

І. В. Кантемир, О. А. Мураховська, Н. А. Українець

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА**

2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

І. В. Кантемир, О. А. Мураховська, Н. А. Українець

**ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ
І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА**

Навчальний посібник

Харків “ХАІ” 2021

УДК 519.2(075.8)
К19

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. Т. І. Сморцова,
канд. техн. наук, доц. Г. М. Тимченко

Кантемир, І. В.

К19 Теорія ймовірностей і математична статистика [Електронний ресурс] : / І. В. Кантемир, О. А. Мураховська, Н. А. Українець. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2021. – 148 с.

Розглянуто основи теорії ймовірностей і математичної статистики. Наведено детальні приклади розв'язання типових задач теорії ймовірностей і математичної статистики. Подано достатній масив завдань для аудиторної роботи, доповнений матеріалом для самостійного опрацювання й запитаннями для самоконтролю.

Для студентів, які навчаються за спеціальностями «Комп'ютерні науки» і «Інформаційні системи та технології», для студентів інших навчальних закладів усіх форм навчання з подібною програмою підготовки, а також для всіх зацікавлених осіб.

Іл. 28. Табл. 10. Бібліогр.: 32 назви

УДК 519.2(075.8)

© Кантемир І. В., Мураховська О. А.,
Українець Н. А., 2021
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»,
2021

1. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ

Теорія ймовірностей зародилася в XVI—XVII століттях зі спроб подати теорію азартних ігор.

Перші розрахунки ймовірностей виконали Н. Тарталья і Дж. Кардано, згодом ці питання досліджували Г. Галілей, П. Ферма, Б. Паскаль, Х. Гюйгенс, Р. Декарт. Важливу теорему (закон великих чисел), що сприяла розвитку теорії ймовірностей як науки, установив Я. Бернуллі. Його результати розвинули А. Муавр і П. Лаплас. Виключно важливу роль у розвитку теорії ймовірностей мали відкриття П. Л. Чебишова та його учнів А. А. Маркова і О. М. Ляпунова.

Велике значення для розвитку теорії ймовірностей мали й праці видатних математиків XX століття — С. Н. Бернштейна, О. Я. Хінчина, А. М. Колмогорова, Б. В. Гнєденка, Р. А. Фішера, Р. Е. Мізеса, К. Пірсона та ін.

Нині теорію ймовірностей часто будують на аксіоматичній основі. На сучасному рівні аксіоматичну побудову подав А. М. Колмогоров у 30-ті роки минулого століття.

Із теорією ймовірностей тісно пов'язана математична статистика — розділ математики, у якому за допомогою математичних методів систематизують, опрацьовують і застосовують статистичні дані для наукових і практичних висновків.

Теорія ймовірностей і математична статистика, що дедалі ширше застосовуються в багатьох галузях науки й техніки, є важливими складовими фундаментальної фахової підготовки сучасних економістів.

1.1. Випадкові події. Класичне визначення ймовірності. Геометрична ймовірність

Випробування — реальний або мислений експеримент (що виконується при певній незмінній сукупності умов), результати якого піддаються спостереженню. **Подія** — результат випробування.

Якщо внаслідок випробування деяка подія неодмінно відбудеться, то вона називається **достовірною** й позначається літерою **U**. Подія, яка в певному випробуванні не може відбутись, називається **неможливою** й позначається літерою **V**.

Якщо внаслідок випробування деяка подія може відбутись, а може не відбутись, то вона називається **випадковою**. Випадкові події позначаються літерами **A, B, C, D, ...**

Випадкові події, які не можна розкласти на простіші, називаються **елементарними**. Можлива елементарна подія — це кожний із можливих результатів окремого випробування.

Простір елементарних подій — множина можливих елементарних подій, кожною з яких може закінчитись випробування. Якщо позначимо ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) можливі елементарні події, то цю множину можна записати у вигляді $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$. Простір Ω може містити скінченну, зліченну або незліченну множину значень.

Випадковій події A , що може відбутись унаслідок випробування, можна поставити у відповідність деяку множину елементарних подій, що сприяють появі цієї події: $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$, яка є підмножиною Ω .

Подія A називається **сумою подій** B і C , тобто $A = B + C$ або $A = B \cup C$, якщо при випробуванні відбувається принаймні одна із цих подій. Множину елементарних подій, з яких складається подія A , одержують об'єднанням множин елементарних подій, з яких складаються події B і C . Аналогічно визначається сума n ($n > 2$) подій.

Подія A називається **добутком** подій B і C , тобто $A = BC$ або $A = B \cap C$, якщо внаслідок випробування відбуваються як подія B , так і подія C . Множина елементарних подій, з яких складається подія A , визначається як перетин множин, з яких складаються події B і C . Аналогічно визначається добуток n ($n > 2$) подій.

Подія A називається **ріницею подій** B і C , тобто $A = B - C$ або $A = B : C$, якщо відбувається подія B і не відбувається подія C . Множина елементарних подій, з яких складається подія A , містить елементарні події, з яких складається подія B , виключаючи ті, при яких відбувається подія C .

Події B і C у певному випробуванні називаються **несумісними**, якщо множини елементарних подій, що їм відповідають, не містять однакових елементів: $B \cap C = \emptyset$. Це означає, що коли одна з подій відбулась, інша подія відбутися не може.

Події B і C називаються **рівноможливими** в певному випробуванні, якщо є підстава вважати, що жодна з них не є об'єктивно більш можливою, ніж інша.

Події $A_1, A_2, \dots, A_n$ у певному випробуванні утворюють **повну групу подій**, якщо вони є несумісними, і внаслідок випробування неодмінно відбудеться принаймні одна з них, а отже, їх сума є достовірною подією:

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = U.$$

Події A і $\bar{A}$ називаються **протилежними**, якщо вони є несумісними й утворюють повну групу подій, тобто $A \cap \bar{A} = \emptyset$ і $A \cup \bar{A} = U$.

Випадкові події A, B, C ($A \subset \Omega, B \subset \Omega, C \subset \Omega$), для яких визначено операції додавання, множення та віднімання, підпорядковуються таким законам:

1. $A \cup A = A, A \cap A = A$;
2. $A \cup B = B \cup A$ – комутативний закон для операцій додавання;
3. $A \cap B = B \cap A$ – комутативний закон для операцій множення;
4. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ – асоціативний закон для операцій додавання;
5. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ – асоціативний закон для операцій додавання та множення;
6. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ – перший дистрибутивний закон;
7. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ – другий дистрибутивний закон;
8. $A \cup \Omega = \Omega$;
9. $A \cap \Omega = A$;
10. $A \cup \emptyset = A$;
11. $A \cap \emptyset = \emptyset$;
12. $\overline{A} = \Omega \setminus A$;
13. $\overline{\Omega} = \emptyset$;
14. $\overline{\emptyset} = \Omega$;
15. $A \cup (A \cap \overline{B}) = A; B = B \cup (B \cap \overline{A})$;
16. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
17. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Елементарні випадкові події задовольняють таким твердженням: 1) є несумісними; 2) утворюють повну групу; 3) є рівноможливими, а саме: усі елементарні події мають однакові можливості відбутися внаслідок проведення одного експерименту.

Для дискретного простору Ω перші два твердження можна записати так: 1) $\omega_i \cap \omega_j = \emptyset, i \neq j$; 2) $\bigcup_{i=1} \omega_i = \Omega$.

Для кількісного вимірювання появи випадкових подій і їх комбінацій уводиться поняття ймовірності події, що є числом такої ж природи, як і відстань у геометрії або маса в теоретичній механіці.

Ймовірністю випадкової події A називається невід'ємне число $P(A)$, що дорівнює відношенню числа елементарних подій m ($0 \leq m \leq n$), які сприяють появі A , до кількості всіх елементарних подій n простору Ω :

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Для неможливої події $P(\emptyset) = 0$ ($m = 0$). Для вірогідної події $P(\Omega) = 1$ ($m = n$). Отже, для довільної випадкової події $0 < P(A) < 1$.

Щоб обчислити ймовірність події A , потрібно знайти кількість елементарних подій у просторі Ω , а також кількість їх у множині, яка відповідає події A . Для цього застосовують формули комбінаторної математики.

I. Нехай скінченна неупорядкована множина складається з n елементів. Виконаємо такі випробування: упорядкуємо множину, пронумерувавши всі її елементи. Тоді елементарною подією у випробуванні буде довільне **переставлення** з n елементів, а кількість можливих переставлень дорівнюватиме $n!$

Розіб'ємо множину на впорядковані підмножини, які містять по m ($m < n$) елементів і різняться між собою або порядком, або елементами. Тоді елементарною подією у випробуванні буде довільне **розміщення з n елементів по m** . Кількість таких розміщень визначатиметься формулою

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\dots(n-m+1).$$

Розіб'ємо множину на неупорядковані підмножини, які містять по m ($m < n$) елементів і різняться між собою принаймні одним елементом. Тоді елементарною подією в цьому випробуванні буде **сполучення**, а кількість таких сполучень

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}.$$

Беремо з множини навмання m елементів з поверненням. Тоді у фіксованій підмножині кожний елемент може повторитися m разів. Елементарною подією у випробуванні буде **розміщення з n елементів по m із повторенням**, а кількість таких розміщень

$$R_n^m = n^m.$$

II. Нехай скінченну множину з n різних елементів розбито на r підмножин, у кожній з яких міститься n_i ($i = 1, 2, \dots, r$) елементів, причому

$\sum_{i=1}^r n_i = n$. Із кожної підмножини беремо по m_i елементів без повернення.

Тоді елементарною подією буде довільне **сполучення елементів**. Кількість таких сполучень

$$K = C_{n_1}^{m_1} \cdot C_{n_2}^{m_2} \dots C_{n_r}^{m_r},$$

$$K = A_{n_1}^{m_1} \cdot A_{n_2}^{m_2} \dots A_{n_r}^{m_r} \text{ — якщо їх порядок істотний.}$$

III. Нехай скінченну множину з n елементів розбито на r підмножин, у кожній з яких міститься n_i ($i = 1, 2, \dots, r$) однакових елементів, причому

$\sum_{i=1}^r n_i = n$. Упорядкуємо цю множину. Тоді елементарною подією буде довільне **переставлення з n елементів із повторенням**, а кількість елементарних подій

$$P_n(n_1, n_2, \dots, n_r) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \dots \cdot n_r!}.$$

Якщо простір елементарних подій Ω можна подати у вигляді деякого геометричного образу, а множину елементарних подій для події A — як частину цього геометричного образу, то ймовірність події A визначається як відношення мір цих множин: $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$ (**геометрична ймовірність**). При цьому вважається, що ймовірність попадання в деяку частину геометричного образу є пропорційною до міри цієї його частини.

На практиці обчислити ймовірності випадкових подій можна лише для обмеженого класу задач як для дискретних, так і для неперервних просторів елементарних подій (множини Ω). Для більшості задач, особливо економічних, обчислити ймовірності практично неможливо. У цьому разі використовується статистична ймовірність. Насамперед вводиться поняття відносної частоти випадкової події $W(A)$.

Відотною частотою випадкової події A $W(A)$ називається відношення кількості експериментів m , при яких подія A спостерігалася, до загальної кількості n проведених експериментів:

$$W(A) = \frac{m}{n}.$$

Як і для ймовірності випадкової події, для відносної частоти виконується нерівність $0 \leq W(A) \leq 1$.

У теорії ймовірностей вивчаються лише такі випадкові події, у яких спостерігається стабільність відносних частот, а саме: у разі проведення k серій експериментів існує така константа $P(A)$, навколо якої групуватимуться відносні частоти досліджуваної випадкової події A , тобто $W_i(A)$. І це групування буде тим ближчим до цієї константи, чим більшою буде кількість експериментів n .

На рис. 1.1 показано, як $W_i(A)$ змінюється зі збільшенням кількості експериментів n .

Ймовірність випадкової події визначається так: упевнившись, що існує стабільність відносних частот випадкової події $W_i(A)$, задаємось малим додатним числом ε і проводимо серії експериментів, збільшуючи їх кількість n . Якщо на якомусь кроці серії експериментів виконуватиметься нерівність $|W_i - W_{i-1}| < \varepsilon$, то за ймовірність випадкової

події береться одне з чисел W_i або $W_i - 1$. Ця ймовірність називається **статистичною**.

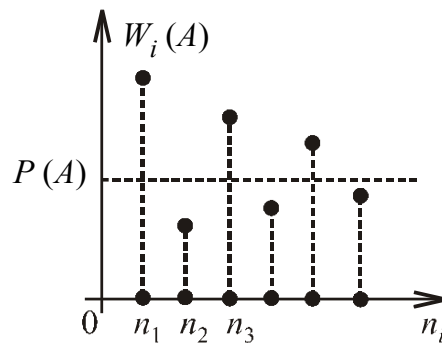


Рис. 1.1. Зміна відносної частоти $W_i(A)$ зі збільшенням кількості експериментів

Приклад 1.1. З міста **A** до міста **B** можна дістатись поїздом, літаком і пароплавом, а з міста **B** у місто **C** – поїздом і автобусом. Скількома способами можна здійснити подорож з **A** в **C**?

Розв'язання. Кількість різних шляхів з **A** до **C** дорівнює $3 \cdot 2 = 6$, оскільки вибравши один з трьох можливих способів поїздки з **A** до **B**, далі можна продовжити подорож двома способами.

Приклад 1.2. Знайдіть кількість чотиризначних чисел, які можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

Розв'язання. Очевидно, що в цій задачі необхідно використати вибір з повтореннями, оскільки цифри можуть повторюватись, а порядок їх у числі є суттєвим. Кількість цифр $n = 7$, кількість цифр у числі $k = 4$. Тоді з семи цифр можна утворити таку кількість різних чотиризначних чисел: $7^4 = 2401$.

Приклад 1.3. Знайдіть кількість тризначних чисел, які можна утворити з цифрами 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо цифри повторюватись не можуть.

Розв'язання. Оскільки цифри не можуть повторюватись, а порядок їх в числі суттєвий, то це розміщення. Тоді кількість тризначних чисел, які можна утворити з семи цифр так, щоб цифри не повторювались, дорівнює

$$A_7^3 = \frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210.$$

Приклад 1.4. Сім частот розподіляються між сімома радіостанціями так, що кожна з них одержує тільки одну частоту. Знайдіть кількість можливих випадків розподілу.

Розв'язання. Очевидно, що тут маємо справу з перестановками, тобто кількість можливих випадків розподілу частот

$$P_7 = 7! = 5040.$$

Приклад 1.5. На кафедрі працюють 10 викладачів. До складу екзаменаційної комісії входять три особи. Скільки різних складів комісії можна створити?

Розв'язання. Кількість різних складів комісії дорівнює кількості комбінацій з 10 викладачів по 3:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Приклад 1.6. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи букви слова «математика»?

Розв'язання. У цьому слові три букви «а», дві букви «м», дві букви «т» і по одній букві «е», «к», «и». Занумеруємо місця, на яких стоять букви в слові, числами 1, 2, ..., 10. Кожне слово визначається шістьма групами (номери місць, на яких розташовуються букви «а», «м», «т», «е», «к», «и»). Таким чином, кількість різних слів дорівнює кількості способів, якими можна розбити множину з 10 місць на шість груп:

$$C_{10}(3,2,2,1,1,1) = \frac{10!}{3!2!2!1!1!1!} = 151200.$$

Приклад 1.7. Два стрільці виконують по одному пострілу в мішень. Подія **A** – у мішень влучив перший стрілець, подія **B** – у мішень влучив другий стрілець. Виразити через **A** і **B** такі події: **C** – два влучення в мішень; **D** – жодного влучення в мішень; **E** – хоча б одне влучення в мішень; **F** – лише одне влучення в мішень.

Розв'язання. Поява події **C** означає, що обидва стрільці влучають у мішень. Тому подія є добутком подій **A** і **B**. Отже,

$$C = A \cdot B.$$

Подія **D** полягає в тому, що в мішень не влучить жодний стрілець, тобто не влучить ні перший ($\bar{A}$), ні другий ($\bar{B}$). Тому

$$D = \bar{A} \cdot \bar{B}.$$

Подія **E** відбувається тоді і тільки тоді, коли в мішень влучить хоча б один зі стрільців. Це може бути тоді, коли обидва стрільці влучають у мішень, або перший влучить, другий не влучить, або перший не влучить, а другий влучить. Тому

$$E = AB + \bar{A}B + A\bar{B},$$

тобто відбувається принаймні одна з подій **A** і **B**. Отже,

$$E = A + B.$$

Подія **F** полягає в тому, що перший стрілець влучить у мішень, а другий не влучить, або другий влучить, а перший не влучить. Тому

$$F = AB + \bar{A}B.$$

Приклад 1.8. На шістьох картках написано букви «Т», «І», «Р», «О», «Е», «Я». Дитина бере картки у випадковому порядку й прикладає одну до іншої: 1) три картки; 2) усі шість карток. Якою є ймовірність того, що вийде слово: 1) «ТОР»; 2) «ТЕОРІЯ»?

Розв'язання. 1. Подія **A** – отримання слова «ТОР». Різні комбінації трьох букв з наявних шести являють собою розміщення, оскільки можуть різнитися як складом букв, так і порядком їх розташування (або і тим, і іншим), тобто загальна кількість випадків $n = A_6^3$, з яких сприяє події **A** один ($m = 1$) випадок. Тоді за класичним визначенням імовірності

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{A_6^3} = \frac{1 \cdot 3!}{6!} = \frac{1}{6 \cdot 5 \cdot 4} = \frac{1}{120}.$$

2. Подія **B** – отримання слова «ТЕОРІЯ». Різні комбінації шести букв з наявних шести являють собою переставлення, оскільки різняться тільки порядком розташування букв, тобто загальна кількість випадків $n = P_6 = 6!$, з яких сприяє події **B** один ($m = 1$) випадок. Тому

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{1}{P_6} = \frac{1}{6!} = \frac{1}{720}.$$

Приклад 1.9. На однакових картках написано букви «А», «А», «А», «Н», «Н», «С». Якою є ймовірність того, що, розмістивши випадково картки в ряд, отримаємо слово «АНАНАС»?

Розв'язання. Подія **B** – отримання слова «АНАНАС». Різні комбінації з наявних букв являють собою переставлення, тобто загальна кількість випадків $n = P_6 = 6!$. Кількість випадків, що сприяють події **B**:

$$m = P_3 \cdot P_2 = 3! \cdot 2!,$$

тому що перестановка трьох букв «А» здійснюється $P_3 = 3!$ способами, а переставлення двох букв «Н» – $P_2 = 2!$ способами. За правилом добутку

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{P_3 \cdot P_2}{P_6} = \frac{3!2!}{6!} = \frac{1}{60}.$$

Задачу можна розв'язати й інакше, розглядаючи комбінації букв як переставлення з повтореннями, з яких події **B** сприяє одна комбінація:

$$P(B) = 1 : P_6(3;2;1) = 1 : \frac{6!}{3!2!1!} = \frac{1}{60}.$$

Приклад 1.10. З 30 студентів 10 мають спортивні розряди. Якою є ймовірність того, що вибрані навмання три студенти будуть розрядниками?

Розв'язання. Подія **A**: три вибраних студенти – розрядники. Загальна кількість випадків вибору трьох студентів з 30 є такою: $n = C_{30}^3$, оскільки комбінації з 30 студентів по три являють собою сполучення тому, що відрізняються одна від одної тільки складом студентів. Так само кількість випадків, що сприяють події **A**, є такою: $m = C_{10}^3$. Отже,

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^3}{C_{30}^3} = \frac{10!}{7!3!} : \frac{30!}{27!3!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{61}{203}.$$

Приклад 1.11. В урні 15 білих і 10 чорних кульок. З урни навмання виймають три кульки. Знайти ймовірність того, що:

- 1) усі три кульки білі (подія **A**);
- 2) дві кулі білі й одна чорна (подія **B**).

Розв'язання. 1. Кількість усіх елементарних подій дорівнює кількості сполучень з 25 по три, тобто

$$n = C_{25}^3 = \frac{25!}{(25-3)!3!} = \frac{25!}{22!3!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{3!}.$$

Знаходимо кількість сприятливих подій m , тобто скількома способами можна вибрати три білі з 15 білих кульок:

$$m = C_{15}^3 = \frac{15!}{(15-3)!3!} = \frac{15!}{12!3!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{3!}.$$

Тому шукана ймовірність є такою:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{15!22!3!}{12!3!25!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{25 \cdot 24 \cdot 23} = \frac{91}{460}.$$

2. Тут, як і в п. 1, $n = C_{25}^3$. Знаходимо кількість сприятливих подій. Дві білі можна вибрати з 15 білих кульок C_{15}^2 способами, а одну чорну з 10 чорних – C_{10}^1 способами. За правилом множення маємо

$$m = C_{15}^2 C_{10}^1 = \frac{15!}{(15-2)!2!} \cdot \frac{10!}{(10-1)!1!} = \frac{15!10!}{13!2!9!} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 10}{2} = 1050.$$

Отже,

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{1050 \cdot 3!}{25 \cdot 24 \cdot 23} = \frac{21}{46}.$$

Приклад 1.12. У три вагони заходять дев'ять пасажирів. Знайти ймовірність таких подій:

- 1) у перший вагон зайдуть три пасажирів;
- 2) у кожен вагон знайдуть по три пасажирів.

Розв'язання. Кожний пасажир може зайти в кожний з трьох вагонів, отже, дев'ять пасажирів можуть зайти в три вагони $n = 3^9$ різними способами.

1. Кількість способів, якими можна з дев'яти пасажирів вибрати три для першого вагона, дорівнює C_9^3 . Шість пасажирів, що залишились, можуть зайти в два вагони 2^6 способами. Отже, кількість сприятливих елементарних подій за правилом множення є такою: $m = C_9^3 \cdot 2^6$. Отже, шукана ймовірність

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_9^3 \cdot 2^6}{3^9} = \frac{9! \cdot 2^6}{6! \cdot 3! \cdot 3^9} = 0,273.$$

2. Кількість способів, якими можна з дев'яти пасажирів вибрати три для першого вагона, дорівнює C_9^3 ; кількість способів вибрати три пасажирів з шести, що залишились, для другого вагона дорівнює C_6^3 . Три пасажирів, що залишились, зайдуть у третій вагон C_3^3 способами. За правилом множення $m = C_9^3 C_6^3 C_3^3$.

Маємо

$$P(B) = \frac{m}{n} = \frac{C_9^3 C_6^3 C_3^3}{3^9} = 0,085.$$

Приклад 1.13. Серед 12 деталей вісім бракованих. З усієї кількості деталей навмання вибрано шість. Визначити ймовірність того, що:

- 1) серед шести відібраних деталей буде дві браковані;
- 2) серед шести відібраних деталей буде не більш ніж дві браковані;
- 3) серед шести відібраних деталей буде більш ніж дві браковані.

Розв'язання:

1. Подія **A**: серед шести навмання вибраних деталей тільки дві браковані. Ймовірність події обчислюється за класичним означенням ймовірності:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{m}{n}; \\ n &= C_{12}^6 = \frac{12!}{6! \cdot 6!} = 924; \\ m &= C_8^2 C_4^4 = \frac{8!}{(8-2)! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{(4-4)! \cdot 4!} = 28 \cdot 1 = 28; \\ P(A) &= \frac{28}{924} = \frac{1}{33}. \end{aligned}$$

2. Подія **B**: серед шести навмання вибраних деталей не більш ніж дві браковані. Подія **B** складна, вона є сумою трьох несумісних подій:

- подія B_1 : серед шести навмання вибраних деталей жодної бракованої;
- подія B_2 : серед шести навмання вибраних деталей тільки одна бракована;
- подія B_3 : серед шести навмання вибраних деталей тільки дві браковані.

Тобто $B = B_1 + B_2 + B_3$.

Оскільки події B_1, B_2, B_3 несумісні, то за теоремою про додавання ймовірностей несумісних подій маємо

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3).$$

Імовірності $P(B_1)$ і $P(B_2)$ – імовірності неможливої події, оскільки в партії всього чотири небракованих деталі і відібрати серед них шість і відповідно п'ять небракованих неможливо.

Імовірність $P(B_3) = P(A)$, тоді

$$P(B) = 0 + 0 + \frac{1}{33} = \frac{1}{33}.$$

3. Подія C : серед шести відібраних деталей буде більш ніж дві браковані. Події B і C є протилежними, а за наслідком до теореми додавання

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1,$$

тоді

$$P(C) + P(B) = 1;$$

$$P(C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{33} = \frac{32}{33}.$$

Приклад 1.14. З проміжку $[0; 5]$ випадковим чином вибирають два дійсних числа. Визначити ймовірність того, що:

- 1) сума чисел є меншою за 4;
- 2) добуток вибраних чисел є більшим за 5;
- 3) модуль різниці вибраних чисел є меншим за 2, а їх добуток – більшим за 3.

Розв'язання. Уведемо до розгляду прямокутну систему координат xOy . Позначимо через x перше число, а через y – друге. Числа вибрано випадковим чином з проміжку $[0; 5]$. Тоді $0 \leq x \leq 5$, $0 \leq y \leq 5$. Результатом кожного випробування є пара чисел $(x; y)$. Отже, геометричним зображенням множини Ω усіх можливих наслідків експерименту є квадрат (рис. 1.2–1.4) зі стороною 5, площа якого дорівнює 25, тобто

$$m(\Omega) = 25.$$

1. Нехай подія A – це сума вибраних чисел, менша за 4. Тоді

$$A = \{(x, y) \in \Omega: x + y < 4\}$$

або

$$A = \{(x, y) \in \Omega : y < 4 - x\}.$$

Зобразимо пряму $y = 4 - x$ на рис. 1.2. Для всіх точок, розташованих нижче цієї прямої (належать заштрихованій області), виконуються задані умови. Отже, елементарні наслідки експерименту, що сприяють події A , утворюють заштриховану фігуру (див. рис. 1.2), площа якої

$$m(A) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 4 = 8.$$

Тоді

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{8}{25}.$$

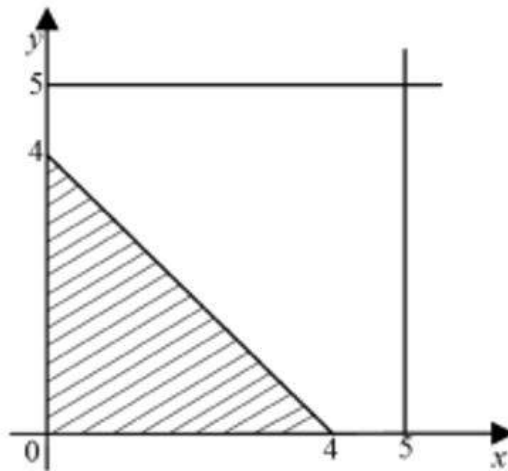


Рис. 1.2. Ілюстрація до прикладу 1.14 (п. 1)

2. Нехай подія B – це добуток вибраних чисел, більший за 5. Тоді

$$B = \{(x, y) \in \Omega : x \cdot y > 5\}$$

або

$$B = \{(x, y) \in \Omega : y > \frac{5}{x}\}.$$

Множиною наслідків, що сприяють події B , є заштрихована фігура ABC (див. рис. 1.3), де лінія AC – частина графіка $y > \frac{5}{x}$. Обчислимо площу цієї фігури за допомогою визначеного інтеграла:

$$m(B) = \int_1^5 \left(5 - \frac{5}{x}\right) dx = (5x - 5 \ln x) \Big|_1^5 = 20 - 5 \ln 5.$$

Отже,

$$P(B) = \frac{m(B)}{m(\Omega)} = \frac{20 - 5 \ln 5}{25} = 0,478.$$

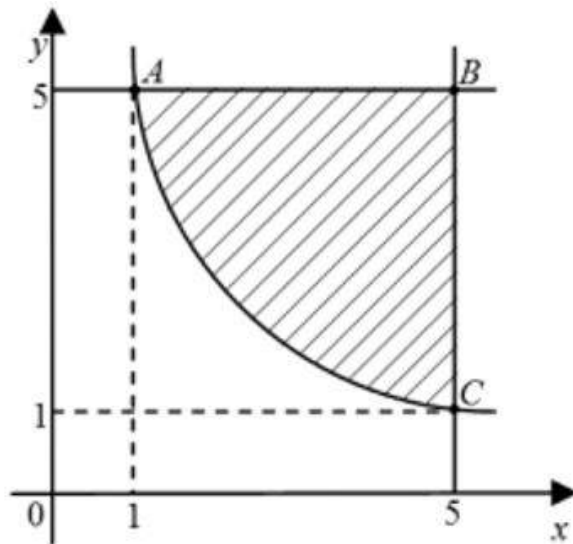


Рис. 1.3. Ілюстрація до прикладу 1.14 (п. 2)

3. Нехай подія **C** – це модуль різниці вибраних чисел, менший за 2, а їх добуток більший за 3, тоді

$$C = \{(x, y) \in \Omega : |x - y| < 2, xy > 3\},$$

звідки отримуємо систему нерівностей

$$0 < x \leq 5, 0 < y \leq 5, y < x + 2, y > x - 2, y > \frac{3}{x}.$$

Множина точок, координати яких задовольняють цим нерівностям, утворює фігуру **ABCDE** (див. рис. 1.4). Пряма **AE** задається рівнянням $y = x + 2$, пряма **CD** – рівнянням $y = x - 2$, а лінія **MEDN** – графіком

функції $y = \frac{3}{x}$. Абсцису точки **M** визначаємо з рівності $\frac{3}{x} = 5$, тобто

$x = \frac{3}{5}$. Аналогічно знаходимо ординату точки **N**: $y = \frac{3}{5}$. Абсцису точки **E**

як точки перетину ліній $y = \frac{3}{x}$ і $y = x + 2$ визначаємо з рівняння

$\frac{3}{x} = x + 2$, звідки маємо $x = 1$. Аналогічно визначаємо абсцису точки **D**

як точки перетину ліній $y = x - 2$ і $y = \frac{3}{x}$, тобто $x = 3$.

Для визначення ймовірності події **C** обчислимо площу фігури **ABCDE**. Очевидно, що

$$S_{ABCDE} = S_{MBN} - S_{MAE} - S_{NCD} = S_{MBN} - 2S_{NCD},$$

оскільки $S_{MAE} = S_{NCD}$. Тоді

$$S_{MBN} = \int_{\frac{3}{5}}^5 \left(5 - \frac{3}{x} \right) dx = (5x - 3 \ln x) \Big|_{\frac{3}{5}}^5 = 25 - 3 \ln 5 - \left(3 - 3 \ln \frac{3}{5} \right) =$$

$$= 22 + 3 \ln 3 - 6 \ln 5;$$

$$S_{NCD} = \int_3^5 \left(x - 2 - \frac{3}{x} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} - 2x - 3 \ln x \right) \Big|_3^5 =$$

$$= \frac{25}{2} - 10 - 3 \ln 5 - \left(\frac{9}{2} - 6 - 3 \ln 3 \right) = 4 + 3 \ln 3 - 3 \ln 5.$$

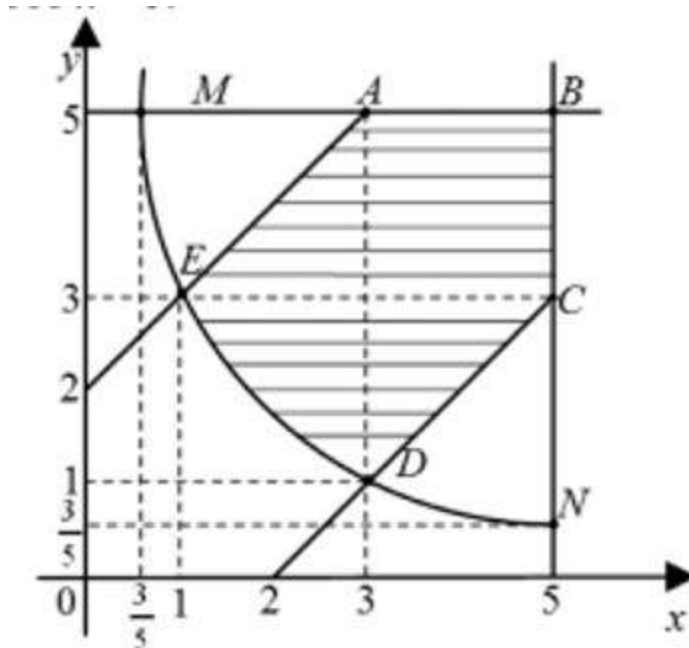


Рис. 1.4. Ілюстрація до прикладу 1.14 (п. 3)

Отже,

$$m(C) = 22 + 3 \ln 3 - 6 \ln 5 - 8 - 6 \ln 3 + 6 \ln 5 = 14 - 3 \ln 3;$$

$$P(C) = \frac{14 - 3 \ln 3}{25} = 0,428.$$

Приклад 1.15. Два студенти призначили зустріч у певному місці між третьою й четвертою годинами дня. Той, хто прийде першим, чекає іншого протягом 15 хв, після чого йде з місця зустрічі. Знайти ймовірність того, що зустріч відбудеться.

Розв'язання. Позначимо через x час (у годинах) приходу на місце зустрічі першого студента, а через y – другого. Очевидно, що година, під час якої має відбутися зустріч, несуттєва, тобто студенти мають зустрітися протягом однієї години. Тоді для x і y виконуються умови

$$0 \leq x \leq 1 \text{ і } 0 \leq y \leq 1$$

і геометричним зображенням простору Ω є одиничний квадрат $OMBN$ (рис. 1.5).

Нехай подія A полягає в тому, що зустріч відбулася. Це можливо лише тоді, коли різниця між часом приходу на місце зустрічі першого й другого студентів – не більша за 15 хв, або $\frac{1}{4}$ год, тобто

$$|x - y| \leq \frac{1}{4}. \quad (1.1)$$

Звідси отримуємо систему нерівностей

$$y \leq x + \frac{1}{4}, \quad y \geq x - \frac{1}{4}.$$

Зобразимо прямі $y = x + \frac{1}{4}$ і $y = x - \frac{1}{4}$. Множина точок, координати яких задовольняють нерівності (1.1), утворює фігуру $ABCD OE$ (рис. 1.5).

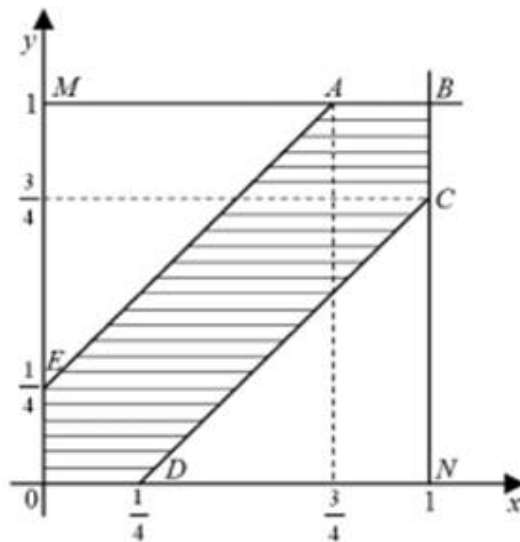


Рис. 1.5. Ілюстрація до прикладу 1.15

Оскільки

$$S_{ABCD OE} = S_{MBNO} - 2S_{EMA},$$

причому

$$S_{MBNO} = 1, \quad S_{EMA} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{9}{32},$$

то

$$S_{ABCD OE} = 1 - 2 \cdot \frac{9}{32} = \frac{7}{16}.$$

Отже, ймовірність того, що зустріч відбудеться,

$$P(A) = \frac{7}{16}.$$

Приклад 1.16 (задача Бюффона про голку (задачу було сформульовано французьким природодослідником і математиком Ж. Л. Бюффоном 1733 року, її розв'язання надруковано 1777 року)).

На поверхні стола проведено ряд паралельних прямих, відстань між якими дорівнює $2a$. На стіл кидають голку завдовжки $2l$ ($2l < 2a$). Якою є ймовірність того, що голка перетне одну з прямих?

Розв'язання. Нехай y – відстань від центра голки до найближчої прямої, φ – кут між голкою і прямою (рис. 1.6).

Множина всіх можливих значень (φ, y) – простір елементарних подій $\Omega = \{(\varphi, y) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq y \leq a\}$.

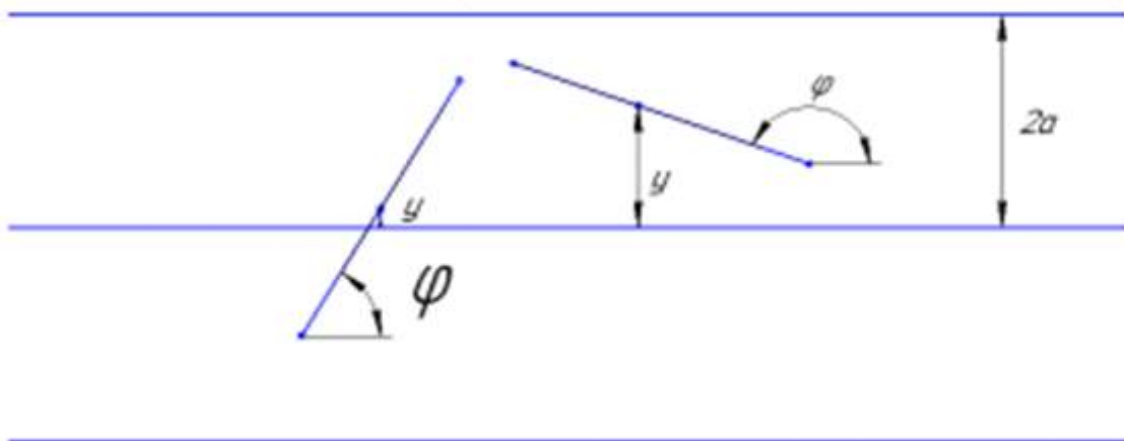


Рис. 1.6. Ілюстрація задачі Бюффона

Подія **A**: голка перетинає пряму, $A = \{(\varphi, y) : y \leq l \sin \varphi\}$.

Зобразимо на координатній площині множини Ω і **A** (рис. 1.7).

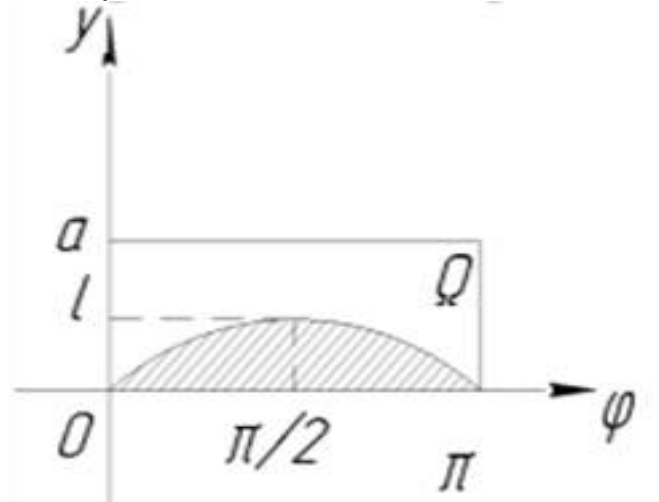


Рис. 1.7. Зображення на координатній площині множин Ω і **A**

За геометричною ймовірністю $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$, де $S(\Omega) = a\pi$,

$$S(A) = \int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = l(\cos \varphi) \Big|_{\pi}^0 = l(1 + 1) = 2l.$$

Таким чином, $P(A) = \frac{2l}{a\pi}$.

Задача Бюффона використовується для статичного знаходження числа π . Це один із перших прикладів застосування методу Монте-Карло (числові методи розв'язування математичних задач за допомогою моделювання випадкових величин). З останньої рівності виразимо π :

$$\pi = \frac{2l}{aP(A)}.$$

Якщо експеримент з кидання голки виконати досить велику кількість разів і знайти частоту того, що голка перетинає прямі, тобто знайти статистичну ймовірність $P^*(A) \approx P(A)$, то $\pi \approx \frac{2l}{aP^*(A)}$.

Відомо про реалізацію цього експерименту 1849 року С. Вольфом, який підкидав 5000 разів голку завдовжки 36 мм при відстані між прямими 45 мм, і в 2532 випадках голка перетинала прямі, отже, значення константи

$$\pi \approx \frac{36}{22,5 \cdot \frac{2532}{5000}} = \frac{36}{11,394} \approx 3,159.$$

Також 1894 року капітан Ч. Фокс 500 разів підкидав голку завтовжки 3 см при відстані між прямими 4 см, і в 236 випадках голка перетинала прямі, отже, він отримав $\pi \approx 3,1780$.

