М. С. Зряхов, І. К. Васильєва, О. С. Рубель

ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

М. С. Зряхов, І. К. Васильєва, О. С. Рубель

ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2021

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

М. С. Зряхов, І. К. Васильєва, О. С. Рубель

ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2021

УДК 621.3.011.7(075.8)
390

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук Д. М. Бичков,
канд. техн. наук, доц. А. А. Акулинічев

Зряхов, М. С.

390 Теорія лінійних електричних кіл [Електронний ресурс] : навч. посіб. / М. С. Зряхов, І. К. Васильєва, О. С. Рубель. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2021. – 134 с.

Наведено основи загальної теорії електричних кіл і сформульовано основні поняття і закони теорії лінійних електричних кіл. Розглянуто основні методи аналізу лінійних кіл у частотній і часовій областях. Описано властивості лінійних електричних кіл, методики розрахунку сталих процесів у електричних колах, резонансні явища. Висвітлено методи аналізу чотириполюсників і перехідних процесів.

Для студентів вищих технічних навчальних закладів за фахом «Телекомунікації та радіотехніка».

Іл. 133. Табл. 5. Бібліогр.: 9 назв

УДК 621.3.011.7(075.8)

© Зряхов М. С., Васильєва І. К.,
Рубель О. С., 2021
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2021

ЗМІСТ

ВСТУП 5
1. ЕЛЕМЕНТИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ 6
1.1. Ідеальні пасивні елементи кіл 6
1.2. Ідеальні активні елементи кіл 11
1.3. Реальні пасивні елементи кіл і їх моделі 12
1.4. Реальні активні елементи кіл і їх моделі 13
2. СХЕМИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ: ГРАФИ, СТРУКТУРНІ, ФУНКЦІОНАЛЬНІ, ПРИНЦИПОВІ, ЕКВІВАЛЕНТНІ 16
3. АНАЛІЗ ПРОСТИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ 22
3.1. Основні закони електричних кіл 22
3.2. Види потужності в електричних колах 24
3.3. Еквівалентні перетворення електричних кіл 26
4. АНАЛІЗ СКЛАДНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ 32
4.1. Аналіз складних електричних кіл за методом рівнянь Кірхгофа 32
4.2. Аналіз складних електричних кіл методом контурних струмів 33
4.3. Аналіз складних електричних кіл методом вузлових потенціалів 36
4.4. Аналіз складних електричних кіл методом накладення (суперпозиції) 37
4.5. Аналіз складних електричних кіл методом еквівалентних джерел 40
4.6. Теорема про компенсацію 43
4.7. Принцип взаємності 43
5. СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ 44
5.1. Закони комутації в електричних колах 44
5.2. Перехідна характеристика лінійного електричного кола 45
5.3. Імпульсна характеристика лінійного електричного кола 46
5.4. Інтеграл Дюамеля 47
5.5. Комплексна передавальна функція лінійного електричного кола (частотний коефіцієнт передачі) 48
5.6. Аналіз електричних кіл за методом розв’язання диференціальних рівнянь (класичним методом аналізу перехідних процесів) 51
5.7. Операторний метод аналізу електричних кіл 54
5.8. Аналіз простих електричних кіл першого порядку 58
6. РЕЗОНАНСНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА 59
6.1. Резонанс напруг 59
6.2. Послідовний коливальний контур, вторинні параметри, резонансні криві 60
6.3. Резонанс струмів 64

6.4. Паралельний коливальний контур, вторинні параметри, резонансні криві 65
6.5. Індуктивно з’єднані кола 71
6.6. З’єднані коливальні контури. Види резонансів. Частотні характеристики 74
7. УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ ЧОТИРИПОЛЮСНИХ КІЛ 81
7.1. Внутрішні (первинні) параметри лінійних чотириполюсних кіл. 82
7.2. Зовнішні (вторинні) параметри лінійних чотириполюсних кіл 85
7.3. Еквівалентні схеми пасивних чотириполюсників 89
7.4. Методи з’єднання чотириполюсних кіл 92
7.5. Зворотний зв’язок в електричних колах 96
7.6. Вплив зворотного зв’язку на параметри кіл 98
7.7. Стійкість електричних кіл 100
8. ЧАСТОТНО-ВИБІРКОВІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА 104
8.1. Класифікація вибіркових електричних кіл за частотним принципом. Основні завдання теорії фільтрації 104
8.2. Фільтр нижніх частот 109
8.3. Фільтр верхніх частот 111
8.4. Смуговий фільтр 113
8.5. Режекторний фільтр 118
8.6. Активні чотириполюсники на базі операційного підсилювача 121
8.7. Синтез частотно-вибіркових кіл за методом Батерворта 125
8.8. Синтез частотно-вибіркових кіл за методом Чебишева 131
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК 133

ВСТУП

Теорія електричних кіл – наука, присвячена розв'язанню задач аналізу й синтезу електричних кіл. До електричних кіл належить величезна кількість найрізноманітнішого технічного обладнання, пов'язаного з електричним струмом або електричною напругою. Завдання аналізу полягає в якісному і кількісному оцінюванні властивостей заданого електричного кола, а завдання синтезу – у побудові кола із заданими властивостями.

Теорію кіл у цілому можна поділити на дві частини:

– *радіотехніку*, основне завдання якої полягає у виробництві електричної енергії, її передачі та перетворенні в інші види (механічну, теплову, світлову, хімічну та ін.);

– *радіоелектроніку*, де вирішується широке коло питань, пов'язаних з використанням електричних явищ для передачі й оброблення інформації (радіолокація, навігація, телекерування тощо).

