стрибка ущільнення залежить від кута повороту потоку, змінюючи кути θ при постійній швидкості $\vec{v}_1$, отримаємо різні кути нахилу стрибків ущільнення. При цьому змінюються значення та напрямки швидкості потоку $\vec{v}_2$. Тому однієї й тієї швидкості до стрибка ущільнення v_1 відповідають різні вектори швидкості $\vec{v}_2$ за стрибком. З'єднуючи кінці векторів $\vec{v}_2$ при незмінній швидкості v_1 отримаємо годограф швидкості за стрибком ущільнення.

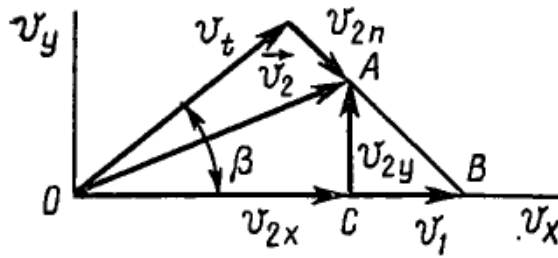


Рис. 5.16. Складові швидкості потоку за косим стрибком ущільнення

Знайдемо рівняння годографа швидкості $v_{2y} = f(v_{2x}, v_1)$. Для цього у площині годографа направимо вісь абсцис уздовж швидкості v_1 (рис. 5.16). Тоді складові швидкості по осях координат можна представити у такому вигляді:

$$v_{2x} = v_t \cos \beta + v_{2n} \sin \beta ; v_{2y} = v_t \sin \beta - v_{2n} \cos \beta. \quad (5.39)$$

Використовуючи співвідношення (5.28) і (5.29), вираз для v_{2x} можна перетворити:

$$v_{2x} = a_{кр}^2 / v_1 + [2 / (k + 1)] v_1 \cos^2 \beta. \quad (5.40)$$

Виключимо з (5.40) кут β . Для цього скористаємось властивістю сталості дотичної складової швидкості у стрибку ущільнення. Зважаючи на те, що $v_{1t} = v_{2t}$, пряма, що з'єднує кінці векторів швидкості $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$, повинна бути перпендикулярна площині косого стрибка ущільнення.

З трикутника ABC випливає, що $\operatorname{ctg} \beta = v_{2y} / (v_1 - v_{2x})$. Звідси

$$\cos^2\beta = v_{2y}^2 / [(v_1 - v_{2x})^2 + v_{2y}^2]. \quad (5.41)$$

Підставляючи вираз (5.41) до рівняння (5.40), отримуємо рівняння годографа швидкості:

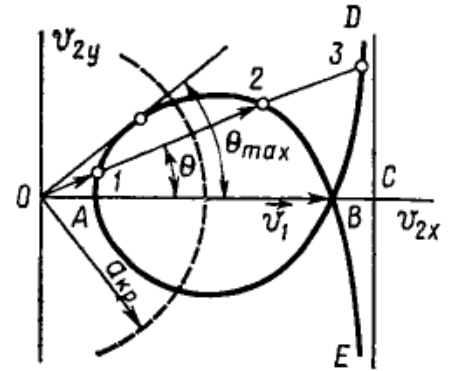


Рис. 5.17. Ударна поляра

$$v_{2y}^2 = (v_1 - v_{2x})^2 \frac{v_{2x} - a_{кр}^2/v_1}{[2/(k+1)]v_1 + a_{кр}^2/v_1 - v_{2x}}. \quad (5.42)$$

З рівняння (5.42) випливає, що годограф швидкості за стрибком ущільнення є кривою, симетричною щодо осі абсцис з вертикальною асимптотою $v_{2x} = [2/(k+1)]v_1 + a_{кр}^2/v_1$ (рис. 5.17). Складова швидкість v_{2y} дорівнює нулю при наступних значеннях v_{2x} :

а) при $v_{2x} = v_2 = v_1$, при цьому значення і напрямок швидкості не змінюються, а стрибок ущільнення перетворюється на слабку хвилю збурень ($\beta = \mu$);

б) під час виконання умови $v_{2x} - a_{кр}^2/v_1 = 0$ чи $v_2 = a_{кр}^2/v_1$. Це значення швидкості потоку за заданої швидкості v_1 відповідає прямому стрибку ущільнення (точка А на рис. 5.17).