Для знаходження числа π цим оригінальним способом формулу Бюффона можна спростити, якщо відстань між паралельними прямими взяти в 2 рази більшою від довжини голки: $a = 2l$. Тоді $\pi \approx \frac{1}{P^*(A)}$ або

$\pi \approx \frac{n}{m}$, де n – загальна кількість підкидань, а m – кількість випадків, коли голка перетинала паралельні лінії.

1.2. Умовна ймовірність. Незалежність подій. Теорема додавання та множення ймовірностей

Нехай подія A є сумою двох подій B і C . Тоді:

- а) якщо події B і C є **несумісними**, то $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C)$;
- б) якщо події B і C є **сумісними**, то $P(A) = P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$.

Події **B** і **C** називаються **залежними**, якщо ймовірність однієї з них змінюється залежно від того, відбулась інша подія чи ні. У протилежному разі події називаються **незалежними**. Ймовірність події **C**, визначена при умові, що подія **B** відбулася, називається **умовною** й позначається **P(C/B)**.

Теорема множення ймовірностей

Нехай подія **A** є добутком двох подій **B** і **C**. Тоді:

- а) якщо події **B** і **C** є **незалежними**, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$;
 б) якщо події **B** і **C** є **залежними**, то $P(A) = P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C/B)$.

Ці теореми справджуються і для добутку **n** ($n > 2$) подій.

Нехай проводиться **n** незалежних спроб, у кожній з яких може відбутися подія **A_i** ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) з ймовірністю $P(A_i) = p_i$ або подія $\bar{A}_i$ ($A_i \cup \bar{A}_i = \Omega$, $A_i \cap \bar{A}_i = \emptyset$) з ймовірністю $P(\bar{A}_i) = q_i$ ($p_i + q_i = 1$).

Нехай **C** — поява події **A_i** хоча б один раз при **n** незалежних спробах, тобто ця подія може відбутися або один раз, або двічі, тричі і так далі, включаючи всі **n** разів. Тоді подія **C** і подія, яка полягає в тому, що при **n** спробах подія **A_i** не відбудеться жодного разу

$(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \dots \cap \bar{A}_n = \bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i)$, утворюють повну групу, а саме:

$$C \cup \left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \right) = \Omega. \text{ При цьому } C \cap \left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \right) = \emptyset.$$

Тоді

$$P \left(C \cup \left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \right) \right) = P(C) + P \left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \right) = P(\Omega) = 1;$$

$$P(C) = 1 - P \left(\bigcap_{i=1}^n \bar{A}_i \right) = 1 - \prod_{i=1}^n P(\bar{A}_i).$$

Отже,

$$P(C) = 1 - \prod_{i=1}^n q_i.$$

Якщо $P(A_i) = p_i = p = \text{const}$, то $q_i = q = \text{const}$.

Тоді

$$P(C) = 1 - q^n.$$

Оцінити надійність роботи системи, елементи якої з'єднані за схемою, наведеною на рис. 1.8.

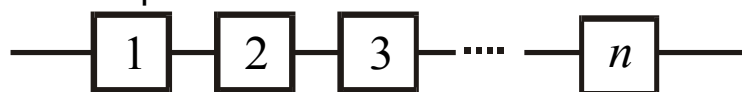


Рис. 1.8. Схема послідовного з'єднання елементів системи

При цьому відомими є імовірності безвідмовної роботи кожного елемента p_i ($i = 1, \dots, n$). Позначивши надійність системи через R , одержимо

$$R = \prod_{i=1}^n p_i .$$

Оцінити надійність роботи системи, елементи якої з'єднано за схемою, наведеною на рис. 1.9.

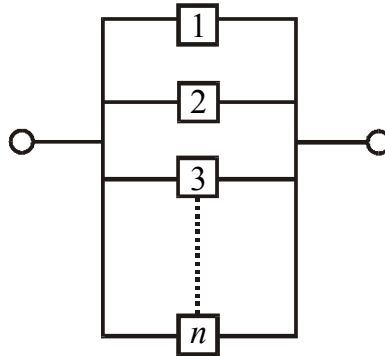


Рис. 1.9. Схема паралельного з'єднання елементів системи

Тут відомими є імовірності безвідмовної роботи кожного елемента p_i ($i = 1, \dots, n$):

$$R = 1 - \prod_{i=1}^n q_i, \quad q_i = 1 - p_i .$$

Приклад 1.17. В одній скрині 10 деталей, з яких дві браковані, в іншій – 20, з яких п'ять бракованих. З кожної скрині навмання вибирають по одній деталі. Знайдіть імовірність таких подій:

- 1) обидві деталі браковані;
- 2) принаймні одна деталь бракована;
- 3) тільки одна деталь бракована.

Розв'язання. Нехай подія A – деталь, вибрана з першої скрині, є бракованою, B – деталь, вибрана з другої скрині, є бракованою; $\bar{A}$ – деталь, вибрана з першої скрині, є небракованою; $\bar{B}$ – деталь, вибрана з другої скрині, є небракованою.

Очевидно, що ці події є незалежними. Отже,

$$P(A) = \frac{2}{10} = 0,2; \quad P(B) = \frac{5}{20} = 0,25;$$

$$P(\bar{A}) = 1 - 0,2 = 0,8; \quad P(\bar{B}) = 1 - 0,25 = 0,75 .$$

1. За теоремою множення ймовірностей незалежних подій

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,25 = 0,05 .$$

2. За теоремою додавання ймовірностей сумісних подій

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,2 + 0,25 - 0,05 = 0,4 .$$

3. За теоремами додавання та множення подій

$$P(\overline{AB} + \overline{AB}) = P(A) \cdot P(\overline{B}) + P(\overline{A}) \cdot P(B) = 0,2 \cdot 0,75 + 0,8 \cdot 0,25 = 0,35.$$

Приклад 1.18. Кинуть три монети. Визначити, залежні чи незалежні події: A – випав герб на першій монеті, B – випала принаймні одна цифра.

Розв'язання. Простір елементарних подій $\Omega = \{ggg, ggc, gcg, цgg, gcc, цgc, цcg, цcc\}$, подія $A = \{ggg, ggc, gcg, gcc\}$, подія $B = \{ggc, gcg, цgg, gcc, цgc, цcg, цcc\}$, де g – випав герб, $ц$ – випала цифра.

Нехай подія C – одночасне виконання подій A і B , тоді $C = \{ggc, gcg, gcc\}$.

$$\text{Очевидно, що } P(A) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}, P(B) = \frac{7}{8}, P(C) = \frac{3}{8}.$$

Імовірність одночасного виконання подій у разі незалежних подій за теоремою множення визначається так:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{7}{8} = \frac{7}{16}.$$

Але бачимо, що $P(C) = \frac{3}{8} \neq P(A) \cdot P(B) = \frac{7}{16}$. Тому можна зробити висновок, що події A і B є залежними.

Приклад 1.19. Маємо три партії деталей. Перша партія складається з 10 стандартних і восьми нестандартних деталей, друга – із 15 стандартних і чотирьох нестандартних, третя – із 20 стандартних і п'яти нестандартних деталей. Із кожної партії беруть по одній деталі. Знайти ймовірність того, що серед узятих деталей:

- 1) тільки одна стандартна;
- 2) тільки дві стандартні.

Розв'язання. Нехай згідно з умовою з кожної партії взято по одній деталі. При цьому можуть відбутися події A_1, A_2, A_3 , які полягають відповідно в тому, що деталь, яку взяли з першої, другої і третьої партій, виявилась стандартною, та $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \overline{A_3}$ – відповідно протилежні події, коли з кожної партії взяли нестандартні деталі.

Знаходимо ймовірності подій:

$$P(A_1) = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}; P(A_2) = \frac{15}{19}; P(A_3) = \frac{20}{25} = \frac{4}{5};$$

$$P(\overline{A_1}) = 1 - P(A_1) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}; P(\overline{A_2}) = \frac{4}{19}; P(\overline{A_3}) = \frac{1}{5}.$$

1. Подія B : тільки одна із трьох деталей виявилась стандартною. Тобто може виявитися, що взяли або стандартну деталь з першої партії і

дві нестандартні з другої й третьої партій, або стандартну деталь з другої партії і дві нестандартні з першої й третьої партій, або стандартну деталь з третьої партії і дві нестандартні з першої й другої партій.

Групи подій, сумою яких є подія **B**, несумісні між собою, а події в кожній групі незалежні. Тому ймовірність події **B** визначаємо так:

$$P(B) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 A_2 \bar{A}_3) + P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 A_3) = \\ = \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{9} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{1}{5} + \frac{4}{9} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{95} = 0,168.$$

2. Подія **C**: тільки дві деталі із трьох виявились стандартними. Діємо аналогічно п. 1, тільки тепер розглядаємо всі варіанти, коли витягуємо дві стандартні й одну нестандартну деталі.

Подію **C** подаємо як суму несумісних груп подій. У кожній групі події незалежні. Знайдемо ймовірність події **C**:

$$P(C) = P(\bar{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 \bar{A}_2 A_3) + P(A_1 A_2 \bar{A}_3) = \\ = \frac{4}{9} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{9} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{4}{5} + \frac{5}{9} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{1}{5} = \frac{79}{171} = 0,462.$$

Приклад 1.20. Електричні лампочки з'єднано за схемами, зображеними на рис. 1.10.

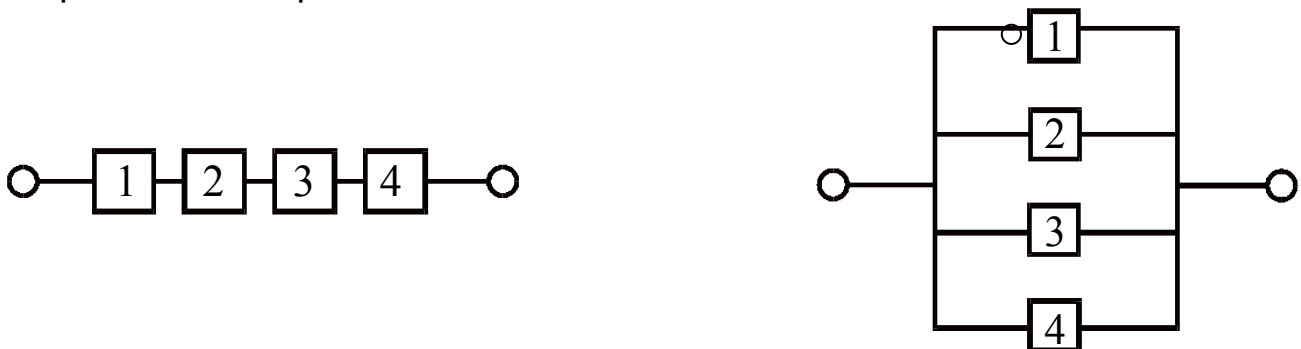


Рис. 1.10. Схеми з'єднання електричних лампочок

Ймовірність того, що електролампочка не перегорить при ввімкненні в електромережу наведених схем, є величиною сталою: $p_i = 0,8$. Якою є ймовірність того, що при ввімкненні в електромережу наведених схем у них буде електричний струм?

Розв'язання. За відомим значенням p_i знаходимо $q_i = 1 - p_i = 1 - 0,8 = 0,2$ ($i = 1, 2, 3, 4$). Отже,

$$P = \prod_{i=1}^4 p_i = (0,8)^4 = 0,4096 ; \\ P = 1 - \prod_{i=1}^4 q_i = 1 - (0,2)^4 = 1 - 0,0016 = 0,9984 .$$

1.3. Формула повної ймовірності. Формула Байєса

Нехай подія A може відбутися тільки за умови настання однієї з несумісних подій B_i ($i = 1, 2, \dots, n$), які утворюють повну групу. Тоді ймовірність події A визначається формулою

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i) \cdot P(A/B_i),$$

де $P(B_i)$ — ймовірність події B_i ; $P(A/B_i)$ — умовні ймовірності настання події A . Наведена залежність називається **формулою повної ймовірності**.

Знову розглянемо події B_i ($i = 1, 2, \dots, n$), які утворюють повну групу подій і є попарно несумісними. Ці події називатимемо гіпотезами. Подія A може відбутись одночасно з деякою із подій B_i . Відомими є ймовірності подій B_i та умовна ймовірність того, що подія A відбудеться. Відомо, що внаслідок випробування подія A відбулась. З огляду на це потрібно переоцінити ймовірності гіпотез B_i . Для цього застосовують **формулу Баєса**

$$P(B_i / A) = \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i)} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Її використовують для переоцінювання ймовірностей гіпотез B_i при умові, що випадкова подія A здійсниться. Після переоцінювання всіх гіпотез B_i маємо

$$\sum_{i=1}^n P(B_i / A) = \sum_{i=1}^n \frac{P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)} = \frac{\sum_{i=1}^n P(B_i)P(A/B_i)}{P(A)} = \frac{P(A)}{P(A)} = 1.$$

Згідно з формулою Байєса можна прийняти рішення, провівши експеримент. Але для цього необхідно, щоб вибір тієї чи іншої гіпотези мав ґрунтовні підстави, тобто щоб унаслідок проведення експерименту ймовірність $P(B_i / A)$ була близькою до одиниці.

Приклад 1.21. У ящику знаходяться 1000 деталей: 700 – з першої партії, 300 – з другої. Визначте ймовірність того, що деталь, навмання вибрана з ящика, виявиться бракованою, якщо ймовірність браку в першій партії дорівнює 0,06, а в другій – 0,04.

Розв'язання. Нехай подія A – навмання вибрана деталь виявилась бракованою. Можливі такі припущення (гіпотези) про те, до якої партії належить деталь: H_1 – деталь з першої партії, H_2 – деталь з другої партії. Ймовірності цих гіпотез визначаємо так:

$$P(H_1) = \frac{700}{1000} = 0,7, \quad P(H_2) = \frac{300}{1000} = 0,3.$$

Умовні ймовірності задані з умові задачі: $P_{H_1}(A) = 0,06$, $P_{H_2}(A) = 0,04$. Шукану ймовірність визначаємо за формулою повної ймовірності:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = \\ &= 0,7 \cdot 0,06 + 0,3 \cdot 0,04 = 0,054. \end{aligned}$$

Приклад 1.22. Пристрій складається з двох блоків, з'єднаних послідовно. Імовірність виходу з ладу першого блока становить 0,2, другого – 0,1. Під час випробування пристрій вийшов з ладу. Знайти ймовірність того, що відмовив перший блок.

Розв'язання. Позначимо: A – прилад вийшов з ладу; H_1 – перший блок справний, H_2 – перший блок відмовив (неправильно було б позначити H_2 – другий блок є справним, оскільки ця подія є сумісною з гіпотезою H_1). За умовою задачі $P(H_1) = 0,8$, $P(H_2) = 0,2$, $P_{H_1}(A) = 0,1$ (бо якщо перший блок є справним, то пристрій вийде з ладу внаслідок відмови другого блока); $P_{H_2}(A) = 1$ (тому що блоки з'єднано послідовно, вихід з ладу першого блока обов'язково спричинить відмову пристрою в цілому). Тоді за формулою Байєса маємо

$$P_A(H_2) = \frac{P(H_2) \cdot P_{H_2}(A)}{P(A)} = \frac{0,2 \cdot 1}{0,2 \cdot 1 + 0,8 \cdot 0,1} = \frac{0,2}{0,28} = 0,714.$$

Як бачимо, імовірність виходу з ладу пристрою через відмову першого блока є набагато більшою за 0,5, і ремонт пристрою слід починати з першого блока.

Приклад 1.23. Маємо дві партії однакових виробів: перша складається з 15 стандартних і чотирьох нестандартних, друга — із 18 стандартних і п'яти нестандартних виробів. Із навмання вибраної партії взято один виріб, який виявився стандартним. Знайти ймовірність того, що другий навмання взятий виріб також буде стандартним.

Розв'язання. Розглянемо події: B_1 – перший виріб узятий з першої партії; B_2 – перший виріб узятий з другої партії; A – перший узятий виріб є стандартним; C – другий узятий виріб є стандартним. За формулою повної ймовірності знаходимо ймовірність події A :

$$P(A) = P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{19} + \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{23} = \frac{687}{874} = 0,786,$$

$$\text{де } P(B_1) = P(B_2) = \frac{1}{2}, \quad P_{B_1}(A) = \frac{15}{19}, \quad P_{B_2}(A) = \frac{18}{23}.$$

За формулою Баєса обчислюємо $P_A(B_1)$ і $P_A(B_2)$ – умовні ймовірності того, що стандартний виріб узяли з першої й другої партій відповідно:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(A)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{687}{874} = \frac{115}{229};$$

$$P_A(B_2) = \frac{P(B_2) \cdot P_{B_2}(A)}{P(A)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{18}{23} \cdot \frac{687}{874} = \frac{114}{229}$$

або $P_A(B_2) = 1 - P_A(B_1) = 1 - \frac{115}{229} = \frac{114}{229}.$

Імовірність події C визначаємо так:

$$P(C) = P_A(B_1)P_{AB_1}(C) + P_A(B_2)P_{AB_2}(C),$$

де $P_{AB_1}(C) = \frac{14}{18} = \frac{7}{9}$, $P_{AB_2}(C) = \frac{17}{22}$ – умовні ймовірності того, що другий виріб є стандартним при умові, що стандартним виявився виріб, узятий з першої або другої партії відповідно.

Отже,

$$P_A(C) = \frac{115}{229} \cdot \frac{7}{9} + \frac{114}{229} \cdot \frac{17}{22} = 0,775.$$

Приклад 1.24. Відомо, що в середньому 95 % продукції, яку випускає завод, відповідає стандарту. За спрощеною схемою контролю придатною вважається продукція з ймовірністю 0,98, якщо вона є стандартною, і з ймовірністю 0,06, якщо вона є нестандартною. Визначити ймовірність того, що: 1) узятий навмання виріб пройде спрощений контроль; 2) виріб є стандартним, якщо він: пройшов спрощений контроль; двічі пройшов спрощений контроль.

Розв'язання. 1. Позначимо події: H_1 – узятий навмання виріб є стандартним; H_2 – узятий навмання виріб є бракованим; A – виріб пройшов спрощений контроль.

За умовою задачі $P(H_1) = 0,95$, $P(H_2) = 0,05$, $P_{H_1}(A) = 0,98$, $P_{H_2}(A) = 0,06$.

Імовірність того, що взятий навмання виріб пройде спрощений контроль, визначаємо за формулою повної ймовірності:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = 0,95 \cdot 0,98 + 0,05 \cdot 0,06 = 0,934.$$

2. Імовірність того, що виріб, який пройшов спрощений контроль, є стандартним, обчислюємо за формулою Байєса

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A)}{P(A)} = \frac{0,95 \cdot 0,98}{0,934} = 0,997.$$

Нехай подія A^* – вибраний навмання виріб двічі пройшов спрощений контроль. Тоді за теоремою множення ймовірностей визначаємо:

$$P_{H_1}(A^*) = P_{H_1}(A) \cdot P_{H_1}(A) = 0,98 \cdot 0,98 = 0,9604;$$

$$P_{H_2}(A^*) = P_{H_2}(A) \cdot P_{H_2}(A) = 0,06 \cdot 0,06 = 0,0036.$$

Імовірність того, що взятий навмання виріб двічі пройде спрощений контроль, розраховуємо за формулою повної ймовірності:

$$\begin{aligned} P(A^*) &= P(H_1) \cdot P_{H_1}(A^*) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A^*) = \\ &= 0,95 \cdot 0,9604 + 0,05 \cdot 0,0036 = 0,9126. \end{aligned}$$

За формулою Байєса

$$P_{A^*}(H_1) = \frac{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A^*)}{P(A^*)} = \frac{0,95 \cdot 0,9604}{0,9126} = 0,9998.$$

Оскільки ймовірність $P_{A^*}(H_2) = 1 - P_{A^*}(H_1) = 1 - 0,9998 = 0,0002$ є дуже малою, то гіпотезу H_2 про те, що виріб, який двічі пройшов спрощений контроль, є бракованим, потрібно відкинути як практично неможливу подію.

1.4. Схема Бернуллі. Найімовірніша кількість появ події в незалежних випробуваннях. Гранична теорема Пуассона. Локальна й інтегральна теореми Муавра – Лапласа. Відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях

Нехай проводяться n випробувань, у кожному з яких подія A може як відбутися, так і не відбутися. Якщо ця ймовірність у кожному випробуванні не залежить від того, відбулася вона в інших випробуваннях чи ні, то такі випробування називають незалежними щодо події A . Згідно з означенням випробування також є незалежними, якщо в кожному з них імовірність настання події A однакова, тобто дорівнює тому самому числу. Імовірність того, що подія A відбудеться в кожному з незалежних випробувань, позначають $P(A) = p$, а ймовірність настання протилежної події $P(\bar{A}) = 1 - p = q$. Для розв'язування задач на повторні незалежні випробування застосовують такі формули й теореми.

Формула Бернуллі. Імовірність того, що в n незалежних випробуваннях, у кожному з яких імовірність $P(A) = p$, подія A відбудеться m разів, подається так:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Формула застосовується, якщо $n \leq 10$.

Імовірність того, що внаслідок n незалежних експериментів подія A відбудеться від m_i до m_j разів, обчислюється таким чином:

$$P_n(m_i \leq m \leq m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} C_n^m p^m q^{n-m} = \sum_{m=m_i}^{m_j} \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Оскільки

$$P_n(0 \leq m \leq n) = \sum_{m=0}^n C_n^m p^m q^{n-m} = 1,$$

отримаємо

$$P(0 \leq m \leq m_i) = 1 - \sum_{m=m_i+1}^n C_n^m p^m q^{n-m};$$

$$P(m_i \leq m \leq n) = 1 - \sum_{m=0}^{m_i-1} C_n^m p^m q^{n-m}.$$

Найімовірніша кількість. Частота m_0 настання події A у n незалежних повторних випробуваннях називається найімовірнішою кількістю (появ цієї події), якщо їй відповідає найбільша ймовірність. Вона визначається формулою

$$np - q \leq m_0 \leq np + p.$$

Розподіл може мати одне або два найімовірніших числа.

Локальна теорема Лапласа. Якщо ймовірність появи випадкової події в кожному з n незалежних експериментів є величиною сталою: p ($0 < p < 1$), то для великих значень n і m імовірність того, що випадкова подія A відбудеться m разів, визначається такою асимптотичною формулою:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}},$$

де $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ називається функцією Гаусса. Функція Гаусса

протабульована, де $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$. Тут x є рівномірно обмеженою

величиною відносно n і m .

Властивості функції Гаусса:

1) функція $\varphi(x)$ є визначеною на всій осі абсцис; $\varphi(x) > 0$;

2) $\varphi(x)$ є парною функцією: $\varphi(-x) = \varphi(x)$;

3) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \varphi(x) = 0$;

4) $\varphi'(x) = -x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$; $\varphi'(0) = 0$;

$\varphi'(x)|_{x<0} > 0$; $\varphi'(x)|_{x>0} < 0$; отже, $\varphi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ – максимум функції

Гаусса;

$$5) \varphi''(x) = (x^2 - 1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \varphi''(x)|_{x=\pm 1} = 0.$$

Таким чином, $x_1 = -1$, $x_2 = 1$ будуть точками перегину. При цьому

$$\varphi''(x)|_{x<-1} > 0; \quad \varphi''(x)|_{-1<x<1} < 0; \quad \varphi''(x)|_{x>1} > 0.$$

Графік функції Гаусса зображено на рис. 1.11.

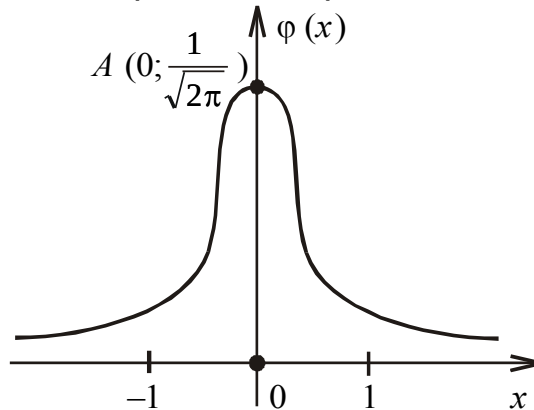


Рис. 1.11. Графік функції Гаусса

Зауважимо, що розв'язуючи задачі, додержують такого правила:

$$\varphi(x)|_{x \geq 4} \approx 0; \quad \varphi(x)|_{x \leq -4} \approx 0.$$

Отже, практично використовуються значення функції Гаусса для $x \in [-4; 4]$, що показано на графіку функції Гаусса (рис. 1.12).

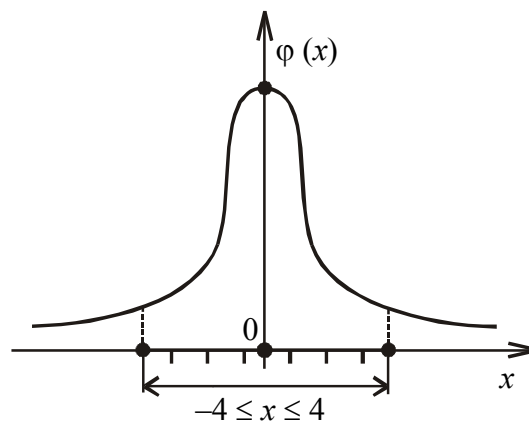


Рис. 1.12. Графік функції Гаусса для $x \in [-4; 4]$

Інтегральна теорема Муавра – Лапласа. Імовірність того, що подія **A** відбудеться від m_1 до m_2 разів при проведенні n незалежних випробувань, у кожному з яких подія **A** відбувається з імовірністю p , визначається формулою

$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1)$, де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функція Лапласа;

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

Значення функції Лапласа наводяться у спеціальних таблицях.

Властивості функції Лапласа:

1. Функція $\Phi(x)$ є визначеною на всій осі абсцис.
2. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$, отже, $\Phi(x)$ є непарною функцією.
3. $\Phi(0) = 0$.

$$4. \Phi(\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0,5, \quad \text{оскільки} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi} \quad \epsilon$$

інтегралом Пуассона.

5. $\Phi(-\infty) = -0,5$ як непарна функція.

$$6. \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} > 0, \quad \text{отже, } \Phi(x) \text{ є неспадною функцією.}$$

$$7. \Phi''(0) = 0; \quad \Phi''(x)|_{x < 0} > 0; \quad \Phi''(x)|_{x > 0} < 0.$$

Таким чином, $x = 0$ є точкою перегину.

Графік функції $\Phi(x)$ зображено на рис. 1.13.

Розв'язуючи задачі, дотримуються такого правила:

$$\Phi(x)|_{x \geq 4} \approx 0,5, \quad \Phi(x)|_{x \leq -4} \approx -0,5.$$

Отже, практично функція Лапласа застосовується для значень $x \in [-4; 4]$, що ілюструє рис. 1.14.

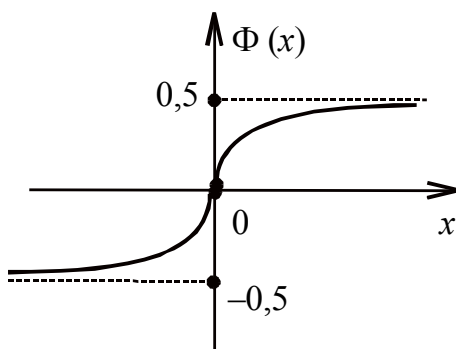


Рис. 1.13. Графік функції $\Phi(x)$

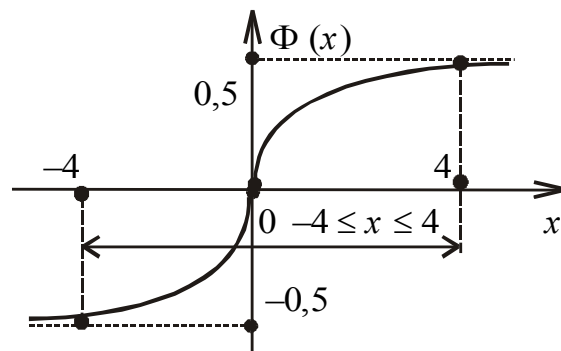


Рис. 1.14. Графік функції $\Phi(x)$ для $x \in [-4; 4]$

Відхилення відносної частоти від імовірності

За допомогою інтегральної теореми Лапласа можна оцінити близькість відносної частоти $W(A)$ до ймовірності p випадкової події A . Нехай p — ймовірність появи випадкової події A в кожному експерименті

за схемою Бернуллі, $W(A)$ — відносна частота появи цієї події при n експериментах.

Необхідно оцінити ймовірність події $|W(A) - p| < \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$ і ε малою величиною). Якщо n набуває великих значень, то

$$\begin{aligned} P(|W(A) - p| < \varepsilon) &= \\ &= P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon < \frac{m - np}{n} < \varepsilon\right) = P\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{m - np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}}^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_0^{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \\ &= \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) - \Phi\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) + \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \\ &= 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \end{aligned}$$

Отже,

$$P(|W(A) - p| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Імовірність того, що при проведенні n незалежних випробувань відхилення відносної частоти події A від її ймовірності за модулем не перевищує ε , визначається формулою

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Формула Пуассона. Точність асимптотичних формул для великих значень n — кількості повторних незалежних експериментів за схемою Бернуллі — знижується з наближенням p до нуля. Тому при $n \rightarrow \infty$, $p \rightarrow 0$ при умові $np = \lambda = \text{const}$ імовірність появи випадкової події m разів ($0 \leq m \leq n$) обчислюється за такою асимптотичною формулою:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Якщо в кожному з n незалежних повторних випробувань $P(A) = p$ і $0 < p < 0,1$, а n — велике число, то

$$P_n(m) \approx \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np.$$

Це формула Пуассона, з якої випливає:

$$P_n(m_i \leq m \leq m_j) = \sum_{m=m_i}^{m_j} P_n(m) = \sum_{m=m_s}^{m_j} \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda};$$

$$P_n(0 \leq m \leq n) = \sum_{m=0}^n P_n(m) = \sum_{m=0}^n \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{m=0}^n \frac{\lambda^m}{m!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1.$$

Це підтверджується ще й тим, що події $0 \leq m \leq n$ утворюють повну групу.

Функцію $P_n(m)$ визначають за таблицею, за заданим m і обчисленим значенням $\lambda = np$.

Твірна функція. Нехай проводяться n незалежних випробувань, у яких подія A відбувається з імовірністю $p_i (i = 1, 2, \dots, n)$. Тоді ймовірність настання цієї події m разів можна визначити за допомогою твірної функції $\varphi_n(z) = \prod_{i=1}^n (p_i z + q_i)$. Якщо перетворити праву частину функції і звести подібні члени, то коефіцієнт при z^m визначає $P_n(m)$.

Приклад 1.25. Прилад складається з 10 блоків, надійність кожного з яких дорівнює 0,8. Увімкнення приладу означає ввімкнення всіх блоків. Блоки можуть виходити з ладу незалежно один від одного; i -те випробування полягає у ввімкненні i -го блока, $i = 1, 2, \dots, 10$.

1. Знайти ймовірність того, що після ввімкнення всіх блоків зафіксовано:

- відмову двох блоків;
- відмову хоча б одного блока;
- відмову не менше двох блоків.

2. Знайти найімовірнішу кількість блоків, що можуть вийти з ладу під час вмикання.

Розв'язання. Блоки можна не розрізняти. Нехай ймовірність того, що блок є справним, $q = 0,8$, тоді ймовірність того, що блок вийде з ладу, — $p = 1 - q = 1 - 0,8 = 0,2$.

1. За умовою задачі одне ввімкнення приладу можна розглядати як 10 увімкнень блока. Застосувавши формулу Бернуллі та наслідки з неї, одержимо:

- подія A — відмова двох блоків, тоді

$$P(A) = C_{10}^2 p^2 q^{10-2} = \frac{10!}{(10-2)!2!} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^8 = 0,302;$$

б) подія B — відмова хоча б одного блока; їй протилежна подія $\bar{B}$ — усі блоки є справними, тоді

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - C_{10}^0 p^0 q^{10} = 1 - 0,8^{10} = 0,893;$$

в) подія C – відмова не менше двох блоків; протилежна подія $\bar{C}$ – усі блоки є справними або тільки один блок несправний, тоді

$$P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - (P(\bar{B}) + C_{10}^1 p^1 q^9) = \\ = 1 - (0,8^{10} + \frac{10!}{(10-1)!1!} \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^9) = 0,625.$$

2. Найімовірнішу кількість блоків m_0 , що вийдуть з ладу при ввімкненні приладу, знайдемо з нерівностей

$$np - q \leq m_0 \leq np + p; \\ 10 \cdot 0,2 - 0,8 \leq m_0 \leq 10 \cdot 0,2 + 0,2; \\ 1,2 \leq m_0 \leq 2,2.$$

Оскільки m_0 – ціле число, і воно знаходиться в діапазоні між 1,2 та 2,2, то шукана найімовірніша кількість $m_0 = 2$.

Приклад 1.26. Імовірність народження хлопчика дорівнює 0,515, а дівчинки – 0,485. У деякій сім'ї шестеро дітей. Знайти ймовірність того, що серед них не більше двох дівчинок.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 6$, $p = 0,485$, $q = 0,515$. Шукана ймовірність складається із суми ймовірностей того, що або не буде дівчинок зовсім, або буде тільки одна дівчинка, або буде дві дівчинки:

$$P(A) = P_6(0) + P_6(1) + P_6(2) = C_6^0 p^0 q^6 + C_6^1 p^1 q^5 + C_6^2 p^2 q^4 = \\ = 0,515^6 + C_6^1 \cdot 0,485^1 \cdot 0,515^5 + C_6^2 \cdot 0,485^2 \cdot 0,515^4 = 0,3772.$$

Приклад 1.27. Підручник надруковано накладом 10000 примірників. Імовірність бракованого брошурування підручника дорівнює 0,0001. Знайти ймовірність того, що наклад має п'ять бракованих підручників.

Розв'язання. Згідно з умовою задачі $n = 10000$ – досить велике число, а ймовірність $p = 0,0001$ – мала величина, $\lambda = np = 1$. Застосовуючи формулу Пуассона, отримаємо

$$P_{10000}(5) = \frac{\lambda^5}{5!} e^{-\lambda} = \frac{1^5}{5!} e^{-1} = \frac{1}{120e} = 0,0031.$$

Приклад 1.28. З заводу на базу відправлено 10000 стандартних виробів. Середня кількість виробів, які можуть бути пошкодженими при транспортуванні, становить 0,02 %. Знайти ймовірність того, що з 10000 виробів: 1) буде пошкоджено три; 2) буде пошкоджено принаймні три; 3) не буде пошкоджено 9997; 4) не буде пошкоджено хоча б 9997.

Розв'язання. 1. Імовірність того, що виріб буде пошкоджено при транспортуванні, є такою: $p = 0,0002$. Оскільки p – мала величина,

$n = 10000$ – велика і $\lambda = np = 10000 \cdot 0,0002 = 2 \leq 10$, слід застосувати формулу Пуассона:

$$P_{10000}(3) = \frac{2^3}{3!} e^{-2} = \frac{8}{6} \cdot 0,135 = 0,18.$$

2. Імовірність $P_{10000}(m \geq 3)$ можна обчислити як суму великої кількості доданків:

$$P_{10000}(m \geq 3) = P_{10000}(3) + P_{10000}(4) + \dots + P_{10000}(10000).$$

Але зрозуміло, що легше її знайти, перейшовши до протилежних подій:

$$P_{10000}(m \geq 3) = 1 - P_{10000}(m < 3) = 1 - (P_{10000}(0) + P_{10000}(1) + P_{10000}(2));$$

$$P_{10000}(0) = \frac{2^0}{0!} e^{-2} = 1 \cdot 0,135 = 0,135;$$

$$P_{10000}(1) = \frac{2^1}{1!} e^{-2} = 2 \cdot 0,135 = 0,270;$$

$$P_{10000}(2) = \frac{2^2}{2!} e^{-2} = 2 \cdot 0,135 = 0,270;$$

$$P_{10000}(m \geq 3) = 1 - (0,135 + 0,270 + 0,270) = 0,325.$$

Слід зазначити, що для обчислення ймовірності $P_{10000}(m \geq 3) = P_{10000}(3 \leq m \leq 10000)$ не можна застосувати інтегральну формулу Муавра – Лапласа, оскільки не виконується умова її застосування, бо $npq \approx 2 < 20$.

3. У цьому випадку $p = 1 - 0,0002 = 0,9998$, і треба знайти ймовірність $P_{10000}(9997)$, для безпосереднього обчислення якої не можна застосувати ні формулу Пуассона (p – велике число), ні локальну формулу Муавра – Лапласа ($npq \approx 2 < 20$). Однак подія «не пошкоджено 9997 з 10000» є рівносильною події «буде пошкоджено 3 з 10000», імовірність якої дорівнює 0,18 (отримана в п. 1).

4. Подія «не буде пошкоджено хоча б 9997 з 10000» є рівносильною події «буде пошкоджено не більш ніж 3 з 10000», для якої $p = 0,0002$ та

$$\begin{aligned} P_{10000}(m \leq 3) &= P_{10000}(0) + P_{10000}(1) + P_{10000}(2) + P_{10000}(3) = \\ &= 0,135 + 0,270 + 0,270 + 0,180 = 0,855. \end{aligned}$$

Приклад 1.29. Частка довгих волокон у партії бавовни становить у середньому 0,6 від загальної кількості волокон. Скільки потрібно взяти волокон, щоб найімовірніша кількість довгих волокон серед них дорівнювала 40?

Розв'язання. За умовою задачі маємо: $m_0 = 40$, $p = 0,6$, тоді $q = 0,4$. Скористаємося формулою, за якою можна визначити найімовірнішу кількість появ події $np - q \leq m_0 \leq np + p$. Підставимо сюди значення відомих величин:

$$\begin{aligned} n \cdot 0,6 - 0,4 &\leq 40 \leq n \cdot 0,6 + 0,6; \\ -0,4 + 40 &\leq 0,6n \leq 0,6 + 40; \\ \frac{39,4}{0,6} &\leq n \leq \frac{40,4}{0,6}; \\ 65,7 &\leq n \leq 67,3. \end{aligned}$$

Задача має два розв'язки: 66 і 67.

Приклад 1.30. На кожні 40 відштампованих виробів у середньому припадає чотири дефектних. Із усієї продукції навмання взято 400 виробів. Знайти ймовірність того, що серед них 350 виробів будуть без дефектів.

Розв'язання. Подія A – узято виріб без дефекту. За умовою $P(A) = p = \frac{40 - 4}{40} = 0,9$, тоді $q = 1 - p = 1 - 0,9 = 0,1$. Проведено $n = 400$ незалежних випробувань. Розв'яжемо задачу за формулою локальної теореми Лапласа:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x); \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Підставляючи дані за умовою задачі, одержимо

$$x = \frac{350 - 400 \cdot 0,9}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = -1,67.$$

За таблицями знаходимо $\varphi(-1,67) = 0,0989$, беручи до уваги, що $\varphi(x)$ – парна функція.

Отже,

$$P_{400}(350) = \frac{0,0989}{\sqrt{400 \cdot 0,9 \cdot 0,1}} = 0,0165.$$

Приклад 1.31. Імовірність виходу з ладу за час t одного приладу дорівнює 0,1. Визначити ймовірність того, що за час t зі 100 приладів вийдуть з ладу від 6 до 18 приладів.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 100$, $x_1 = 6$, $x_2 = 18$, $p = 0,1$, $q = 1 - p = 1 - 0,1 = 0,9$. Використовуємо інтегральну формулу Муавра – Лапласа:

$$\begin{aligned} P_n(6 \leq x \leq 18) &= \Phi\left(\frac{x_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - np}{\sqrt{npq}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{18 - 100 \cdot 0,1}{\sqrt{100 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) - \Phi\left(\frac{6 - 100 \cdot 0,1}{\sqrt{100 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) = \\ &= \Phi\left(\frac{8}{3}\right) - \Phi\left(-\frac{4}{3}\right) = \Phi(2,66) - \Phi(-1,33). \end{aligned}$$

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо $\Phi(2,66) = 0,4961$, $\Phi(1,33) = 0,4082$, беручи до уваги, що $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Тоді

$$P_n(6 \leq x \leq 18) = \Phi(2,66) - \Phi(-1,33) = 0,4961 + 0,4082 = 0,9043.$$

Приклад 1.32. Імовірність настання події в кожному з 10000 незалежних випробувань $p = 0,75$. Знайти ймовірність того, що відносна частота настання події відрізняється від імовірності за модулем не більш ніж на 0,001.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 10000$, $\varepsilon = 0,001$, $p = 0,75$, тоді $q = 0,25$. Підставивши дані в формулу відхилення відносної частоти від постійної ймовірності, одержимо

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{m}{10000} - 0,75\right| \leq 0,001\right) &= 2\Phi\left(0,001 \cdot \sqrt{\frac{10000}{0,75 \cdot 0,25}}\right) = \\ &= 2\Phi(0,23) = 2 \cdot 0,0910 = 0,182, \end{aligned}$$

де значення функції $\Phi(0,23) = 0,0910$ знаходимо за таблицею функції Лапласа.