Перспективи розвитку теорії електричних кіл пов'язані з розвитком теорії й техніки активних слабкострумових RC-кіл (перетворювачів опорів, фільтрів та ін.), а також цифрових мікропроцесорів для оброблення сигналів. Удосконалювання сучасних обчислювальних систем і зростання потреб у цифровому обробленні сигналів привели до створення малогабаритних гібридних цифро-аналогових пристроїв із паралельним обробленням декількох потоків. Це, у свою чергу, дозволило практично реалізувати багато теоретичних викладень.

Найрізноманітніші явища, які відбуваються в електро- і радіотехнічних пристроях, можна описати методами теорії електромагнітного поля за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних Максвела. Однак такий підхід є досить складним і трудомістким. Для розв'язання багатьох прикладних задач можна застосовувати спрощені методи дослідження – методи теорії кіл, основані на заміні реального обладнання деякою спрощеною моделлю з ідеалізованими елементами, які приблизно відбивають основні властивості реальних елементів. На відміну від опису електромагнітної системи за допомогою векторів поля і рівнянь Максвелла електричне коло описують за допомогою інтегральних величин, таких, як електрична напруга, струм, заряд і магнітний потік. Основним завданням при цьому є визначення струмів і напруг на затискачах ідеалізованих елементів як аналогів електричних пристроїв, що входять до складу кола.

У цьому навчальному посібнику розглянуто основні закони, принципи побудови й розрахунків лінійних електричних кіл, які є основою для подальшого вивчення більш складних нелінійних і параметричних кіл.

Як показала практика, при розробленні високотехнологічного устаткування застосовуються фундаментальні знання й навички, отримані студентом ще на початкових стадіях навчання. І від того, як майбутній фахівець побудував свій «фундамент знань», залежать якість розв'язуваних завдань у майбутньому і його успіхи в просуванні по кар'єрних сходах.

6.4. Паралельний коливальний контур, вторинні параметри, резонансні криві 65
6.5. Індуктивно з’єднані кола 71
6.6. З’єднані коливальні контури. Види резонансів. Частотні характеристики 74
7. УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ ЧОТИРИПОЛЮСНИХ КІЛ 81
7.1. Внутрішні (первинні) параметри лінійних чотириполюсних кіл. 82
7.2. Зовнішні (вторинні) параметри лінійних чотириполюсних кіл 85
7.3. Еквівалентні схеми пасивних чотириполюсників 89
7.4. Методи з’єднання чотириполюсних кіл 92
7.5. Зворотний зв’язок в електричних колах 96
7.6. Вплив зворотного зв’язку на параметри кіл 98
7.7. Стійкість електричних кіл 100
8. ЧАСТОТНО-ВИБІРКОВІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА 104
8.1. Класифікація вибіркових електричних кіл за частотним принципом. Основні завдання теорії фільтрації 104
8.2. Фільтр нижніх частот 109
8.3. Фільтр верхніх частот 111
8.4. Смуговий фільтр 113
8.5. Режекторний фільтр 118
8.6. Активні чотириполюсники на базі операційного підсилювача 121
8.7. Синтез частотно-вибіркових кіл за методом Батерворта 125
8.8. Синтез частотно-вибіркових кіл за методом Чебишева 131
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК 133

ВСТУП

Теорія електричних кіл – наука, присвячена розв'язанню задач аналізу й синтезу електричних кіл. До електричних кіл належить величезна кількість найрізноманітнішого технічного обладнання, пов'язаного з електричним струмом або електричною напругою. Завдання аналізу полягає в якісному і кількісному оцінюванні властивостей заданого електричного кола, а завдання синтезу – у побудові кола із заданими властивостями.

Теорію кіл у цілому можна поділити на дві частини:

– *радіотехніку*, основне завдання якої полягає у виробництві електричної енергії, її передачі та перетворенні в інші види (механічну, теплову, світлову, хімічну та ін.);

– *радіоелектроніку*, де вирішується широке коло питань, пов'язаних з використанням електричних явищ для передачі й оброблення інформації (радіолокація, навігація, телекерування тощо).

Перспективи розвитку теорії електричних кіл пов'язані з розвитком теорії й техніки активних слабкострумових RC-кіл (перетворювачів опорів, фільтрів та ін.), а також цифрових мікропроцесорів для оброблення сигналів. Удосконалювання сучасних обчислювальних систем і зростання потреб у цифровому обробленні сигналів привели до створення малогабаритних гібридних цифро-аналогових пристроїв із паралельним обробленням декількох потоків. Це, у свою чергу, дозволило практично реалізувати багато теоретичних викладень.

Найрізноманітніші явища, які відбуваються в електро- і радіотехнічних пристроях, можна описати методами теорії електромагнітного поля за допомогою диференціальних рівнянь у частинних похідних Максвела. Однак такий підхід є досить складним і трудомістким. Для розв'язання багатьох прикладних задач можна застосовувати спрощені методи дослідження – методи теорії кіл, основані на заміні реального обладнання деякою спрощеною моделлю з ідеалізованими елементами, які приблизно відбивають основні властивості реальних елементів. На відміну від опису електромагнітної системи за допомогою векторів поля і рівнянь Максвелла електричне коло описують за допомогою інтегральних величин, таких, як електрична напруга, струм, заряд і магнітний потік. Основним завданням при цьому є визначення струмів і напруг на затискачах ідеалізованих елементів як аналогів електричних пристроїв, що входять до складу кола.