Отже, годограф швидкості за стрибком ущільнення складається з петлі, розташованої між точками $A(v_2 - a_{кр}^2/v_1)$ і $B(v_2=v_1)$, та двох нескінченних гілок BD та BE. Крива, що надається рівнянням (5.42), називається *строфоїдою*; петля цієї кривої – *ударною полярою*.

Покажемо, що нескінченні гілки строфоїди фізичного сенсу немає. Для цього з початку координат у площині годографа швидкості проведемо промінь під деяким кутом Θ , який перетне строфоїду в трьох точках (1,2,3). Ці точки при заданому куті повороту потоку дають три математично можливі значення

швидкості за стрибком ущільнення. У точці 3, розташованій на нескінченній гілці строфоїди, $v_2 > v_1$ тобто ця точка відповідає стрибку розрідження. Покажемо, що при адіабатичній течії стрибки розрідження неможливі.

У стрибку ущільнення $p_{02} < p_{01}$. Припустимо, що виникає стрибок розрідження, тобто газ, навпаки, зі стану 2, що характеризується тиском p_2 , щільністю ρ_2 та тиском гальмування p_{02} , переходить у стан 1 з тиском $p_1 < p_2$, щільністю $\rho_1 < \rho_2$ та тиском гальмування $p_{01} > p_{02}$. При цьому ентропія зменшується, що впливає безпосередньо з формули (5.24):

$s_1 - s_2 = -c_v \ln(p_{01}/p_{02})^{(k-1)}$. Так як зменшення ентропії суперечить другому закону термодинаміки, звідси впливає висновок про неможливість існування в адіабатичному потоці стрибків розрідження.

Слід пам'ятати, що умова адіабатичності, на якому ґрунтується неможливість стрибка розрідження, дуже істотно. При неадіабатичних течіях стрибки розрідження можливі і спостерігаються на практиці. Прикладами стрибків розрідження є фронт полум'я в потоці газу, стрибок конденсації, який виникає при конденсації вологи, що знаходиться в газоподібному стані надзвуковому потоці повітря.

Зважаючи на те, що в адіабатичному потоці стрибків розрідження бути не може, нескінченні гілки строфоїди фізичного сенсу не мають.

Таким чином, для даного кута повороту потоку θ можливі два значення швидкості, що відповідають порівняно слабким (точка 2) і сильним (точка 1) стрибкам ущільнення. Проведемо коло радіусом $a_{кр}$ із центром на початку координат, яка розділить ударну поляру на дві частини. Точки, розташовані поза цим колом, відповідають порівняно слабким стрибкам ущільнення з

надзвуковою швидкістю v_2 , всередині кола - сильним стрибком ущільнення з дозвуковою швидкістю v_2 .

Кут нахилу дотичної до ударної поляри, проведеної з початку координат, визначає максимальний кут повороту потоку бтах для заданої швидкості v_1 . Як зазначено в § 5.6, при малих кутах $\theta_{\text{кл}}$ ($\theta_{\text{кл}} < \theta_{\text{max}}$) утворюється приєднаний стрибок ущільнення. Кут повороту потоку при цьому дорівнює куту $\theta_{\text{кл}}$, а з двох можливих рішень реалізується більша швидкість потоку $v_2 > a_{\text{кр}}$ (точка 2 на рис. 5.17). Це підтверджується і тим, що при $\theta \rightarrow 0$ значення швидкості потоку за стрибком ущільнення має збільшуватися та наближатися до швидкості v_1 , а не до $a_{\text{кр}}^2/v_1$.