Приклад 1.33. Імовірність настання події в кожному з 5000 незалежних випробувань дорівнює 0,2. Знайти, яким може бути відхилення відносної частоти настання події від її ймовірності з імовірністю 0,9128.

Розв'язання. За умовою задачі $n = 5000$, $p = 0,2$, отже, $q = 0,8$.

За формулою відхилення відносної частоти від постійної ймовірності

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,9128;$$

$$\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,4564.$$

За таблицею значень функції Лапласа, якщо $\Phi(x) = 0,4564$, то $x = 1,71$.

$$\text{Тоді } \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} = 1,71; \quad \varepsilon = x\sqrt{\frac{pq}{n}} = 1,71\sqrt{\frac{0,2 \cdot 0,8}{5000}} = 0,00967.$$

Приклад 1.34. Скільки разів потрібно кинути монету, щоб з імовірністю 0,6 можна було сподіватися, що відхилення відносної частоти появи герба від імовірності $p = 0,5$ буде за модулем не більше 0,01?

Розв'язання. За умовою задачі $\varepsilon = 0,01$, $p = 0,5$, отже, $q = 0,5$. Тоді за формулою відхилення відносної частоти від постійної ймовірності

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,5\right| \leq 0,01\right) = 2\Phi\left(0,01\sqrt{\frac{n}{0,5 \cdot 0,5}}\right) = 0,6.$$

$$\text{Звідси } \Phi\left(0,01\sqrt{\frac{n}{0,5 \cdot 0,5}}\right) = 0,3.$$

За таблицею значень функції Лапласа, якщо $\Phi(x) = 0,3$, то $x = 0,84$.

Тоді

$$0,01\sqrt{\frac{n}{0,25}} = 0,84;$$

$$n = \left(\frac{0,84}{0,01}\right)^2 \cdot 0,25 = 1764.$$

Приклад 1.35. На верстаті-автоматі виготовляють стандартну деталь з імовірністю 0,9. Із продукції беруть партію деталей. Скільки деталей має містити партія, щоб з імовірністю 0,9973 можна було стверджувати: у партії відхилення відносної частоти появи нестандартної деталі від імовірності її виготовлення не перевищуватиме 0,03? Визначити можливу кількість нестандартних деталей у партії за даних умов.

Розв'язання. Нехай подія A полягає в тому, що виготовлено нестандартну деталь. Маємо схему з n незалежними випробуваннями, у якій $P(A) = p = 1 - 0,9 = 0,1$. Скористаємося формулою відхилення відносної частоти від постійної ймовірності:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,9973;$$

$$\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 0,4987.$$

За таблицями функції Лапласа, якщо $\Phi(x) = 0,4987$, то $x = 3$, тобто

$$\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} = 3;$$

$$n = \left(\frac{3}{\varepsilon}\right)^2 pq = \left(\frac{3}{0,03}\right)^2 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 900 - \text{кількість деталей у партії.}$$

Визначимо кількість нестандартних деталей у партії при цих умовах:

$$\begin{aligned} \left|\frac{m}{900} - 0,1\right| &\leq 0,03; \\ -0,03 &< \frac{m}{900} - 0,1 < 0,03; \\ 63 &< m < 117. \end{aligned}$$

Отже, у партії із 900 деталей буде від 63 до 117 нестандартних деталей.

Приклад 1.36. Людина, що належить до певної групи населення, з імовірністю 0,2 є брюнетом, з імовірністю 0,3 – шатеном, з імовірністю 0,4 – блондином, з імовірністю 0,1 – рудим. Навмання вибирають групу з восьми осіб. Знайти ймовірності таких подій: 1) у складі групи однакова кількість блондинів, шатенів, брюнетів і рудих; 2) у складі групи кількість блондинів є втричі більшою від кількості рудих.

Розв'язання. 1. За формулою ймовірності шуканої події A

$$P(A) = P_n(m_1, m_2, m_3, m_4) = \frac{n!}{m_1! m_2! m_3! m_4!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} p_3^{m_3} p_4^{m_4};$$

$$P(A) = P_8(2, 2, 2, 2) = \frac{8!}{2!2!2!2!} 0,2^2 \cdot 0,3^2 \cdot 0,4^2 \cdot 0,1^2 = 0,0145.$$

2. Імовірність шуканої події **B** дорівнює сумі ймовірностей двох несумісних подій (варіантів): **B₁** – у групі три блондини, один рудий, а решта – ні те, ні інше; **B₂** – у групі шість блондинів, двоє рудих.

Уважаємо, що $p_1 = 0,4$, $p_2 = 0,1$, $p_3 = 1 - (0,4 + 0,1) = 0,5$, тоді

$$P(B_1) = P_8(3,1,4) = \frac{8!}{3!1!4!} 0,4^3 \cdot 0,1^1 \cdot 0,5^4 = 0,1120;$$

$$P(B_2) = P_8(6,2) = \frac{8!}{6!2!} 0,4^6 \cdot 0,1^2 = 0,0011;$$

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) = 0,1120 + 0,0011 = 0,1131.$$

1.5. Дискретні й неперервні випадкові величини та їх числові характеристики

Випадковою називають величину, яка може набувати різних числових значень. Строгіше означення випадкової величини пов'язане з поняттям простору елементарних подій. Нехай задано простір елементарних подій Ω . Однозначну числову функцію $X = f(\Omega)$, задану на просторі елементарних подій, називають випадковою величиною. Якщо простір Ω є дискретним, то випадкова величина – дискретна. Неперервному простору елементарних подій відповідає неперервна випадкова величина.

Співвідношення між значеннями випадкової величини та їх імовірностями називають **законом розподілу випадкової величини**.

Для дискретних випадкових величин закони розподілу можуть задаватися множиною значень, яких набуває випадкова величина, і ймовірностями цих значень.

Якщо $p_i = P(X = x_i)$, то $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, або $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$, якщо величина набуває зліченної множини значень.

Закони розподілу випадкових величин задають у табличній (подають значення випадкової величини та їх імовірності), аналітичній (наводять формулу, за якою обчислюють імовірності для заданих значень випадкової величини), графічній (у прямокутній системі координат задають набір точок $(x_i; p_i)$; сполучивши точки відрізками прямих, одержують багатокутник розподілу ймовірностей) формах.

Універсальним способом задання закону розподілу ймовірностей є функція розподілу $F(x) = P(X < x)$. Для дискретних величин $F(x) = \sum_{x_i < x} p(x_i)$.

Функція розподілу — неспадна, неперервна зліва, $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$. Для довільних α і β $P(\alpha \leq X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$.

Із властивостей $F(x)$ випливають такі висновки:

1. Імовірність того, що випадкова величина X набуде можливого значення $X = x \in [\alpha; \beta]$, дорівнює приросту інтегральної функції $F(x)$ на цьому проміжку:

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

2. Якщо випадкова величина X є неперервною, то ймовірність того, що вона набуде конкретного можливого значення, завжди дорівнює нулю:

$$P(X = x_i) = 0.$$

І справді, поклавши $\alpha = x_i$, $\beta = x_i + \Delta x$, отримаємо

$$P(x_i < X < x_i + \Delta x) = F(x_i + \Delta x) - F(x_i).$$

Коли $\Delta x \rightarrow 0$, маємо

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x_i < X < x_i + \Delta x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (F(x_i + \Delta x) - F(x_i)).$$

Оскільки при $\Delta x \rightarrow 0$ $X = x_i$, то

$$P(X = x_i) = F(x_i) - F(x_i) = 0,$$

що й потрібно було довести.

Отже, для неперервної випадкової величини X виконуються такі рівності:

$$P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \leq X < \beta) = P(\alpha < X \leq \beta) = P(\alpha \leq X \leq \beta).$$

3. Якщо $X \in [-\infty; \infty]$, то виконуються два співвідношення:

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} P(X < x) \rightarrow F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0 \quad (\text{оскільки}$$

подія $X < -\infty$ полягає в тому, що випадкова величина набуває значення, розташованого зліва від $-\infty$, а така подія є неможливою ($\emptyset$),

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} P(X < x) \rightarrow F(\infty) = P(X < \infty) = 1 \quad (\text{оскільки подія}$$

$X < \infty$ полягає в тому, що випадкова величина X набуває числового значення, розташованого зліва від $+\infty$, а ця подія є ймовірною (Ω), бо будь-яке число $X = x < +\infty$).

Із цих двох співвідношень випливає висновок: якщо можливі значення випадкової величини X належать обмеженому проміжку $[a; b]$, то

$$F(x) = 0 \text{ для } x \leq a;$$

$$F(x) = 1 \text{ для } x > b.$$

Якщо X — неперервна випадкова величина, то $F(x)$ — неперервна й диференційовна; її похідна $f(x) = F'(x)$ називається **щільністю розподілу ймовірностей**.

Властивості $f(x)$:

1. $f(x) \geq 0$. Ця властивість випливає з означення щільності ймовірності як першої похідної від $F(x)$ при умові, що $F(x)$ є неспадною функцією.

2. Умова нормування неперервної випадкової величини X :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1.$$

3. Імовірність потрапляння неперервної випадкової величини в інтервалі $[\alpha; \beta]$ визначається формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx.$$

4. Функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини має вигляд

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx.$$

Математичним сподіванням, або середнім значенням, випадкової величини (позначається $M(X)$) називають ряд $\sum_i x_i p_i$ (для

дискретних випадкових величин) та інтеграл $\int_{-\infty}^{\infty} xf(x) dx$ (для

неперервних випадкових величин), якщо вони є абсолютно збіжними. Математичне сподівання має такі властивості:

1) $M(C) = C$ (C — стала);

2) $M(CX) = C \cdot M(X)$;

3) $M(X + Y) = M(X) + M(Y)$;

4) $M(XY) = M(X) \cdot M(Y)$, якщо X і Y — незалежні випадкові величини.

Дисперсія випадкової величини X (позначається $D(X)$) визначається формулою

$$D(X) = M(X - M(X))^2 = M(X^2) - (M(X))^2.$$

Основні властивості дисперсії:

1) $D(C) = 0$;

2) $D(CX) = C^2 D(X)$;

3) $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$, якщо випадкові величини є незалежними.

Середнє квадратичне відхилення (позначається σ) є квадратним коренем із дисперсії.

Якщо від випадкової величини віднімемо її математичне сподівання, то одержимо центровану випадкову величину, математичне сподівання якої дорівнює нулю. Ділення випадкової величини на її середнє квадратичне відхилення називають нормуванням цієї випадкової величини.

Випадкова величина $X^* = \frac{X - M(X)}{\sigma}$ має нульове математичне сподівання й одиничну дисперсію.

Початковий, центральний і абсолютний початковий моменти порядку k величини X визначають відповідно за такими формулами:

$$\nu_k = M(X^k), \mu_k = M(X - M(X))^k, \alpha_k = M(|X|^k).$$

Якщо існує **початковий абсолютний момент** порядку k , то існують усі моменти нижчих порядків.

Медіаною (M_e) випадкової величини X є будь-який корінь рівняння $F(x) = 0,5$.

Мода дискретної величини (M_o) — це таке її значення, імовірність якого є найбільшою.

Модою неперервного розподілу є значення випадкової величини, при якому щільність розподілу має максимум.

Асиметрія випадкової величини визначається формулою

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Ексцес випадкової величини обчислюють за формулою

$$E_s = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3.$$

Приклад 1.37. Робітник обслуговує три верстати, що працюють незалежно. Імовірність того, що протягом години верстату знадобиться увага робітника, дорівнює: для першого верстата 0,3, для другого – 0,2, для третього – 0,1. Знайти:

- 1) закон розподілу випадкової величини X — кількість верстатів, яким знадобиться увага робітника протягом години;
- 2) многокутник і функцію розподілу;
- 3) математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення.

Розв'язання. 1. Нехай подія **A** полягає в тому, що першому верстату протягом години знадобиться увага робітника, подія **B** – другому знадобиться увага робітника, **C** – третьому. За умовою задачі $P(A) = 0,3$, $P(B) = 0,2$, $P(C) = 0,1$. Тоді протилежними подіями відповідно є $P(\bar{A}) = 0,7$, $P(\bar{B}) = 0,8$, $P(\bar{C}) = 0,9$. Випадкова величина **X** – кількість верстатів, яким знадобиться увага робітника протягом години, – набуває значень 0, 1, 2, 3. Очевидно, що

$$P(X = 0) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 = 0,504;$$

$$P(X = 1) = P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) + P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) = \\ = 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,9 + 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,1 = 0,398;$$

$$P(X = 2) = P(\bar{A}) \cdot P(B) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(C) + P(A) \cdot P(B) \cdot P(\bar{C}) = \\ = 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,1 + 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,9 = 0,092;$$

$$P(X = 3) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C) = 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,006.$$

Тоді закон розподілу випадкової величини **X** можна подати у вигляді такої таблиці:

X	0	1	2	3
P	0,504	0,398	0,092	0,006

2. Згідно з отриманими результатами зобразимо багатокутник розподілу випадкової величини **X** (рис. 1.15).

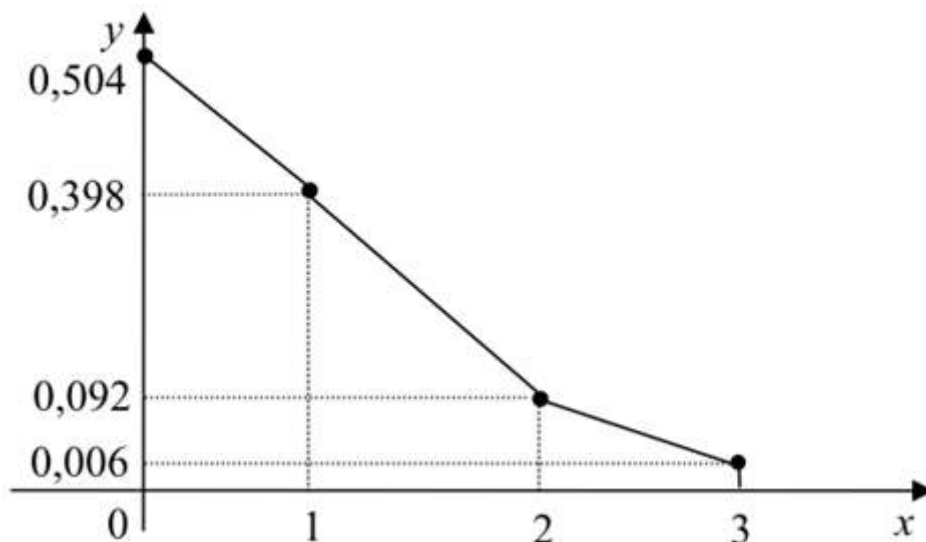


Рис. 1.15. Многокутник розподілу випадкової величини **X**

Побудуємо функцію розподілу випадкової величини **X**:

$$1) \text{ при } x \leq 0 \quad F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = 0;$$

$$2) \text{ при } 0 < x \leq 1 \quad F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = P(X=0) = 0,504;$$

$$3) \text{ при } 1 < x \leq 2 \quad F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = P(X=0) + P(X=1) = 0,504 + 0,398 = 0,902;$$

$$4) \text{ при } 2 < x \leq 3 \quad F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) = 0,504 + 0,398 + 0,092 = 0,994;$$

$$5) \text{ при } x > 3 \quad F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 0,504 + 0,398 + 0,092 + 0,006 = 1.$$

Функція розподілу випадкової величини X має такий вигляд:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 0,504 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 0,902 & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 0,994 & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Побудуємо графік функції розподілу випадкової величини X (рис. 1.16).

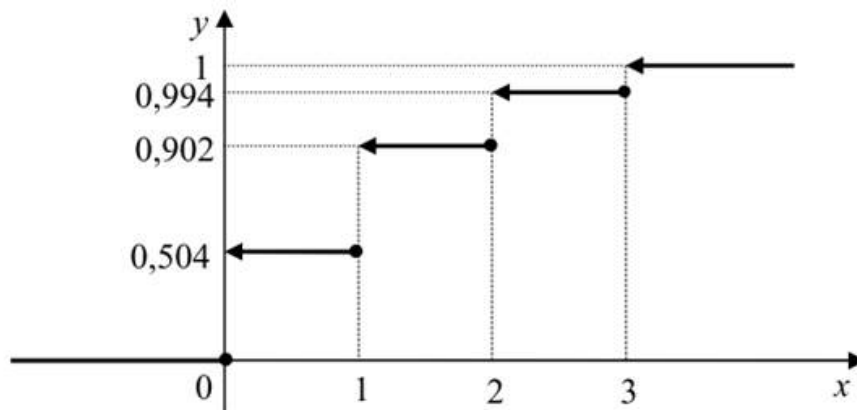


Рис. 1.16. Графік функції розподілу випадкової величини X для прикладу 1.37

3. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини:

$$M(X) = \sum_n x_n p_n = 0 \cdot 0,504 + 1 \cdot 0,398 + 2 \cdot 0,092 + 3 \cdot 0,006 = 0,6.$$

Визначимо дисперсію й середнє квадратичне відхилення випадкової величини:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0,82 - 0,6^2 = 0,46;$$

$$M(X^2) = 0^2 \cdot 0,504 + 1^2 \cdot 0,398 + 2^2 \cdot 0,092 + 3^2 \cdot 0,006 = 0,82;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,46} = 0,678.$$

Приклад 1.38. У партії з шести деталей чотири стандартних. Навмання вибрано три деталі. Знайти:

- 1) ряд розподілу дискретної випадкової величини X – кількості стандартних деталей серед відібраних;
- 2) функцію розподілу $F(x)$;
- 3) імовірність того, що випадкова величина X набуде значення в інтервалі $(1,5; 2,5)$.

Розв'язання. 1. Нехай випадкова величина X – кількість стандартних деталей серед трьох відібраних – може набувати значень 1, 2, 3 ($X=0$ неможлива подія). Знайдемо ймовірності можливих значень випадкової величини X :

$$P(X = k) = \frac{C_n^k C_{N-n}^{m-k}}{C_N^m};$$

$$P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_2^2}{C_6^3} = \frac{4!}{3!1!} \cdot \frac{2!}{0!2!} : \frac{6!}{3!3!} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 6} = 0,2;$$

$$P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_2^1}{C_6^3} = \frac{4!}{2!2!} \cdot \frac{2!}{1!1!} : \frac{6!}{3!3!} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 5 \cdot 6} = 0,6;$$

$$P(X = 3) = \frac{C_4^3}{C_6^3} = \frac{4!}{1!3!} : \frac{6!}{3!3!} = \frac{2 \cdot 3}{5 \cdot 6} = 0,2.$$

Отримали ряд розподілу у вигляді таблиці:

X	1	2	3
P	0,2	0,6	0,2

Контроль: $0,2 + 0,6 + 0,2 = 1$.

2. Побудуємо функцію розподілу випадкової величини X :

– при $x \leq 1$ $F(x) = \sum_{x_i < x} p_i = 0$;

– при $1 < x \leq 2$ $F(x) = P(X = 1) = 0,2$;

– при $2 < x \leq 3$ $F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,2 + 0,6 = 0,8$;

– при $x > 3$ $F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0,2 + 0,6 + 0,2 = 1$.

Отже, функція розподілу випадкової величини X має вигляд

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1; \\ 0,2 & \text{при } 1 < x \leq 2; \\ 0,8 & \text{при } 2 < x \leq 3; \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$

Графік функції розподілу випадкової величини X зображено на рис. 1.17.

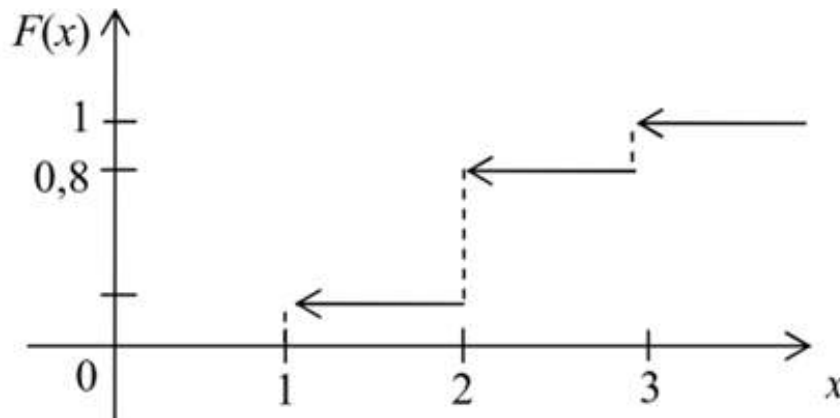


Рис. 1.17. Графік функції розподілу випадкової величини X для прикладу 1.38

3. Знайдемо ймовірність того, що випадкова величина X набуде значення в інтервалі $(1,5; 2,5)$:

$$P(1,5 \leq X \leq 2,5) = F(2,5) - F(1,5) = 0,8 - 0,2 = 0,6.$$

Приклад 1.39. Ряд розподілу дискретної випадкової величини складається з двох невідомих значень. Імовірність того, що випадкова величина набуде одного з цих значень, дорівнює 0,8. Знайти функцію розподілу випадкової величини, якщо її математичне сподівання дорівнює 3,2, а дисперсія – 0,16.

Розв'язання. Запишемо ряд розподілу у вигляді таблиці:

X	x_1	x_2
P	0,8	0,2

де $p_1 = 0,8$, $p_2 = 1 - p_1 = 1 - 0,8 = 0,2$.

За умовою задачі математичне сподівання визначається формулою

$$M(X) = \sum_{i=1}^2 x_i p_i = 0,8x_1 + 0,2x_2 = 3,2.$$

Знайдемо математичне сподівання X^2 :

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^2 x_i^2 p_i = 0,8x_1^2 + 0,2x_2^2.$$

Формула дисперсії

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 0,8x_1^2 + 0,2x_2^2 - 3,2^2 = 0,16.$$

Отримаємо систему з двома невідомими

$$\begin{cases} 0,8x_1 + 0,2x_2 = 3,2; \\ 0,8x_1^2 + 0,2x_2^2 - 3,2^2 = 0,16. \end{cases}$$

Знаходимо два розв'язки цієї системи:

$$\begin{cases} x_1 = 3; \\ x_2 = 4, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 3,4; \\ x_2 = 2,4. \end{cases}$$

Знайдемо функцію розподілу випадкової величини для обох розв'язків:

а) для $x_1 = 3, x_2 = 4$:

– при $x \leq 3$ $F(x) = 0$;

– при $3 < x \leq 4$ $F(x) = P(X = 3) = 0,8$;

– при $x > 4$ $F(x) = P(X = 3) + P(X = 4) = 0,8 + 0,2 = 1$;

б) для $x_1 = 3,4, x_2 = 2,4$:

– при $x \leq 2,4$ $F(x) = 0$;

– при $2,4 < x \leq 3,4$ $F(x) = P(X = 2,4) = 0,2$;

– при $x > 3,4$ $F(x) = P(X = 2,4) + P(X = 3,4) = 0,2 + 0,8 = 1$.

Запишемо шукані функції розподілу:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 3; \\ 0,8 & \text{при } 3 < x \leq 4; \\ 1 & \text{при } x > 4 \end{cases} \quad \text{або} \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 2,4; \\ 0,2 & \text{при } 2,4 < x \leq 3,4; \\ 1 & \text{при } x > 3,4. \end{cases}$$

Приклад 1.40. Задано закони розподілу незалежних випадкових величин X і Y у вигляді таблиць:

X	0	2	4
P	0,5	0,2	0,3

Y	-2	0	2
P	0,1	0,6	0,3

Знайти закон розподілу випадкової величини $Z = X - Y$.

Розв'язання. Для зручності знаходження всіх значень різниці $Z = X - Y$ та їх імовірностей складемо допоміжну табл. 1.1, у кожній клітині якої помістимо в лівому кутку значення різниці $Z = X - Y$, а в правому – імовірності цих значень, отримані після перемноження ймовірностей відповідних значень випадкових величин X і Y .

Наприклад, якщо $X = 4$ (останній рядок таблиці), а $Y = -2$ (третій стовпець таблиці), то випадкова величина $Z = X - Y$ набуває значення $Z = 4 - (-2) = 6$, а її ймовірність обчислюється за формулою $P(Z = 6) = P(X = 4) \cdot P(Y = -2) = 0,3 \cdot 0,1 = 0,03$ (числа $Z = 6$ і $P = 0,03$ знаходяться в клітині на перетині останнього рядка й третього стовпця).

Таблиця 1.1

		y_j	-2	0	2
x_i	p_j		0,1	0,6	0,3
	p_i				
0	0,5	2	0,05	0,30	0,15
2	0,2	4	0,02	0,12	0,06
4	0,3	6	0,03	0,18	0,09

Якщо серед дев'яти значень Z є такі, які повторюються, то відповідні їх імовірності знайдемо за допомогою теореми додавання ймовірностей. Наприклад, значення $Z = X - Y = 2$ можна отримати, коли $X = 0, Y = -2$ (з імовірністю 0,05); $X = 2, Y = 0$ (з імовірністю 0,09), тому

$$P(Z = 2) = 0,15 + 0,12 + 0,09 = 0,26 \text{ і т. д.}$$

Отже, отримаємо розподіл, наведений у таблиці:

Z	-2	0	2	4	6
P	0,15	0,36	0,26	0,20	0,03

Переконаємося в тому, що умова $\sum_{i=1}^5 p_i = 1$ виконується:

$$0,15 + 0,36 + 0,26 + 0,20 + 0,03 = 1.$$

Приклад 1.41. Існує три методи експрес-контролю партії виробів. Кожний із них безпомилково виявляє якісні вироби, а при ідентифікації некондиційних допускає помилки, тобто вони визначаються як якісні. Кількість таких виробів для кожного із методів є відповідно випадковими величинами X , Y та Z , закони розподілу яких наведено в таблицях:

X	0	1	3	4
P	0,5	0,4	0,06	0,04

Y	0	1	2	3
P	0,6	0,2	0,1	0,1

Z	0	1	2	3	4
P	0,8	0,1	0,04	0,03	0,03

Який із методів експрес-контролю є кращим?

Розв'язання. Нехай a – кількість стандартних виробів у партії. Тоді згідно з умовою задачі кожен із методів контролю відповідно дасть $a + X$,

$a + Y$, $a + Z$ стандартних деталей після перевірки всієї партії, де кожний другий доданок у сумах – це помилка при ідентифікації бракованих виробів. Мінімальним її значенням (у середньому) визначається кращий метод. Характеристикою середнього значення є математичне сподівання, тому знайдемо:

$$1) M(X) = 0 \cdot 0,5 + 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,06 + 4 \cdot 0,04 = 0,74;$$

$$2) M(Y) = 0 \cdot 0,6 + 1 \cdot 0,2 + 2 \cdot 0,1 + 3 \cdot 0,1 = 0,7;$$

$$3) M(Z) = 0 \cdot 0,8 + 1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,04 + 3 \cdot 0,03 + 4 \cdot 0,03 = 0,39.$$

Отже, кращим методом експрес-контролю є третій.

Приклад 1.42. Задано функцію розподілу випадкової величини

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ ax^2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Визначити: 1) параметр a ; 2) щільність розподілу $f(x)$; 3) математичне сподівання, дисперсію й середнє квадратичне відхилення; 4) моду й медіану.

Розв'язання. 1. За першою властивістю щільності розподілу ймовірностей знаходимо

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 2ax & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Ураховуючи другу властивість щільності розподілу ймовірностей

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1, \text{ одержуємо}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_0^1 2ax dx = \left. \frac{2ax^2}{2} \right|_0^1 = a = 1.$$

$$\text{Отже, } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ x^2 & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 1 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

2. Визначаємо щільність розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 0; \\ 2x & \text{при } 0 < x \leq 1; \\ 0 & \text{при } x > 1. \end{cases}$$

Графіки $F(x)$ і $f(x)$ зображено на рис. 1.18, 1.19.

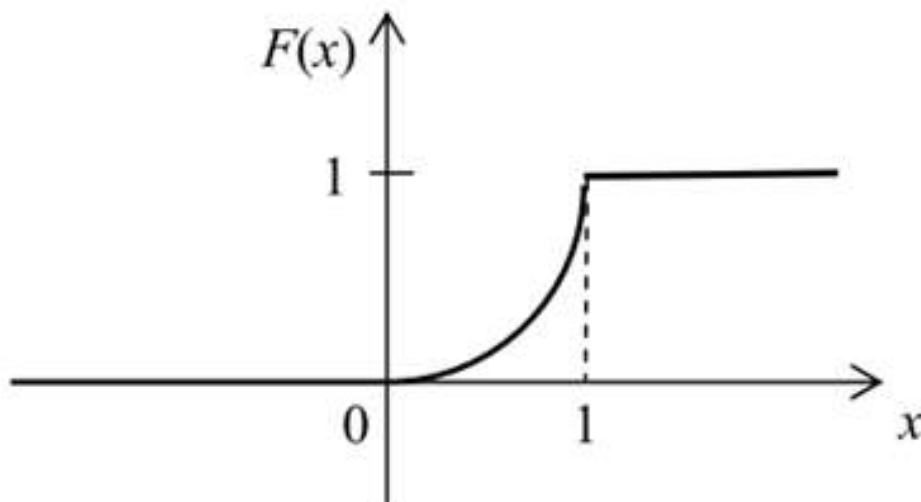


Рис. 1.18. Графік функції розподілу випадкової величини для прикладу 1.42

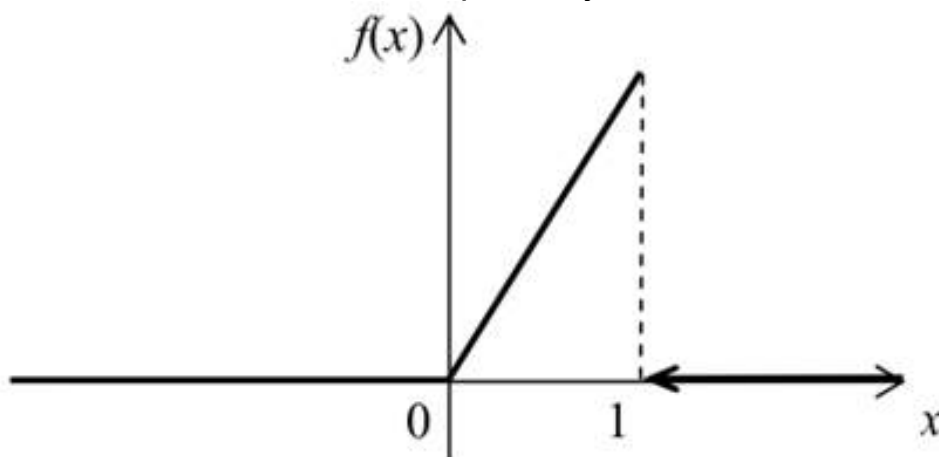


Рис. 1.19. Графік щільності розподілу випадкової величини для прикладу 1.42

3. Знаходимо математичне сподівання випадкової величини:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^1 x \cdot 2x dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = 2 \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{2}{3};$$

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^1 x^2 \cdot 2x dx = 2 \int_0^1 x^3 dx = 2 \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

Розраховуємо дисперсію випадкової величини:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1}{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}.$$

Тоді середнє квадратичне відхилення випадкової величини є таким:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\frac{1}{18}} = 0,24.$$

4. Очевидно, що мода випадкової величини як абсциса максимуму щільності розподілу ймовірностей дорівнює 1, тобто $M_0 = 1$.

Щоб знайти медіану, скористаємось її означенням

$$P(X < M_e) = P(X > M_e) = \frac{1}{2}.$$

Отже,

$$P(X < M_e) = F(M_e) = M_e^2 = \frac{1}{2};$$

$$M_e = \sqrt{\frac{1}{2}} = 0,712.$$

Приклад 1.43. Задано щільність розподілу випадкової величини

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2} \cos x & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 0 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Визначити функцію розподілу випадкової величини $F(x)$ і $P\left(0 \leq X < \frac{\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. Відомо, що $F(x) = \int_{-\infty}^x f(x) dx$. Знаходимо значення функції розподілу на кожному інтервалі окремо:

$$1) \quad x \leq -\frac{\pi}{2}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^x 0 dx = 0;$$

$$\begin{aligned} 2) \quad -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}, \quad F(x) &= \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{2} \cos x dx = \frac{1}{2} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^x = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin x - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} (\sin x + 1); \end{aligned}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{2} \cos x dx = \frac{1}{2} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^x = \frac{1}{2} \left(\sin x - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} (\sin x + 1);$$

$$3) \ x > \frac{\pi}{2}, F(x) = \int_{-\infty}^{-\frac{\pi}{2}} 0 dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \cos x dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^x 0 dx = \frac{1}{2} \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{\pi}{2} - \sin \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) = 1.$$

Отже, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -\frac{\pi}{2}; \\ \frac{1}{2} (\sin x + 1) & \text{при } -\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{2}; \\ 1 & \text{при } x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

Графіки $F(x)$ і $f(x)$ зображено на рис. 1.20, 1.21.

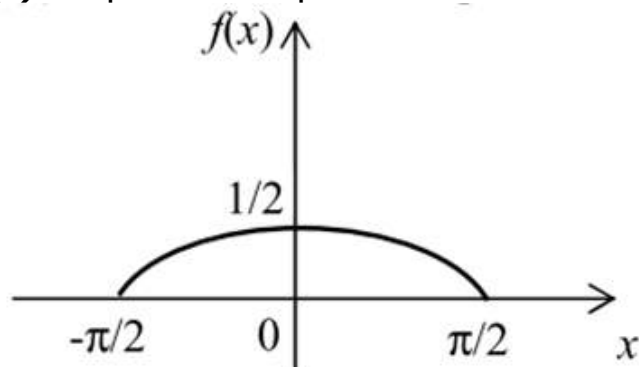


Рис. 1.20. Графік функції розподілу випадкової величини для прикладу 1.43

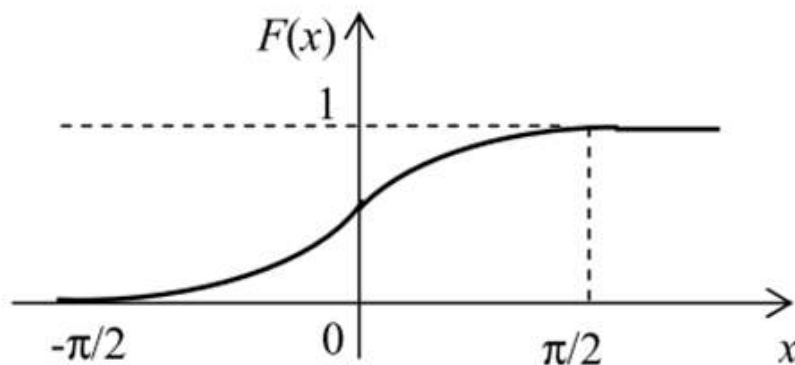


Рис. 1.21. Графік щільності розподілу випадкової величини для прикладу 1.43

Використовуючи властивості функції розподілу, знаходимо

$$P\left(0 \leq X < \frac{\pi}{6}\right) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) - F(0) = \frac{1}{2}\left(\sin \frac{\pi}{6} + 1\right) - \frac{1}{2}(\sin 0 + 1) = \frac{1}{4}.$$

Приклад 1.44. Задано щільність розподілу $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$ випадкової величини. Визначити математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, коефіцієнт асиметрії, ексцес випадкової величини X .

Розв'язання. Знаходимо математичне сподівання випадкової величини:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 0,$$

оскільки функція $x \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|}$ є непарною;

$$M(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2}e^{-|x|}dx = 2.$$

Розраховуємо дисперсію випадкової величини:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = 2 - 0^2 = 2.$$

Тоді середнє квадратичне відхилення випадкової величини

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{2} = 1,4.$$

Щоб відшукати коефіцієнт асиметрії доцільно побудувати графік щільності розподілу $f(x)$ (рис. 1.22).

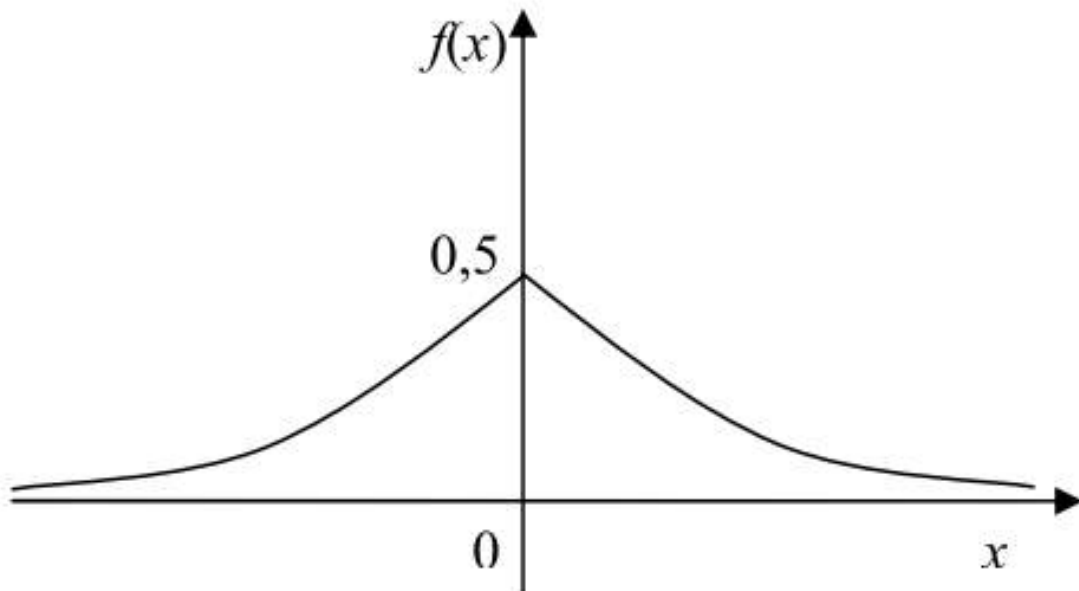


Рис. 1.22. Графік щільності розподілу випадкової величини для прикладу 1.44

Оскільки розподіл є симетричним відносно математичного сподівання, то всі моменти непарного порядку дорівнюють нулю. Тому

$$S_x = \frac{M_3}{\sigma^3} = 0.$$

Для знаходження ексцесу випадкової величини, розраховуємо момент M_4 :

$$M_4 = \int_{-\infty}^{\infty} x^4 f(x) dx = \int_0^1 x^4 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 24.$$

$$\text{Отже, } E_x = \frac{M_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{24}{\sqrt{2}^4} - 3 = 3.$$

1.6. Найважливіші закони розподілу випадкових величин

У теорії ймовірностей часто застосовуються закони розподілу випадкових величин. Розглянемо ці закони, а також задачі, де вони використовуються.

Біноміальний закон розподілу. Імовірності в цьому законі визначаються формулою $P(X = m) = C_n^m p^m (1 - p)^{n-m}$, $m = 0, 1, 2, \dots, n$. Закон є правильним для схеми незалежних повторних випробувань, у кожному з яких подія **A** відбувається з імовірністю p . Частота настання події **A** підпорядковується біноміальному закону розподілу. Числові характеристики розподілу:

$$MX = np, DX = np(1 - p).$$

Дискретна випадкова величина має **розподіл Пуассона**, якщо вона набуває зліченної кількості значень ($m = 0, 1, 2, \dots$) з імовірностями

$$P(X = m) = \frac{a^m}{m!} e^{-a} (a > 0).$$

Цей розподіл описує кількість подій, які настають в однакові проміжки часу за умови, що ці події відбуваються незалежно одна від одної зі сталою інтенсивністю. Розподіл Пуассона розглядається як статистична модель для кількості альфа-частинок, що випромінюються радіоактивним джерелом за певний проміжок часу; кількості викликів, які надходять на телефонну станцію за певний період доби; кількості вимог щодо виплати страхових сум за рік; кількості дефектів на однакових пробах речовини і т. ін. Розподіл застосовується в задачах статистичного контролю якості, у теорії надійності, теорії масового обслуговування. Математичне сподівання й дисперсія в цьому розподілі є однаковими і дорівнюють a . Для цього розподілу складено таблиці щодо різних значень a (0,1–20). У таблицях для відповідних значень a наведено ймовірності $P(X = m)$ і $P(X \geq m)$.