У цьому навчальному посібнику розглянуто основні закони, принципи побудови й розрахунків лінійних електричних кіл, які є основою для подальшого вивчення більш складних нелінійних і параметричних кіл.

Як показала практика, при розробленні високотехнологічного устаткування застосовуються фундаментальні знання й навички, отримані студентом ще на початкових стадіях навчання. І від того, як майбутній фахівець побудував свій «фундамент знань», залежать якість розв'язуваних завдань у майбутньому і його успіхи в просуванні по кар'єрних сходах.

1. ЕЛЕМЕНТИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

1.1. Ідеальні пасивні елементи кіл

Поняття ідеалізованих активних елементів використовується при аналізі електричних процесів у колах. При цьому складають еквівалентні схеми, в яких реальні елементи заміщають їх моделями.

До ідеальних пасивних елементів в області частот до одиниць гігагерц належать опір, ємність і індуктивність.

Опір – ідеалізований пасивний елемент, в якому електрична енергія безповоротно перетвориться в який-небудь інший вид енергії (наприклад, у теплову, механічну, світлову). За своїми властивостями до опору найбільш близькими є високоякісні резистори – реальні елементи електричного кола, в яких електрична енергія перетворюється в основному в теплову. Умовне графічне позначення опору зображено на рис. 1.1. Умовно-позитивні напрямки напруги й току показано стрілками. Поруч з умовним графічним позначенням опору наведено його умовне літерне позначення *R*. ***Вольт-амперна характеристика (ВАХ) опору*** – залежність між значеннями струму й напруги на затискачах $I = f(U)$, у загальному випадку має нелінійний характер (рис. 1.1, в). Залежності для опису нескінченних повільно змінюваних (постійних) струмів і напруг називаються статичними вольт-амперними характеристиками (рис. 1.1, б, в).

Залежність між струмом і напругою на затискачах лінійного опору підпорядковується закону Ома, який можна записати у вигляді

$$u_R = Ri_R \text{ або } i_R = Gu_R, \tag{1.1}$$

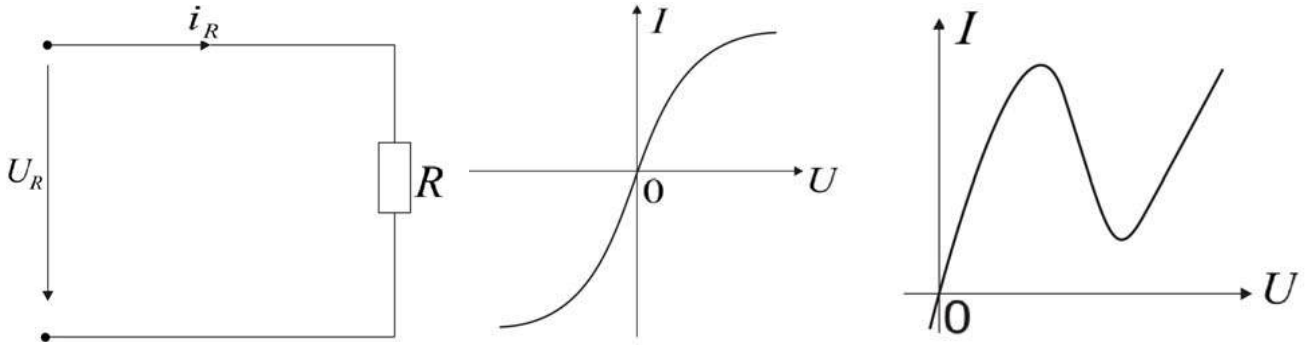
де G = 1/R – провідність.

Миттєва потужність опору може бути знайдена через значення опору *R* або провідності *G:*

$$p_r = u_r i_r = Ri_r^2 = Ru_r^2. \tag{1.2}$$

Електрична енергія, що надходить в опір, така:

$$\omega_R(t) - \int_{-\infty}^{t} p_{Rdt} = R\int_{-\infty}^{t} i_R^2 dt = G\int_{-\infty}^{t} u_R^2 dt > 0. \tag{1.3}$$



а б в

Рис. 1.1. Позначення та вольт-амперні характеристики опору:
а – графічне позначення опору; б – ВАХ з лінійною ділянкою; в – нелінійна ВАХ

У *будь-який момент часу опір може тільки споживати енергію від джерел і ніколи опір не може віддавати електричну енергію іншим елементам кола.*

Опір при гармонійному впливі (ГВ). Якщо ГВ – це поточна комплексна напруга $\dot{u} = U_m e^{j\omega t+\psi_{0u}}$, то за законом Ома поточний комплексний струм (відгук, реакція)

$$\dot{i}_r = \frac{\dot{u}}{R} = \frac{\dot{U}_m e^{j\omega t+\psi_{0u}}}{R} = \dot{I}_m e^{j\omega t+\psi_{0i}}. \qquad (1.4)$$

Тоді для резистивного елемента одержимо

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{R}, \quad I_m = \frac{U_m}{R}, \quad \psi_{0i} = \psi_{0u}, \qquad (1.5)$$

тобто *на резистивному елементі струм і напруга збігаються за фазою,* або фазовий зсув $\varphi = \psi_{0u} - \psi_{0i} = 0$.