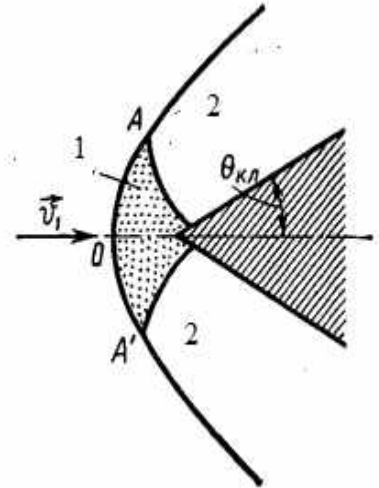


Рис. 5.18. Від'єднаний стрибок ущільнення ($\theta_{\text{кл}} > \theta_{\text{max}}$)
1- дозвукова область
2- надзвукова область

При $\theta_{\text{кл}} > \theta_{\text{max}}$ виникає від'єднаний криволінійний стрибок ущільнення (рис. 5.18). Центральний елемент поверхні хвилі перпендикулярний до вектора швидкості $\vec{v}_1$ (елемент прямого стрибка ущільнення), швидкість потоку за цим елементом — дозвукова. У міру віддалення від точки O уздовж стрибка ущільнення кути нахилу елементів стрибка ущільнення зменшуються ($\pi/2 > \beta > \mu$). На різних ділянках криволінійного стрибка ущільнення кут повороту потоку, ступінь зменшення швидкості та відповідна зміна решти всіх параметрів потоку різні. За ділянкою AA^1 відповідним сильним стрибком ущільнення, утворюється дозвуковий перебіг. Кожній точці на криволінійному стрибку ущільнення відповідає певна точка на ударній полярі.

На рис. 5.19 наведено сімейство ударних полярів, побудованих для різних значень чисел M_1 ($1 < M_1 < \infty$). Швидкості, відкладені на діаграмі, віднесені до критичної швидкості потоку $a_{\text{кр}}$.

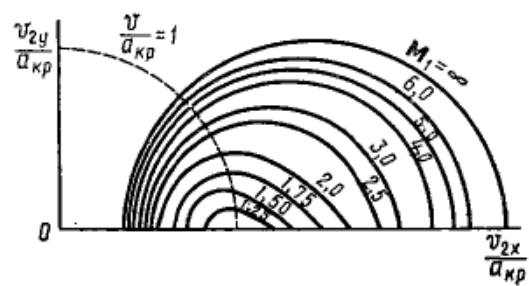


Рис. 5.19. Сімейство ударних
полів

Література

- 1 Котельніков Г.Н., Мамлюк О.В., Аэродинамика лётальных аппаратов. Підручник. -К.: Вища школа, 2002.
2. Абрамович Г. Я. Прикладная газодинамика. — М.: Наука, 1976
3. Пространственное обтекание гладких тел идеальным тазом/Бабенко К. И., Воскресенский Г. П., Любимов А. Н., Русанов В. Н. — М.: Наука, 1964.
4. Барянцев Р. Г. Взаимодействие разреженных газов с обтекаемыми поверхностями. — М.: Наука, 1975.
5. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа/Под ред. О. М. Белоцерковского.—М.: Изд-во Вычислительного центра АН СССР, 1967.
6. Белоцерковский С. М. Теория несущей поверхности в дозвуковом потоке газа. — М.: Наука, 1965.
7. Белоцерковский С. М., Ништ М. И. Отрывное и безотрывное обтекание тонких крыльев идеальной жидкостью. — М.: Наука, 1978.
8. Бураго С. Г. Аэродинамические характеристики летательных аппаратов и их частей. —М.: МАИ, 1979.
9. Бурдаков В. П., Зигель Ф. Ю. Физические основы космонавтики (физика космоса). — М.: Атомиздат, 1975.
10. Атлас газодинамических функций при больших скоростях и высоких температурах воздушного потока/Кибардин Ю. Л., Кузнецов С. И., Любимов А., Шумяцкий Б. Я. —М.: Госэнергоиздат, 1961.
11. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. — М.: Наука, 1967.
12. Кочин Н. Е., Кибель Я. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. II. — М.: Физматгиз, 1963.
13. Кошмаров Ю. А., Рыжов Ю. А. Прикладная динамика разреженного газа. — М.: Машиностроение, 1977.
14. Красильщикова Е. А. Тонкое крыло в сжимаемом потоке. — М.: Наука, 1978.