Якщо у схемі незалежних повторних випробувань число n є великим, а p або $1-p$ прямує до нуля, то біноміальний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, коли $a = np$.

Геометричний розподіл. Закон подається у вигляді формули $P(X = m) = p(1-p)^{m-1}, m = 1, 2, \dots$.

Геометричному закону розподілу підпорядковується частота настання події в схемі незалежних повторних випробувань, якщо вони проводяться до першого настання події. У формулі p — імовірність настання події в кожному випробуванні. Геометричний закон розподілу застосовується в задачах статистичного контролю якості і в теорії надійності. Числові характеристики розподілу: $MX = \frac{1}{p}, DX = \frac{1-p}{p^2}$.

Гіпергеометричний розподіл описує ймовірність настання m успішних результатів у n випробуваннях, якщо значення n є малим порівняно з обсягом сукупності N :

$$P(X = m) = \frac{C_k^m C_{N-k}^{n-m}}{C_N^n}, m = 0, 1, 2, \dots, n; k \geq n.$$

Наприклад, імовірність того, що з n деталей, які випадково вибрано з партії обсягом N , m деталей будуть дефектними, підпорядковується гіпергеометричному закону розподілу (k — кількість дефектних деталей у партії). Цей закон розподілу застосовується в задачах статистичного контролю якості і в суміжних галузях. Числові характеристики розподілу:

$$MX = \frac{kn}{N}, DX = \frac{nk(N-k)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Зі зменшенням відношення $\frac{n}{N}$ гіпергеометричний розподіл наближається до біноміального з параметрами n і $p = \frac{k}{N}$. Дуже часто гіпергеометричний розподіл апроксимується розподілом Пуассона, якщо $a = \frac{nk}{N}$.

Рівномірний закон розподілу. Якщо ймовірність потрапляння випадкової величини в інтервал є пропорційною довжині інтервалу і не залежить від розташування інтервалу на осі, то вона підпорядковується рівномірному закону розподілу. Щільність такого розподілу:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq a; \\ \frac{1}{b-a}, & \text{якщо } a < x \leq b; \\ 0, & \text{якщо } x > b. \end{cases}$$

Рівномірний закон розподілу легко моделювати. За допомогою функціональних перетворень із величин, розподілених рівномірно, можна одержувати величини з довільним законом розподілу. Числові характеристики розподілу:

$$MX = \frac{a+b}{2}, \quad DX = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Показниковий закон розподілу. Щільність розподілу випадкової величини підпорядковується показниковому закону й визначається формулою

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x \leq 0; \\ ae^{-ax}, & \text{якщо } x > 0. \end{cases}$$

Випадкові величини з таким законом розподілу широко застосовуються в задачах з теорії надійності та теорії масового обслуговування. Числові характеристики:

$$MX = \frac{1}{a}, \quad DX = \frac{1}{a^2}.$$

Нормальний закон розподілу задається щільністю $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$. Параметри a і σ , які входять до виразу щільності розподілу, є відповідно математичним сподіванням і середнім квадратичним відхиленням випадкової величини. Нормальний закон розподілу широко застосовується в математичній статистиці. Для обчислення ймовірності потрапляння нормально розподіленої випадкової величини на проміжок використовується функція Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Отже,

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right).$$

Часто використовується також формула

$$P(|X-a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Приклад 1.45. До магазину надійшло взуття з двох фабрик у співвідношенні 2:3. Придбано чотири пари взуття. Знайти закон розподілу кількості куплених пар взуття, виготовленого першою фабрикою. Знайти: 1) математичне сподівання й середнє квадратичне відхилення цієї випадкової величини; 2) математичне сподівання і

дисперсію частини пар взуття, виготовленого першою фабрикою, серед чотирьох куплених.

Розв'язання. Визначимо ймовірність того, що випадково вибрано пару взуття, виготовленого першою фабрикою: $p = 2 / (2 + 3) = 0,4$. Випадкова величина X – кількість пар взуття серед чотирьох, виготовлених першою фабрикою, — може набувати значень 0, 1, 2, 3, 4. Маємо біноміальний закон розподілу з параметрами $n = 4$, $p = 0,4$.

1. Обчислимо ймовірності для кожної можливої кількості куплених пар взуття, виготовленого першою фабрикою, використовуючи формулу Бернуллі:

$$P_4(0) = C_4^0 p^0 q^4 = 0,6^4 = 0,1296;$$

$$P_4(1) = C_4^1 p^1 q^3 = \frac{4!}{3!1!} \cdot 0,4^1 0,6^3 = 0,3456;$$

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4!}{2!2!} \cdot 0,4^2 0,6^2 = 0,3456;$$

$$P_4(3) = C_4^3 p^3 q^1 = \frac{4!}{1!3!} \cdot 0,4^3 0,6 = 0,1536;$$

$$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = \frac{4!}{4!0!} \cdot 0,4^4 0,6^0 = 0,0256.$$

Ряд розподілу X подамо у вигляді такої таблиці:

X	0	1	2	3	4
P	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

Знайдемо математичне сподівання, дисперсію й середнє квадратичне відхилення випадкової величини X :

$$M(X) = np = 4 \cdot 0,4 = 1,6;$$

$$D(X) = npq = 4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,96;$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,96} = 0,98.$$

Зауваження. Неважко помітити, що отриманий розподіл є дво-modalним (має дві моди): $M_0(X)_1 = 1$ і $M_0(X)_2 = 2$, оскільки ці значення мають найбільші (і рівні між собою) імовірності. Моду $M_0(X)$ — число ціле — можна знайти з нерівності

$$np - q \leq M_0(X) \leq np + p.$$

Отже,

$$4 \cdot 0,4 - 0,6 \leq M_0(X) \leq 4 \cdot 0,4 + 0,4;$$

$$1 \leq M_0(X) \leq 2,$$

тобто $M_0(X)_1 = 1$ і $M_0(X)_2 = 2$.

2. Математичне сподівання й дисперсію частини пар взуття, виготовлених першою фабрикою, серед чотирьох куплених знаходимо за формулами

$$M\left(\frac{m}{n}\right) = p = 0,4;$$

$$D\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{pq}{n} = \frac{0,4 \cdot 0,6}{4} = 0,06.$$

Приклад 1.46. Імовірність того, що стрілець влучить у мішень при одному пострілі, дорівнює 0,8. Стрільцеві видають патрони доти, доки він не промахнеться. Знайти: закон розподілу дискретної випадкової величини — кількості виданих стрільцеві патронів; математичне сподівання й дисперсію випадкової величини — кількості виданих стрільцеві патронів.

Розв'язання. Випадкова величина X підпорядковується геометричному закону розподілу й набуває таких можливих значень: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, \dots, x_k = k, \dots$. Визначимо ймовірності цих значень. Величина X набуває значення $x_1 = 1$, якщо стрілець не влучить у мішень при першому пострілі. Імовірність цього значення $P(X = 1) = 1 - 0,8 = 0,2$. Величина X набуває значення $x_2 = 2$, якщо стрілець влучить у мішень при першому пострілі, а при другому промахнеться: $P(X = 2) = 0,2 \cdot 0,8 = 0,16$. Аналогічно

$$P(X = 3) = 0,2 \cdot 0,8^2 = 0,128, \dots, P(X = K) = 0,2 \cdot 0,8^{k-1}, \dots$$

Закон розподілу двовимірної випадкової величини подано у вигляді таблиці:

X	1	2	3	...	K	...
P	0,2	0,16	0,128	...	$0,8^{k-1} \cdot 0,2$	...

При геометричному законі розподілу математичне сподівання й дисперсію випадкової величини знаходимо за формулами

$$M(X) = \frac{1}{p} = \frac{1}{0,2} = 5;$$

$$D(X) = \frac{q}{p^2} = \frac{0,8}{0,2^2} = 20.$$

Приклад 1.47. Завод відправив на базу 500 якісних виробів. Імовірність пошкодження кожного виробу в дорозі дорівнює 0,002. Знайти закон розподілу випадкової величини X кількості пошкоджених виробів, а також імовірності таких подій:

- **A** – пошкоджено менше трьох виробів;
- **B** – пошкоджено більше двох виробів;
- **C** – пошкоджено хоча б один виріб.

Розв'язання. Можливі значення випадкової величини X : 0, 1, 2, ..., 500. Оскільки кількість виробів $n = 500$ є великою, імовірність пошкодження виробу $p = 0,002$ є малою, а $\lambda = np = 500 \cdot 0,002 = 1$, то закон розподілу випадкової величини X наближається до закону розподілу Пуассона з $\lambda = 1$. Тоді ймовірності обчислюємо наближено за формулою

$$p_k = P(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{1^k}{k!} e^{-1}.$$

Закон розподілу випадкової величини X подано у вигляді таблиці:

X	0	1	2	...	K	...	500
P	0,3679	0,3679	0,1839	...	$p_k = \frac{1^k}{k!} e^{-1}$	...	0

Визначаємо:

- імовірність події **A**, коли пошкоджено менше трьох виробів:

$$P(A) = P(X < 3) = P(0) + P(1) + P(2) = 0,3679 + 0,3679 + 0,1839 = 0,9197;$$

- імовірність події **B**, коли пошкоджено більше двох виробів:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(X > 2) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - (P(0) + P(1) + P(2)) = \\ &= 1 - P(A) = 1 - 0,9197 = 0,0803; \end{aligned}$$

- імовірність події **C**, коли пошкоджено хоча б один виріб:

$$P(A) = P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,3679 = 0,6321.$$

Приклад 1.48. Випадкова величина розподілена показниково з параметром $\lambda = a$. При якому значенні параметра ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок $[\alpha; \beta]$ буде найбільшою?

Розв'язання. Нехай параметр a – неперервна й диференційовна величина. Знайдемо ймовірність потрапляння випадкової величини на відрізок $[\alpha; \beta]$:

$$P(\alpha \leq X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} a e^{-ax} dx = e^{-a\alpha} - e^{-a\beta};$$

$$P(a) = e^{-a\alpha} - e^{-a\beta}.$$

Дослідимо отриману функцію на екстремум і знайдемо параметр a :

$$P'(a) = 0;$$

$$P'(a) = -\alpha e^{-a\alpha} + \beta e^{-a\beta};$$

$$-\alpha e^{-a\alpha} + \beta e^{-a\beta} = 0;$$

$$\alpha e^{-a\alpha} = \beta e^{-a\beta};$$

$$\ln(\alpha e^{-a\alpha}) = \ln(\beta e^{-a\beta});$$

$$\ln \alpha + \ln(e^{-a\alpha}) = \ln \beta + \ln(e^{-a\beta});$$

$$\ln \beta - a\beta = \ln \alpha - a\alpha;$$

$$a = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha}.$$

Для подальших обчислень перетворимо вираз для параметра a , використовуючи властивості натурального логарифма:

$$a = \frac{\ln \beta - \ln \alpha}{\beta - \alpha} = \frac{1}{\beta - \alpha} \ln \frac{\beta}{\alpha} = \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta - \alpha}}.$$

Покажемо, що при цьому значенні a досягається максимум $P(a)$. Знайдемо другу похідну:

$$\begin{aligned} P''(a) &= -\alpha^2 e^{-a\alpha} + \beta^2 e^{-a\beta} = \alpha^2 e^{-\alpha \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta - \alpha}}} - \beta^2 e^{-\beta \ln \left(\frac{\beta}{\alpha} \right)^{\frac{1}{\beta - \alpha}}} = \\ &= \alpha^2 e^{\ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\beta - \alpha}}} - \beta^2 e^{\ln \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}}} = \alpha^2 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\alpha}{\beta - \alpha}} - \beta^2 \left(\frac{\alpha}{\beta} \right)^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}} = \\ &= \alpha \frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta - \alpha}}} - \beta \frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta - \alpha}}} = \frac{\alpha^{\frac{\beta}{\beta - \alpha}}}{\beta^{\frac{\alpha}{\beta - \alpha}}} (\alpha - \beta) < 0, \end{aligned}$$

оскільки $\alpha < \beta$. Друга похідна у критичній точці — від'ємна, тому $P(a)$ у ній набуває максимуму.

Приклад 1.49. При виготовленні довільного виробу інструмент з імовірністю $p = 0,2$ може бути пошкодженим і потребувати заміни. Знайти математичне сподівання й дисперсію кількості виробів, які будуть виготовлені цим інструментом.

Розв'язання. Нехай випадкова величина X – кількість деталей, виготовлених до заміни цим інструментом. Ця випадкова величина може набувати значень 0, 1, 2, ... Побудуємо закон розподілу цієї величини. Вона набуває значення нуль, якщо при виготовленні першого виробу інструмент буде пошкоджено; $P(X=0)=p=0,2$. Якщо інструмент буде пошкоджено при виготовленні другого виробу, то $X=1$, $P(X=1)=p(1-p)$. Аналогічно при $X=2$ $P(X=2)=p(1-p)^2$, при $X=3$ $P(X=3)=p(1-p)^3$, ..., $P(X=k)=p(1-p)^k$, ... Для обчислення математичного сподівання й дисперсії порівняємо отриманий закон розподілу з геометричним законом розподілу $P(Y=m)=p(1-p)^{m-1}$, $m=1, 2, \dots$. Очевидно, що $X=Y-1$. Скориставшись властивостями математичного сподівання й дисперсії, одержимо

$$M(X) = M(Y-1) = M(Y) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{1}{0,2} - 1 = 4;$$

$$D(X) = D(Y-1) = D(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-0,2}{0,2^2} = 20.$$

Приклад 1.50. Випадкова величина X має рівномірний розподіл на інтервалі $(-3; 5)$. Знайти: а) імовірність $P(-1 \leq X \leq 2)$; б) імовірність $P(X > -2)$; в) математичне сподівання й дисперсію випадкової величини.

Розв'язання. Імовірність потрапляння випадкової величини X у певний інтервал при рівномірному розподілі обчислюється за формулою

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} x \Big|_{\alpha}^{\beta} = \frac{\beta - \alpha}{b-a}.$$

Далі визначаємо:

а) імовірність $P(-1 \leq X \leq 2)$:

$$P(-1 \leq X \leq 2) = \frac{2 - (-1)}{5 - (-3)} = \frac{3}{8};$$

б) імовірність $P(X > -2)$, переписавши в більш зручній формі:

$$P(X > -2) = P(-2 < X < 5) = \frac{5 - (-2)}{5 - (-3)} = \frac{7}{8};$$

в) математичне сподівання й дисперсію:

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{-3+5}{2} = 1, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{(5-(-3))^2}{12} = \frac{16}{3}.$$

Приклад 1.51. Випадкова величина X має рівномірний розподіл. Знайти щільність її розподілу, якщо $P(X > 3) = 0,4$, а математичне сподівання дорівнює 2.

Розв'язання. Імовірність потрапляння випадкової величини X у певний інтервал при рівномірному розподілі визначаємо так:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx;$$

$$P(X > 3) = P(3 < X < b) = \int_3^b \frac{1}{b-a} dx = 0,4.$$

Математичне сподівання

$$M(X) = \frac{a+b}{2} = 2.$$

Отже, потрібно визначити область змінення випадкової величини, тобто значення a і b . Складаємо й розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \int_3^b \frac{1}{b-a} dx = 0,4, \\ \frac{a+b}{2} = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{b-3}{b-a} = 0,4, \\ \frac{a+b}{2} = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} 0,6b + 0,4a = 3, \\ b = 4 - a; \end{cases} \quad \begin{cases} a = -3, \\ b = 7. \end{cases}$$

Щільність рівномірного розподілу $f(x) = \frac{1}{b-a}$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq -3; \\ 0,1 & \text{при } -3 < x \leq 7; \\ 0 & \text{при } x > 7. \end{cases}$$

Приклад 1.52. Прибуток магазину за тиждень змінюється за нормальним законом з параметрами $a = 210$ тис. грн, $\sigma = 10$ тис. грн. Відшукати ймовірність того, що тижневий прибуток становитиме від 200 до 230 тис. грн.

Розв'язання. Використовуємо формулу для нормального розподілу

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right):$$

$$P(200 < X < 230) = \Phi\left(\frac{230 - 210}{10}\right) - \Phi\left(\frac{200 - 210}{10}\right) = \\ = \Phi(2) - \Phi(-1) = 0,4772 + 0,3413 = 0,8185.$$

Значення $\Phi(2) = 0,4772$ і $\Phi(1) = 0,3413$ узято з таблиці значень функції Лапласа.

Приклад 1.53. Визначити ймовірність того, що випадкова величина, розподілена за нормальним законом, відхиляється від свого центра розподілу на величину, більшу від потроєного середнього квадратичного відхилення.

Розв'язання. Знаходимо ймовірність:

$$P(|X - a| > 3\sigma) = 1 - P(|X - a| < 3\sigma) = 1 - P(a - 3\sigma < X < a + 3\sigma) = \\ = 1 - \left(\Phi\left(\frac{a + 3\sigma - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - 3\sigma - a}{\sigma}\right) \right) = 1 - (\Phi(3) - \Phi(-3)) = \\ = 1 - 2\Phi(3) = 1 - 2 \cdot 0,49865 = 0,0027.$$

Значення $\Phi(3) = 0,49865$ узято з таблиці значень функції Лапласа.

Приклад 1.54. Випадкова величина розподілена за нормальним законом, причому її значення зосереджені в інтервалі $X \in (120; 138)$. Відшукати ймовірність того, що X набуде значення, меншого від 125.

Розв'язання. Насамперед визначимо параметри розподілу. Оскільки нормальний розподіл є симетричним, то

$$M(X) = a = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2} = \frac{138 + 120}{2} = 129.$$

За правилом трьох сигм $x_{\max} - x_{\min} = 6\sigma$, отже, $138 - 120 = 18 = 6\sigma$, звідки маємо $\sigma = 3$.

Тепер знайдемо ймовірність:

$$P(X < 125) = P(120 < X < 125) = \Phi\left(\frac{125 - 129}{3}\right) - \Phi\left(\frac{120 - 129}{3}\right) = \\ = \Phi(-1,33) - \Phi(-3) = -0,4082 + 0,49865 = 0,09045.$$

Приклад 1.55. Висунуто гіпотезу про те, що відхилення розміру деталі від номіналу є випадковою нормально розподіленою величиною з математичним сподіванням $M(X) = 0$ і дисперсією $D(X) = 25$ мкм². Чи відповідає заданій гіпотезі те, що відхилення розміру перевірених шести деталей належало проміжку [5; 13)? Рівень значущості $\alpha = 0,0005$.

Розв'язання. Розглянемо подію A – відхилення розміру шести перевірених деталей відхилення належить проміжку $[5; 13)$. Обчислимо ймовірність цієї події і порівняємо її з рівнем значущості α . Якщо ймовірність буде меншою за α , то результат випробування не відповідатиме висунутій гіпотезі. Ймовірність події A знайдемо за теоремою множення ймовірностей

$$P(A) = p^6, \text{ де } p = P(5 \leq X \leq 13).$$

За умовами задачі математичне сподівання $M(X) = a = 0$, дисперсія $D(X) = 25$, тоді середнє квадратичне відхилення $\sigma = \sqrt{D(X)} = 5$.

Обчислимо цю ймовірність:

$$\begin{aligned} P(\alpha < X < \beta) &= \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right); \\ P(5 \leq X \leq 13) &= \Phi\left(\frac{13 - 0}{5}\right) - \Phi\left(\frac{5 - 0}{5}\right) = \Phi(2,6) - \Phi(1) = \\ &= 0,4953 - 0,3413 = 0,1540. \end{aligned}$$

Тоді $P(A) = p^6 = 0,154^6 = 0,000013 < \alpha = 0,0005$. Ймовірність події A є меншою від рівня значущості. Отже, гіпотеза про закон розподілу не відповідає значенням випадкової величини у випробуваннях.

Приклад 1.56. Похибка спостереження X при вимірюванні довжини розподілена нормально з $a = 5$ мм і $\sigma = 4$ мм. Знайти ймовірність того, що виміряне значення відхилиться від істинного більш ніж на 10 мм.

Розв'язання. Згідно з умовою потрібно знайти $P(X \geq 10)$. Виразимо цю ймовірність через ймовірність протилежної події:

$$\begin{aligned} P(|X| \geq 10) &= 1 - P(-10 < X < 10) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{10 - 5}{4}\right) - \Phi\left(\frac{-10 - 5}{4}\right) \right) = \\ &= 1 - (\Phi(1,25) - \Phi(-3,75)) = 1 - (0,3944 + 0,4999) = 0,1057. \end{aligned}$$

1.7. Багатовимірні випадкові величини

На одному й тому самому просторі елементарних подій Ω можна визначити не одну, а кілька випадкових величин. Така потреба виникає, наприклад, коли досліджуваний об'єкт характеризується кількома випадковими параметрами. Так, у разі виготовлення валів такі їх параметри, як діаметр, довжина, овальність, є випадковими величинами, значення яких наперед не можна передбачити. Або, скажімо, витрати випадково взятої окремої сім'ї на їжу, одяг, взуття, транспорт,

задоволення духовних потреб також є випадковими величинами, визначеними на одному й тому самому просторі елементарних подій.

На багатовимірні випадкові величини поширюються майже без змін основні означення, які було розглянуто для одновимірної випадкової величини.

Одночасна поява внаслідок проведення експерименту n випадкових величин $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ з певною ймовірністю являє собою n -вимірну випадкову величину, яку називають також системою n випадкових величин, або n -вимірним випадковим вектором.

Законом розподілу двох дискретних випадкових величин називають перелік можливих значень $Y = y_i$, $X = x_j$ і ймовірностей спільної появи, що їм відповідають.

У табличній формі цей закон має такий вигляд:

$X = x_j$ $Y = y_i$	x_1	x_2	x_3	$\dots$	x_m	p_{yi}
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}		p_{1m}	p_{y1}
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}		p_{2m}	p_{y2}
y_3	p_{31}	p_{32}	p_{33}		p_{3m}	p_{y3}
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
y_k	p_{k1}	p_{k2}	p_{k3}	$\dots$	p_{km}	p_{ym}
p_{xi}	p_{x1}	p_{x2}	p_{x3}	$\dots$	p_{xm}	

Тут використано такі позначення:

$$p_{ij} = p((Y = y_i) \cap (X = x_j)); \quad p_{y_i} = \sum_{j=1}^m p_{ij}; \quad p_{x_j} = \sum_{i=1}^k p_{ij}.$$

Умова нормування має такий вигляд:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m p_{ij} = \sum_{i=1}^k p_{y_i} = \sum_{j=1}^m p_{x_j} = 1.$$

Основні числові характеристики для випадкових величин X, Y , що утворюють систему (X, Y) :

$$M(X) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_j p_{ij} = \sum_{j=1}^m x_j p_{x_j};$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m x_j^2 p_{ij} - M^2(X) =$$

$$= \sum_{j=1}^m x_j^2 p_{x_j} - M^2(X);$$

$$\sigma(X) = \sigma_x = \sqrt{D(X)};$$

$$M(Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i p_{ij} = \sum_{i=1}^k y_i p_{y_i};$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i^2 p_{ij} - M^2(Y) =$$

$$= \sum_{i=1}^k y_i^2 p_{y_i} - M^2(Y);$$

$$\sigma(Y) = \sigma_y = \sqrt{D(Y)}.$$

Під час вивчення системи двох і більше випадкових величин доводиться визначати наявність зв'язку між цими величинами та його характер. З відповідною метою застосовують так званий кореляційний момент:

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m y_i x_j p_{ij} - M(X)M(Y).$$

У разі, коли $K_{xy} = 0$, зв'язку між величинами X і Y , що належать системі (X, Y) , немає. Коли $K_{xy} \neq 0$, тоді між величинами X і Y кореляційний зв'язок існує.

Тісноту кореляційного зв'язку характеризує коефіцієнт кореляції:

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y},$$

$$|r_{xy}| \leq 1, \text{ або } -1 \leq r_{xy} \leq 1.$$

Отже, якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то $K_{xy} = 0$ і $r_{xy} = 0$. Рівність нулеві r_{xy} є необхідною, але не достатньою умовою незалежності випадкових величин.

Справді, може існувати система залежних випадкових величин, коефіцієнт кореляції якої дорівнює нулю. Прикладом такої системи є система двох випадкових величин (X, Y) , яка рівномірно розподілена всередині кола радіусом R із центром у початку координат. Дві випадкові величини X і Y називають некорельованими, якщо $r_{xy} = 0$, і корельованими, якщо $r_{xy} \neq 0$.

Отже, якщо величини X і Y є незалежними, то вони будуть і некорельованими. Але з некорельованості випадкових величин у загальному випадку не випливає їх незалежність.

Умовним законом розподілу дискретної випадкової величини X при фіксованому значенні $Y = y_i$ називають перелік можливих значень випадкової величини $X = x_j$ і відповідних умовних імовірностей, обчислених при фіксованому значенні $Y = y_i$.

У табличній формі умовний закон $X/Y = x_j$ має такий вигляд:

$X = x_j$	x_1	x_2	x_3		x_m
$P(X = x_j / Y = y_i) =$ $= \frac{P((X = x_j) \cap (Y = y_i))}{P(Y = y_i)} = \frac{P_{ij}}{P_{y_i}}$	P_{i1}/P_{y1}	P_{i2}/P_{y2}	P_{i3}/P_{y3}	...	P_{im}/P_{ym}

При цьому має виконуватися умова нормування:

$$\sum_{j=1}^m P(X = x_j / Y = y_i) = \sum_{j=1}^m \frac{P_{ij}}{P_{y_i}} = \frac{1}{P_{y_i}} \sum_{j=1}^m P_{ij} = \frac{P_{y_i}}{P_{y_i}} = 1 \quad \left(\sum_{j=1}^m P_{ij} = P_{y_i} \right).$$

Числові характеристики для цього закону називають умовними.

Умовне математичне сподівання

$$M(X / Y = y_i) = \sum_{j=1}^m x_j P(X = x_j / Y = y_i) = \sum_{j=1}^m x_j \frac{P_{ij}}{P_{y_i}} = \frac{1}{P_{y_i}} \sum_{j=1}^m x_j P_{ij}.$$

Умовна дисперсія й середнє квадратичне відхилення обчислюються відповідно за формулами

$$D(X / Y = y_i) = \frac{1}{P_{y_i}} \sum_{j=1}^m x_j^2 P_{ij} - M^2(X / Y = y_i);$$

$$\sigma(X / Y = y_i) = \sqrt{D(X / Y = y_i)}.$$

Умовним законом розподілу випадкової величини Y при фіксованому значенні $X = x_i$ називають перелік можливих значень випадкової величини $Y = y_j$ і відповідних умовних імовірностей, обчислених при фіксованому значенні $X = x_i$.

У табличній формі умовний закон $X/Y = y_i$ має такий вигляд:

$Y = y_j$	y_1	y_2	y_3	...	y_m
$P(Y = y_j / X = x_i) =$ $= \frac{P((Y = y_j) \cap (X = x_i))}{P(X = x_i)} = \frac{P_{ij}}{P_{x_i}}$	P_{1j}/P_{x1}	P_{2j}/P_{x2}	P_{3j}/P_{x3}	...	P_{mj}/P_{xm}

При цьому має виконуватися умова нормування:

$$\sum_{i=1}^k P(Y = y_i / X = x_j) = \sum_{i=1}^k \frac{P_{ij}}{P_{x_j}} = \frac{1}{P_{x_j}} \sum_{i=1}^k P_{ij} = \frac{P_{x_j}}{P_{x_j}} = 1 \quad \left(\sum_{i=1}^k P_{ij} = P_{x_j} \right).$$

Умовне математичне сподівання

$$M(Y / X = x_i) = \sum_{j=1}^m y_j P(Y = y_j / X = x_i) = \sum_{j=1}^m y_j \frac{P_{ij}}{P_{x_i}} = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{j=1}^m y_j P_{ij}.$$

Умовна дисперсія

$$D(Y / X = x_i) = \frac{1}{P_{x_i}} \sum_{j=1}^k y_j^2 P_{ij} - M^2(Y / X = x_i).$$

Умовне середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(Y / X = x_i) = \sqrt{D(Y / X = x_i)}.$$

Функцією розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин (X, Y) називають таку функцію двох аргументів x, y , яка визначає ймовірність спільної появи подій $(X < x) \cap (Y < y)$:

$$F(x, y) = P((X < x) \cap (Y < y)).$$

Геометрично цю функцію зображено на рис. 1.23.

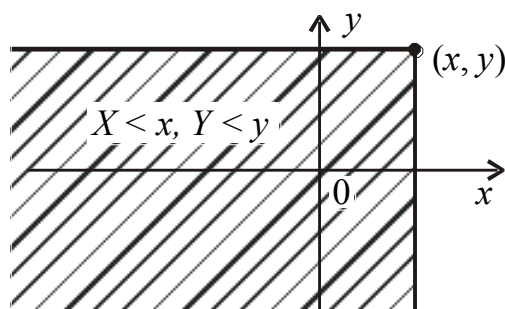


Рис. 1.23. Геометрична ілюстрація функції розподілу ймовірностей системи двох випадкових величин

Властивості $F(x, y)$:

1. $0 \leq F(x, y) \leq 1$, оскільки $0 \leq P((X < x) \cap (Y < y)) \leq 1$.
2. Якщо один із аргументів $F(x, y)$ прямує до $+\infty$, то функція розподілу системи прямує до функції розподілу одного аргументу, що не прямує до $+\infty$, а саме:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F(x, y) = F(x, \infty) = F(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x, y) = F(\infty, y) = F(y).$$

$$3. \lim_{\substack{y \rightarrow \infty, \\ x \rightarrow \infty}} F(x, y) = F(\infty, \infty) = P(X < \infty, Y < \infty) = 1.$$

$$4. \lim_{\substack{x \rightarrow -\infty, \\ y \rightarrow -\infty}} F(x, y) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x, y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} F(x, y) = 0.$$

5. $F(x, y)$ є неспадною функцією аргументів x і y .

Характеристикою системи неперервних випадкових величин є щільність ймовірностей.

Для визначення щільності ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) застосовується формула

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Функція $f(x, y)$ може існувати лише при умові, що $F(x, y)$ є неперервною за аргументами x і y і двічі диференційовною.

Функції $f(x, y)$ у тривимірному просторі відповідає певна поверхня — так звана поверхня розподілу ймовірностей системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) .

Тоді $f(x, y)dxdy$ — ймовірність розміщення системи двох випадкових величин у прямокутнику зі сторонами dx, dy .

Властивості $f(x, y)$:

1. Функція $f(x, y) \geq 0$, оскільки $F(x, y)$ є неспадною відносно аргументів x і y .
2. Умова нормування системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) є такою:

$$\iint_{\Omega} f(x, y) dx dy = 1.$$

Якщо $\Omega = \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$, то умова набирає такого вигляду:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy = 1.$$

3. Імовірність розміщення системи змінних (x, y) в області $D \subset \Omega$ обчислюється так:

$$P((x, y) \in D) = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Імовірність розміщення системи змінних (x, y) у прямокутній області $D = (a < x < b, c < y < d)$ визначається формулою

$$P(a < x < b, c < y < d) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dx dy.$$

4. Функція розподілу ймовірностей системи двох змінних визначається таким чином:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(x, y) dx dy.$$

5. Якщо $\Omega = \{a < x < b, c < y < d\}$, то $F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(x, y) dx dy$.

Основні числові характеристики для системи двох неперервних випадкових величин (X, Y) :

$$M(X) = \iint_{\Omega} x f(x, y) dx dy;$$

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = \iint_{\Omega} x^2 f(x, y) dx dy - M^2(X);$$

$$M(Y) = \iint_{\Omega} y f(x, y) dx dy;$$

$$D(Y) = M(Y^2) - M^2(Y) = \iint_{\Omega} y^2 f(x, y) dx dy - M^2(Y);$$

$$\sigma_x = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma_y = \sqrt{D(Y)};$$

$$K_{xy} = M(XY) - M(X)M(Y) = \iint_{\Omega} xy f(x, y) dx dy - M(X)M(Y);$$

$$r_{xy} = \frac{K_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}, \quad |r_{xy}| \leq 1.$$

Якщо $\Omega = \{-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty\}$, то виконуються співвідношення:

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x f(x, y) dx dy;$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x, y) dx dy - M^2(X);$$

$$M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y f(x, y) dx dy;$$

$$D(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(x, y) dx dy - M^2(Y);$$

$$K_{xy} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy f(x, y) dx dy - M(X)M(Y).$$

Якщо $\Omega = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, то маємо:

$$M(X) = \int_b^a \int_c^d x f(x, y) dx dy;$$

$$D(X) = \int_b^a \int_c^d x^2 f(x, y) dx dy - M^2(X);$$

$$M(Y) = \int_b^a \int_c^d y f(x, y) dx dy;$$

$$D(Y) = \int_b^a \int_c^d y^2 f(x, y) dx dy - M^2(Y);$$

$$K_{xy} = \int_b^a \int_c^d xy f(x, y) dx dy - M(X)M(Y).$$

Як і в системі двох дискретних випадкових величин, у системі двох неперервних випадкових величин розглядаються умовні закони розподілу.

Можна записати

$$F(x) = F(x, \infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy;$$

$$F(y) = F(\infty, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx dy.$$

Звідси

$$f(x) = F'(x) = \left(\int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \right) dx \right)'_x = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy;$$

$$f(y) = F'(y) = \left(\int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \right) dy \right)'_y = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Умовні закони розподілу для неперервних випадкових величин X , Y , що утворюють систему (X, Y) , визначаються умовними щільностями ймовірностей $f(x/y)$, $f(y/x)$:

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy},$$

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx};$$

$$f(x, y) = f(x) f(y/x) = f(y) f(x/y).$$

Для умовних законів розподілу неперервних випадкових величин умова нормування має такий вигляд:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x/y) dx = 1, \int_{-\infty}^{\infty} f(y/x) dy = 1.$$

Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то $f(x/y) = f(x)$, $f(y/x) = f(y)$. У цьому разі $f(x, y) = f(x) f(y)$.

Для незалежних випадкових величин X та Y виконується рівність $F(x, y) = F(x) F(y)$.

Числові характеристики для умовних законів розподілу ймовірностей:

$$M(X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x/y) dx;$$

$$M(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} y f(y/x) dy;$$

$$D(X/y) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x/y) dx - M^2(X/y);$$

$$D(Y/x) = \int_{-\infty}^{\infty} y^2 f(y/x) dy - M^2(Y/x).$$

Приклад 1.57. Задано таблицю розподілу двовимірної випадкової величини (X, Y) :

$Y \backslash X$	1	2	3
-1	0,2	0,1	0,3
0	0,15	0,15	0,1

Потрібно:

- 1) знайти безумовні закони розподілу випадкових величин X і Y ;
- 2) знайти умовний закон розподілу X при умові, що $Y = -1$;
- 3) знайти умовний закон розподілу Y при умові, що $X = 3$;
- 4) з'ясувати, залежні чи ні випадкові величини X і Y .

Розв'язання. 1. Обчислимо безумовні ймовірності $P(X = i)(i = 1, 2, 3)$ і $P(Y = j)(j = -1, 0)$:

$$P(X = 1) = 0,2 + 0,15 = 0,35;$$

$$P(X = 2) = 0,1 + 0,15 = 0,25;$$

$$P(X = 3) = 0,3 + 0,1 = 0,4;$$

$$P(Y = -1) = 0,2 + 0,1 + 0,3 = 0,6;$$

$$P(Y = 0) = 0,15 + 0,15 + 0,1 = 0,4.$$

Запишемо безумовні закони розподілу X і Y у вигляді таблиць:

X	1	2	3
P	0,35	0,25	0,4

Y	-1	0
P	0,6	0,4

2. Для того щоб записати умовний закон розподілу X при умові, що $Y = -1$, обчислимо умовні ймовірності:

$$P(X = 1 / Y = -1) = \frac{P(X = 1, Y = -1)}{P(Y = -1)} = \frac{0,2}{0,6} = \frac{1}{3};$$

$$P(X = 2 / Y = -1) = \frac{P(X = 2, Y = -1)}{P(Y = -1)} = \frac{0,1}{0,6} = \frac{1}{6};$$

$$P(X = 3 / Y = -1) = \frac{P(X = 3, Y = -1)}{P(Y = -1)} = \frac{0,3}{0,6} = \frac{1}{2}.$$

Умовний закон розподілу X при умові, що $Y = -1$, запишемо так:

X	1	2	3
$P(X / Y = -1)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

3. Для того щоб записати умовний закон розподілу Y при умові, що $X = 3$, обчислимо умовні ймовірності:

$$P(Y = -1 / X = 3) = \frac{P(Y = -1, X = 3)}{P(X = 3)} = \frac{0,3}{0,4} = \frac{3}{4};$$

$$P(Y = 0 / X = 3) = \frac{P(Y = 0, X = 3)}{P(X = 3)} = \frac{0,1}{0,4} = \frac{1}{4}.$$

Умовний закон розподілу Y при умові, що $X = 3$, запишемо так:

Y	-1	0
P(Y / X) = 3)	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

4. Той факт, що безумовний закон величини X не збігається з одним із умовних законів розподілу цієї величини, свідчить про те, що величини X і Y є залежними.

Приклад 1.58. Систему дискретних випадкових величин (X, Y) задано таблицею розподілу ймовірностей:

Y	X				$\sum_{i=1}^n p_{ij}$
	-10	-8	-6	-4	
10	0,023	0,027	0,05	0,1	0,2
20	0,05	0,1	0,025	0,025	0,2
30	0,05	0,05	0,025	0,025	0,15
40	0,027	0,023	0,05	0,35	0,45
$\sum_{j=1}^n p_{ij}$	0,15	0,2	0,15	0,5	$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{ij} = 1$

Обчислити математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$, середні квадратичні відхилення $\sigma(X)$ і $\sigma(Y)$, кореляційний момент $cov(X, Y)$, коефіцієнт кореляції $r(X, Y)$, а також умовні математичні сподівання $M(X / Y = 40)$ і $M(X / Y = -8)$.

Розв'язання. Побудуємо безумовні закони розподілу X і Y , які подамо у вигляді таблиць:

X	-10	-8	-6	-4
P	0,15	0,2	0,15	0,5

Y	10	20	30	40
P	0,2	0,2	0,15	0,45

Обчислимо:

- математичні сподівання:

$$M(X) = \sum_{i=1}^4 x_i p_i = (-10) \cdot 0,15 + (-8) \cdot 0,2 + (-6) \cdot 0,15 + (-4) \cdot 0,5 = -6;$$

$$M(Y) = \sum_{j=1}^4 y_j p_j = 10 \cdot 0,2 + 20 \cdot 0,2 + 30 \cdot 0,15 + 40 \cdot 0,45 = 28,5;$$

- дисперсії випадкових величин:

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2;$$

$$M(X^2) = \sum_{i=1}^4 x_i^2 p_i =$$

$$= (-10)^2 \cdot 0,15 + (-8)^2 \cdot 0,2 + (-6)^2 \cdot 0,15 + (-4)^2 \cdot 0,5 = 41,2;$$

$$M(Y^2) = \sum_{j=1}^4 y_j^2 p_j = 10^2 \cdot 0,2 + 20^2 \cdot 0,2 + 30^2 \cdot 0,15 + 40^2 \cdot 0,45 = 955;$$

$$D(X) = 41,2 - (-6)^2 = 5,2;$$

$$D(Y) = 955 - (28,5)^2 = 142,75;$$

- середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{5,2} = 2,28;$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{142,75} = 11,95;$$

- кореляційний момент:

$$\text{cov}(X, Y) = M(XY) - M(X)M(Y);$$

$$M(XY) = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} = (-10) \cdot 10 \cdot 0,023 + (-10) \cdot 20 \cdot 0,05 +$$

$$+ (-10) \cdot 30 \cdot 0,05 + (-10) \cdot 40 \cdot 0,027 +$$

$$+ (-8) \cdot 10 \cdot 0,027 + (-8) \cdot 20 \cdot 0,1 + (-8) \cdot 30 \cdot 0,05 + (-8) \cdot 40 \cdot 0,023 +$$

$$+ (-6) \cdot 10 \cdot 0,05 + (-6) \cdot 20 \cdot 0,025 + (-6) \cdot 30 \cdot 0,025 + (-6) \cdot 40 \cdot 0,05 +$$

$$+ (-4) \cdot 10 \cdot 0,1 + (-4) \cdot 20 \cdot 0,025 + (-4) \cdot 30 \cdot 0,025 + (-4) \cdot 40 \cdot 0,35 = -163,12;$$

$$M(X)M(Y) = (-6) \cdot 28,5 = -171;$$

$$\text{cov}(X, Y) = -163,12 - (-171) = 7,88;$$

- коефіцієнт кореляції:

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{7,88}{2,28 \cdot 11,95} = 0,29.$$

Оскільки $r(X, Y) \neq 0$, можемо зробити висновок про корельованість випадкових величин X і Y .