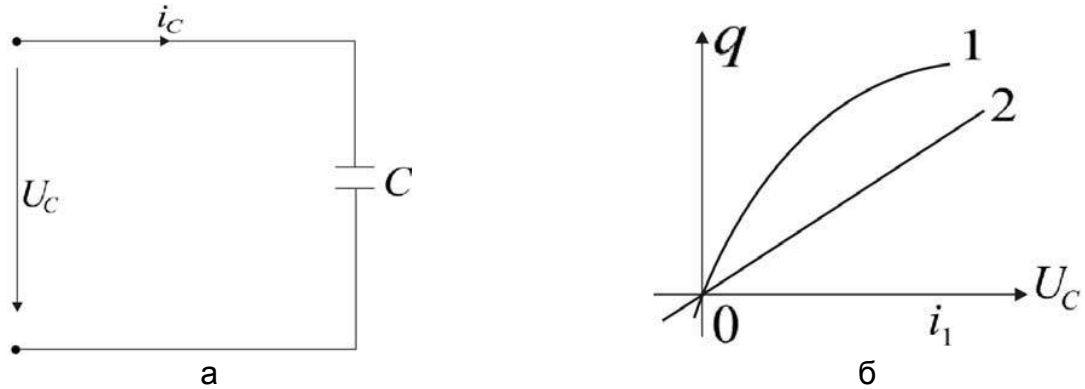
Опір при змінному струмі залежить від частоти ГВ. Ця залежність починає виявлятися при частотах більше 10 МГц тим суттєвіше, чим більше частота сигналу. Прояв залежності опору від частоти пов'язано зі скін-ефектом (процесом витиснення електронів під дією магнітного поля від центральної осі провідників).

Ємністю називається ідеалізований елемент електричного кола, що має властивість запасати енергію електричного поля. За своїми властивостями до ємності найбільш близькими є реальні елементи електричного кола – конденсатори. Умовне графічне позначення ємності показано на рис. 1.2. Залежність заряду *q,* накопиченого в ємності, від напруги u_c називається ***кулон-вольтною характеристикою*** і в загальному випадку є нелінійною (рис. 1.2, б, крива 1).

Кількісно залежність заряду, накопиченого в ємності, від напруги оцінюють значеннями статичної й динамічної ємностей:

$$C_{ст} = q / u; \; C_{дин} = dq/du. \qquad (1.6)$$

Якщо залежність заряду, накопиченого в ємності, від напруги є лінійною (рис. 1.2, б, крива *2),* то значення динамічної й статичної ємностей однакові й не залежать від напруги: $C_{дин} = C_{ст} = C$.



а б

Рис. 1.2. Графічне позначення (а) та кулон-вольтні характеристики ємності (б)

Знайдемо залежність між миттєвими значеннями струму й напруги на затискачах лінійної ємності:

$$i_C = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{du_C}\frac{du_C}{dt}. \qquad (1.7)$$

Враховуючи, що похідна заряду лінійної ємності за напругою дорівнює С и не залежить від напруги, одержуємо

$$i_C = C\frac{du_C}{dt}. \qquad (1.8)$$

Струм ємності є пропорційним швидкості зміни її напруги. Якщо напруга на затискачах ємності не змінюється в часі, то струм ємності дорівнює нулю.

Знаходимо залежність напруги на ємності від струму:

$$u_C = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} i_C dt = \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t_0} i_C dt + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C dt = u_C(t_0) + \frac{1}{C}\int_{t_0}^{t} i_C dt. \qquad (1.9)$$

Миттєва потужність ємності

$$p_C = u_C i_C = C u_C \frac{du_C}{dt}. \qquad (1.10)$$

Енергія електричного поля, запасена ємністю в довільний момент часу t, визначається напругою ємності або її зарядом:

$$\omega_C = \omega_C(t) = \int_{-\infty}^{t} p_C dt = C\int_{0}^{u_C} u du = C\frac{u_C^2}{2} = \frac{q}{2C}. \qquad (1.11)$$

Якщо напруга на ємності (див. рис. 1.2, а) позитивна (тобто її напрямок збігається з умовно-позитивним напрямком, зазначеним стрілкою) і продовжує зростати, то миттєва потужність ємності відповідно до формули (1.10) буде позитивною. У цьому випадку енергія надходить до ємності, заряджаючи її.

Якщо напруга u_C >0 убуває, тобто $du/dt < 0$, то миттєва потужність ємності негативна. Ємність при цьому розряджається, тобто віддає накопичену енергію в зовнішнє коло.

Ємність при ГВ. Якщо ГВ – це напруга $\dot{u} = \dot{U}_m e^{j\omega t}$, то поточний комплексний струм

$$\dot{i}_C = C\frac{d\dot{u}}{dt} = C\frac{d\left[\dot{U}e^{j\omega t}\right]}{dt} = j\omega C\dot{U}e^{j\omega t} = j\omega C\dot{U}e^{j\omega t}. \qquad (1.12)$$

Тоді для ємнісного елемента одержимо

$$\dot{I}_{mC} = j\omega C\dot{U} = \omega C U e^{j\psi_{0u}} e^{j\pi/2} = \omega C U e^{\left[j\left(\psi_{0u}+\pi/2\right)\right]}, \qquad (1.13)$$

тобто

$$\dot{I}_{mC} = I_{mC}e^{j\psi_{0i}}, \quad I_{mC} = U\omega C, \quad \psi_{0i} = \psi_{0u} + \pi/2.$$

Отже, на ємнісному елементі вектор струму випереджає вектор напруги на кут 90°, тобто фазовий зсув $\varphi = \psi_{0u} - \psi_{0i} = -\pi/2$.