15. Краснов Н. Ф., Кошевой В. Н., Данилов Л. Н., Захарченко В. Ф. Аэродинамика ракет/Под ред. Н. Ф. Краснова. — М.: Высшая школа, 1968.
16. Краснов Н. Ф. Аэродинамика, ч. 1, 2. — М.: Высшая школа, 1976.
17. Лебедев А. А., Чернобровкин Л. С. Динамика полета. — М.: Машиностроение, 1973.
18. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1973.
19. Лунев В. В. Гиперзвуковая аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1975.
20. Любимов А. Н., Русанов В. В. Течение газа около тупых тел, ч. I, II.— Ж: Наука, 1970.
21. Мартынов А. К. Прикладная аэродинамика. — М.: Машиностроение, 1972.
22. Мхитарян А. М. Аэродинамика.—М.: Машиностроение, 1976.
23. Нилсен Дж. Аэродинамика управляемых снарядов. — М.: Оборонгиз, 1962.
24. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике/ Под ред. проф. В. /С. Кошкина. — М: Машиностроение, 1975.
25. Эшли Х., Ландау М. Аэродинамика крыльев и корпусов летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1969.
26. Эшли Х. Инженерные исследования летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1980.
27. Остославский Я. В. Аэродинамика самолета. — М.: Оборонгиз, 1957.
28. Петров К. П. Аэродинамика ракет. —М.: Машиностроение, 1977.
29. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений. Изд-во технико-теоретической литературы, 1952.
30. Физическая газодинамика/Под ред. А. С. Предводителя. — М.: Изд-во АН СССР, 1959.
31. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. — М.: Изд-во ИЛ, 1962.
32. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959.

33. Численные исследования современных задач газовой динамики/Под ред. О. М. Белоцерковского. — М.: Наука, 1974.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
1. ФІЗИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ, ПАРАМЕТРИ ТА ФУНКЦІЇ СТАНУ ГАЗУ...	4
1.1. ГІПОТЕЗА СУЦІЛЬНОСТІ СЕРЕДОВИЩА. РІВНЯННЯ СТАНУ ГАЗУ.....	4
1.2. ПИТОМА ТЕПЛОЄМНІСТЬ ГАЗУ.....	6
1.3. ПЕРШИЙ ЗАКОН ТЕРМОДИНАМІКИ. ФУНКЦІЇ СТАНУ ГАЗУ.....	8
1.4. СТИСНІСТЬ ГАЗУ. ШВИДКІСТЬ ЗВУКУ.....	12
1.5. В'ЯЗКІСТЬ І ТЕПЛОПРОВІДНІСТЬ.....	14
1.6. ПОНЯТТЯ ПРО СТАНДАРТНУ АТМОСФЕРУ.....	16
2. КІНЕМАТИКА РІДИНИ (ГАЗУ).....	17
2.1. МЕТОДИ КІНЕМАТИЧНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ РУХУ РІДИНИ (ГАЗУ).....	17
2.2. ЛІНІЯ СТРУМУ.....	20
2.3. ЦИРКУЛЯЦІЯ ШВИДКОСТІ.....	22
2.4. РУХ РІДКОЇ ЧАСТИНИ.....	23
2.5. ПОНЯТТЯ ПРО ПОТЕНЦІЙНУ ТЕЧІЮ.....	27
2.6. ОСНОВИ ТЕОРІЇ ВИХОРІВ.....	28
3. ДИНАМІКА РІДИНИ ТА ГАЗУ.....	35
3.1. ОСНОВНІ РІВНЯННЯ РУХУ РІДИНИ ТА ГАЗУ.....	35
3.2. РІВНЯННЯ НЕРОЗРИВНОСТІ.....	36
3.3. ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ РУХУ НЕВ'ЯЗКОГО ГАЗУ (ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ) У ФОРМІ ЕЙЛЕРА (ІДЕАЛЬНОЇ РІДИНИ) У ФОРМІ ЕЙЛЕРА...	39
3.4. ДИФЕРЕНЦІЙНІ РІВНЯННЯ РУХУ В'ЯЗКОГО ГАЗУ. РІВНЯННЯ НАВ'Я — СТОКСА.....	42
3.5. РІВНЯННЯ ЕНЕРГІЙ ДЛЯ В'ЯЗКОГО ТЕПЛОПРОВІДНОГО ГАЗУ...	47
3.6. ПОВНА СИСТЕМА РІВНЯНЬ СУСПІЛЬНОГО СЕРЕДОВИЩА ПОЧАТКОВІ І ГРАНИЧНІ УМОВИ	51