Для обчислення $M(X / Y = 40)$ будемо умовний закон розподілу для випадкової величини X при $Y = 40$, застосовуючи формулу

$$P(X = x_i / Y = y_j) = \frac{P(X = x_i, Y = y_j)}{P(Y = y_j)};$$

$$P(X = -10 / Y = 40) = \frac{0,027}{0,45} = \frac{27}{450};$$

$$P(X = -8 / Y = 40) = \frac{0,023}{0,45} = \frac{23}{450}.$$

Аналогічно обчислюємо умовні ймовірності для X , що дорівнює -6 і -4 , і результати заносимо до таблиці:

X	-10	-8	-6	-4
$P(X/Y=40)$	$\frac{27}{450}$	$\frac{23}{450}$	$\frac{50}{450}$	$\frac{350}{450}$

Отже,

$$M(X / Y = 40) = \sum_{i=1}^4 x_i P(X = x_i, Y = 40) =$$

$$= (-10) \frac{27}{450} + (-8) \frac{23}{450} + (-6) \frac{50}{450} + (-4) \frac{350}{450} = -\frac{2154}{450} = -4,79.$$

Аналогічно обчислюємо $M(Y / X = -8)$, попередньо розрахувавши умовні ймовірності:

Y	10	20	30	40
$P(Y/X = -8)$	$\frac{27}{200}$	$\frac{100}{200}$	$\frac{50}{200}$	$\frac{23}{200}$

$$M(Y / X = -8) = \sum_{j=1}^4 y_j P(Y = y_j, X = -8) =$$

$$= 10 \cdot \frac{27}{200} + 20 \cdot \frac{100}{200} + 30 \cdot \frac{50}{200} + 40 \cdot \frac{23}{200} = \frac{4690}{200} = 23,45.$$

Приклад 1.59. Система випадкових величин (X, Y) має щільність розподілу ймовірностей

$$f(x, y) = a(xy + y^2),$$

де $(x, y) \in D = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0,5x \leq y \leq x\}$, і $f(x, y) = 0$, якщо $(x, y) \notin D$.

Знайти константу a , математичні сподівання $M(X)$ і $M(Y)$, середні квадратичні відхилення $\sigma(X)$ і $\sigma(Y)$, кореляційний момент $cov(X, Y)$ і коефіцієнт кореляції $r(X, Y)$.

Розв'язання. Для знаходження константи a , скористаємося характеристичною властивістю функції щільності розподілу $f(x, y)$:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy = 1;$$

$$\begin{aligned}
\iint_D a(xy + y^2) dx dy &= a \iint_D (xy + y^2) dx dy = a \int_0^1 \int_{0,5x}^x (xy + y^2) dx dy = \\
&= a \int_0^1 \left(\int_{0,5x}^x (xy + y^2) dy \right) dx = a \int_0^1 \left(\frac{xy^2}{2} + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{0,5x}^x dx = \\
&= a \int_0^1 \left(\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{0,25x^3}{2} - \frac{0,125x^3}{3} \right) dx = a \int_0^1 \frac{2}{3} x^3 dx = \frac{2a}{3} \cdot \frac{x^4}{4} \Big|_0^1 = \frac{2a}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{a}{6}.
\end{aligned}$$

Прирівнявши отриманий вираз до 1, знайдемо константу a :

$$\frac{a}{6} = 1; \quad a = 6.$$

Функцію $f(x, y)$ можна записати так:

$$f(x, y) = \begin{cases} 6(xy + y^2) & \text{при } (x, y) \in D; \\ 0 & \text{при } (x, y) \notin D. \end{cases}$$

Математичні сподівання обчислюємо за формулами

$$\begin{aligned}
M(X) &= \iint_{R^2} xf(x, y) dx dy = \iint_D xf(x, y) dx dy = \\
&= \int_0^1 \int_{0,5x}^x 6x(xy + y^2) dx dy = 6 \int_0^1 \left(\int_{0,5x}^x (x^2y + xy^2) dy \right) dx = \\
&= 6 \int_0^1 \left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3} \right) \Big|_{0,5x}^x dx = 6 \int_0^1 \left(\frac{x^4}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{0,25x^4}{2} - \frac{0,125x^4}{3} \right) dx = \\
&= 6 \int_0^1 \frac{2}{3} x^4 dx = 4 \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = \frac{4}{5} = 0,8;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M(Y) &= \iint_{R^2} yf(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_{0,5x}^x 6y(xy + y^2) dx dy = \\
&= 6 \int_0^1 \left(\int_{0,5x}^x (xy^2 + y^3) dy \right) dx = 6 \int_0^1 \left(\frac{xy^3}{3} + \frac{y^4}{4} \right) \Big|_{0,5x}^x dx = \\
&= 6 \int_0^1 \left(\frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{4} - \frac{0,125x^4}{3} - \frac{0,0625x^4}{4} \right) dx = \\
&= 6 \int_0^1 \frac{6,3125}{12} x^4 dx = \frac{6,3125}{2} \frac{x^5}{5} \Big|_0^1 = 0,63125.
\end{aligned}$$

Дисперсія випадкової величини X

$$D(X) = \iint_{R^2} x^2 f(x, y) dx dy - [M(X)]^2 = \iint_D x^2 f(x, y) dx dy - [M(X)]^2;$$

$$\begin{aligned}
D(X) &= \int_0^1 \int_{0,5x}^x 6x^2(xy + y^2) dx dy - (0,8)^2 = 6 \int_0^1 \left(\int_{0,5x}^x (x^3y + x^2y^2) dy \right) dx - \\
&- 0,64 = 6 \int_0^1 \left(\frac{x^3y^2}{2} + \frac{x^2y^3}{3} \right) \Big|_{0,5x}^x dx - 0,64 = \\
&= 6 \int_0^1 \left(\frac{x^5}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{0,25x^5}{2} - \frac{0,125x^5}{3} \right) dx - 0,64 = \\
&= 6 \int_0^1 \frac{2}{3} x^5 dx - 0,64 = 4 \frac{x^6}{6} \Big|_0^1 - 0,64 = \frac{2}{3} - 0,64 = 0,027.
\end{aligned}$$

Дисперсія випадкової величини Y

$$\begin{aligned}
D(Y) &= \iint_{R^2} y^2 f(x, y) dx dy - [M(Y)]^2 = \iint_D y^2 f(x, y) dx dy - [M(Y)]^2 = \\
&= \int_0^1 \int_{0,5x}^x 6y^2(xy + y^2) dx dy - (0,63125)^2 = \\
&= 6 \int_0^1 \left(\int_{0,5x}^x (xy^3 + y^4) dy \right) dx - 0,39848 = 6 \int_0^1 \left(\frac{xy^4}{4} + \frac{y^5}{5} \right) \Big|_{0,5x}^x dx - 0,39848 = \\
&= 6 \int_0^1 \left(\frac{x^5}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{0,0625x^5}{4} - \frac{0,03125x^5}{5} \right) dx - 0,39848 = \\
&= 6 \int_0^1 \frac{8,5625}{20} x^5 dx - 0,39848 = \frac{6 \cdot 8,5625}{20} \frac{x^6}{6} \Big|_0^1 - 0,39848 = \\
&= 0,42813 - 0,39848 = 0,02965.
\end{aligned}$$

Тоді середнє квадратичне відхилення

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0,027} = 0,164;$$

$$\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{0,02965} = 0,172.$$

Кореляційний момент

$$\begin{aligned}
cov(X, Y) &= \iint_{R^2} xyf(x, y) dx dy - M(X)M(Y) = \\
&= \iint_D xyf(x, y) dx dy - M(X)M(Y) = \\
&= \int_0^1 \int_{0,5x}^x 6xy(xy + y^2) dx dy - 0,8 \cdot 0,63125 = 6 \int_0^1 \left(\int_{0,5x}^x (x^2y^2 + xy^3) dy \right) dx -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-0,505 &= 6 \int_0^1 \left(\frac{x^2 y^3}{3} + \frac{xy^4}{4} \right) \Big|_{0,5x}^x dx - 0,505 = \\
&= 6 \int_0^1 \left(\frac{x^5}{3} + \frac{x^5}{4} - \frac{(0,5)^3 x^5}{3} - \frac{(0,5)^4 x^5}{4} \right) dx - 0,505 = \\
&= \frac{6 \cdot 6,3125}{12} \int_0^1 x^5 dx - 0,505 = 3,1563 \frac{x^6}{6} \Big|_0^1 - 0,505 = 0,526 - 0,505 = 0,021.
\end{aligned}$$

Обчислимо коефіцієнт кореляції:

$$r(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = \frac{0,021}{0,164 \cdot 0,172} = 0,746.$$

Оскільки $r(X, Y) \neq 0$, це означає, що випадкові величини X і Y корельовані.

1.8. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема

Нерівності Чебишова. Перша форма: якщо випадкова величина X є невід'ємною і $MX < \infty$, то $P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{MX}{\varepsilon}$.

Друга форма: якщо для випадкової величини існують моменти першого й другого порядку, то $P(|X - MX| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{DX}{\varepsilon^2}$.

Нехай задано послідовність випадкових величин. Ця послідовність задовольняє закону великих чисел, якщо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n MX_i\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Окремі форми закону великих чисел відрізняються одна від одної обмеженнями, які накладаються на випадкові величини, що входять до послідовності.

Теорема Хінчина. Якщо випадкові величини в послідовності $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ є незалежними, однаково розподілені й мають скінченне математичне сподівання a , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Теорема Чебишова. Якщо випадкові величини у послідовності $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ є незалежними, мають скінченні математичні сподівання

й рівномірно обмежені дисперсії ($DX_i \leq C, i = 1, 2, \dots$), то до послідовності $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ можна застосувати закон великих чисел.

Теорема Маркова. Нехай випадкові величини у послідовності $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ мають скінченні і як завгодно залежні математичні сподівання. Тоді якщо $\frac{1}{n^2} D \sum_{i=1}^n X_i \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, то для послідовності $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ можна застосувати закон великих чисел.

Теорема Бернуллі. Нехай проводиться n незалежних повторних випробувань, у кожному з яких імовірність настання події A дорівнює p . Тоді

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

де m — частота події A в цих випробуваннях.

Центральна гранична теорема. Для послідовності випадкових величин $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ розглянемо величини

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i; DX_i = b_i^2; B_n^2 = \sum_{i=1}^n b_i^2; S_n^* = \frac{S_n - MS_n}{B_n}.$$

Теорема. Якщо випадкові величини в послідовності $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ є незалежними, однаково розподіленими і для них існують моменти другого порядку, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n^* < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt,$$

тобто граничним розподілом для S_n^* є нормальний закон розподілу з нульовим математичним сподіванням та одиничною дисперсією.

Теорема Ляпунова. Якщо для незалежних випадкових величин, що утворюють послідовність $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$, існують моменти третього порядку й виконується умова $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{B_n^3} \sum_{i=1}^n M|X_i|^3 = 0$, то для S_n^*

виконується співвідношення $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n^* < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

Наслідком розглянутих теорем є інтегральна теорема Лапласа. У схемі незалежних повторних випробувань

$$P_n(m_1, m_2) \approx \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right),$$

де $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$. Це впливає з того, що частоту події можна

подати як суму n випадкових величин — частот настання події в окремих випробуваннях. При достатньо великих значеннях n закон розподілу цієї суми близький до нормального.

Аналогічними міркуваннями для цієї схеми легко отримати формулу

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right),$$

де m — частота події A у n випробуваннях.

Приклад 1.60. Використовуючи нерівність Чебишова, оцінити ймовірність появи події A , яка полягає в тому, що випадкова величина X набуде значення, яке відрізнятиметься від математичного сподівання $M(X)$ на величину, що не перевищує потроєного середнього квадратичного відхилення. Чи зміниться відповідь, якщо відомо, що випадкова величина X має нормальний розподіл?

Розв'язання. За нерівністю Чебишова

$$P(|X - M(X)| < \varepsilon) \geq 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2};$$

$$P(A) = P(|X - M(X)| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{D(X)}{(3\sigma)^2} = 1 - \frac{D(X)}{9D(X)} = \frac{8}{9}.$$

Отже,

$$P(A) \geq \frac{8}{9} = 0,89.$$

Якщо X має нормальний розподіл

$$P(|X - M(X)| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right),$$

то

$$\begin{aligned} P(A) &= P(|X - M(X)| < 3\sigma) = 2\Phi\left(\frac{3\sigma(X)}{\sigma(X)}\right) = 2\Phi(3) = \\ &= 2 \cdot 0,49865 = 0,9973. \end{aligned}$$

Приклад 1.61. Дисперсія кожної з 1000 незалежних випадкових величин дорівнює 4. Оцініть ймовірність того, що відхилення середнього арифметичного цих величин від середнього арифметичного їх математичних сподівань за абсолютною величиною не перевищує 0,1.

Розв'язання. Нехай $Y = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} X_i$. Тоді

$$M(Y) = \frac{1}{1000} \sum_{i=1}^{1000} M(X_i);$$

$$D(Y) = \frac{1}{1000^2} \sum_{i=1}^{1000} D(X_i) = \frac{1000 \cdot 4}{1000^2} = 0,004.$$

Згідно з нерівністю Чебишова

$$P\{|Y - M(Y)| < 0,1\} \geq 1 - \frac{D(Y)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{0,004}{0,1^2} = 0,6.$$

Приклад 1.62. У черзі на отримання грошей до каси стоять $n = 36$ співробітників фірми. Розмір виплати кожному з них — випадковий. Середня виплата $M(X) = 400$ грн, а середнє квадратичне відхилення $\sigma_X = 100$ грн. Виплати окремим співробітникам — незалежні величини. Скільки має бути грошей у касі, щоб з імовірністю 0,96 вистачило на виплату всім співробітникам?

Розв'язання. Сумарна виплата $Y = \sum_{i=1}^{36} X_i$, де X_i — виплата i -му

співробітнику. Відповідно до центральної граничної теореми однаково розподілені випадкові величини Y мають закон розподілу, близький до нормального з параметрами $M(Y) = n \cdot M(X) = 36 \cdot 400 = 14400$, $\sigma_Y = \sqrt{D(Y)} = \sqrt{n^2 D(X)} = 100 \cdot \sqrt{36} = 600$. Необхідний запас грошей B знаходимо таким чином:

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= \Phi\left(\frac{b - M(Y)}{\sigma_Y}\right) - \Phi\left(\frac{a - M(Y)}{\sigma_Y}\right); \\ 0,96 &\approx \Phi\left(\frac{B - 14400}{600}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 14400}{600}\right) = \Phi\left(\frac{B - 14400}{600}\right) + \Phi(24) = \\ &= \Phi\left(\frac{B - 14400}{600}\right) + 0,5; \\ \Phi\left(\frac{B - 14400}{600}\right) &= 0,46. \end{aligned}$$

За таблицею функції Лапласа знаходимо $\frac{B - 14400}{600} = 1,75$, отже,

$B = 15450$ грн.

Приклад 1.63. При анонімному тестуванні виявилось, що 10 % працівників підприємства зовсім не вживають спиртного. Випадкова величина X – кількість людей, які зовсім не вживають спиртного у випадковій вибірці з 900 робітників. Зазначити межі, у які потрапляє випадкова величина X з імовірністю 0,9.

Розв'язання. Згідно з центральною граничною теоремою можна вважати, що випадкова величина X має розподіл, близький до нормального. За умовою $p = 0,1$; $n = 900$.

Тоді згідно з наслідком теореми Муавра — Лапласа

$$P(|X - np| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{npq}}\right);$$

$$P(|X - 90| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{900 \cdot 0,1 \cdot 0,9}}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{9}\right) = 0,9.$$

Отже, $\Phi\left(\frac{\varepsilon}{9}\right) = 0,45$.

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо значення аргументу x , таке, що $\Phi(x) = 0,45$, а саме $x = 1,65$.

Звідси $\frac{\varepsilon}{9} = 1,65$ і $\varepsilon = 14,85$. Отже, з імовірністю 0,9 виконуватиметься умова

$$P(|X - 90| < 14,85) \geq 0,9,$$

що рівносильно тому, що випадкова величина X потрапить в інтервал (75; 105) з імовірністю 0,9.

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Наведіть приклад досліду (випробування), унаслідок якого може відбутися або не відбутися деяка випадкова подія.
2. Що розуміти під сумою двох випадкових подій? Наведіть приклади додавання двох несумісних подій і двох подій, які можуть відбуватися одночасно.
3. Дайте означення добутку двох подій. Наведіть приклад. Наведіть приклад двох подій, добуток яких є неможливою подією.
4. Поясніть, що розуміти під подією, протилежною певній події. Наведіть декілька прикладів.

5. Дайте означення ймовірності випадкової події, коли дослід (випробування) має скінченну кількість рівноможливих несумісних наслідків.
6. Сформулюйте теорему про суму ймовірностей двох несумісних подій. Доведіть цю теорему.
7. Поясніть, що собою являє умовна ймовірність події.
8. Сформулюйте теорему про добуток імовірностей двох будь-яких подій. Якої форми набирає ця теорема у випадку, коли події є незалежними?
9. Напишіть формулу повної ймовірності. Поясніть її. Наведіть приклад.
10. Наведіть приклад застосування формули Бернуллі.
11. Наведіть приклади дискретних випадкових величин. Що таке закон розподілу ймовірностей дискретної випадкової величини?
12. У якому випадку кажуть про біноміальний закон розподілу?
13. Яких значень і з якими ймовірностями набуває випадкова величина, розподілена за законом Пуассона?
14. Наведіть приклад двох залежних дискретних випадкових величин.
15. Дайте означення математичного сподівання (середнього значення) дискретної випадкової величини.
16. Перелічіть основні властивості математичного сподівання. Які з цих властивостей є правильними лише для незалежних величин? Яка властивість має місце для будь-якої пари випадкових величин?
17. Чому дорівнює математичне сподівання випадкової величини, розподіленої за біномним законом, за законом Пуассона?
18. Наведіть приклад дискретної випадкової величини, яка набуває нескінченної кількості значень. Як обчислити математичне сподівання такої величини?
19. Дайте означення дисперсії випадкової величини.
20. Перелічіть основні властивості дисперсії.
21. Дайте означення середнього квадратичного відхилення випадкової величини від її математичного сподівання.
22. Дайте означення функції розподілу випадкової величини.
23. Перелічіть і поясніть властивості функції розподілу.

24. Як знайти ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке належить заданому інтервалу, якщо відомою є її функція розподілу (уважається, що функція розподілу є неперервною)?

25. Який вигляд має функція розподілу для дискретної випадкової величини?

26. Яку випадкову величину називають неперервною?

27. Дайте означення щільності розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини.

28. Перелічіть і поясніть властивості щільності розподілу ймовірностей.

29. Як знайти ймовірність того, що випадкова величина набуде значення, яке належить заданому інтервалу, якщо відомою є її щільність розподілу ймовірностей?

30. Наведіть приклади неперервних випадкових величин.

31. Як знайти функцію розподілу випадкової величини, якщо відомою є її щільність розподілу ймовірностей?

32. Як знайти щільність розподілу випадкової величини (якщо вона існує), знаючи функцію розподілу?

33. Нехай випадкова величина X рівномірно розподілена в інтервалі $(0; 2)$. Напишіть для неї щільність розподілу ймовірностей. Знайдіть її функцію розподілу. Побудуйте графіки обох цих функцій.

34. Дайте означення математичного сподівання й дисперсії неперервної випадкової величини.

35. Чому дорівнює математичне сподівання й дисперсія випадкової величини, рівномірно розподіленої в інтервалі $(a; b)$?

36. Яка випадкова величина називається нормально розподіленою? Якими двома параметрами визначається нормально розподілена випадкова величина? Який зміст мають ці параметри?

37. Напишіть щільність розподілу ймовірностей нормально розподіленої випадкової величини, якщо її середнє значення дорівнює 5, а дисперсія — 3.

38. Схематично зобразіть на рисунку графік щільності розподілу нормально розподіленої випадкової величини (криву Гаусса), якщо відомими є її середнє значення й дисперсія.

39. Дайте означення функції Лапласа. Як за допомогою таблиці значень функції Лапласа знайти ймовірність того, що нормально

розподілена випадкова величина набуде значення, яке належить заданому інтервалу $(\alpha; \beta)$?

40. Чому дорівнює $P(|x-a| < \sigma)$, $P(|x-a| < 2\sigma)$, $P(|x-a| < 3\sigma)$ нормально розподіленої випадкової величини?

41. Яка випадкова величина називається розподіленою за показниковим законом? Від скількох параметрів залежить щільність показникового розподілу?

42. Знайдіть функцію розподілу, знаючи щільність розподілу ймовірностей, якщо випадкова величина розподілена за показниковим законом (схематично зобразіть графіки цих функцій).

43. Як (за допомогою таблиці значень показникової функції) обчислити ймовірність того, що показниково розподілена випадкова величина набуде значення, яке належить заданому інтервалу $(\alpha; \beta)$?

44. Поясніть, як за допомогою таблиці задається закон розподілу ймовірностей двовимірної дискретної випадкової величини $(X; Y)$. Як з використанням цієї таблиці можна знайти закон розподілу ймовірностей випадкової величини X ?

45. Поясніть, як задається двовимірна неперервна випадкова величина за допомогою двовимірної щільності розподілу ймовірностей. Як у цьому випадку знайти ймовірність того, що двовимірна випадкова величина набуде значення, яке належить заданій плоскій області?

46. Дайте означення кореляційного моменту й коефіцієнта кореляції системи двох випадкових величин.

47. Яка двовимірна випадкова величина називається нормально розподіленою?

48. Сформулюйте й доведіть нерівності Чебишова.

49. Сформулюйте теорему Чебишова.

50. Якого вигляду набирає теорема Чебишова, коли випадкові величини мають одне й те саме математичне сподівання?

51. Сформулюйте теорему Бернуллі. Поясніть, чому теорема Бернуллі є окремим випадком теореми Чебишова.

52. Поясніть, у чому полягає основний зміст центральної граничної теореми (теореми Ляпунова).

53. Сформулюйте теорему Муавра — Лапласа. Наведіть приклад її застосування.

2. ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ

У математичній статистиці вивчаються закономірності, яким підпорядковуються масові випадкові явища. Для цього методами теорії ймовірностей здійснюється оброблення статистичних даних, тобто результатів досліджень.

Математична статистика виникла й поширювалася паралельно з теорією ймовірностей у XII сторіччі.⁸⁶

Вивчення тих або інших явищ методами математичної статистики є засобом вирішення багатьох питань науки та практики (правильна організація технологічного процесу, найбільш доцільне планування та ін.). Особливо зазначимо, що в більшості випадків методи теорії ймовірностей прямо або побічно використовуються при розв'язуванні статистичних задач, у цьому виявляється глибокий зв'язок між теорією ймовірностей та математичною статистикою.

Задача математичної статистики полягає у створенні методів збору й оброблення статистичних даних для отримання наукових і практичних висновків. Предметом математичної статистики є вивчення випадкових величин за результатами спостережень, дослідів, повторних випробувань.

2.1. Вибірковий метод та його основні поняття.

Варіаційний ряд та його числові характеристики.

Емпіричний закон розподілу. Емпірична функція розподілу

Словом “сукупність” у статистиці називають множину об'єктів, з яких отримується вибірка. Уся сукупність, що вивчається, називається **генеральною сукупністю**. Генеральну сукупність можна вивчати шляхом суцільного вивчення всіх об'єктів або шляхом спостереження за частиною об'єктів. Частина об'єктів, яку отримують з генеральної сукупності, називається **вибіркою** або **вибірковою сукупністю**.

Повна кількість об'єктів генеральної сукупності або вибіркової сукупності називається її **обсягом**. Обсяг генеральної сукупності позначають N , а вибіркової сукупності – n . Результати досліджень будь-якої ознаки генеральної сукупності будуть більш достовірними, якщо вибірку створити випадково. Вибірка називається **випадковою**, якщо з генеральної сукупності елементи брати навмання і кожен з них може потрапити до неї з однаковою ймовірністю. На практиці випадкову вибірку можна отримати так: усі елементи нумерують від 1 до N , після чого вибирають послідовність n випадкових чисел ($1 \leq n \leq N$). Вибірку також можна отримати, використавши датчик випадкових чисел.

Відбір об'єктів може бути повторним або безповторним. **Повторним** називають відбір, коли відібраний об'єкт повертають у генеральну сукупність (до відбору наступного об'єкта). **Безповторним** називають відбір, коли відібраний об'єкт не повертають до генеральної сукупності. Відбір об'єктів відбувається випадковим чином.

Якщо випадкова вибірка достатньо повно характеризує генеральну сукупність, то вибірка називається репрезентативною.

За вибіркою обчислюють її числові характеристики — математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$. Якщо одна з двох вибірок має меншу дисперсію, то вона повніше відображає генеральну сукупність.

Ознака будь-якої сукупності набуває значень, кількість яких згідно з експериментом може бути нескінченною або обмеженою. Позначимо ознаку сукупності X , а її можливі значення $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Деякі значення дискретної випадкової величини можуть повторюватися, тоді варіаційний ряд записують у вигляді таблиці, де вказують можливі значення (x_i) випадкової величини X та їх частоти (m_i). Частотою називають кількість появ окремих значень випадкової величини (варіант):

x_i	x_1	x_2	...	x_k
m_i	m_1	m_2	...	m_k

, $\sum_{i=1}^k m_i = n$ – обсяг

У варіаційному ряді замість частот можна вказувати відносні частоти. Відносною частотою w_i називають відношення частоти появи ознаки до загального обсягу вибірки:

$$w_i = \frac{m_i}{n}, \quad \sum_{i=1}^k w_i = 1. \quad (2.1)$$

Тоді маємо таку таблицю:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
w_i	w_1	w_2	...	w_k

.

Відносна частота характеризує частку сукупності членів з однаковими значеннями ознаки.

При великому обсязі вибірки ($n \geq 30$) користуватися дискретним варіаційним рядом стає незручно. У цьому випадку, а також у випадку, коли дані, отримані внаслідок вимірювання неперервної випадкової величини, за вибіркою являють собою **інтервальний варіаційний ряд**. Для його побудови весь інтервал розподілу ознаки поділяють на k однакових частин завдовжки h . Потім підраховують частоту m_i або відносну частоту w_i ,

потрапляють у кожний інтервал. Значенням випадкової величини вважають середину інтервалу, тобто неперервну величину зводять до дискретної:

$(x_{i-1}; x_i)$	$(x_0; x_1)$	$(x_1; x_2)$	...	$(x_{i-1}; x_i)$	...	$(x_{k-1}; x_k)$
m_i	m_1	m_2	...	m_i	...	m_k
x'_i	x'_1	x'_2	...	x'_i	...	x'_k

де $x'_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $h = x_i - x_{i-1}$.

Якщо варіаційний ряд задається у вигляді наведених таблиць, то його називають статистичним рядом розподілу. Отже, статистичним розподілом вибірки називають перелік варіант випадкової величини X ($x_1, x_2, \dots, x_n$) і частот m_i , що їм відповідають, або відносних частот w_i ($i = 1, 2, \dots, n$). Для інтервальних рядів статистичний розподіл задається у вигляді послідовності інтервалів $(x_{i-1}; x_i)$ і частот, що їм відповідають (за частоту беруть суму частот ознаки, які увійшли в цей інтервал).

Числові характеристики вибірки

Для характеристики варіаційного ряду застосовують такі величини:

1. Вибіркове середнє

$$\bar{x}_{\text{виб}} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i m_i}{n}, \quad n = \sum_{i=1}^k m_i. \quad (2.2)$$

Вибіркове середнє характеризує середнє значення ознаки X .

2. Вибіркова дисперсія $D_{\text{виб}}$:

$$D_{\text{виб}} = \sigma_{\text{виб}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_{\text{виб}})^2 m_i, \quad \text{або} \quad (2.3)$$

$$D_{\text{виб}} = \sigma_{\text{виб}}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k x_i^2 m_i - (\bar{x}_{\text{виб}})^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2.$$

Дисперсія в статистиці характеризує міру розсіювання ознаки X .

3. Вибіркове середнє квадратичне відхилення $\sigma_{\text{виб}}$:

$$\sigma_{\text{виб}} = \sqrt{\sigma_{\text{виб}}^2}. \quad (2.4)$$

Вибіркове середнє квадратичне відхилення є не тільки мірою варіації, а й показником однорідності статистичної сукупності.

Оскільки $M(\bar{x}_{\text{виб}}) = \bar{x}_{\text{ген}}$, то середнє вибіркове $\bar{x}_{\text{виб}}$ є незміщеною оцінкою.

Вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою. Дійсно, якщо $X_1, X_2, \dots, X_n$ – однаково розподілені випадкові події, для яких

$$D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_n) = D, \quad \text{то} \quad D\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{D}{n}, \quad \text{тому}$$

$$\sigma(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

За даними вибірки треба оцінити генеральну дисперсію $D_{\text{ген}}$:

$$M(D_{\text{виб}}) = \frac{n-1}{n} D_{\text{ген}}. \quad (2.5)$$

Достатньо легко виправити вибірккову дисперсію:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{виб}} = \frac{\sum_{i=1}^k (x_i - \bar{x}_{\text{виб}})^2 m_i}{n-1}, \quad (2.6)$$

де S^2 – виправлена вибірккова дисперсія.

Виправлена дисперсія є оцінкою незміщеною, тобто

$$M(S^2) = M\left(\frac{n}{n-1} D_{\text{виб}}\right) = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} D_{\text{ген}} = D_{\text{ген}}.$$

4. Коефіцієнт варіації:

$$v = \frac{\sigma_{\text{виб}}}{\bar{x}_{\text{виб}}} \cdot 100\%. \quad (2.7)$$

Коефіцієнт варіації є відносною мірою варіації. Його використовують для порівняння випадкових подій різного походження.

5. Початкові моменти k -го порядку:

$$v_k = \overline{X^k} = \frac{\sum_i x_i^k m_i}{n}. \quad (2.8)$$

6. Центральні моменти k -го порядку:

$$\mu_k = \overline{(X - \bar{X})^k} = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x}_{\text{виб}})^k m_i}{n}. \quad (2.9)$$

7. Асиметрія:

$$A_s = \frac{\mu_3}{\sigma^3}. \quad (2.10)$$

A_s характеризує відхилення випадкової величини від свого центрального положення вліво або вправо.

8. Ексцес:

$$E_s = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3. \quad (2.11)$$

E_s характеризує відхилення випадкової величини від свого центрального положення вгору або вниз.

9. Мода M_o – це варіанта з максимальною частотою, тобто

$$M_o = x_i \left(m_i = \max \right)_{1 \leq i \leq k}. \quad (2.12)$$

10. **Медіана** M_e – це варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві частини, однакові за кількістю елементів.

Статистичний ряд розподілу випадкової величини X , отриманий за емпіричними даними, називають також **емпіричним законом розподілу**. Такий ряд можна зобразити графічно. Для цього на осі абсцис наносять варіанти x_i , а на осі ординат – частоти m_i (або відносні частоти w_i), тобто маємо точки $M_i(x_i, m_i)$ (або $N_i(x_i, w_i)$). З'єднавши точки M_i (або N_i) відповідних варіант і частот, отримаємо лому лінію, яку називають **полігоном** розподілу (рис. 2.1).

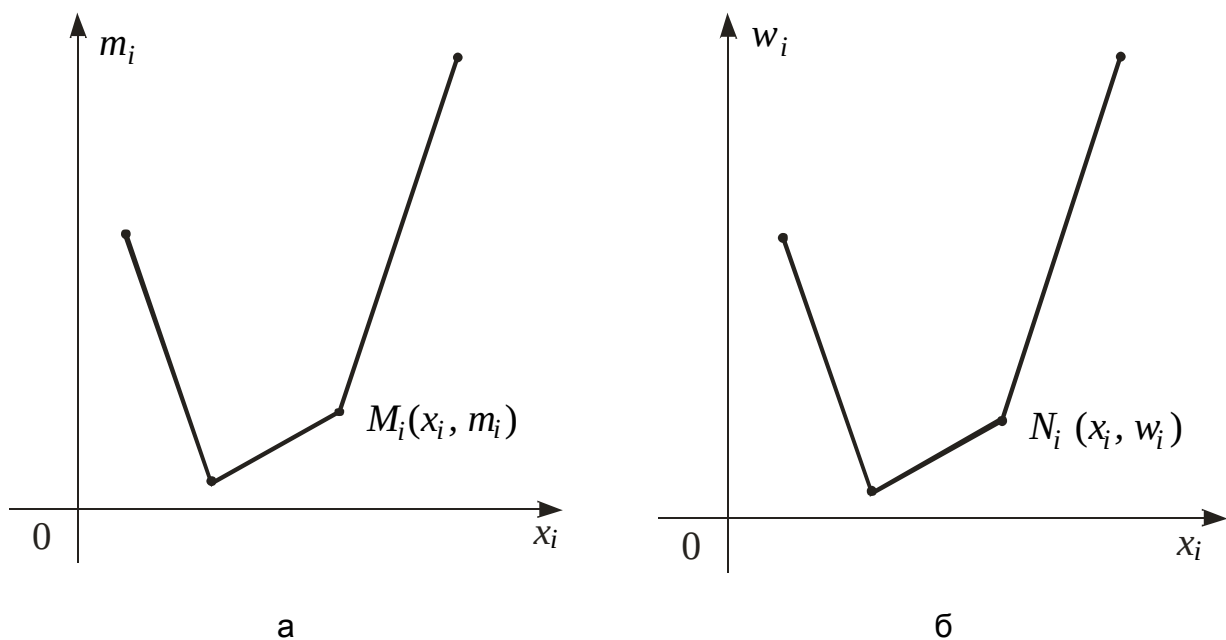


Рис. 2.1. Полігони частот (а) і відносних частот (б)

Емпіричною функцією розподілу вибірки називається функція $F^*(x)$, яка для будь-якого значення x визначає відносну частоту події, що задовольняє умову $X < x$, тобто випадкова величина набуде значення, меншого за x :

$$F^*(x) = \frac{m_x}{n},$$

де m_x – сума частот варіант для значень аргументу, менших за x , n — обсяг вибірки.

Таким чином, емпірична функція розподілу визначається шляхом послідовного додавання відносних частот варіант, менших за x .

Графіком емпіричної функції розподілу є **кумулята**, або графік накопичених відносних частот. Цей графік – східчаста фігура, яка має точки розриву при значеннях абсцис, що дорівнюють числовим значенням, яких набуває випадкова величина.

Функцію розподілу генеральної сукупності позначимо $F(x)$. Відмінність між емпіричною й теоретичною функціями полягає в тому, що теоретична функція $F(x)$ визначає ймовірність події $X < x$, а емпірична функція $F^*(x)$ — відносну частоту цієї події. Згідно з теоремою Бернуллі можна сказати, що при великих n числа $F^*(x)$ і $F(x)$ мало відрізняються одне від одного в тому сенсі, що $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|F(x) - F^*(x)| < \varepsilon) = 1 \quad (\varepsilon > 0)$. Отже, емпірична функція розподілу вибірки може бути використана для оцінювання теоретичної функції розподілу генеральної сукупності.

Функція $F^*(x)$ має такі самі властивості, що й функція $F(x)$:

1. Значення емпіричної функції належить відрізьку $[0; 1]$.
2. $F^*(x)$ – неспадна функція: $F^*(x_2) > F^*(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$.
3. Якщо x_1 – найменша варіанта, то $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_1$, якщо x_k – найбільша варіанта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

4. У випадку інтервальних варіаційних рядів, отриманих для неперервної випадкової величини, графічним зображенням є **гістограма**. Розрізняють гістограму частот і гістограму відносних частот.

5. **Гістограмою частот** називають східчасту фігуру, яка складається з прямокутників, площа кожного з яких дорівнює частоті потрапляння випадкової величини у відповідний інтервал. Таким чином, основами прямокутників є інтервали завдовжки h , а висоти дорівнюють щільності частоти $\frac{m_i}{h}$. Для побудови гістограми на осі абсцис відкладають часткові інтервали, а над ними проводять відрізьки, паралельні до осі абсцис, на відстані $\frac{m_i}{h}$. Площа i -го часткового прямокутника дорівнює $\frac{m_i}{h} h = m_i$ – сумі частот варіант i -го інтервалу.

Таким чином, площа гістограми дорівнює сумі всіх частот, тобто обсягу вибірки.

6. **Гістограмою відносних частот** (рис. 2.2) називають східчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є інтервали завдовжки h , а висоти дорівнюють відношенню $\frac{w_i}{h}$ (щільності відносної частоти). Для побудови гістограми відносних частот на осі

абсцис відкладають часткові інтервали, а над ними проводять відрізки, паралельні до осі абсцис, на відстані $\frac{w_i}{h}$ від неї. Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто одиниці.

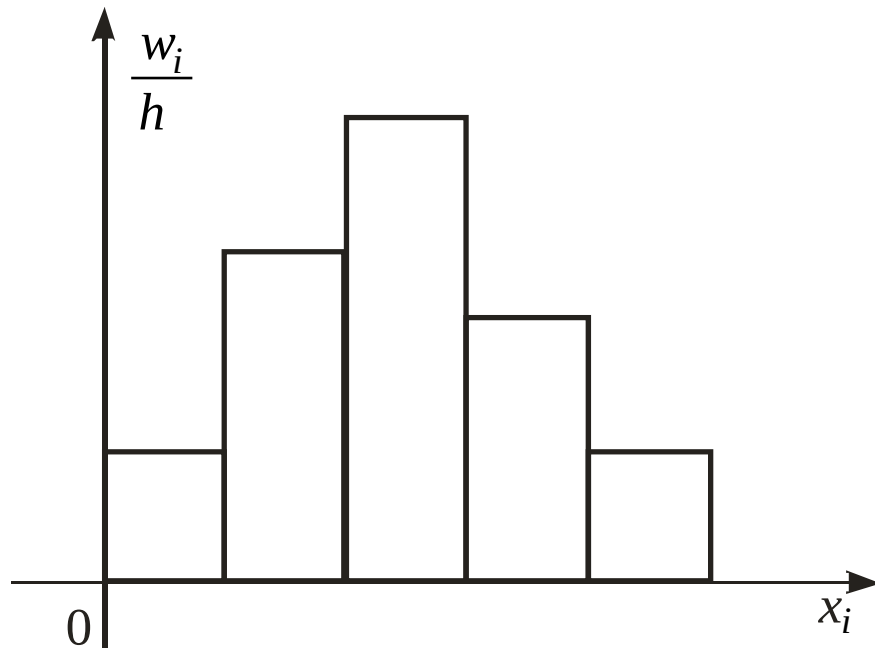


Рис. 2.2. Гістограма відносних частот

Груповим середнім називають середнє арифметичне значень ознаки, які належать групі:

$$\bar{x}_{\text{виб}} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i m_i}{n}.$$

При наявності кількох вибірок у генеральній сукупності з груповими середніми $\bar{x}_{1\text{виб}}, \bar{x}_{2\text{виб}}, \dots, \bar{x}_{k\text{виб}}$ та обсягами $n_1, n_2, \dots, n_k$ уведемо термін загального середнього $\bar{x}_{\text{ген}}$ для всієї сукупності. Загальне середнє дорівнює середньому арифметичному групових середніх, зваженому за обсягами груп:

$$\bar{x}_{\text{ген}} = \frac{\sum_{j=1}^k \bar{x}_{j\text{виб}} n_j}{N}, \quad (2.13)$$

де j – номер групи, N – обсяг усієї сукупності $\left(N = \sum_{i=1}^k n_i\right)$.

Приклад 2.1. Задано вибірку: **1, 3, 4, 5, 1, 3, 4, 3, 5, 1, 3, 4, 1, 3, 4, 3, 4, 3, 4, 3.**

Потрібно:

- 1) побудувати варіаційний ряд;
- 2) визначити статистичний розподіл вибірки;
- 3) зобразити полігон відносних частот;
- 4) знайти емпіричну функцію розподілу й побудувати її графік.