Величина ωC виміряється в сименсах (См) і називається ємнісною провідністю ємнісного елемента $Y_C = \omega C$; відповідно, величина $1/(\omega C)$ називається ємнісним опором, вимірюваним в омах (Ом). Повним опором ємності називають уявний опір, який позначають $1/(j\omega C)$.

Індуктивністю називається ідеалізований елемент електричного кола, в якому накопичується енергія магнітного поля. Реальним елементом, найбільш близьким до індуктивності, є індуктивна котушка. Умовне графічне позначення індуктивності показано на рис. 1.3.

Зв'язок між напругою й струмом в індуктивній котушці визначається законом ***електромагнітної індукції,*** з якого випливає, що *при зміні магнітного потоку, що пронизує індуктивну котушку, в ній з'являється електрорушійна сила e (ЕРС), яка пропорційна швидкості зміни потокозчеплення Ψ котушки й спрямована таким чином, щоб спричинений нею струм прагнув перешкодити зміні магнітного потоку:*

$$e = -d\Psi/dt. \qquad (1.14)$$

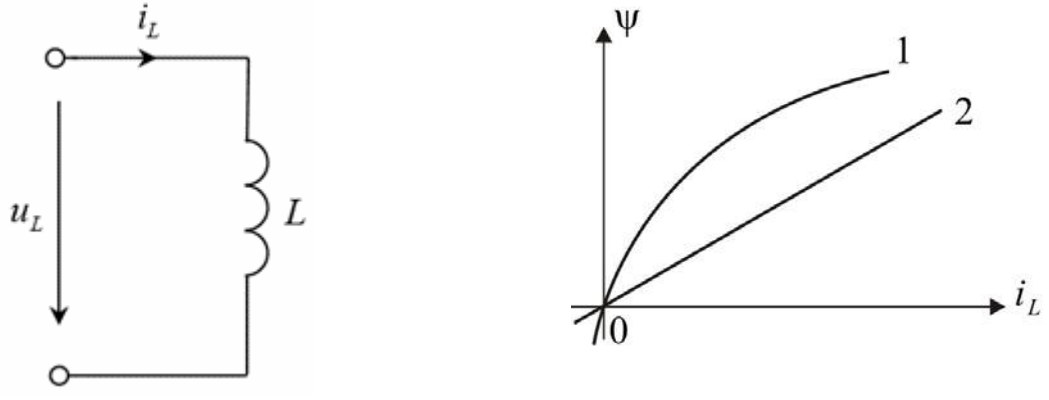
Потокозчеплення котушки дорівнює алгебраїчній сумі магнітних потоків Φ_i, що пронизують її окремі витки:

$$\Psi = \sum_{i=1}^{N} \Phi_i, \qquad (1.15)$$

де N – кількість витків котушки.

У СІ магнітний потік і потокозчеплення виражаються у веберах (Вб).

Потокозчеплення самоіндукції Ψ_{cu} залежить від струму, що *протікає* по котушці, i_L. Цю залежність називають ***вебер-амперною характеристикою***. У загальному випадку вона є нелінійною (рис. 1.3, б, крива 1). В окремому випадку, наприклад, для котушки без магнітного осердя, ця залежність може бути лінійною (рис. 1.3, б, крива 2*).*



а б

Рис. 1.3. Графічне позначення (а) та вебер-амперні характеристики індуктивності (б)

Кількісно залежність потокозчеплення самоіндукції від струму визначається статичною $L_{ст}$ і динамічною $L_{дин}$ індуктивностями котушки:

$$L_{ст} = \Psi_{cu} / i_L, \quad L_{дин} = d\Psi_{cu} / di_L. \tag{1.16}$$

У випадку лінійної залежності потокозчеплення самоіндукції від струму $L_{ст} = L_{дин} = L$. Для котушки з лінійною індуктивністю

$$e = -\frac{\Psi_{cu}}{dt} = -\frac{d\Psi_{cu}}{di_L}\frac{di_L}{dt} = L\frac{di_L}{dt}. \tag{1.17}$$

При аналізі кіл звичайно розглядають не значення ЕРС, наведеної в котушці, а значення напруги u_L на її затискачах; як позитивний напрямок u_L вибирають такий, що збігається з позитивним напрямком струму i_L (див. рис. 1.3, а):

$$u_L = -e = L\frac{di_L}{dt}. \tag{1.18}$$

Залежність струму індуктивності i_L від напруги u_L можна знайти шляхом інтегрування:

$$i_L = \frac{1}{L}\int_{-\infty}^{t_0} u_L dt + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L dt = i_L(t_0) + \frac{1}{L}\int_{t_0}^{t} u_L dt. \tag{1.19}$$

Миттєва потужність індуктивності p_L визначається як добуток миттєвих значень струму i_L і напруги u_L:

$$p_L = u_L i_L = L i_L \frac{di_L}{dt}. \tag{1.20}$$

Її величина буде додатною в моменти часу, коли індуктивність споживає енергію від іншої частини кола *(i_L* і u_L мають однакові знаки). Якщо i_L і u_L мають різні знаки, індуктивність віддає запасену енергію іншій частині кола. Енергія, запасена в індуктивності в довільний момент часу *t*:

$$\omega_L(t) = \int_{-\infty}^{t} p_L dt = L\int_{0}^{i_L} i di = \frac{L i_L^2}{2} = \frac{\Psi_{CH}^2}{2L}. \tag{1.21}$$

Енергія, запасена в індуктивності, не може бути від'ємною величиною й визначається тільки струмом індуктивності або потокозчепленням самоіндукції.