3.7. ІНТЕГРАЛИ ДИФЕРЕНЦІЙНИХ РІВНЯНЬ РУХУ НЕВ'ЯЗКОГО ГАЗУ.....	54
3.8. АЕРОДИНАМІЧНА ПОДІБНІСТЬ.....	61
3.9. ПОНЯТТЯ ПРО АЕРОДИНАМІЧНІ КОЕФІЦІЄНТИ ПОХІДНІ АЕРОДИНАМІЧНИХ КОЕФІЦІЄНТІВ.....	67
4. ІЗЕНТРОПНІ ПОТОКИ ГАЗУ.....	73
4.1. БАЗОВІ КОЕФІЦІЄНТИ ДЛЯ ВСТАНОВЛЕНИХ ОДНОВИМІРНИХ ПОТОКІВ ІЗЕНТРОПНОГО ГАЗУ.....	73
4.2. ЗВ'ЯЗОК МІЖ ШВИДКІСТЮ ПОТІКУ ГАЗУ І ФОРМОЮ ТРУБКИ СТРУМА	79
4.3. ПОШИРЕННЯ ДРІБНИХ ЗБУРЕНЬ, У ПОТОЦІ ІДЕАЛЬНОГО ГАЗУ. КОНУС ЗБУРЕНЬ	84
4.4. ОБТІКАННЯ ОПУКЛОГО ТУПОГО КУТА НАДЗВУКОВИМ ПОТОКОМ. ПОТІК ПРАНДТЛЯ – МАЙЄРА.	85
5. ТЕОРІЯ СТРИБКІВ УЩІЛЬНЕННЯ.....	90
5.1. ВИНИКНЕННЯ СТРИБКІВ УЩІЛЬНЕННЯ.....	90
5.2. ОСНОВНІ СПІВДІНОШЕННЯ ДЛЯ ПРЯМОГО СТРИБКА УЩІЛЬНЕННЯ.....	93
5.3. ПОРІВНЯННЯ СТИСКУВАННЯ У СТРИБКІЩІЛЬНЕННЯ З ІЗЕНТРОПІЧНИМ СТИСКУВАННЯМ.....	98
5.4. ТИСК ГАЛЬМУВАННЯ ЗА ПРЯМИМ СТРИБКОМ УЩІЛЬНЕННЯ...	100
5.5. ОСНОВНІ СПІВДІЛЕННЯ ДЛЯ КОСОГО СТРИБКА УЩІЛЬНЕННЯ.....	106
5.6. ЗАЛЕЖНІСТЬ КУТА НАХИЛУ КОСОГО СТРИБКА УЩІЛЬНЕННЯ ВІД КУТА ПОВЕРНЕННЯ ЗВЕРХЗВУКОВОГО ПОТОКУ.....	110
5.7. УДАРНА ПОЛЯРА	113
Література	118

Навчальне видання
Третяк Олексій Володимирович
Репетенко Михайло Володимирович
Громенко Денис Васильович

КОНСПЕКТ З КУРСУ «АЕРОДИНАМІКА ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ»

Підписано до друку згідно засідання кафедри 101, протокол №22-23/2 від 06.04.2023 р. Формат 60×84/16.

Умов. друк. арк. 7.15. Папір офсетний. Наклад 100 прим.

КП «Міська друкарня»
м. Харків, 61002, вул. Алчевських, 44.
Свідоцтво про державну реєстрацію
серія ДК, № 5495, від 22.08.2017 р