Розв'язання. 1. Побудуємо варіаційний ряд:

1, 1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5.

2. Визначимо частоти, з якими варіанти x_i входять у вибірку, і запишемо статистичний розподіл вибірки:

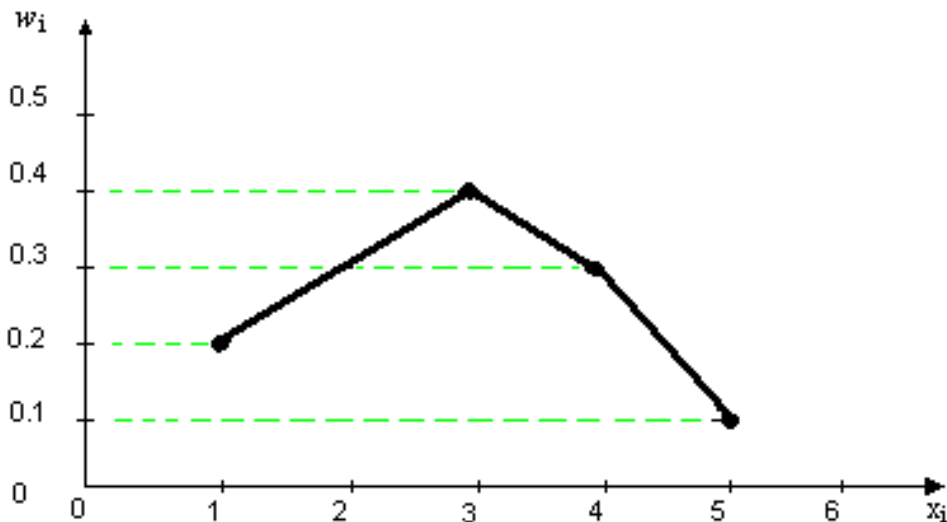
x_i	1	3	4	5
n_i	4	8	6	2

3. Знайдемо відносні частоти. Оскільки обсяг вибірки $n = 4+8+6+2 = 20$, то $w_1 = 4/20 = 0,2$; $w_2 = 8/20 = 0,4$; $w_3 = 6/20 = 0,3$; $w_4 = 2/20 = 0,1$.

Отже, розподіл відносних частот має такий вигляд:

x_i	1	3	4	5
w_i	0,2	0,4	0,3	0,1

На площині $(x_i; w_i)$ зобразимо точки з координатами **(1; 0,2)**, **(3; 0,4)**, **(4; 0,3)**, **(5; 0,1)** і з'єднаємо їх відрізками. Отримаємо шуканий полігон відносних частот:



4. Емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$ знаходимо за формулою:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}; \quad x \in (-\infty; +\infty),$$

де n — обсяг вибірки; n_x — кількість варіант, які є меншими за x , у цій задачі $n = 20$.

При $x \leq 1$ $n_x = 0$, оскільки найменша варіанта $x_1 = 1$. Тому $F^*(x) = 0$ при $x \leq 1$.

При $1 < x \leq 3$ лише варіанта $x_1 = 1 < x$, причому $n_x = 4$. Тому $F^*(x) = \frac{4}{20} = 0,2$.

При $3 < x \leq 4$ варіанти $x_1 = 1$ і $x_2 = 3$ є меншими за x , причому $n_x = 4 + 8 = 12$. Тому $F^*(x) = \frac{12}{20} = 0,6$.

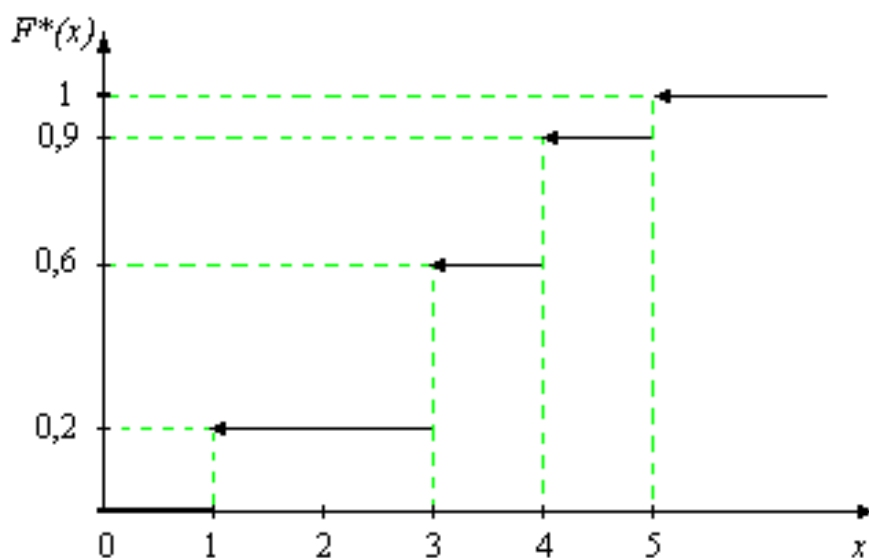
При $4 < x \leq 5$ варіанти $x_1 = 1, x_2 = 2$ і $x_3 = 4$ є меншими за x , причому $n_x = 4 + 8 + 6 = 18$. Тому $F^*(x) = \frac{18}{20} = 0,9$.

При $x > 5$ $n_x = 20$, отже, $F^*(x) = 1$.

Таким чином, емпірична функція розподілу має вигляд

$$F^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leq 1, \\ 0,2 & \text{при } 1 < x \leq 3, \\ 0,6 & \text{при } 3 < x \leq 4, \\ 0,9 & \text{при } 4 < x \leq 5, \\ 1 & \text{при } x > 5. \end{cases}$$

Будуємо графік цієї функції:



Приклад 2.2. Задано інтервальний варіаційний ряд

$a_{i-1} - a_i$	1-3	3-5	5-7	7-9	9-11
n_i	7	10	20	8	5

Побудувати гістограму відносних частот.

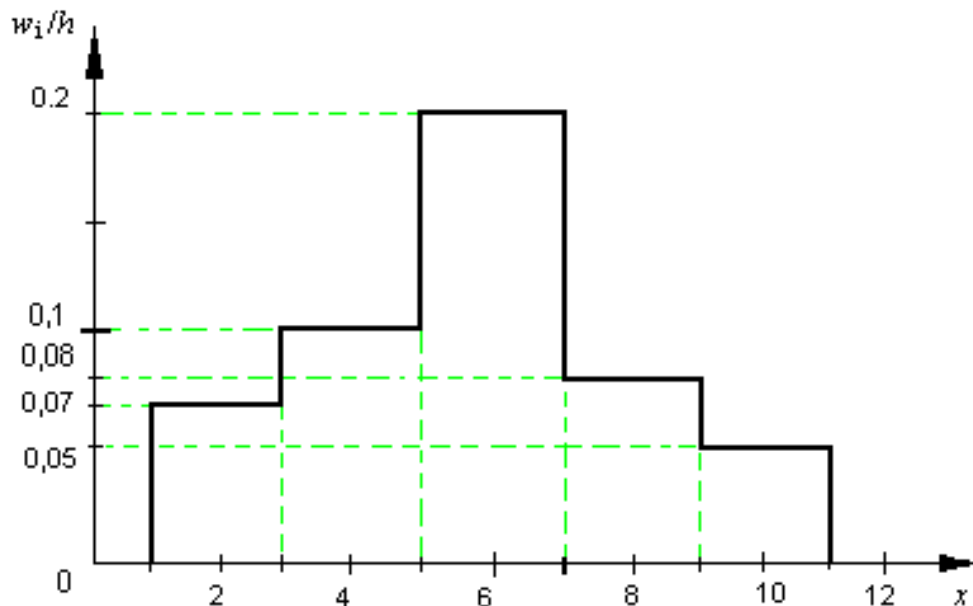
Розв'язання. Обсяг вибірки $n = 7 + 10 + 20 + 8 + 5 = 50$, довжина часткового інтервалу $h = 2$.

Знаходимо щільності відносних частот w_i за формулою $\frac{w_i}{h} = \frac{n_i}{n h}$:

$$\frac{w_1}{h} = \frac{7}{50 \cdot 2} = 0,07; \quad \frac{w_2}{h} = \frac{10}{50 \cdot 2} = 0,1; \quad \frac{w_3}{h} = \frac{20}{50 \cdot 2} = 0,2;$$

$$\frac{w_4}{h} = \frac{8}{50 \cdot 2} = 0,08; \quad \frac{w_5}{h} = \frac{5}{50 \cdot 2} = 0,05.$$

Відкладемо на осі абсцис часткові інтервали $a_{i-1} - a_i$ і проведемо над цими інтервалами відрізки, паралельні до осі абсцис, на відстанях, що дорівнюють відповідно w_i/h . Отримаємо шукану гістограму відносних частот:



Приклад 2.3. Обчислити $\bar{x}_e$, D_e і σ_e для заданого інтервального варіаційного ряду:

Інтервал	10...20	20...30	30...40	40...50	50...60
Частота m_i	12	18	27	25	18

Розв'язання. Перейдемо від інтервального ряду до дискретного, замінюючи кожен інтервал його серединою (x_i). Результати зручно зобразити у вигляді таблиці:

Інтервал	m_i	x_i	$x_i m_i$	$x_i^2 m_i$	$(x_i - \bar{x}_e)^2 m_i$
10...20	12	15	180	2700	5755,32
20...30	18	25	450	11250	2548,98
30...40	27	35	945	33075	97,47
40...50	25	45	1125	50625	1640,25
50...60	18	55	990	54450	5896,98
Разом	100		3690	152100	15939,00

Маємо:

$$\bar{x}_e = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i m_i}{n} = \frac{3690}{100} = 36,9;$$

$$D_e = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i^2 m_i}{n} - (\bar{x}_e)^2 = \frac{152100}{100} - 36,9^2 = 159,39;$$

$$D_e = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x}_e)^2 m_i}{n} = \frac{15939}{100} = 159,39;$$

$$\sigma_e = \sqrt{D_e} = \sqrt{159,39} = 12,62.$$

Існує спрощений метод обчислення $\bar{x}_e$ і D_e , якщо ввести умовну змінну x'_i за формулою

$$x'_i = \frac{x_i - c}{h}, \quad (2.14)$$

де c — одне зі значень x_i , зазвичай з найбільшим значенням частоти m_i . Варіанти x'_i виражаються числами $0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Застосовуючи формули для обчислення $\bar{x}_e$ і D_e , знаходимо умовні значення $\bar{x}'_e$ і D'_e :

$$\bar{x}'_e = \frac{\sum_{i=1}^k x'_i m_i}{n}, \quad D'_e = \frac{\sum_{i=1}^k (x'_i)^2 m_i}{n} - (x'_e)^2. \quad (2.15)$$

Зворотний перехід до значень $\bar{x}_e$ і D_e здійснюємо за формулами

$$\bar{x}_e = \bar{x}'_e h + c, \quad D_e = D'_e h^2. \quad (2.16)$$

Зручно для обчислень застосовувати таблицю:

x_i	m_i	x'_i	$x'_i m_i$	$(x'_i)^2 m_i$
x_1	m_1	x'_1	$x'_1 m_1$	$(x'_1)^2 m_1$
x_2	m_2	x'_2	$x'_2 m_2$	$(x'_2)^2 m_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_k	m_k	x'_k	$x'_k m_k$	$(x'_k)^2 m_k$
Разом	$\sum_{i=1}^k m_i$		$\sum_{i=1}^k x'_i m_i$	$\sum_{i=1}^k (x'_i)^2 m_i$

Отже, розв'яжемо приклад 2.3 за допомогою умовної змінної. Нехай $x'_i = \frac{x_i - 35}{10}$ (тут $c=35$, $h=10$). Заповнимо таблицю:

x_i	m_i	x'_i	$x'_i m_i$	$(x'_i)^2 m_i$
15	12	-2	-24	48
25	18	-1	-18	18
35	27	0	0	0
45	25	1	25	25
55	18	2	36	72
Разом	100		19	163

$$\text{Маємо: } \bar{x}'_e = \frac{19}{100} = 0,19, \quad D'_e = \frac{163}{100} - 0,19^2 = 1,5939,$$

$$\bar{x}_e = 0,19 \cdot 10 + 35 = 36,9, \quad D_e = 1,5939 \cdot 10^2 = 159,39.$$

Приклад 2.4. Проведено 40 спостережень швидкості вантажівок, км/год, на певній ділянці дороги:

41	41	29	25	41	43	42	34	41	30
33	48	50	36	35	46	28	46	50	41
50	27	43	53	48	47	34	35	29	42
30	35	38	41	36	38	45	59	44	43

Скласти інтервальний статистичний розподіл цієї вибірки.

Розв'язання. Розіб'ємо варіанти (x_i) заданої вибірки на окремі інтервали, тобто проведемо їх групування. Кількість інтервалів k треба брати не занадто великою, але й не занадто малою, бо можна втратити особливості розподілу вибірки.

Отже, $x_{min} = 25$, $x_{max} = 59$, $R = x_{max} - x_{min} = 34$.

Крок h знаходимо за формулою

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{k} = \frac{34}{k}.$$

Нехай $k = 7$, тоді $h = \frac{34}{7} = 4,86 \approx 5$.

Якщо виявляється, що h – дробове число, то за довжину часткового інтервалу беруть або ближнє ціле число, або ближній округлений дріб. Для визначення довжини часткового інтервалу можна застосовувати формулу Стерджеса

$$h = \frac{x_{max} - x_{min}}{1 + 3,22 \lg n},$$

де n – обсяг вибірки.

За початок першого інтервалу пропонується брати $a_0 = x_{min} - \frac{h}{2}$, тобто $a_0 = 25 - 2,5 = 22,5$. Тоді права межа останнього інтервалу буде дорівнювати $a_k + \frac{h}{2}$. Треба зазначити, що початок першого інтервалу і кінець останнього не обов'язково збігаються з x_{min} і x_{max} . Потребується лише, щоб кінець останнього інтервалу (a_k) задовольняв умову

$$a_k > x_{max}.$$

Далі треба обчислити частоти m_i потрапляння значень x_j в i -й

інтервал. Результати зручно записати в таблицю:

№ п/п	Інтервали	Частота m_i	Відносна частота $w_i = \frac{m_i}{n}$	Накопичена частота w_i^*
1	22,5...27,5	2	0,050	0,050
2	27,5...32,5	5	0,125	0,175
3	32,5...37,5	8	0,200	0,375
4	37,5...42,5	11	0,275	0,650
5	42,5...47,5	7	0,175	0,825
6	47,5...52,5	5	0,125	0,950
7	52,5...57,5	1	0,025	0,975
8	57,5...62,5	1	0,025	
		$n = 40$	1,000	

2.2. Статистичне оцінювання параметрів розподілу. Точкові оцінки

Припустимо, що експериментальним шляхом знайдено характеристику θ^* , яка є оцінкою невідомого параметра θ закону розподілу випадкової величини X .

Наближене значення параметра генеральної сукупності, обчислене за вибіркою, називають **оцінкою параметра**. Зазвичай основними оцінками параметрів генеральної сукупності є середнє вибіркве $\bar{x}_{\text{виб}}$, що є аналогом математичного сподівання $M(X)$, і вибіркова дисперсія $\sigma_{\text{виб}}^2$ – аналог дисперсії $D(X)$.

Нехай маємо параметр θ , а θ^* – його вибіркова оцінка. Для того щоб оцінка θ^* достатньо повно характеризувала параметр генеральної сукупності, необхідно, щоб вона мала такі властивості: незміщеність, спроможність, ефективність.

Оцінка θ^* параметра θ називається **незміщеною**, якщо її

математичне сподівання дорівнює заданому параметру, тобто

$$M(\theta^*) = \theta \text{ (наприклад, } \bar{x}_{\text{ген}} \approx M(\bar{x}_{\text{виб}}) \text{)}.$$

Оцінка називається **спроможною**, якщо вона при $n \rightarrow \infty$ прямує за ймовірністю до параметра, який оцінюється, тобто

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(\theta^* \rightarrow \theta) = 1.$$

Оцінка називається **ефективною**, якщо при заданій кількості досліджень вона має найменшу дисперсію.

Оцінка називається **точковою**, якщо вона задається одним числом. До таких належать характеристики вибіркової сукупності, які є точковими оцінками відповідних характеристик генеральної сукупності.

Припустимо, що розподіл ознаки X генеральної сукупності задано таблицею

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
M_i	M_1	M_2	$\dots$	M_k

 ,

де x_i – значення ознаки X ; M_i – частота цього значення ($i = 1, 2, \dots, k$). Обсяг генеральної сукупності N $N = M_1 + M_2 + \dots + M_k$. Середнє арифметичне (аналог математичного сподівання) розподілу ознаки X у генеральній сукупності, знайдене за формулою, називається **генеральним середнім**. Якщо застосовується вибірковий метод, то виникає завдання його оцінювання за даними вибірки.

Нехай розподіл ознаки X вибіркової сукупності задано таблицею

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
m_i	m_1	m_2	$\dots$	m_k

 ,

де m_i – частота значення x_i ($i = 1, 2, \dots, n$), об'єм вибірки $n = m_1 + m_2 + \dots + m_k$. Середнє арифметичне розподілу вибірки визначається формулою

$$\bar{x}_{\text{виб}} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i m_i}{n}.$$

Вибіркове середнє $\bar{x}_{\text{виб}}$ є незміщеною оцінкою середнього генерального $\bar{x}_{\text{ген}}$, тобто

$$M(\bar{x}_{\text{виб}}) = \bar{x}_{\text{ген}}.$$

Доведемо, що $\bar{x}_{\text{виб}}$ — незміщена оцінка $\bar{x}_{\text{ген}}$.

Розглянемо $\bar{x}_{\text{виб}}$ як випадкову величину, а значення ознаки X , тобто $x_1, x_2, \dots, x_k$, — як незалежні однаково розподілені випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_k$. Оскільки ці величини — однаково розподілені, то вони мають однакове математичне сподівання $M(x_i) = a$. Відомо, що математичне сподівання середнього арифметичного однаково розподілених випадкових величин дорівнює їх загальному математичному сподіванню:

$$M(\bar{x}_{\text{виб}}) = M\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_k}{n}\right) = a.$$

Математичне сподівання a кожної з величин дорівнює математичному сподіванню ознаки X генеральної сукупності:

$$M(X) = \bar{x}_{\text{ген}} = a.$$

Замінивши a на $\bar{x}_{\text{ген}}$, отримаємо

$$M(\bar{x}_{\text{виб}}) = \bar{x}_{\text{ген}}.$$

Отже, вибіркове середнє є незміщеною оцінкою генерального середнього.

Доведемо, що вибіркове середнє є також спроможною оцінкою генерального середнього. Дійсно, припустимо, що випадкові величини $X_1, X_2, \dots, X_k$ мають обмежені дисперсії. Тоді можна використати для цих величин теорему Чебишова

$$P\left(\left|\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} - a\right| < \varepsilon\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1,$$

згідно з якою при збільшенні n середнє арифметичне ($\bar{x}_{\text{виб}}$) величин, що розглядаються, прямує по ймовірності до загального математичного сподівання a , тобто до генерального середнього $\bar{x}_{\text{ген}}$ ($\bar{x}_{\text{ген}} = a$). Таким чином, це означає, що вибіркове середнє є спроможною оцінкою генерального середнього.

Близькість вибірових середніх до генерального середнього не залежить від відношення обсягу вибірки до обсягу генеральної сукупності, а залежить від обсягу вибірки: чим більшим є обсяг вибірки, тим менше вибіркове середнє відрізняється від генерального середнього.

Вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії $D_{\text{ген}}$, тобто математичне сподівання вибіркової дисперсії не дорівнює генеральній дисперсії:

$$M(D_{\text{виб}}) = \frac{n-1}{n} D_{\text{ген}}.$$

Для доведення позначимо: $D_{\text{ген}} = \sigma_0^2$, $D_{\text{виб}} = \sigma^2$, $\bar{x}_0$ – генеральне середнє, $\bar{x}$ – вибікове середнє. Запишемо дисперсії вибірки у вигляді

$$\sigma^2 = \overline{x^2} - (\bar{x})^2.$$

Тоді

$$M(\sigma^2) = M(\overline{x^2} - (\bar{x})^2) = M(\overline{x^2}) - M((\bar{x})^2),$$

$$M(\overline{x^2}) = M\left(\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}\right) = \frac{1}{n} n \overline{x_0^2} = \overline{x_0^2} \text{ (для однаково розподілених величин),}$$

$$\begin{aligned} M((\bar{x})^2) &= M(\bar{x} - \bar{x}_0 + \bar{x}_0)^2 = M((\bar{x} - \bar{x}_0) + \bar{x}_0)^2 = \\ &= M((\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + 2(\bar{x} - \bar{x}_0)\bar{x}_0 + \bar{x}_0^2) = \\ &= M(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + 2\bar{x}_0 M(\bar{x} - \bar{x}_0) + M(\bar{x}_0^2) = \\ &= M(\bar{x} - \bar{x}_0)^2 + M(\bar{x}_0^2) = D(\bar{x}) + \bar{x}_0^2, \end{aligned}$$

$M(\bar{x} - \bar{x}_0) = 0$ – центральна властивість математичного сподівання.

Тоді отримаємо

$$M(\sigma^2) = \overline{x_0^2} - (D(\bar{x}) + \bar{x}_0^2) = \overline{x_0^2} - (\bar{x}_0)^2 - D(\bar{x}) = \sigma_0^2 - \frac{\sigma_0^2}{n} = \frac{n-1}{n} \sigma_0^2.$$

Повернемося до позначень вибірки й генеральної сукупності:

$$M(D_{\text{виб}}) = \frac{n-1}{n} D_{\text{ген}}.$$

Щоб зробити оцінку незміщеною, помножимо на $\frac{n}{n-1}$ останню рівність:

$$\frac{n}{n-1} M(D_{\text{виб}}) = \frac{n}{n-1} \frac{n-1}{n} D_{\text{ген}},$$

звідки

$$M\left(\frac{n}{n-1} D_{\text{виб}}\right) = D_{\text{ген}}.$$

Величину $S_x^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{виб}}$ називають **виправленою статистичною дисперсією вибірки**, яка є незміщеною оцінкою генеральної дисперсії

$$M(S_x^2) = D_{\text{ген}}.$$

Приклад 2.5. Знайти виправлену вибірку дисперсію за заданим розподілом вибірки обсягом $n = 10$:

x_i	116	118	120	121	122	124
m_i	1	2	3	2	2	1

Розв'язання. Для обчислення $\bar{x}_{\text{виб}}$, D_e і S^2 заповнимо таблицю:

x_i	m_i	$x_i m_i$	$(x_i - \bar{x}_e)^2 m_i$
116	1	116	19,36
118	1	118	5,76
120	3	360	0,48
121	2	242	0,72
122	2	244	5,12
124	1	124	12,96
Σ	$n = 10$	1204	44,4

$$\text{Отже, } \bar{x}_{\text{виб}} = \frac{\sum_{i=1}^k x_i m_i}{n} = 120,4.$$

Вибіркову дисперсію D_e і виправлену дисперсію S^2 знайдемо за формулами

$$D_e = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x}_e)^2 m_i}{n},$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^5 (x_i - \bar{x}_e)^2 m_i}{n-1}.$$

$$\text{Отже, } S^2 = \frac{44,4}{9} \approx 4,93.$$

Приклад 2.6. Знайти виправлену вибірку дисперсію за заданим розподілом вибірки обсягом $n = 100$:

x_i	1250	1275	1300	1325	1350
m_i	20	25	35	15	5

Розв'язання. Отже, $n = 100$, $h = 25$. Перейдемо до умовної змінної $x'_i = \frac{x_i - 1300}{25}$ і заповнимо таблицю:

x_i	m_i	x'_i	$x'_i m_i$	$(x'_i)^2 m_i$
1250	20	-2	-40	80
1275	25	-1	-25	25
1300	35	0	0	0
1325	15	1	15	15
1350	5	2	10	20
Σ	100		-40	135

Знайдемо умовні значення $\bar{x}'$ і $D_{x'}$:

$$\bar{x}'_{\text{виб}} = \frac{\sum_{i=1}^k x'_i m_i}{n} = -0,4; \quad D_{x'} = \frac{\sum_{i=1}^k (x'_i)^2 m_i}{n} - (\bar{x}')^2 = 1,35 - 0,16 = 1,19.$$

Перехід до фактичних значень $\bar{x}$ і D_x дає такі результати:

$$\bar{x} = -0,4 \cdot 25 + 1300 = 1290,$$

$$S^2 = D_x = 1,19 \cdot 25^2 = 743,75.$$

2.3. Інтервальні оцінки. Надійний інтервал

Інтервальні оцінки використовують у тих випадках, коли точкові оцінки недостатньо точно відображають характеристики ознаки. Тоді ознаку, що вивчається, покривають надійним інтервалом. **Надійним інтервалом** називається інтервал, що покриває всі значення випадкової величини з заданою ймовірністю або з заданим рівнем значущості.

Визначимо надійний інтервал для математичного сподівання. Оскільки за теоремою Ляпунова при достатньо великій кількості дослідів усі закони

зводяться до нормального, то при побудові надійного інтервалу можна припустити, що вибірка належить нормально розподіленій генеральній сукупності. Використовуючи теорему Лапласа для відхилень випадкової величини від свого математичного сподівання, отримаємо

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Нехай $\varepsilon = \sigma t$, тоді $P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t)$.

Якщо взяти декілька вибірок з генеральної сукупності й обчислити $\bar{x}_{1 \text{ виб}}, \bar{x}_{2 \text{ виб}}, \dots, \bar{x}_{k \text{ виб}}$, то $\bar{x}_{\text{виб}}$ можна розглядати як випадкову величину,

$$a = \bar{x}_{\text{ген}}, \sigma = \frac{\sigma_{\text{виб}}}{\sqrt{n}}, P\left(|\bar{x}_{\text{виб}} - a| < \frac{\sigma_{\text{виб}} t}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t).$$

Отже, з надійністю $P = 2\Phi(t)$ можна побудувати надійний інтервал

$$\bar{x}_{\text{виб}} - \frac{\sigma_{\text{виб}} t}{\sqrt{n}} \leq a \leq \bar{x}_{\text{виб}} + \frac{\sigma_{\text{виб}} t}{\sqrt{n}}. \quad (2.17)$$

З надійністю $P = 2\Phi(t)$ і точністю ε можна знайти необхідний обсяг вибірки. З формули $\varepsilon = \frac{\sigma_{\text{виб}} t}{\sqrt{n}}$ отримаємо $n = \frac{\sigma_{\text{виб}}^2 t^2}{\varepsilon^2}$.

Якщо генеральна сукупність є обмеженою, то треба зробити поправку на дисперсію й покласти

$$\sigma = \frac{\sigma_{\text{виб}}}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}}, \quad \varepsilon = \frac{\sigma_{\text{виб}} t}{\sqrt{n}} \sqrt{1 - \frac{n}{N}},$$

де N – обсяг генеральної сукупності.

Знайдемо n :

$$\varepsilon^2 = \sigma^2 t^2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{N} \right) \Rightarrow \frac{1}{n} - \frac{1}{N} = \frac{\varepsilon^2}{\sigma^2 t^2};$$

$$n = \frac{1}{\frac{\varepsilon^2}{\sigma^2 t^2} + \frac{1}{N}} = \frac{\sigma^2 t^2 N}{\varepsilon^2 N + \sigma^2 t^2} = \frac{\sigma^2 t^2}{\varepsilon^2 + \frac{\sigma^2 t^2}{N}}.$$

Знайдемо **надійний інтервал для оцінки середнього квадратичного відхилення** випадкової величини. Якщо взяти декілька вибірок з генеральної сукупності й обчислити $\sigma_{1 \text{ виб}}, \sigma_{2 \text{ виб}}, \dots, \sigma_{k \text{ виб}}$, то $\sigma_{\text{виб}}$ можна вважати випадковою величиною. Візьмемо за випадкову величину середнє квадратичне відхилення s (s^2 – виправлена вибіркова

дисперсія), тоді $P(|s - \sigma_{\text{ген}}| < \varepsilon) = 2\Phi(t)$, тобто маємо надійний інтервал з надійністю $P = 2\Phi(t)$:

$$\begin{aligned} s - \varepsilon &\leq \sigma_{\text{ген}} \leq s + \varepsilon, \\ s\left(1 - \frac{\varepsilon}{s}\right) &\leq \sigma_{\text{ген}} \leq s\left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right), \\ s(1 - q) &\leq \sigma_{\text{ген}} \leq s(1 + q), \end{aligned} \quad (2.18)$$

де $q = \frac{\varepsilon}{s}$.

Значення величини q , яка залежить від заданої надійності й обсягу вибірки, знаходять у спеціальних таблицях у підручниках з теорії ймовірностей.

Приклад 2.7. Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю $\gamma = 0,99$ невідомого математичного сподівання a нормально розподіленої генеральної сукупності X , якщо $\sigma = 2$, $\bar{x} = 15,35$ і $n = 16$.

Розв'язання. Шуканий надійний інтервал має вигляд

$$\bar{x} - \frac{t_{\gamma} \sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{t_{\gamma} \sigma}{\sqrt{n}},$$

де t_{γ} – значення аргументу функції Лапласа $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}} dx$, при

якому $\Phi(t_{\gamma}) = \frac{\gamma}{2}$. Знаходимо t_{γ} зі співвідношення $\Phi(t_{\gamma}) = \frac{0,99}{2} = 0,495$.

За таблицею значень функції Лапласа знаходимо $t_{\gamma} = 2,58$. Підставляємо $\sigma = 2$, $\bar{x} = 15,35$, $n = 16$, $t_{\gamma} = 2,58$ у формулу для визначення надійного інтервалу, остаточно маємо $14,05 < a < 16,64$.

Приклад 2.8. Побудувати надійний інтервал для оцінки з надійністю $\gamma = 0,95$ невідомого середнього квадратичного відхилення σ нормально розподіленої генеральної сукупності X , якщо $S = 0,7$ і $n = 20$.

Розв'язання. Шуканий надійний інтервал має вигляд:

$$\begin{aligned} S(1 - q) &< \sigma < S(1 + q) \text{ при } q < 1; \\ 0 &< \sigma < S(1 + q) \text{ при } q \geq 1, \end{aligned}$$

де $q = q(\gamma, n)$ — величина, яку знаходимо з таблиці за заданими γ і n : при $\gamma = 0,95$ і $n = 20$ $q = 0,37$.

Підставляючи $q = 0,37$, $S = 0,7$, $n = 20$, отримаємо надійний інтервал: $0,441 < \sigma < 0,959$.

Приклад 2.9. Для визначення середньої урожайності було відібрано 400 га, які дали середній урожай 13,4 ц з 1 га. Середнє квадратичне відхилення за вибірковими даними дорівнює 2 ц. Визначити ймовірність того, що фактичний урожай буде не нижчим за 13,2 ц з 1 га.

Розв'язання. За умовою $n = 400$, $\bar{x}_e = 13,4$, $\bar{x}_z = 13,2$, тобто $\varepsilon = |\bar{x}_z - \bar{x}_e| = 0,218$, а $S = 2$. Треба знайти $P = (|\bar{x}_z - \bar{x}_e| \leq \varepsilon)$.

$$\text{Знаходимо } t = \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{S} = \frac{0,2 \sqrt{400}}{2} = 2.$$

Обчислюємо рівень довіри (гарантію):

$$P = (|\bar{x}_z - \bar{x}_e| \leq 0,2) = 2\Phi(t) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0,4772 = 0,9544.$$

З надійністю 95,44 % стверджуємо, що фактичний урожай буде не нижчим за 13,2 ц з 1 га.

Приклад 2.10. Для визначення середньої тривалості світіння електролампи взяли з великої партії на вибірку 400 ламп. Середній термін світіння лампи виявився таким, що дорівнює 800 год, а середнє квадратичне відхилення – 40 год. Знайти з імовірністю 0,9973, у яких межах знаходиться середній термін світіння ламп усієї партії.

Розв'язання. За умовою $n = 400$, $\bar{x}_e = 800$, $S_e = 40$, $P = 0,9973$. Треба знайти довірчий інтервал для $\bar{x}_z$:

$$\bar{x}_e - \varepsilon \leq \bar{x}_z \leq \bar{x}_e + \varepsilon.$$

Як відомо, $2\Phi(t) = 0,9973$, звідки $\Phi(t) = 0,4986$. За таблицею значень $\Phi(t)$ знаходимо, що $t = 2,98$.

Тоді $\varepsilon = \frac{t S}{\sqrt{n}} = \frac{2,98 \cdot 40}{\sqrt{400}} = 5,96 \approx 6$, а $800 - 6 \leq \bar{x}_z \leq 800 + 6$, тобто $794 \leq \bar{x}_z \leq 806$.

Отже, з надійністю 99,73 % стверджуємо, що в генеральній сукупності (усієї партії) середній термін світіння ламп становить від 794 до 806 год.

Приклад 2.11. Для визначення зольності вугілля було відібрано деяку кількість проб таким чином, щоб відхилення вибіркового середнього ($\bar{x}_e$) від генеральної середньої ($\bar{x}_z$) не перевищувало за абсолютною величиною 3 %. Середнє квадратичне відхилення 10 %. Знайти з надійністю $P = 95\%$ мінімальну кількість проб.

Розв'язання. За умовою $\varepsilon = 0,03$, $S = 0,1$, $P = 0,95$. Треба знайти n .

З виразу $2\Phi(t) = 0,95$ за допомогою таблиці значень $\Phi(t)$ знаходимо $t = 1,96$. Тоді

$$n \geq \left(\frac{t S}{\varepsilon} \right)^2 = \left(\frac{1,96 \cdot 0,1}{0,03} \right)^2 = 43.$$

Отже, треба взяти не менше 43 проб, щоб гарантувати з надійністю 95% відхилення $\bar{x}_e$ від $\bar{x}_e$ не більш ніж на 3% за абсолютною величиною.

Приклад 2.12. Аудитор має перевірити внески в банки. Було відібрано 60 рахунків і підраховано середнє значення внеску: $\bar{x}_e = 3200$ грн. Відомо, що середнє квадратичне відхилення всієї генеральної сукупності (тобто всіх можливих рахунків) дорівнює 600 грн. Треба знайти 92%-вий довірчий інтервал середнього рахунку в банку.

Розв'язання. За умовою $n = 60$, $\bar{x}_e = 3200$, $\sigma_e = 600$, $P = 0,92$. Треба знайти довірчий інтервал для $\bar{x}_e$.

Використаємо формулу (2.17), де $\varepsilon = \frac{t \sigma_e}{\sqrt{n}}$:

$$\bar{x}_e - \frac{t \sigma_e}{\sqrt{n}} \leq \bar{x}_e \leq \bar{x}_e + \frac{t \sigma_e}{\sqrt{n}}.$$

Треба знайти t з умови $2\Phi(t) = 0,92$, тобто $\Phi(t) = 0,46$. З таблиці значень $\Phi(t)$ знаходимо, що $t = 1,75$.

Отже, маємо

$$3200 - \frac{1,75 \cdot 600}{\sqrt{60}} \leq \bar{x}_e \leq 3200 + \frac{1,75 \cdot 600}{\sqrt{60}};$$

$$3064 \leq \bar{x}_e \leq 3336.$$

Приклад 2.13. Проведено 10 вимірювань відстані (x_i) узбічної полоси з найменшою концентрацією свинцю в ґрунті:

120, 122, 121, 118, 120, 116, 124, 122, 121, 120.

Знайти довірчі межі, у яких може бути ця відстань, і гарантувати ці межі з надійністю $\gamma = 0,99$.

Розв'язання. Обчислимо $\sum x_i$ і $\bar{x}_e$:

$$\sum x_i = 1204, \bar{x}_e = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{1204}{10} = 120,4.$$

Далі знайдемо S^2 за формулою для малої вибірки

$$S^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x}_e)^2}{n - 1}.$$

Отже,

$$S^2 = \frac{0,16 + 2,56 + 0,36 + 5,76 + 0,16 + 19,36 + 12,96 + 2,56 + 0,36 + 0,16}{10 - 1} =$$

$$= \frac{44,4}{9} = 4,92, \text{ а } S = 2,22.$$

При $n = 10$ і $\gamma = 0,99$ з таблиці значень t_γ визначаємо, що $t_\gamma = 3,17$.

Довірчий інтервал для ознаки X знаходимо за формулою

$$\bar{x}_e - \frac{t_\gamma \sigma_z}{\sqrt{n}} \leq \bar{x}_z \leq \bar{x}_e + \frac{t_\gamma \sigma_z}{\sqrt{n}}$$

та отримуємо інтервал **(118,17; 122,63)**.

Таким чином, з надійністю $\gamma = 0,99$ стверджуємо, що дійсною відстанню $\bar{x}_z$ є інтервал **(118,17; 122,63)**.

Приклад 2.14. За даними вибірки $n = 20$ з генеральної сукупності з нормальним розподілом знайдено виправлене середнє квадратичне відхилення $S = 250$. Визначити з надійністю 99 % довірчий інтервал для середнього квадратичного відхилення σ_z генеральної сукупності.

Розв'язання. Щоб застосувати одну з формул (2.17), (2.18):

$$S(1-q) < \sigma_z < S(1+q), \text{ якщо } q < 1;$$

$$0 < \sigma_z < S(1+q), \text{ якщо } q > 1,$$

треба за таблицею значень $q = q(\gamma, n)$ знайти q .

Отже, $q = q(0,99; 20) = 0,58 < 1$. При $S = 250$ одержуємо довірчий інтервал для σ_z за формулою (2.17):

$$250(1-0,58) < \sigma_z < 250(1+0,58), \text{ або } 105 < \sigma_z < 395.$$

2.4. Перевірка статистичних гіпотез. Критерії узгодженості

Однією із задач математичної статистики є визначення теоретичного закону розподілу випадкової величини в її генеральній сукупності на основі оброблення вибірових даних, оскільки це дає змогу відповісти на багато запитань щодо проведеного вибіркового спостереження.

Перше уявлення про можливий теоретичний закон розподілу дає вигляд гістограм. Після нанесення теоретичної кривої цього розподілу на гістограму можна або підтвердити зроблене припущення, або його відхилити. Будь-які висновки, зроблені за результатами оброблення вибірових даних, називають **статистичними гіпотезами**.

Висунуту гіпотезу називають основною (нульовою) і позначають H_0 . Правило, згідно з яким гіпотеза H_0 , що перевіряється, приймається чи відхиляється, називають **критерієм узгодженості для перевірки гіпотези H_0** .

Гіпотезу H_1 , яка повністю або частково заперечує нульову гіпотезу, називають **альтернативною**, або **конкурентною**.

Критерії узгодженості дають змогу відповісти на запитання про те, що або розбіжність між емпіричними й теоретичними розподілами є випадковою, несуттєвою й треба прийняти висунуту гіпотезу H_0 , або ця розбіжність є суттєвою, невідповідною й нульову гіпотезу треба відхилити.

Правило, за яким гіпотеза H_0 приймається або відхиляється (приймається альтернативна гіпотеза H_1), називають **статистичним критерієм**.

При перевірці гіпотези можна припустити помилку. Імовірність α відхилити правильну гіпотезу H_0 називається **рівнем значущості критерію**. Чим менший рівень значущості, тим менша ймовірність відхилити правильну гіпотезу. Найбільш поширені значення рівня значущості – це $\alpha = 0,05$ (5%-вий рівень значущості) і $\alpha = 0,01$ (1%-вий рівень значущості).

Наприклад, $\alpha = 0,05$ означає таке: якщо гіпотезу H_0 перевіряти за кожною зі 100 вибірок однакового обсягу, то в середньому в п'яти випадках зі 100 робиться помилка першого роду.

Для статистичної перевірки гіпотези H_0 щодо типу невідомого закону розподілу генеральної сукупності найбільш широко використовуються критерій Пірсона χ^2 («хі-квадрат») і критерій Колмогорова.

Розглянемо кожен з них.

Критерій Пірсона перевірки закону розподілу. Нехай проведено n незалежних спостережень над випадковою величиною X , у кожному з яких вона набула певного значення. Результати спостережень згруповано в інтервальний або дискретний варіаційний ряд:

Інтервал	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	$x_3 - x_4$	...	$x_k - x_{k+1}$
Частота m_i	m_1	m_2	m_3	...	m_k

$$\sum_{i=1}^k m_i = n$$

Необхідно перевірити, чи узгоджуються емпіричні дані з гіпотезою про те, що випадкова величина (ознака) X має певний теоретичний закон розподілу.