Індуктивність при ГВ. Якщо ГВ – це напруга $\dot{u} = \dot{U}_m e^{i\omega t}$, то поточний комплексний струм при нульових початкових умовах ($I_L(0) = 0$)

$$\dot{i}_l = \frac{1}{L}\int_0^t \dot{u} dt = \frac{1}{L}\int_0^t \dot{U}_m e^{j\omega t} dt = \frac{\dot{U}_m}{j\omega L} e^{j\omega t}. \tag{1.22}$$

Тоді для індуктивного елемента одержимо

$$\dot{I}_{ml} = \frac{\dot{U}_m}{j\omega L} = \frac{U_m e^{j\psi_{0u}}}{\omega L} e^{-j\pi/2} = \frac{U_m}{\omega L} e^{j\left(\psi_{0u} - \pi/2\right)}, \tag{1.23}$$

тобто

$$\dot{I}_{ml} = I_{ml} e^{j\psi_{0i}};\ I_{ml} = \frac{U_m}{\omega L};\ \psi_{0i} = \psi_{0u} - \pi/2. \qquad (1.24)$$

Отже, на індуктивному елементі вектор струму відстає від вектора напруги на кут 90°, тобто фазовий зсув $\varphi = \psi_{0u} - \psi_{0i} = \pi/2$.

Величину ωL, як і опір, виміряють в Омах і називають *індуктивним опором* індуктивного елемента: $X_L = \omega L$. Повним опором індуктивності називають уявну величину $j\omega L$.

Комплексний опір. При моделюванні реальних електричних кіл і їх дослідженні під впливом ГВ застосовують поняття комплексного опору.

Відповідно до закону Ома відношення комплексної амплітуди напруги на елементі до комплексної амплітуди струму в цьому елементі є ***комплексним опором*** цього елемента

$$\dot{Z} = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{Ue^{j\psi_{0u}}}{Ie^{j\psi_{0i}}} = \frac{U}{Ie} e^{j(\psi_{0u} - \psi_{i0})} = Ze^{j\varphi} = R + jX, \qquad (1.25)$$

де Z – модуль комплексного опору: $Z = U/I = \sqrt{R^2 + X^2}$; φ – зсув фаз між векторами струму й напруги: $\varphi = \psi_{0u} - \psi_{0i} = arctg(X/R)$.

Графічно комплексний опір показано на рис. 1.4.

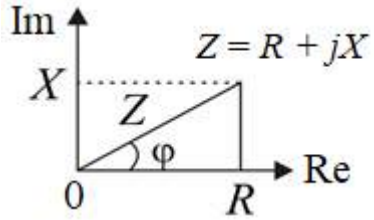


Рис. 1.4. Графічне зображення комплексного опору

Знак уявної складової визначає тип комплексного опору: якщо $X < 0$ – опір ємнісний, якщо $X > 0$ – індуктивний.

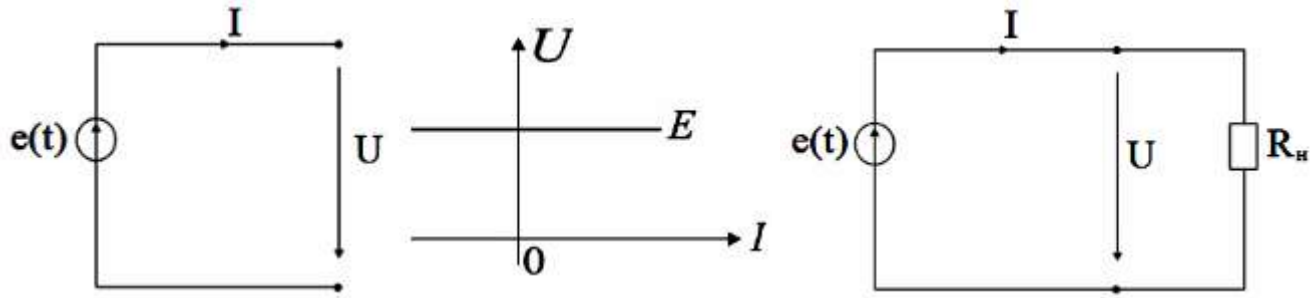
1.2. Ідеальні активні елементи кіл

При аналізі процесів в електричних колах реальні активні елементи моделюють із використанням ідеальних активних елементів.

Ідеальне джерело напруги (ІДН) (джерело напруги, джерело ЕРС) являє собою ідеалізований активний елемент, в якому напруга на затискачах не залежить від струму, що протікає через нього. Умовне графічне позначення джерела напруги (джерела ЕРС) показано на рис. 1.5, а.