Для оцінювання розбіжностей між теоретичними й емпіричними частотами К. Пірсон запропонував величину χ^2 («хі-квадрат»):

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}. \quad (2.19)$$

Тут m_i – емпіричні частоти; $\tilde{m}_i$ – теоретичні частоти припущеного закону розподілу:

$$\tilde{m}_i = np_i = n(F(x_i) - F(x_{i-1})),$$

де p_i – імовірність того, що випадкова величина X набуде значень у

проміжку $(x_{i-1}; x_i)$; $F(x)$ – інтегральна функція припущеного закону розподілу.

Зазначимо, що $\tilde{m}_i$ округляється до найближчого цілого числа:

$$\sum_{i=1}^k \tilde{m}_i = \sum_{i=1}^k m_i = n, \text{ де } n - \text{обсяг вибірки.}$$

Величина χ^2 — випадкова, оскільки випадковими є значення m_i . Функція χ^2 повністю визначається одним параметром – кількістю ступенів свободи, що визначається формулою

$$r = k - s - 1, \quad (2.20)$$

де k – кількість інтервалів статистичного розподілу вибірки; s – кількість невідомих параметрів теоретичного розподілу, причому $s = 2$ (тобто $r = k - 3$), якщо перевіряється узгодженість з нормальним розподілом, для якого за вибірковими даними оцінюються два параметри α і σ , і $s = 1$ (тобто $r = k - 2$), якщо перевіряється узгодженість з показниковим розподілом, для якого за вибірковими даними оцінюється один параметр λ .

Застосування критерію узгодженості χ^2 є обґрунтованим лише тоді, коли обсяг вибірки достатньо великий (не менш ніж 50 одиниць) і частота кожного інтервалу не буде меншою за 5. Інтервали, які містять менше п'яти значень, об'єднуються із сусідніми.

Задавшись двома числами – кількістю ступенів свободи r і рівнем значущості α , за допомогою таблиці «Критичні точки розподілу χ^2 » знаходять значення $\chi^2_{\text{табл}}(\alpha; r)$.

Найчастіше застосовуються значення рівня значущості $\alpha = 0,05$ і $\alpha = 0,01$.

Якщо $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{табл}}(0,05; r)$, то гіпотеза про припущений закон розподілу генеральної сукупності не відхиляється, тобто емпіричні й теоретичні частоти різняться несуттєво.

Якщо $\chi^2_{\text{спост}} > \chi^2_{\text{табл}}(0,01; r)$, то гіпотеза відхиляється, емпіричні й теоретичні частоти різняться суттєво.

Якщо $\chi^2_{\text{табл}}(0,05; r) < \chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{табл}}(0,01; r)$, то гіпотеза може бути як прийнята, так і відхилена, але більш правильним вважається, що гіпотеза про припущений закон розподілу генеральної сукупності відхиляється.

Приклад 2.15. За рівнем значущості $\alpha = 0,05$ перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, якщо відомими є емпіричні m_i і теоретичні $\tilde{m}_i$ частоти, які подано в табличному вигляді:

m_i	6	13	38	74	106	85	30	14
$\tilde{m}_i$	3	14	42	82	99	76	37	13

Розв'язання. Для обчислення $\chi^2_{\text{спост}}$ заповнимо таблицю:

i	m_i	$\tilde{m}_i$	$\frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}$
1	$\left. \begin{matrix} 6 \\ 13 \end{matrix} \right\} 19$	$\left. \begin{matrix} 3 \\ 14 \end{matrix} \right\} 17$	0,24
2			
3	38	42	0,42
4	74	82	0,78
5	106	33	0,49
6	85	76	1,07
7	30	37	1,32
8	14	13	0,08
$\sum_i$	366	366	$\chi^2 = 4,43$

У таблиці об'єднано перші два значення m_i і $\tilde{m}_i$, після чого кількість інтервалів $k = 7$. Тоді кількість ступенів свободи $r = 7 - 2 - 1 = 4$ для перевірки нормального розподілу. За таблицею значень χ^2 знаходимо: $\chi^2(0,05;4) = 9,5$. Оскільки $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{табл}}$, то приймається гіпотеза про те, що дані спостережень узгоджуються з гіпотезою H_0 про нормальний закон розподілу генеральної сукупності.

Правило Романовського. Для великих значень $n > 100$ учений В. І. Романовський запропонував змінене доволі просте правило, яке значно полегшує застосування критерію χ^2 :

- якщо $\frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}} < 1,96$, то гіпотеза про припущений закон розподілу

приймається при $\alpha = 0,05$;

- якщо $\frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}} > 2,58$, то гіпотеза відхиляється при $\alpha = 0,01$;

- якщо $1,96 < \frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}} < 2,58$, то гіпотеза може бути як прийнята, так і

відхилена, але правильніше буде її відхилити.

Отже, для прикладу 2.15:

$\frac{|\chi^2 - r|}{\sqrt{2r}} = \frac{|4,43 - 4|}{\sqrt{8}} = 0,15 < 1,96$, тобто гіпотеза H_0 про нормальний закон розподілу не відхиляється.

*Перевірка гіпотези про нормальний закон розподілу
генеральної сукупності для інтервального статистичного ряду*

Щоб перевірити гіпотезу про нормальний розподіл генеральної сукупності, необхідно:

1) знайти вибіркове середнє $\bar{x}_b$ і середнє квадратичне відхилення S_x ;

2) для кінців інтервалів визначити $t = \frac{x_i - \bar{x}_b}{S_x}$ і значення $\Phi(t_i)$;

3) знайти $p_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})$;

4) розрахувати теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ за формулою $\tilde{m}_i = np_i$, де n – обсяг вибірки;

5) обчислити χ^2 за формулою $\chi^2_{\text{спост}} = \frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}$, де k – кількість інтервалів після об'єднання малонасичених інтервалів;

6) порівняти $\chi^2_{\text{спост}}$ із $\chi^2_{\text{табл}}$ при заданому рівні значущості α і зробити висновок про прийняття чи відхилення нульової гіпотези H_0 про нормальний закон розподілу генеральної сукупності.

Для зручності обчислення $\chi^2_{\text{спост}}$ рекомендується результати заносити до таблиці (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Номер інтерва лу	Межі інтер- валів		Часто- ти m_i	t_{i-1}	t_i	$\Phi(t_{i-1})$	$\Phi(t_i)$	p_i	$\tilde{m}_i$	$\frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}$
	x_{i-1}	x_i								
			$\sum m_i$						$\sum \tilde{m}_i$	χ^2

*Перевірка гіпотези про нормальний розподіл
генеральної сукупності для дискретного статистичного ряду*

Від інтервального ряду можна перейти до дискретного, замінюючи інтервал його серединою (x_i – середини інтервалів) (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

x_i	x_1	x_2	...	x_k
m_i	m_1	m_2	...	m_k

$$\sum_{i=1}^n m_i = n$$

Для перевірки гіпотези про нормальний розподіл генеральної сукупності необхідно:

1) обчислити $\bar{x}_e$ і S_x ;

2) для середин інтервалів x_i визначити $t = \frac{x_i - \bar{x}_e}{S_x}$ і диференціальну

функцію нормального розподілу $\varphi(t_i)$;

3) розрахувати теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ за формулою

$$\tilde{m}_i = \frac{nh}{S} \varphi(t_i), \quad (2.21)$$

де h – крок між двома сусідніми варіантами.

Для зручності результати обчислень рекомендується заносити до таблиці (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

x_i	m_i	$t_i = \frac{x_i - \bar{x}_e}{S}$	$\varphi(t_i)$	$\tilde{m}_i = \frac{nh}{S_x} \varphi(t_i)$	$\frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}$
x_1					
x_2					
$\vdots$					
x_k					
	$\sum m_i$			$\sum \tilde{m}_i$	χ^2

Далі порівняти $\chi^2_{спост}$ із $\chi^2_{табл}$ на заданому рівні значущості й зробити висновок щодо прийняття чи відхилення нульової гіпотези H_0 про нормальний розподіл генеральної сукупності.

Приклад 2.16. У деякій місцевості проведено аналіз 100 проб повітря на вміст у ньому забруднювальної речовини — оксиду вуглецю, мг/м³.

Результати аналізу подано у вигляді таблиці:

Інтервали	1...3	3...5	5...7	7...9	9...11	11...13	13...15	15...17	17...19	19...21	21...23
m_i	2	4	6	10	18	20	16	11	7	5	1

Перевірити гіпотезу про нормальний розподіл досліджуваної випадкової величини X , якщо відомі значення $\bar{X}_e = 12,04$ і $S = 4,26_e$.

Розв'язання. Обчислимо критерій χ^2 за формулою $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}$. Результати розрахунків подано в табл. 2.4.

Після об'єднання малонасичених інтервалів їх кількість $k = 8$, тоді кількість ступенів свободи $r = k - 3 = 5$ (для нормального розподілу).

Далі одержуємо $\chi^2_{\text{табл}}(5; 0,5) = 15,1$.

Оскільки $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{табл}}$, немає підстав для відхилення нульової гіпотези про нормальний розподіл досліджуваної ознаки X оксиду вуглецю в повітрі.

Перейдемо в цьому прикладі до дискретного статистичного ряду. Позначимо через x_i середини інтервалів. Обчислимо χ^2 , де $\tilde{m}_i = \frac{nh}{S_x} \varphi(t_i) = \frac{200}{S_x} \varphi(t_i) \approx 4,95 \varphi(t_i)$. Результати обчислень занесено до табл. 2.5.

Отриманий результат $\chi^2 = 1,12$ збігається з попереднім.

Перевірка гіпотези про показниковий розподіл генеральної сукупності за критерієм узгодженості Пірсона

Нехай маємо інтервальний статистичний розподіл, який можна перетворити на дискретний (табл. 2.6).

За критерієм Пірсона необхідно перевірити гіпотезу про показниковий розподіл випадкової величини X . Застосуємо таку схему:

1) знайти вибіркове середнє $\bar{X}_e$ і параметр $\lambda = \frac{1}{\bar{X}_e}$;

2) визначити ймовірності p_i для інтервального ряду за формулою

$$p_i = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}};$$

Таблица 2.4

x_{i-1}	x_i	m_i	$t_{i-1} = \frac{x_{i-1} - \bar{x}_e}{S}$	$t_i = \frac{x_i - \bar{x}_e}{S}$	$\Phi(t_{i-1})$	$\Phi(t_i)$	$p_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1})$	$\tilde{m}_i = np_i$	$\frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}$
1	3	2 4 5 } 12	-2,59	-2,12			0,0122	1 3 7 } 11	0,09
3	5		-2,12	-1,65	-0,4830	-0,4505	0,0325		
5	7		-1,65	-1,18	-0,4505	-0,3810	0,0695		
7	9	10	-1,18	-0,70	-0,3810	-0,2580	0,1230	17	0,33
9	11	18	-0,70	-0,24	-0,2580	-0,0948	0,1632	19	0,06
11	13	20	-0,24	0,23	-0,0948	0,0909	0,1857	17	0,05
13	15	16	0,23	0,69	0,0909	0,2549	0,1640	12	0,06
15	17	11	0,69	1,16	0,2549	0,3770	0,1221	7	0,33
17	19	7	1,16	1,63	0,3770	0,4484	0,0714		0
19	21	5 1 } 6	1,63	2,10	0,4484	0,4821	0,0337	4 1 } 5	0,20
21	23		2,10	2,57	0,4821	0,4949	0,0128		
		$n = 100$						100	$\chi^2 = 1,12$

Таблица 2.5

x_i	m_i	$t_i = \frac{x_i - \bar{X}_e}{S}$	$\varphi(t_i)$	$\tilde{m}_i = \frac{nh}{S} \varphi(t_i)$	$\frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}$
2	$\left. \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} \right\} 12$	-2,37	0,0241	$\left. \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{matrix} \right\} 11$	0,09
4		-1,89	0,0669		
6		-1,42	0,1456		
8	10	-0,95	0,2541	12	0,33
10	18	-0,48	0,3555	17	0,06
12	20	-0,01	0,3989	19	0,05
14	16	0,46	0,3589	17	0,06
16	11	0,93	0,2589	12	0,33
18	7	1,40	0,1497	7	0
20	$\left. \begin{matrix} 5 \\ 1 \end{matrix} \right\} 6$	1,87	0,0694	$\left. \begin{matrix} 4 \\ 1 \end{matrix} \right\} 5$	0,20
22		2,34	0,0252		
				100	$\chi^2 = 1,12$

3) обчислити теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ за формулами:

$$\tilde{m}_i = np_i = n(e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}}) \text{ – для інтервального ряду;}$$

$$\tilde{m}_i = nh\lambda e^{-\lambda x_i}, \text{ де } n = \sum m_i \text{ – для дискретного ряду;}$$

4) знайти $\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}$ і порівняти його з $\chi^2_{табл}$ на заданому

рівні значущості, прийнявши кількість ступенів свободи $r = k - 2$, де k – кількість інтервалів, що залишилися після об'єднання малочисельних інтервалів.

Таблиця 2.6

Інтервали	$x_1 - x_2$	$x_2 - x_3$	...	$x_k - x_{k+1}$
m_i	m_1	m_2	...	m_k

Приклад 2.17. Для перевірки на нестандартність 200 ящиків консервів маємо такий інтервальний розподіл частот:

Кількість нестандартних коробок	0–2	2–4	4–6	6–8	8–10
Кількість ящиків, що містять нестандартні коробки	132	43	20	3	2

Перевірити на рівні значущості $\alpha = 0,05$ гіпотезу про розподіл кількості нестандартних коробок за показниковим розподілом генеральної сукупності.

Розв'язання. Позначимо через x_i значення ознаки X – кількості нестандартних коробок у ящиках, а через m_i – кількість ящиків з нестандартними коробками. Знайдемо спочатку $\bar{x}_e$ і $\lambda = \frac{1}{\bar{x}_e}$. Для цього перейдемо до дискретного ряду:

$$\bar{x}_e = \frac{400}{200} = 2, \lambda = \frac{1}{2} = 0,5.$$

Отже, диференціальна функція показникового розподілу має вигляд

$$f(x) = 0,5e^{-0,5x}.$$

Результати обчислень запишемо в таблицю:

Інтервали	m_i	Середини інтервалів x_i	$x_i m_i$
0–2	132	1	132
2–4	43	3	129
4–6	20	5	100
6–8	3	7	21
8–10	2	9	18
	$n = 200$		$\Sigma = 400$

Імовірності p_i потрапляння досліджуваної ознаки X в i -й інтервал визначаємо за формулою

$$p_i = e^{-\lambda x_i} - e^{-\lambda x_{i+1}} = e^{-0,5 x_i} - e^{-0,5 x_{i+1}},$$

де x_i і x_{i+1} – кінці i -го інтервалу.

Теоретичні частоти $\tilde{m}_i$ знаходимо за відомою формулою

$$\tilde{m}_i = n p_i.$$

Подальші обчислення проведемо за допомогою табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Кінці інтервалів		m_i	$e^{-0,5 x_i}$	$e^{-0,5 x_{i+1}}$	p_i	$\tilde{m}_i = n p_i$	$\frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i}$
x_i	x_{i+1}						
0	2	132	1	0,3679	0,6321	127	0,197
2	4	43	0,3679	0,1353	0,2326	47	0,340
4	6	20	0,1353	0,0498	0,0855	17	0,529
6	8	3 } 5 2 }	0,0498	0,0183	0,315	6 } 8 2 }	1,125
8	10		0,0183	0,0067	0,0116		
Σ		100					$\chi^2 = 2,191$

Для рівня значущості $\alpha = 0,05$ і кількості ступенів свободи $k = 4 - 2 = 2$ знаходимо з таблиці значень χ^2 : $\chi^2_{\text{табл}}(0,05; 2) = 6,0$.

Отже, $\chi^2_{\text{спост}} < \chi^2_{\text{табл}}$, а тому з надійністю 0,95 стверджуємо, що в генеральній сукупності випадкова величина X – кількість нестандартних коробок консервів у ящику – має показниковий розподіл.

Критерій узгодженості Колмогорова. Критерієм Колмогорова λ

визначається міра узгодження теоретичного й емпіричного розподілів на основі ймовірності $P(\lambda)$, причому

$$\lambda = \frac{D_{\max}}{\sqrt{n}}, \quad (2.22)$$

де $D_{\max}$ – це максимальна різниця між накопиченими частотами m_i^* і $\tilde{m}_i^*$ емпіричного й теоретичного розподілів:

$$D_{\max} = \max |m_i^* - \tilde{m}_i^*|. \quad (2.23)$$

Значення $P(\lambda)$ зведено в табл. 2.8.

Таблиця 2.8

D	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$	λ	$P(\lambda)$
0,0	1,0	0,7	0,711	1,4	0,040
0,1	1,0	0,8	0,544	1,5	0,022
0,2	1,0	0,9	0,393	1,6	0,012
0,3	1,0	1,0	0,270	1,7	0,006
0,4	0,997	1,1	0,178	1,8	0,003
0,5	0,964	1,2	0,112	1,9	0,002
0,6	0,864	1,3	0,068	2,0	0,001

Чим ближче $P(\lambda)$ наближається до 1, тим краще теоретичний розподіл буде узгоджений з емпіричним.

Якщо $P(\lambda) < 0,05$, то гіпотеза H_0 про те, що випадкова величина X має заданий закон розподілу, відхиляється.

Приклад 2.18. Використовуючи дані, наведені в таблиці:

m_i	1	1	19	53	113	134	101	48	19	7	4
$\tilde{m}_i$	1	5	19	55	103	128	106	56	21	5	1

перевірити за критерієм Колмогорова гіпотезу H_0 про те, що випадкова ознака X , для якої обчислено емпіричні m_i і теоретичні $\tilde{m}_i$ частоти, має нормальний закон розподілу.

Розв'язання. Накопичені емпіричні частоти позначимо через m_i^* , а накопичені теоретичні – через $\tilde{m}_i^*$.

Результати розрахунку запишемо в таблицю:

m_i	1	1	19	53	113	134	101	48	19	7	4	$\Sigma = 500$
$\tilde{m}_i$	1	5	19	55	103	128	106	56	21	5	1	$\Sigma = 500$
m_i^*	1	2	21	74	187	321	422	470	489	496	500	
$\tilde{m}_i^*$	1	6	25	80	183	311	417	473	494	499	500	
$ m_i^* - \tilde{m}_i^* $	0	4	4	6	4	10	5	3	5	3	0	

Виконаємо обчислення:

$$D_{\max} = \max |m_i^* - \tilde{m}_i^*| = 10, \lambda = \frac{10}{\sqrt{500}} = 0,45.$$

За таблицею значень $P(\lambda)$ знаходимо $P(\lambda) = P(0,45) \cong 0,98$. Значення $P(\lambda)$ – досить велике, тому різниця між теоретичним і емпіричним розподілами є несуттєвою. Гіпотеза H_0 про нормальний розподіл підтверджується.

Малі вибірки. Критерій Стюдента. Вибірki, розглянуті раніше, уважалися великими. Якщо треба оцінити генеральну сукупність за результатами малої кількості спостережень (при $n < 20$), то формули для великих вибірок, що ґрунтуються на нормальному законі розподілу ймовірностей, дають значні неточності.

Результати малої вибірки оцінюються виправленою вибірковою дисперсією

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1} D(X) = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2 m_i}{n-1}. \quad (2.24)$$

Тоді надійний інтервал для математичного сподівання визначається формулою

$$\bar{x} - \frac{S_x t_\gamma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x} + \frac{S_x t_\gamma}{\sqrt{n}}, \quad P\left(\left|\frac{\bar{x} - a}{S_x / \sqrt{n}}\right| < t_\gamma\right) = \gamma, \quad (2.25)$$

де γ – надійність, t_γ – t -критерій Стюдента, який залежить від рівня значущості та кількості ступенів свободи $k = n - 1$. Значення t_γ наведено в спеціальній таблиці.

Якщо $t_\gamma < t_{\text{крит}}(\alpha, k)$, то з надійністю γ гіпотеза H_0 приймається, тобто вибіркoве середнє незначно відрізняється від генерального

середнього; якщо $t_\gamma > t_{\text{крит}}(\alpha, k)$, то з рівнем значущості $1 - \gamma$ гіпотеза H_0 відхиляється.

Приклад 2.19. Проведено 16 дослідів, при цьому $\bar{x} = 20,2$; $S_x = 0,8$; $\gamma = 0,95$. Побудувати надійний інтервал.

Розв'язання. Маємо $k = 16 - 1$, $\alpha = 1 - \gamma = 0,05$. За таблицею критерію Стюдента $t_{\text{крит}}(15; 0,05) = 2,13$. Тоді

$$20,2 - \frac{2,13 \cdot 0,8}{\sqrt{16}} < a < 20,2 + \frac{2,13 \cdot 0,8}{\sqrt{16}},$$

$$19,774 < a < 20,626.$$

При $n \rightarrow \infty$ розподіл Стюдента збігається з нормальним.

Порівняння дисперсій. Критерій згоди Фішера – Снедекора.

Нехай маємо дві вибірки з генеральної сукупності, дисперсії яких S_1^2 , S_2^2 . Обчислимо критерій Фішера – Снедекора за формулою

$$F = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2}. \quad (2.26)$$

Гіпотеза H_0 полягає в тому, що різниця дисперсій вважається незначущою.

З таблиці значень критерію F знайдемо $F_{\text{крит}}(\alpha, k_1, k_2)$, де k_1 , k_2 – кількість ступенів свободи більшої та меншої дисперсій, α – рівень значущості.

Якщо $F > F_{\text{крит}}(\alpha, k_1, k_2)$, то з рівнем значущості α гіпотеза H_0 відхиляється; якщо $F < F_{\text{крит}}(\alpha, k_1, k_2)$, то з надійністю $1 - \alpha$ гіпотеза H_0 приймається.

2.5. Елементи теорії кореляції

Вивчення залежностей між змінними почнемо з двох змінних, які позначимо x і y . Розрізнятимемо два основних види зв'язків: функціональні та стохастичні (статистичні). **Залежність** між двома змінними x і y буде **функціональною** в тому разі, коли кожному значенню однієї змінної x відповідає певне значення іншої змінної y і має місце рівняння $y = f(x)$, або навпаки. При функціональній залежності

графіки рівнянь $y = f(x)$ і $x = \varphi(y)$ є однаковими, тобто не має значення, яку змінну вважати незалежною змінною, а яку — функцією. Таким чином, функціональна залежність не реагує на спрямованість причиново-наслідкових зв'язків.

Для випадкових величин X і Y не завжди можна визначити функціональну залежність. Між такими величинами існує зв'язок, при якому зі змінням однієї величини змінюється розподіл іншої величини. Такий зв'язок називається **стохастичним** (статистичним). При статистичних зв'язках розрізняють дві компоненти: стохастична — пов'язана з безпосередньою залежністю між функціональною ознакою і фактором; випадкова — пов'язана з впливом випадкових факторів на залежність між функціональною ознакою і фактором. Відсутність другої компоненти приводить до функціональної залежності. При статистичних зв'язках важливими є причиново-наслідкові зв'язки, тобто яку зі змінних вважати функціональною ознакою, а яку — незалежним фактором.

При реальних статистичних даних неможливо отримати просту геометричну лінію. Завжди будуть відхилення залежної змінної, обумовлені помилками вимірювань, впливом неврахованих факторів. Кореляційні зв'язки є окремим випадком статистичних зв'язків. Залежно від причиново-наслідкових зв'язків лінії, що зв'язують змінні x і y , будуть різними.

Кореляційною залежністю називають таку залежність між двома випадковими величинами, при якій зі змінням однієї з них змінюється середнє значення іншої.

Нехай маємо випадкову величину Y , зв'язану з величиною X , і кожному значенню X відповідає декілька значень Y . Наприклад, при $x = 2$ величина Y набуває значень $y_1 = 2$, $y_2 = 8$, $y_3 = 10$. Знайдемо середнє арифметичне значення Y , яке відповідає $x = 2$:

$$\bar{y}_{x=2} = \frac{6 + 8 + 10}{3} = 8.$$

Умовним середнім $\bar{y}_{x_i}$ називають середнє арифметичне значень Y , які відповідають $x = x_i$.

Кореляційною залежністю Y від X називають функціональну залежність умовного середнього $\bar{y}_x$ від x . При кореляційній залежності Y від X будують рівняння умовного середнього $\bar{y}_x$ залежно від x :

$$\bar{y}_x = f(x).$$

За результатами одного й того ж випробування можна отримати дві залежності: $\bar{y}_x$ і $\bar{x}_y$, тобто треба вказати, яку зі змінних уважати фактором, а яку — функціональною ознакою (де причина, а де наслідок). Рівняння $\bar{y}_x = f(x)$ називають **рівнянням регресії Y на X** , функцію $f(x)$ — **регресією Y на X** , а графік — **лінією регресії Y на X** . Можна ввести й іншу залежність: $\bar{x}_y = \phi(y)$ — рівняння регресії X на Y .

Поняття регресії і кореляції безпосередньо пов'язані між собою. У той час як у кореляційному аналізі оцінюється сила стохастичного зв'язку, у регресійному аналізі досліджується його форма. Обидва види аналізу призначені для встановлення причинових співвідношень між явищами й визначення наявності або відсутності зв'язку.

Розрізняють такі **види кореляції та регресії**:

1. **Залежно від характеру кореляції та регресії** — додатна й від'ємна кореляція та регресія. **Додатна** — коли зі збільшенням (зменшенням) аргументу x збільшується (зменшується) функція y , наприклад: зв'язок між продуктивністю праці й заробітною платою; між виконанням виробничого плану й витратами робочого часу; між технічним рівнем виробництва й продуктивністю праці. **Від'ємна** — коли зі збільшенням (зменшенням) однієї змінної значення іншої зменшуються (збільшуються), наприклад: зв'язок між продуктивністю праці й вартістю виробу, між обсягом продукції й витратами на одиницю виробу.

2. **Залежно від кількості змінних** — **парна й множинна** кореляція та регресія, наприклад: залежність прибутку підприємства (y) від продуктивності праці (x) $\bar{y} = f(x)$ — парна регресія; залежність продуктивності праці (y) від рівня механізації виробництва (x_1), фонду робочого часу (x_2), матеріаломісткості (x_3), кваліфікації робітників (x_4) $\bar{y} = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ — множинна регресія.

3. **Залежно від форми зв'язку** — **лінійна й нелінійна** кореляція та регресія, наприклад: залежність суми витрат виробництва (y) від обсягу продукції (x) $y = ax + b$ — лінійна залежність; залежність собівартості одиниці продукції (y) від обсягу продукції (x) за якийсь період часу $y = \frac{a}{x} + b$ — нелінійна залежність (a — сума витрат на прямі виробничі потреби, b — постійні витрати на одиницю продукції).

Кореляційний і регресійний аналіз — це суміжні розділи математичної статистики, призначені для вивчення статистичної залежності між випадковими величинами.

2.6. Дві основні задачі теорії кореляції.

Кореляційна таблиця, кореляційне поле, емпіричні лінії регресії

У теорії кореляції розв'язують **дві основні задачі**:

1. Визначення наявності кореляційного зв'язку (якщо значення $\bar{y}_x$ є однаковими для всіх значень X , то кореляційної залежності немає), форми залежності (виду функції регресії) і параметрів рівняння регресії.

2. Визначення наявності або відсутності кореляційного зв'язку. Наявність або відсутність зв'язку оцінюється за величиною розсіювання значень величини Y навколо умовного середнього $\bar{y}_x$ і характеризує ступінь впливу змінності величини X на змінність величини Y .

Для визначення наявності кореляційного зв'язку емпіричні дані заносять до кореляційної таблиці.

Кореляційна таблиця (табл. 2.9) створюється для згрупованих спостережень і являє собою інтервали змінення величин X і Y та частоти сумісної появи пари значень x і y .

Позначимо: n – загальна кількість спостережень; m_{ki} – частота сумісної появи двох випадкових величин x_i і y_k , причому $\sum_k \sum_i m_{ki} = n$.

По горизонталі кореляційної таблиці розмістимо інтервали фактора X , по вертикалі – інтервали функціональної ознаки Y . На перетині стовпця x_i і рядка y_k занесемо частоту m_{ki} .

Таблиця 2.9

Інтервали Y	Інтервали X							m_{y_k}
	x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_l	
$y_0^* - y_1^*$	y_1	m_{11}	m_{12}	...	m_{1i}	...	m_{1l}	m_{y_1}
$y_1^* - y_2^*$	y_2	m_{21}	m_{22}	...	m_{2i}	...	m_{2l}	m_{y_2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$y_{k-1}^* - y_k^*$	y_k	m_{k1}	m_{k2}	...	m_{ki}	...	m_{kl}	m_{y_k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$y_{s-1}^* - y_s^*$	y_s	m_{s1}					m_{sl}	m_{y_s}
m_{x_i}		m_{x_1}	m_{x_2}	...	m_{x_i}	...	m_{x_l}	n

Знайдемо суми по рядках і стовпцях $m_{x_i} = \sum_{k=1}^s m_{ki}$ і $m_{y_k} = \sum_{i=1}^l m_{ki}$,

причому $\sum_{i=1}^l m_{x_i} = \sum_{k=1}^s m_{y_k} = n$, через x_i і y_k позначимо середини інтервалів.

З таблиці бачимо, що кожному значенню однієї з величин X , Y відповідає ряд розподілу іншої величини.

Наприклад, для $X = x_1$ маємо такий ряд:

y	y_1	y_2	...	y_k	...	y_s
m	m_{11}	m_{21}	...	m_{k1}	...	m_{s1}

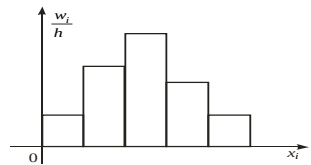
для $X = x_2$ — такий:

y	y_1	y_2	...	y_k	...	y_s
m	m_{12}	m_{22}	...	m_{k2}	...	m_{s2}

Обчислимо умовне середнє:

$$\bar{y}_{x=x_1} = \frac{y_1 m_{11} + y_2 m_{21} + \dots + y_k m_{k1} + \dots + y_s m_{s1}}{m_{11} + m_{21} + \dots + m_{k1} + \dots + m_{s1}} = \frac{\sum_{k=1}^s y_k m_{k1}}{m_{x_1}},$$

$$\bar{y}_{x=x_2} = \frac{y_1 m_{12} + y_2 m_{22} + \dots + y_k m_{k2} + \dots + y_s m_{s2}}{m_{12} + m_{22} + \dots + m_{k2} + \dots + m_{s2}} = \frac{\sum_{k=1}^s y_k m_{k2}}{m_{x_2}}.$$



Узагальнимо:

(2.27)

Отже, маємо ряд розподілу:

x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_l
$\bar{y}_{x_i}$	$\bar{y}_{x_1}$	$\bar{y}_{x_2}$	...	$\bar{y}_{x_i}$	...	$\bar{y}_{x_l}$

Аналогічно для $Y = y_k$ умовне середнє $\bar{x}_{y=y_k}$ визначається формулою

$$\bar{x}_{y=y_k} = \frac{\sum_{i=1}^l x_i m_{ki}}{m_{y_k}}. \quad (2.28)$$

Ряд розподілу має такий вигляд:

y_k	y_1	y_2	...	y_k	...	y_s
$\bar{x}_{y_k}$	$\bar{x}_{y_1}$	$\bar{x}_{y_2}$	...	$\bar{x}_{y_k}$	...	$\bar{x}_{y_s}$

Кореляційні таблиці дають можливість судити про наявність кореляційної залежності: якщо $\bar{y}_x$ ($\bar{x}_y$) змінюються від стовпця до стовпця (від рядка до рядка), то між величинами X і Y є кореляційний зв'язок.

Кореляційне поле – це графічне зображення кореляційної таблиці. Кореляційним полем називають точкову діаграму, у якій кожна точка є результатом окремого спостереження над двома змінними величинами. Кореляційне поле можна побудувати за кореляційною таблицею. Якщо ж маємо лише спостереження, то кореляційне поле створюється разом зі складанням кореляційної таблиці. Записуємо інтервали величин X , Y і в кожному клітині на перетині стовпця й рядка заносимо точки, кількість яких відповідає величинам m_{ki} (рис. 2.3).

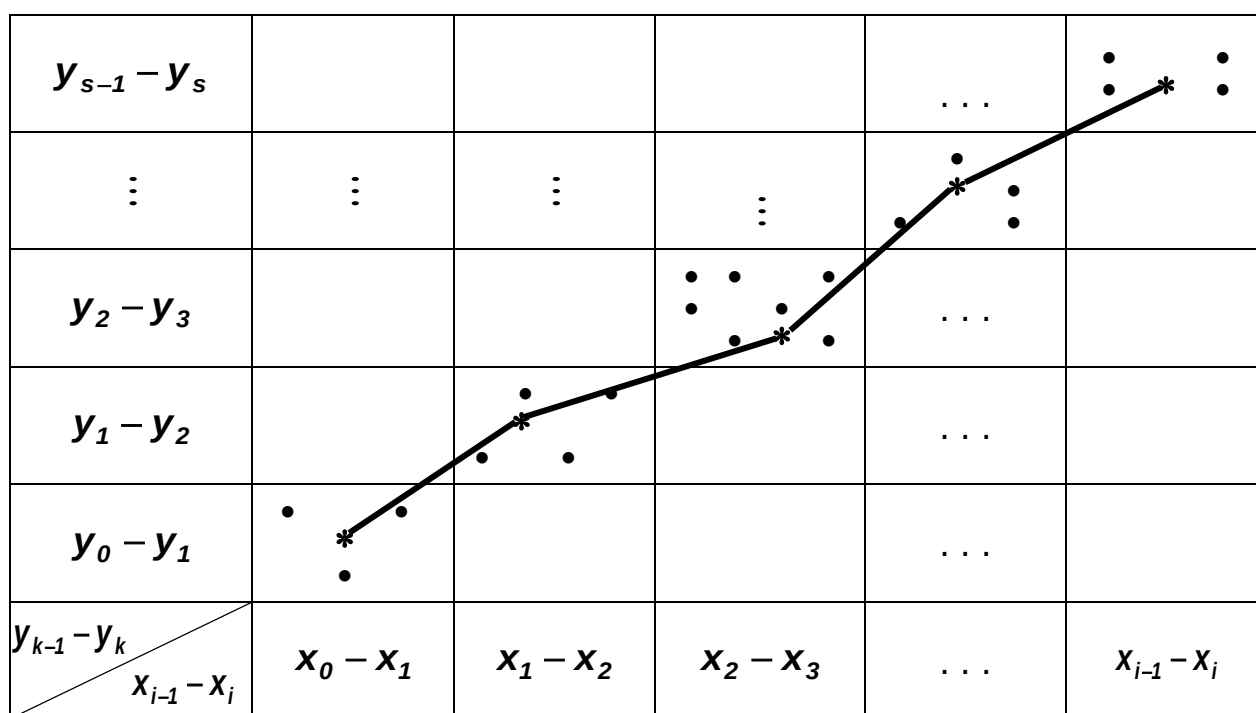


Рис. 2.3. Кореляційне поле й емпірична лінія регресії

Якщо на кореляційному полі згустки (центри групування) зміщуються, то можна казати про наявність кореляційного зв'язку між величинами X і Y .

На кожному інтервалі знайдемо $\bar{x}_{y_k}$ і $\bar{y}_{x_i}$ за формулами (2.27), (2.28). Нанесемо точки $(x_i, \bar{y}_{x_i})$ або $(\bar{x}_{y_k}, y_k)$ і з'єднаємо їх ламаними лініями. Ламану лінію $(\bar{y}_x)$, що з'єднує точки з координатами $(x_i, \bar{y}_{x_i})$, називають **емпіричною лінією регресії Y на X** . Ламану лінію $(\bar{x}_y)$, що з'єднує точки з координатами $(\bar{x}_{y_k}, y_k)$, називають **емпіричною лінією регресії X на Y** . Для незгрупованих спостережень створюють лише кореляційне поле.

2.7. Лінійна регресія. Визначення параметрів лінійного парного регресійного рівняння

2.7.1. Вибіркове рівняння прямої лінії регресії

Розглянемо першу основну задачу теорії кореляції. Емпірична лінія регресії, що будується на фоні кореляційного поля, показує, як у середньому змінюється величина Y зі збільшенням величини X . Якщо кількість спостережень збільшувати, то окремі точки будуть наближатися до лінії регресії.

Граничне положення емпіричної лінії регресії, до якого вона наближається при необмеженій кількості спостережень, називають граничною **теоретичною лінією регресії**. Вид рівняння теоретичної лінії $\bar{y}_x = f(x)$ або $\bar{x}_y = \varphi(y)$ можна виявити за зовнішнім виглядом емпіричної лінії регресії: якщо лінію можна згладжувати прямою, то – лінійна залежність, якщо параболою, то – квадратична залежність і т. ін.

Під час визначення кореляційного зв'язку між двома змінними перевага надається лінійній залежності $\hat{y}_x = ax + b$ або $\hat{x}_y = a_1y + b_1$ через декілька причин: по-перше, простота, а внаслідок цього найменш складні розрахунки; по-друге, для малих проміжків змінення аргументу криволінійні залежності можна з достатньою точністю наблизити прямолінійними, тобто одну параболу можна розглядати як дві прямі; по-третє, якщо величини X і Y — нормально розподілені, то форма кореляційної залежності є лінійною.

2.7.2. Визначення параметрів лінійного парного рівняння регресії

Нехай маємо емпіричні дані

x	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_i	$\dots$	y_n

Виберемо теоретичне рівняння регресії у вигляді

$$\hat{y} = ax + b. \quad (2.29)$$

Параметри a і b визначимо за методом найменших квадратів так, щоб сума квадратів відхилень $\hat{y}_{i\text{теор}}$ від $y_{i\text{емп}}$ була найменшою:

$$\sum_{i=1}^n (\hat{y}_{i\text{теор}} - y_{i\text{емп}})^2 = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 \quad (\min).$$

Позначимо

$$\sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = F(a, b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \rightarrow \min.$$

Згідно з необхідною умовою екстремуму функції двох змінних маємо:

$$\frac{\partial F(a, b)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F(a, b)}{\partial b} = 0;$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) x_i = 0; \\ \frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) \cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Запишемо цю систему у вигляді

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i; \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b \sum_{i=1}^n 1 &= \sum_{i=1}^n y_i, \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i; \\ a \sum_{i=1}^n x_i + b n &= \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned}$$

Поділимо на n обидва рівняння:

$$\begin{aligned} a \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} + b \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n}; \\ a \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} + b &= \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}. \end{aligned}$$

Оскільки

$$\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \bar{x}; \quad \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n} = \overline{x^2}; \quad \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n} = \bar{y}; \quad \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{n} = \overline{xy}, \quad (2.30)$$

маємо

$$\begin{cases} a \overline{x^2} + b \bar{x} = \overline{xy}; \\ a \bar{x} + b = \bar{y}. \end{cases}$$

Помножимо друге рівняння на $\bar{x}$ і віднімемо його від першого:

$$\begin{array}{r} \overline{ax^2} + b\bar{x} = \overline{xy} \\ - \quad \overline{a(\bar{x})^2} + b\bar{x} = \bar{y} \cdot \bar{x} \\ \hline a(\overline{x^2} - (\bar{x})^2) = \overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}. \end{array}$$

Тобто

$$a = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - (\bar{x})^2}. \quad (2.31)$$

З другого рівняння системи одержуємо $b = \bar{y} - a\bar{x}$.

Параметр a називають **коефіцієнтом регресії Y на X** і позначають $\rho_{y/x}$. Величину $(\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y})$ називають **коефіцієнтом коваріації** або кореляційним моментом і позначають μ_{xy} ; $\overline{x^2} - (\bar{x})^2 = \sigma_x^2$ – дисперсія випадкової величини X .

Таким чином,

$$\rho_{y/x} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2}, \quad b = \bar{y} - \rho_{y/x} \bar{x}. \quad (2.32)$$

Теоретичне рівняння регресії Y на X має вигляд

$$\hat{y} = \rho_{y/x} x + b. \quad (2.33)$$

Аналогічно можна отримати теоретичне рівняння регресії X на Y :

$$\hat{x} = \rho_{x/y} y + b_1, \quad (2.34)$$

$$\text{де } \rho_{x/y} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_y^2}, \quad \sigma_y^2 = \overline{y^2} - (\bar{y})^2, \quad b_1 = \bar{x} - \rho_{x/y} \bar{y}.$$

Емпіричну й теоретичну лінії регресії зображують на кореляційному полі. Якщо теоретичне рівняння регресії обчислено правильно, то помилки ε_i є незначними. Точка $M(\bar{x}, \bar{y})$ – центр регресії, через який проходять обидві теоретичні лінії регресії.

Якщо дані згруповані, за кореляційною таблицею обчислимо

$$\bar{x} = \frac{\sum_i x_i m_{x_i}}{n}; \quad \bar{y} = \frac{\sum_k y_k m_{y_k}}{n}; \quad \overline{x^2} = \frac{\sum_i x_i^2 m_{x_i}}{n}; \quad \overline{xy} = \frac{\sum_i \sum_k x_i y_k m_{ik}}{n}.$$

Приклад 2.20. Задано кореляційну таблицю, де наведено результати іспитів з фізики (y) і математики (x) в одній з академічних груп 1-го курсу:

$y \backslash x$	2	3	4	5	I_k
2	1	2			3
3	1	6	3		10
4		5	5		10
5			1	1	2
h_i	2	13	9	1	25

Скласти лінійне парне рівняння регресії $\hat{y}_x = \rho_{y/x}x + b$.

Розв'язання. Обчислимо:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 13 + 4 \cdot 9 + 5 \cdot 1}{25} = \frac{84}{25} = 3,36;$$

$$\bar{y} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 10 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 2}{25} = \frac{86}{25} = 3,44;$$

$$\overline{x^2} = \frac{4 \cdot 2 + 9 \cdot 13 + 16 \cdot 9 + 25 \cdot 1}{25} = \frac{294}{25} = 11,76;$$

$$\overline{y^2} = \frac{4 \cdot 3 + 9 \cdot 10 + 16 \cdot 10 + 25 \cdot 2}{25} = \frac{312}{25} = 12,48;$$

$$\begin{aligned} \overline{xy} &= \frac{\sum_i \sum_k m_{ki} x_i y_k}{n} = \frac{1}{25} ((1 \cdot (2 \cdot 2) + 2 \cdot (3 \cdot 2)) + (1 \cdot (2 \cdot 3) + 6 \cdot (3 \cdot 3) + 3 \cdot (4 \cdot 3)) + \\ &+ (5 \cdot (3 \cdot 4) + 5 \cdot (4 \cdot 4)) + (1 \cdot (4 \cdot 5) + 1 \cdot (5 \cdot 5))) = \frac{1}{25} (16 + 96 + 140 + 45) = \frac{297}{25} = 11,88; \end{aligned}$$

$$\rho_{y/x} = \frac{11,88 - 3,36 \cdot 3,44}{11,76 - 3,36^2} = \frac{11,88 - 11,56}{11,76 - 11,29} = \frac{0,32}{0,47} \approx 0,68;$$

$$\bar{b} = 3,44 - 0,68 \cdot 3,36 = 3,44 - 2,28 = 1,16;$$

$$\bar{y}_x = 0,68x + 1,16.$$

Перевірка:

$$x = 3; \bar{y}_x = 0,68 \cdot 3 + 1,16 = 3,2; \bar{y}_{\text{емп}} = \frac{2 \cdot 2 + 3 \cdot 6 + 4 \cdot 5}{13} = 3,23; \varepsilon_1 = 0,03;$$

$$x = 4; \bar{y}_x = 0,68 \cdot 4 + 1,16 = 3,88; \bar{y}_{\text{емп}} = \frac{3 \cdot 3 + 4 \cdot 5 + 5 \cdot 1}{13} = 3,78; \varepsilon_1 = 0,1.$$

Приклад 2.21. Залежність між змінними величинами X і Y отримано на основі експерименту й подано у вигляді такої таблиці:

x_i	1	1,5	2	2,5	3
y_i	2,15	2,3	2,6	2,8	2,5

У припущенні лінійної залежності $\bar{y}_x = \rho_{y/x}x + b$ між X і Y знайти коефіцієнти $\rho_{y/x}$ і b .

Розв'язання. Вихідні дані й результати обчислень помістимо в таблицю:

n	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	2,15	1	2,15
2	1,5	2,3	2,25	3,45
3	2	2,6	4	5,2
4	2,5	2,8	6,25	7
5	3	2,5	9	7,5
Σ	10	12,35	22,5	25,3

Виконуємо обчислення:

$$\bar{x} = \frac{10}{5} = 2; \bar{y} = \frac{12,35}{5} = 2,47; \overline{x^2} = \frac{22,5}{5} = 4,5; \overline{xy} = \frac{25,3}{5} = 5,06;$$

$$\rho_{y/x} = 0,24, b = 1,99.$$

Шукане рівняння має вигляд $\bar{y}_x = 0,24x + 1,99$.

Перевіримо рівняння:

$$\bar{y}_{x=1,5} = 0,24 \cdot 1,5 + 1,99 = 2,35; \quad \bar{y}_{x=2,5} = 0,24 \cdot 2,5 + 1,99 = 2,6.$$

$$\text{Відхилення: } \varepsilon_1 = |2,35 - 2,3| = 0,05; \quad \varepsilon_2 = |2,8 - 2,6| = 0,2.$$

На рис. 2.4 зображено емпіричні точки і знайдену теоретичну лінію регресії $\hat{y}_x$.

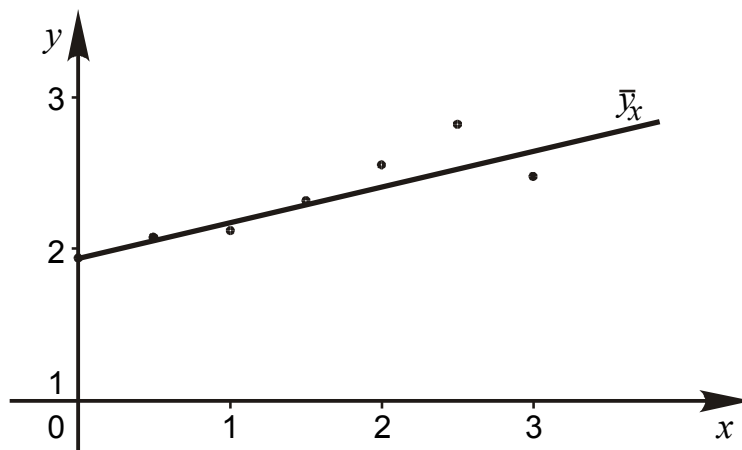


Рис. 2.4. Теоретична лінія регресії $\hat{y}_x$ та емпіричні точки

2.7.3. Коефіцієнт регресії

Знак коефіцієнта регресії збігається зі знаком коваріації: якщо знак $\rho_{y/x}$ “+”, то регресія є додатною, якщо знак “-”, то регресія є від’ємною. Коефіцієнт регресії $\rho_{y/x}$ – величина розмірна. Він показує, на скільки одиниць свого вимірювання зменшиться середнє значення функціональної ознаки $\hat{y}_x$, якщо фактор X збільшиться на одиницю свого вимірювання. Дійсно, нехай x набув приросту Δx , тоді $\hat{y}_x$ – приріст $\Delta \hat{y}_x$. Нові дані x і $\hat{y}_x$ підставимо в рівняння регресії $\hat{y} = \rho_{y/x}x + b$:

$$\hat{y} + \Delta \hat{y} = \rho_{y/x}(x + \Delta x) + b.$$

Віднімемо від цього рівняння попереднє й отримаємо

$$\Delta \hat{y} = \rho_{y/x} \Delta x \quad \text{або} \quad \Delta \hat{y}_x = \rho_{y/x} \Delta x.$$

Якщо $\Delta x = 1$, то $\Delta \hat{y}_x = \rho_{y/x}$.

Наприклад: $\hat{y}_x = -4,8x + 7$; одиниці вимірювання X – гривні, а Y – кілограми. Коефіцієнт $\rho_{y/x} = -4,8$ показує, що зі збільшенням фактора X на 1 грн ознака $\hat{y}_x$ зменшиться на 4,8 кг.

2.8. Тіснота зв’язку в парній лінійній кореляційній залежності

2.8.1. Емпіричне кореляційне відношення та його властивості

Звернемося до кореляційної таблиці.

Розсіяння функціональної ознаки Y характеризується дисперсією

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum_k (y_k - \bar{y})^2 m_{yk}}{n}. \quad (2.35)$$

Існує два види розсіяння:

а) розсіяння, обумовлене впливом фактора X ($\sigma_{\bar{y}_x}^2$);

б) розсіяння, обумовлене впливом інших факторів, окрім X ($\sigma_{y/x}^2$):

$$\sigma_y^2 = \sigma_{\bar{y}_x}^2 + \sigma_{y/x}^2. \quad (2.36)$$

Якщо $\sigma_{\bar{y}_x}^2 = 0$, то розсіяння Y обумовлено повністю впливом побічних факторів, тобто між фактором X і ознакою Y немає кореляційного зв'язку; якщо $\sigma_{y/x}^2 = 0$, то розсіяння Y обумовлюється тільки фактором X , тобто між X і Y існує функціональний зв'язок.

Поділимо обидві частини дисперсійного рівняння (2.36) на σ_y^2 :

$$1 = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}^2}{\sigma_y^2} + \frac{\sigma_{y/x}^2}{\sigma_y^2}. \quad (2.37)$$

Доданок $\frac{\sigma_{y/x}^2}{\sigma_y^2}$ характеризує відносний вплив побічних факторів на

функціональний фактор Y . Доданок $\frac{\sigma_{\bar{y}_x}^2}{\sigma_y^2}$ характеризує відносний вплив

фактора X на функціональний фактор Y , тобто характеризує тісноту кореляційного зв'язку між X і Y .

Показником тісноти зв'язку між фактором X та ознакою Y є кореляційне відношення

$$\eta_{y/x} = \sqrt{\frac{\sigma_{\bar{y}_x}^2}{\sigma_y^2}}, \quad (2.38)$$

$$\text{де } \sigma_{\bar{y}_x}^2 = \frac{\sum_i (y_{x_i} - \bar{y})^2 m_{x_i}}{n} = \frac{\sum_i \bar{y}_{x_i}^2 m_{x_i}}{n} - (\bar{y})^2.$$

Величина $\eta_{y/x}^2$ характеризує, яку частину повної мінливості функціональної ознаки Y пояснює вплив фактора-аргументу X .

Наприклад, якщо $\eta_{y/x}^2 = 0,78$, то це означає, що 78 % мінливості ознаки Y обумовлено впливом фактора X і тільки 22 % мінливості ознаки Y обумовлено впливом інших неврахованих факторів.

Кореляційні відношення

$$\eta_{y/x} = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y}, \quad \eta_{x/y} = \frac{\sigma_{\bar{x}_y}}{\sigma_x} \quad (2.39)$$

є значеннями, отриманими за емпіричними даними.

Величина η , що характеризує тісноту зв'язку в кореляційній залежності, має такі **властивості**:

1) $\eta \geq 0$ (за означенням);

2) величина η знаходиться між нулем та одиницею: $0 \leq \eta \leq 1$ (за рівнянням (2.39));

3) якщо $\eta = 1$, то зв'язок між X і Y є функціональним (оскільки $\sigma_{y/x}^2 = 0$, тобто розсіювання всередині групи немає: для кожного x_i існує одне y_i);

4) якщо $\eta = 0$, то $\sigma_{\bar{y}_x} = 0$ – між X і Y немає кореляційної залежності;

5) якщо величина η ближче до нуля, то зв'язок між X і Y слабкий; якщо величина η ближче до одиниці, то зв'язок між X і Y сильний.

При парній лінійній кореляційній залежності маємо

$$\sigma_{\bar{y}_x}^2 = D(\rho_{y/x}x + b) = \rho_{y/x}^2 D(x) + D(b) = \rho_{y/x}^2 \cdot \sigma_x^2.$$

Отже,

$$\eta_{y/x} = \left| \frac{\rho_{y/x} \sigma_x}{\sigma_y} \right| = \left| \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} \right| = |r|, \quad (2.40)$$

де r – коефіцієнт кореляції.

За означенням $r = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$. Таким чином, якщо $\eta_{y/x} \approx |r|$, то має місце

лінійна кореляційна залежність. Якщо $\eta \gg r$, то залежність між X і Y є нелінійною.

Дійсно, якщо залежність має вигляд $\hat{y} = ax^2 + bx + c$, то $D(\hat{y}) = \sigma_y^2 = a^2 \sigma^2(x^2) + \sigma^2(bx + c) = a^2 \sigma^2(x^2) + \sigma_y^2$, де σ_y^2 – лінійна складова, $a^2 \sigma^2(x^2)$ – додатний доданок. Звідси

$$\eta_{\text{нелін}} = \sqrt{\frac{a^2 \sigma^2(x^2) + \sigma_{y \text{ лін}}^2}{\sigma_y^2}},$$

тобто $\eta_{\text{нелін}} \gg |r|$, остаточно $|r| \leq \eta \leq 1$.

2.8.2. Коефіцієнт кореляції та його властивості

Оскільки кореляційний момент (коваріація) μ_{xy} — характеристика розмірна, уведемо додаткову безрозмірну характеристику – **коефіцієнт кореляції**

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}. \quad (2.41)$$

Знаки коефіцієнтів r_{xy} , μ_{xy} , $\rho_{y/x}$, $\rho_{x/y}$ збігаються.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1. Якщо випадкові величини X і Y є незалежними, то $r_{xy} = 0$ (оскільки $\mu_{xy} = 0$).

2. Якщо між випадковими величинами існує лінійна залежність $y = ax + b$, то $r_{xy} = 1$. Дійсно, $\sigma_y^2 = a^2 \sigma_x^2$; $\overline{xy} = a\overline{x^2} + b\overline{x}$; $\overline{y} = a\overline{x} + b$; $\mu_{xy} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = a\overline{x^2} + b\overline{x} - (a\overline{x} + b)\overline{x} = a(\overline{x^2} - \overline{x}^2) = a\sigma_x^2$, тобто $r = \frac{a\sigma_x^2}{\sigma_x a \sigma_x} = 1$.

3. $|r_{xy}| \leq 1$, $-1 \leq r \leq 1$.

Величина модуля коефіцієнта кореляції характеризує тісноту кореляційного зв'язку: зі збільшенням $|r_{xy}|$ кореляційний зв'язок стає тіснішим. Чим $|r_{xy}|$ ближче до одиниці, тим сильнішим є зв'язок між фактором X та ознакою Y ; чим $|r_{xy}|$ ближче до нуля, тим слабкішим є зв'язок.

4. $r_{xy} = r_{yx}$ (за означенням).

Наведемо формули для обчислення коефіцієнта кореляції:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - (\overline{x})^2} \cdot \sqrt{\overline{y^2} - (\overline{y})^2}}.$$

Оскільки $\rho_{y/x} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2}$, $\rho_{x/y} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_y^2}$, то $\rho_{y/x} \cdot \rho_{x/y} = \frac{\mu_{xy}^2}{\sigma_x^2 \cdot \sigma_y^2} = r^2$,

звідки

$$r_{xy} = \pm \sqrt{\rho_{y/x} \cdot \rho_{x/y}},$$

(знак "+", якщо $\rho_{y/x}$, $\rho_{x/y}$ — додатні; знак "-", якщо $\rho_{y/x}$, $\rho_{x/y}$ — від'ємні).

Отримаємо рівняння регресії у стандартизованих змінних.

Запишемо рівняння регресії $\hat{y} = \rho_{y/x}x + b$, лінія регресії проходить через центр регресії – точку $M(\bar{x}, \bar{y})$. Підставимо координати точки M у рівняння регресії:

$$\bar{y} = \rho_{y/x}\bar{x} + b. \quad (2.42)$$

Віднімемо від рівняння (2.7) рівняння (2.42):

$$\hat{y} - \bar{y} = \rho_{y/x}(x - \bar{x});$$

$$\rho_{y/x} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\mu_{xy}\sigma_y}{\sigma_x^2\sigma_y} = r \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \text{ тобто } \hat{y} - \bar{y} = r_{xy} \frac{\sigma_y}{\sigma_x} (x - \bar{x}) \text{ або}$$

$$\frac{\hat{y} - \bar{y}}{\sigma_y} = r_{xy} \frac{(x - \bar{x})}{\sigma_x} \quad (2.43)$$

Позначимо $\frac{\hat{y} - \bar{y}}{\sigma_y} = t_{\hat{y}}; \quad \frac{x - \bar{x}}{\sigma_x} = t_x$, де $t_{\hat{y}}, t_x$ – стандартизовані

змінні. Тоді рівняння регресії набуває вигляду $t_{\hat{y}} = r_{xy} t_x$.

Аналогічно одержимо спряжене рівняння, коли X – функціональний фактор, Y – фактор-аргумент: $t_{\bar{x}} = r_{xy} t_y$.

Якщо в рівнянні (2.43) позначити $\hat{y} - \bar{y} = \Delta\hat{y}; \quad x - \bar{x} = \Delta x$, то одержимо

$$\frac{\Delta\hat{y}}{\sigma_y} = r_{xy} \frac{\Delta x}{\sigma_x}.$$

Якщо в останній рівності покласти $\Delta x = \sigma_x$, отримаємо $\frac{\Delta\hat{y}}{\sigma_y} = r_{xy}$,

звідки $\Delta\hat{y} = r_{xy}\sigma_y$.

Отже, коефіцієнт кореляції показує, на яку частину свого середнього квадратичного відхилення σ_y зміниться середнє значення функціональної ознаки Y , якщо фактор X збільшиться на своє середнє квадратичне відхилення σ_x .

Коефіцієнт кореляції r_{xy} є безрозмірною величиною (на відміну від коефіцієнта регресії).

Наприклад, задано $r_{xy} = -0,4$, $\sigma_x = 2$, $\sigma_y = 4$. Звідси $\Delta\bar{y}_x = -0,4 \cdot 4 = -1,6$. Тобто, якщо фактор X зміниться на дві одиниці, то ознака Y зменшиться на 1,6 одиниць.

2.8.3. Взаємне розташування спряжених теоретичних ліній регресії

Теоретичні лінії регресії $\hat{y}_x$ і $\hat{x}_y$ перетинаються в точці $M(\bar{x}, \bar{y})$. З рівнянь регресії маємо такі кутові коефіцієнти теоретичних прямих:

$$\bar{y}_x = \rho_{y/x}x + b \Rightarrow k_1 = \rho_{y/x}, \quad \bar{x}_y = \rho_{x/y}y + b_1 \Rightarrow k_2 = \frac{1}{\rho_{x/y}}.$$

Коефіцієнт кореляції $r_{xy}^2 \leq 1$, тому

$$\rho_{y/x} \cdot \rho_{x/y} \leq 1 \Rightarrow \rho_{y/x} \leq 1/\rho_{x/y} \Rightarrow k_1 \leq k_2,$$

тобто теоретична лінія регресії $\hat{x}_y$ знаходиться вище теоретичної лінії регресії $\hat{y}_x$. Кут між цими лініями визначається формулою $\text{tg}\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}$.

Ураховуючи значення k_1 і k_2 , знаходимо

$$\text{tg}\varphi = \frac{(1/\rho_{x/y}) - \rho_{y/x}}{1 + (\rho_{y/x}/\rho_{x/y})} = \frac{1 - \rho_{y/x} \cdot \rho_{x/y}}{\rho_{x/y} + \rho_{y/x}} = \frac{1 - r_{xy}^2}{r_{xy}} \cdot \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}. \quad (2.44)$$

Можна зробити такі висновки:

- 1) якщо $|r| = 1$, то $\text{tg}\varphi = 0$, $\varphi = 0$, і лінії регресії збігаються (зв'язок — лінійний);
- 2) якщо $r = 0$, то $\text{tg}\varphi = \infty$, $\varphi = \pi/2$, і лінії регресії є взаємно перпендикулярними (немає кореляційного зв'язку);
- 3) чим вище значення коефіцієнта кореляції, тим ближче одна до одної розміщені спряжені теоретичні лінії регресії;
- 4) чим слабкіша кореляційна залежність, тим більше кут між спряженими лініями регресії.

2.8.4. Перевірка значущості параметрів кореляційної залежності

До емпіричних показників кореляції відносять коефіцієнт кореляції r і кореляційне відношення η . Коефіцієнт кореляції — величина випадкова (якщо взяти кілька вибірок, то коефіцієнти кореляції будуть різними). Якщо розглядати велику кількість вибірок, то можна припустити, що випадкова величина r підпорядковується нормальному закону розподілу, тоді має місце теорема Лапласа $P(|X - a| < t\sigma) = 2\Phi(t)$. Якщо $X = r$, $a = r_0$, то

$$P(|r - r_0| < t\sigma_r) = 2\Phi(t), \quad \sigma_r = \frac{1 - r^2}{\sqrt{n}}, \quad n - \text{кількість спостережень}.$$

Розглянемо гіпотезу H_0 : у генеральній сукупності немає кореляційного зв'язку, тобто $r_0 = 0$, тоді

$$P(|r - r_0| < t\sigma_r) = 2\Phi(t), \text{ або } P\left(\frac{|r|}{\sigma_r} < t\right) = 2\Phi(t).$$

Позначимо

$$\tau = \frac{|r|}{\sigma_r} = \frac{|r|\sqrt{n}}{1-r^2}. \quad (2.45)$$

Якщо $\tau \leq t$, то з надійністю $2\Phi(t)$ приймається гіпотеза H_0 , тобто немає кореляційної залежності.

Якщо $\tau > t$, то з надійністю $2\Phi(t)$ гіпотеза H_0 відхиляється, тобто є кореляційний зв'язок.

На практиці застосовуються такі критерії.

1. *Перевірка істотності кореляційної залежності (перевірка значущості регресії)*

Якщо $\tau > 2,58$, то з упевненістю 99% можна стверджувати, що кореляційна залежність — істотна, регресія — значуща, тобто що кореляційна залежність існує не тільки для певної вибірки, а для всієї генеральної сукупності.

Якщо $\tau < 1,96$, то з упевненістю 95% можна стверджувати, що кореляційна залежність не є істотною, регресія не є значущою, тобто кореляційна залежність є характерною тільки для певної вибірки і може не існувати для генеральної сукупності.

Якщо $1,96 < \tau < 2,58$ — область невизначеності, то частіше кажуть про неістотність кореляційної залежності, висновок залежить від суті питання.

2. *Надійний інтервал для кореляційного відношення. Перевірка лінійності кореляційного зв'язку (перевірка адекватності моделі)*

Якщо залежність між X і Y є лінійною (гіпотеза H_0), то $|r| = \eta$, тоді за теоремою Лапласа

$$P(|(\eta - |r|) - 0| < t\sigma_r) = 2\Phi(t),$$

тобто з надійністю $2\Phi(t)$

$$|\eta - |r|| \leq t\sigma_r, \quad \sigma_r = \frac{1-r^2}{\sqrt{n}}.$$

Звідси надійний інтервал для кореляційного відношення має вигляд

$$|r| - t\sigma_r \leq \eta \leq |r| + t\sigma_r$$

або

$$|r| - t \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} < \eta < |r| + t \frac{1-r^2}{\sqrt{n}} .$$

Якщо η , яке обчислено за вибіркою, належить надійному інтервалу, то з надійністю $2\Phi(t)$ гіпотеза H_0 приймається, тобто кореляційний зв'язок є лінійним. Якщо η не належить надійному інтервалу, то з рівнем значущості $1-2\Phi(t)$ гіпотеза H_0 відхиляється, тобто кореляційний зв'язок є нелінійним.

На практиці застосовуються такі критерії:

- якщо η належить надійному інтервалу з надійністю $\gamma = 95\%$, $t = 1,96$, то гіпотеза H_0 приймається, тобто зв'язок є лінійним;
- якщо η не належить надійному інтервалу з надійністю $\gamma = 99\%$, $t = 2,58$, то гіпотеза H_0 відхиляється, тобто зв'язок є нелінійним.

Приклад 2.22. Задано: $n = 100$, $r = 0,764$, $\eta = 0,8313$. Перевірити, що модель регресії є лінійною, а також значущість кореляційної залежності й адекватність моделі.

Розв'язання.

1. $\tau = \frac{0,764 \cdot 10}{1 - 0,764^2} = \frac{7,64}{0,416} \approx 18,36$. Маємо $\tau > 2,58$, тому регресія —

значуща, кореляційна залежність є істотною з упевненістю 99 %.

2. $\alpha = 0,05$ (5%-вий рівень значущості);

$$0,764 - 1,96 \frac{0,416}{10} < \eta < 0,764 + 1,96 \frac{0,416}{10};$$

$$0,764 - 0,082 < \eta < 0,764 + 0,082;$$

$$0,682 < \eta < 0,864 .$$

З упевненістю 95% можна стверджувати, що модель є лінійною.

Для перевірки значущості кореляційної залежності й адекватності моделі можна використати дисперсійний аналіз, критерій Фішера, побудований на відношенні двох незміщених оцінок дисперсій, що залежить від кількості ступенів свободи f_1 і f_2 .

3. Значущість знайденої кореляційної залежності за критерієм Фішера визначаємо таким чином. Спочатку розраховуємо величину

$$F_{y/x} = \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \cdot \frac{n-k}{k-1}, \quad (2.46)$$

де n – кількість спостережень, k – кількість інтервалів за фактором X ; $k-1$, $n-k$ – кількість ступенів свободи.

За таблицями знайдемо величини критерію Фішера залежно від параметрів $k-1$, $n-k$ при рівні значущості $\alpha = 0,05$, $\alpha = 0,01$:

$$F_{0,05}(k-1; n-k); \quad F_{0,01}(k-1; n-k).$$

Якщо $F_{y/x} < F_{0,05}$, то регресія не є значущою, кореляційна залежність не є істотною; якщо $F_{y/x} > F_{0,01}$, то кореляційна залежність — істотна.

Значущість регресії також можна перевірити за параметром

$$F_R = \frac{r^2}{1-r^2} \cdot \frac{n-2}{1}. \quad (2.47)$$

За таблицями знаходимо величини критерію Фішера: $F_{0,01}(1; n-2)$, $F_{0,05}(1; n-2)$.

Якщо $F_R > F_{0,01}$, то регресія — значуща; якщо $F_R < F_{0,05}$, то кореляційна залежність не є істотною; якщо $F_{0,05} < F_R < F_{0,01}$, то це область невизначеності.

4. Адекватність моделі за критерієм Фішера перевіряється шляхом розрахунку параметра

$$F_{Ad} = \frac{\eta^2 - r^2}{1-\eta^2} \cdot \frac{n-k}{k-2}. \quad (2.48)$$

За таблицями знаходимо $F_{0,01}(k-2; n-k)$, $F_{0,05}(k-2; n-k)$.

Якщо $F_{Ad} > F_{0,01}$, то модель — неадекватна, необхідно шукати іншу форму зв'язку; якщо $F_{Ad} < F_{0,05}$, то модель — адекватна.

Приклад 2.23. Задано: $n = 60$, $k = 9$, $\sigma^2 = 1,598$, $\sigma_y^2 = 2,383$, $r^2 = 0,448$. Перевірити адекватність моделі.

Розв'язання. Виконуємо розрахунки:

$$\eta^2 = \frac{\sigma_{\bar{y}_x}^2}{\sigma_y^2} = \frac{1,598}{2,383} = 0,6706; \quad F_{y/x} = \frac{0,6706}{1-0,6706} \cdot \frac{60-9}{9-1} \approx 13,19.$$

За таблицями критерію Фішера знаходимо $F_{0,05}(8;51)=2,10$; $F_{0,01}(8;51)=2,82$. Маємо $F_{y/x} > F_{0,01}$, тобто кореляційна залежність є істотною, регресія є значущою.

Перевіримо адекватність моделі:

$$F_{Ad} = \frac{0,6706 - 0,448}{1 - 0,6706} \cdot \frac{60 - 9}{9 - 2} = 4,94;$$

$$F_{0,05}(7;51)=2,26; \quad F_{0,01}(7;51)=3,14.$$

Маємо $F_{Ad} > F_{0,01}$, тобто модель не є адекватною.

Навколо лінії регресії будуємо надійний чохол з 95%-вою надійністю $\bar{x} \pm 3\sigma_x$; $\bar{y} \pm 2\sigma_y$ (рис. 2.5).

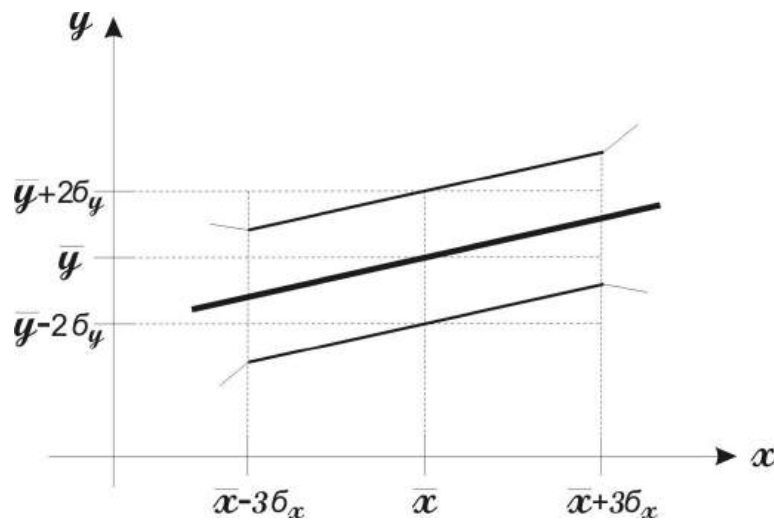


Рис. 2.5. Графічна ілюстрація до прикладу 2.23

ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ

1. Основні завдання й мета математичної статистики.
2. Означення генеральної та вибіркової сукупностей.
3. Вимоги, яким має відповідати вибірка сукупність.
4. Основні методи формування вибіркової сукупності.
5. Основні числові характеристики закону розподілу. Їх властивості й геометричне тлумачення.
6. Додаткові числові характеристики: мода, медіана.
7. Емпірична функція розподілу. Її основні властивості.
8. Незгруповані та згруповані емпіричні дані. Основні принципи групування емпіричних даних для квазінеперервної випадкової величини.
9. Геометричне зображення емпіричних розподілів: гістограма, полігон, кумулята.

10. Статистичні оцінки. Вимоги до статистичних оцінок.
11. Зміщені та незміщені статистичні оцінки. Виправлена дисперсія.
12. Точкові й інтервальні статистичні оцінки.
13. Довірчий інтервал для математичного сподівання й середнього квадратичного відхилення випадкової величини, розподіленої за нормальним законом.
14. Умовні змінні. Принципи їх уведення й переваги застосування при визначенні числових характеристик емпіричного розподілу.
15. Стандартизовані змінні, їх властивості.
16. Нульова й альтернативна статистичні гіпотези.
17. Статистичний критерій перевірки гіпотези.
18. Одно- і двосторонні критичні області.
19. Потужність статистичного критерію. Рівень значущості. Статистичні помилки 1-го та 2-го роду.
20. Критична область і критичні точки перевірки статистичних гіпотез.
21. Перевірка гіпотези щодо закону розподілу випадкової величини.
22. Критерій узгодженості Пірсона. Умови його застосування.
23. Критерій Стюдента. Порівняння варіаційних рядів з різними дисперсіями, але однаковими математичними сподіваннями.
24. Кореляційно-регресійний аналіз. Його завдання й умови застосування.
25. Статистична залежність. Її особливості порівняно з функціональною залежністю.
26. Кореляційна залежність.
27. Кореляційна таблиця. Способи її побудови.
28. Кореляційне поле як графічне відображення кореляційної таблиці.
29. Умовні середні й емпірична лінія регресії.
30. Спряжені емпіричні лінії регресії, їх властивості.
31. Кореляційне рівняння. Рівняння парної лінійної регресії.
32. Лінеаризація нелінійних двопараметричних рівнянь парної регресії.
33. Суть методу найменших квадратів, система нормальних рівнянь.
34. Коваріація двовимірної випадкової величини.
35. Вибірковий коефіцієнт кореляції та його властивості.
36. Інтервальна оцінка коефіцієнта кореляції.
37. Поняття тісноти кореляційного зв'язку.
38. Статистичні гіпотези в регресійному аналізі. Критерій Стюдента.
39. Теоретичні лінії регресії. 95%-ва довірна смуга для вибіркової лінії регресії та методи її побудови.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Анісімов, В. В. Математична статистика : навч. посіб. / В. В. Анісімов, О. І. Черняк. – Київ : МП „Леся”, 1995. – 105 с.

Бабак, В. П. Теорія ймовірностей, випадкові процеси та математична статистика : підручник / В. П. Бабак, Б. Г. Марченко, М. Є. Фриз. – Київ : Техніка, 2004. – 288 с.

Барковський, В. В. Теорія ймовірностей та математична статистика / В. В. Барковський, Н. В. Барковська, О. К. Лопатін. – Київ : ЦУЛ, 2002. – 448 с.

Бугір, М. К. Посібник з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посіб. / М. К. Бугір. – Тернопіль : Підручники і посібники, 1998. – 176 с.

Бугір, М. К. Практикум з теорії ймовірності та математичної статистики : навч. посіб. / М. К. Бугір. – Тернопіль : ЦМДС, 1998. – 164 с.

Валєєв, К. Г. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посіб. / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – Київ : КНЕУ, 2005. – 340 с.

Васильченко, І. П. Вища математика для економістів (спеціальні розділи) : підручник / І. П. Васильченко. – Київ : Кондор, 2004. – 349 с.

Вентцель, Е. С. Теория вероятностей и математическая статистика / Е. С. Вентцель. – М. : Высш. шк., 1999. – 576 с.

Волощенко, А. Б. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч.-метод. посіб. / А. Б. Волощенко, І. А. Джалладова. – Київ : КНЕУ, 2003. – 256 с.

Голомозий, В. В. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посіб. / В. В. Голомозий, М. В. Карташов, К. В. Ральченко. – Київ : ВПЦ «Київський університет», 2015. – 366 с.

Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 1997. – 400 с.

Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В. Е. Гмурман. – М. : Высш. шк., 2004. – 479 с.

Дорош, А. К. Теорія ймовірностей та математична статистика / А. К. Дорош, О. П. Коханівський. – Київ : НТУУ «КПІ», 2006. – 268 с.

Ежов, І. І. Елементи комбінаторики / І. І. Ежов, А. В. Скороход, М. І. Ядренко. – Київ : Вища шк., 1972. – 84 с.

Жлуктенко, В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посіб. У 2 ч. Ч. І. Теорія ймовірностей / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний. – Київ : КНЕУ, 2000. – 304 с.

Жлуктенко, В. І. Теорія ймовірностей і математична статистика : навч.-метод. посіб. У 2 ч. Ч. II. Математична статистика / В. І. Жлуктенко, С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – Київ : КНЕУ, 2001. – 336 с.

Задорожня, Т. М. Збірник задач з теорії ймовірностей та математичної статистики : навч. посіб. / Т. М. Задорожня, Ю. В. Коляда, Г. В. Мамонова. – Ірпінь : Академія ДПС України, 2001. – 77 с.

Збірник задач з теорії ймовірностей / О. П. Коханівський, О. І. Кушлик, Б. П. Орел та ін. – Київ : НТУУ «КПІ», 1999. – 40 с.

Іванюта, І. Д. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики / І. Д. Іванюта, В. І. Рибалка, І. А. Рудоміно-Дусятська. – Київ : Слово, 2003. – 272 с.

Каніовська, І. Ю. Теорія ймовірностей у прикладах і задачах / І. Ю. Каніовська. – Київ : ІВЦ "Вид-во «Політехніка»", ТОВ "Фірма «Періодика»", 2004. – 156 с.

Практикум з теорії ймовірностей та математичної статистики / В. О. Єрьоменко, М. І. Шинкарик, Р. М. Бабій, А. І. Процик. – Тернопіль : Економічна думка, 2005. – 317 с.

Практичний курс вищої математики : навч. посіб. У 4 ч. Ч. 3 / І. В. Брисіна, О. В. Головченко, Г. І. Кошовий, О. Г. Ніколаєв та ін. – Харків : ХАІ, 2004. – 228 с.

Приймак, В. І. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник / В. І. Приймак, О. Р. Голубник. – Львів : ЛНУ ім. Івана Франка, 2011. – 556 с.

Руденко, В. М. Математична статистика : навч. посіб. / В. М. Руденко. – Київ : Центр навч. літ., 2012. – 304 с.

Самойленко, М. І. Теорія ймовірностей : підручник / М. І. Самойленко, А. І. Кузнецов, О. Б. Костенко. – Харків : ХНАМГ, 2008. – 194 с.

Сеньо, П. С. Теорія ймовірностей та математична статистика : підручник / П. С. Сеньо. – Київ : Центр навч. літ., 2004. – 448 с.

Теорія ймовірностей : зб. задач / А. Я. Дороговцев, Д. С. Сільвестров, А. В. Скороход, М. Й. Ядренко. – Київ : Вища шк., 1977. – 432 с.

Теорія ймовірностей для економістів : навч. посіб. / С. М. Григулич, В. П. Лісовська, О. І. Макаренко та ін. – Київ : КНЕУ, 2012. – 307 с.

Турчин, В. М. Теорія ймовірностей і математична статистика. Основні поняття, приклади, задачі : підручник / В. М. Турчин. – Дніпропетровськ : ІМА-прес, 2014. – 556 с.

Турчин, В. М. Теорія ймовірностей в прикладах і задачах : навч. посіб. / В. М. Турчин, Л. В. Дрожжина. – Київ : ІСДО, 1994. – 132 с.

Черняк, О. І. Теорія ймовірностей та математична статистика : зб. задач / О. І. Черняк, А. В. Ставицький, О. М. Обушна. – Київ : Знання, 2000. – 199 с.

Шефтель, З. Г. Теорія ймовірностей : підручник / З. Г. Шефтель. – Київ : Вища шк., 1994. – 192 с.

ЗМІСТ

1. ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ.....	3
1.1. Випадкові події. Класичне визначення ймовірності. Геометрична ймовірність.....	3
1.2. Умовна ймовірність. Незалежність подій. Теорема додавання та множення ймовірностей.....	19
1.3. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.....	24
1.4. Схема Бернуллі. Найімовірніша кількість появ події в незалежних випробуваннях. Гранична теорема Пуассона. Локальна й інтегральна теорема Муавра – Лапласа. Відхилення відносної частоти від постійної ймовірності в незалежних випробуваннях.....	27
1.5. Дискретні й неперервні випадкові величини та їх числові характеристики.....	39
1.6. Найважливіші закони розподілу випадкових величин.....	54
1.7. Багатовимірні випадкові величини.....	65
1.8. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема.....	79
ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ.....	83
2. ОСНОВИ МАТЕМАТИЧНОЇ СТАТИСТИКИ.....	86
2.1. Вибірковий метод та його основні поняття. Варіаційний ряд та його числові характеристики. Емпіричний закон розподілу. Емпірична функція розподілу.....	86
2.2. Статистичне оцінювання параметрів розподілу. Точкові оцінки.....	99
2.3. Інтервальні оцінки. Надійний інтервал.....	104
2.4. Перевірка статистичних гіпотез. Критерії узгодженості.....	109
2.5. Елементи теорії кореляції.....	122
2.6. Дві основні задачі теорії кореляції. Кореляційна таблиця, кореляційне поле, емпіричні лінії регресії.....	125
2.7. Лінійна регресія. Визначення параметрів лінійного парного регресійного рівняння.....	128
2.7.1. Вибіркове рівняння прямої лінії регресії.....	128
2.7.2. Визначення параметрів лінійного парного рівняння регресії.....	128
2.7.3. Коефіцієнт регресії.....	133
2.8. Тіснота зв'язку в парній лінійній кореляційній залежності.....	133
2.8.1. Емпіричне кореляційне відношення та його властивості....	133

2.8.2. Коефіцієнт кореляції та його властивості.....	136
2.8.3. Взаємне розташування спряжених теоретичних ліній регресії.....	138
2.8.4. Перевірка значущості параметрів кореляційної залежності.....	138
ЗАПИТАННЯ ДЛЯ САМОПЕРЕВІРКИ.....	142
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК.....	144

Навчальне видання

**Кантемир Ірина Володимирівна
Мураховська Олена Анатоліївна
Українець Наталія Анатоліївна**

ТЕОРІЯ ЙМОВІРНОСТЕЙ І МАТЕМАТИЧНА СТАТИСТИКА

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2021

Підписано до видання 10.12. 2021

Ум. друк. арк. 8,2. Обл.-вид. арк. 9,25. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. № 391 від 30.03.2001