Струм, що протікає через опір навантаження (рис. 1.5, в), і потужність, що виділяється на навантаженні відповідно матимуть вигляд

$$i = \frac{u}{R_H} = \frac{1}{R_H} e(t);\ p = \frac{1}{R_H} u^2 = \frac{1}{R_H} e^2(t). \qquad (1.26)$$



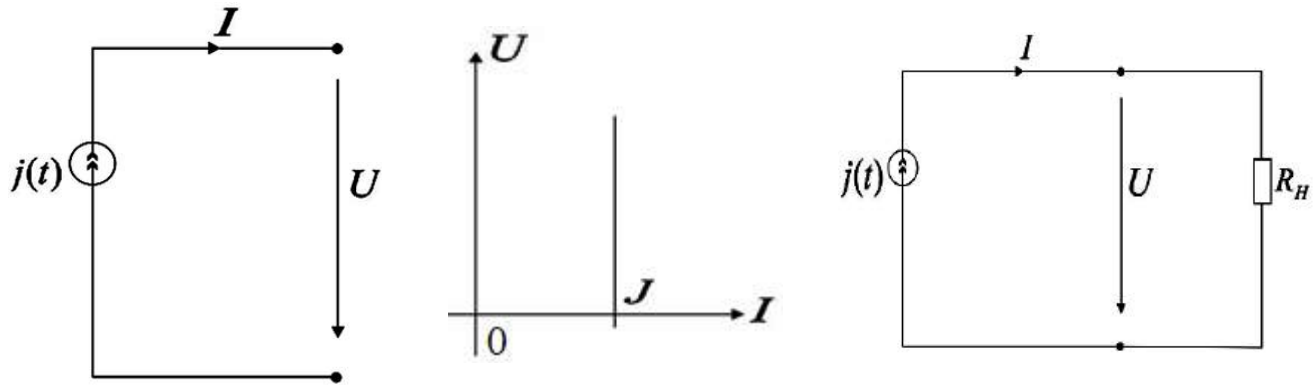
а б в

Рис. 1.5. Графічне зображення ідеального джерела ЕРС:
а – еквівалентна схема ідеального джерела ЕРС; б – графік ЕРС на затискачах ідеального джерела; в – схема підключення навантаження до джерела ЕРС

Ідеальне джерело струму (ІДС) – це ідеалізований активний елемент (рис. 1.6, а), струм якого не залежить від напруги на його затискачах (рис. 1.6, б).

Якщо підключити до зовнішніх виводів джерела струму опір навантаження R_H (рис. 1.6, в), то напруга на опорі навантаження й потужність, що виділяється на навантаженні відповідно становитимуть:

$$u = R_H i = R_H j(t);\ p = R_H i^2 = R_H j^2(t). \qquad (1.27)$$



а б в

Рис. 1.6. Графічне зображення ідеального джерела струму:
а – еквівалентна схема ідеального джерела струму; б – графік величини струму, що протікає через клеми ІДС; в – схема підключення навантаження до ІДС

1.3. Реальні пасивні елементи кіл і їх моделі

Реальними елементами із зосередженими параметрами на частотах до мегагерц є резистори, конденсатори й котушки індуктивності. При аналізі роботи цих елементів у колах використовують їх еквівалентні схеми, що складаються із ідеальних елементів.

Ідеалізовані схемні елементи – опір R, індуктивність L, ємність C – відбивають основні властивості й параметри, відповідно, резисторів, індуктивних котушок і конденсаторів, які обумовлені фізичними процесами незворотного розсіювання енергії й зворотного накопичення енергії, пов'язаної з магнітним і електричним полями.

За допомогою ідеалізованих елементів R, L і C можна скласти схеми заміщення резисторів, індуктивних котушок і конденсаторів з урахуванням побічних процесів (рис. 1.7 – 1.9).

На рис. 1.7 показана схема заміщення резистора, в якій ураховуються паразитні параметри струмонесучого шару – індуктивність L_r і ємність C_r.

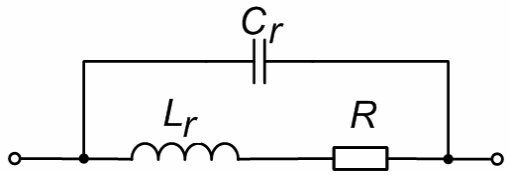


Рис. 1.7. Спрощена схема заміщення резистора

Схеми заміщення індуктивної котушки й конденсатора, в яких ураховуються втрати енергії, індуктивність виводів $L_в$, опір виводів $R_в$, опір обладнання R_y (пластини + діелектрик), опір проводу котушки R_L, міжвиткова ємність C_L, опір ізоляції $R_{із}$, зображено на рис. 1.8 і 1.9.

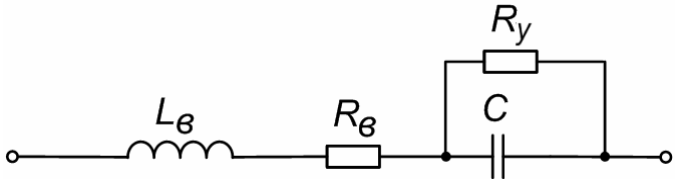


Рис. 1.8. Спрощена схема заміщення конденсатора

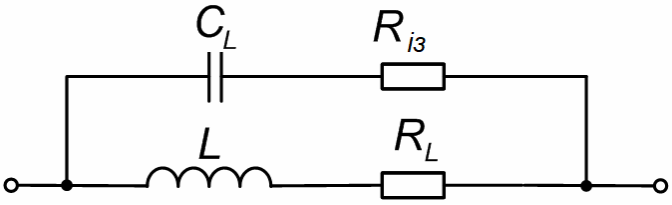


Рис. 1.9. Спрощена схема заміщення котушки індуктивності

1.4. Реальні активні елементи кіл і їх моделі

Реальні джерела енергії мають кінцеву потужність; графік їх вихідної характеристики зазвичай не є паралельним осі струмів або осі напруг, а перетинає ці осі у двох характерних точках відповідно до режимів холостого ходу (ХХ) й короткого замикання (КЗ).

З достатньою для практики точністю вихідні характеристики більшості реальних джерел енергії можна зобразити прямою лінією, яка перетинає осі струмів і напруг у точках 1 і 2 (рис. 1.10, а):

$$u_1 = u_X;\ i_1 = 0; \tag{1.28}$$

$$u_2 = 0;\ i_2 = i_K. \tag{1.29}$$

Покажемо, що лінеаризоване джерело енергії можна змоделювати колом, що складається з ідеалізованого джерела напруги E і внутрішнього

опору R_i (рис. 1.10, б) або ідеалізованого джерела струму і внутрішньої провідності G_i (рис. 1.10, в):

$$(u-u_1)/(u_2-u_1)=(i-i_1)/(i_2-i_1). \tag{1.30}$$

Підставляючи формули (1.28), (1.29) у вираз (1.30), одержимо

$$u=u_X-(u_X/i_{кз})i. \tag{1.31}$$

Другу складову (1.31) можна розглядати як спадання напруги на деякому опорі R_i, через який протікає струм джерела. Цей опір надалі будемо називати ***внутрішнім опором джерела***.

Рівнянню (1.31) відповідає послідовна схема заміщення лінеаризованого джерела.

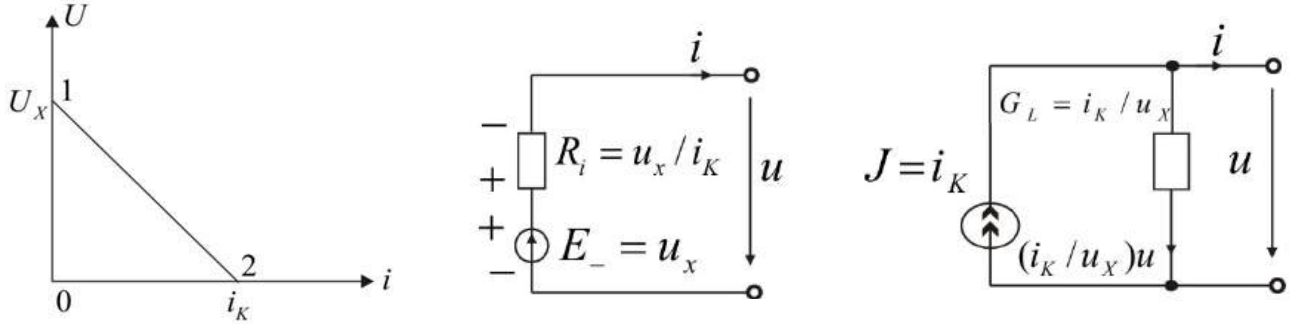
Таким чином, *ідеальне джерело напруги можна розглядати як джерело енергії, внутрішній опір якого дорівнює нулю:*

$$u=E_- - R_i i. \tag{1.32}$$

Розглянемо іншу схему заміщення лінеаризованого джерела, в якій задіяно ідеальне джерело струму. Для цього, використовуючи рівняння (1.31), виразимо струм *i* як функцію напруги на затискачах джерела:

$$i=i_k-\frac{i_k}{u_X}u. \tag{1.33}$$

Виразу (1.33) відповідає схема заміщення, зображена на рис. 1.10, в. Таку схему заміщення називають паралельною.



а б в

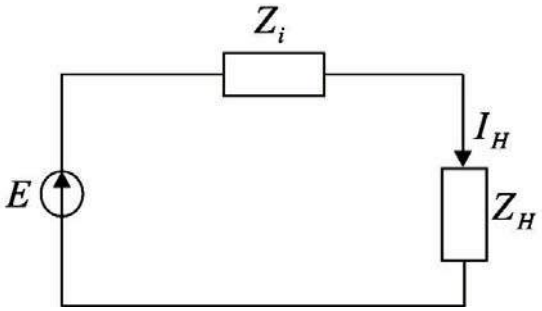
Рис. 1.10. Вихідна характеристика (а); послідовна (б) і паралельна (в) схеми заміщення лінеаризованого джерела

Для узгодження джерела електричної енергії з навантаженням необхідно вибрати такий опір навантаження Z_H, щоб забезпечити:

1) максимум резистивної потужності в навантаженні P_H **–** це важливо для кіл електрозв'язку, в яких потужності сигналів малі, тому що за відсутності узгодження джерела сигналу й навантаження малопотужні сигнали можуть «загубитися» в електричних перешкодах;

2) максимум коефіцієнта корисної дії (ККД) $\eta = P_H/P$ є важливим в колах енергопередачі, в яких прагнуть забезпечити мінімальні втрати корисної активної потужності під час передачі максимальної енергії.

Розглянемо умови узгодження *джерела напруги* з комплексним навантаженням (рис. 1.11).



$$\dot{Z}_i = R_i + jX_i$$
$$\dot{Z}_H = R_H + jX_H$$

Рис. 1.11. Підключення комплексного навантаження до джерела напруги

За законом Ома комплексне діюче значення струму в навантаженні

$$\dot{I}_{Дн} = \frac{\dot{E}_Д}{\dot{Z}_i + \dot{Z}_H} = \frac{\dot{E}_Д}{(R_i + R_H) + j(X_i + X_H)},$$

тоді резистивна потужність у навантаженні

$$P_H = I_{Дн}^2 R_H = \dot{I}_{Дн} \dot{I}_{Дн}^* R_H = \frac{E_Д^2 R_H}{(R_i + R_H)^2 + (X_i + X_H)^2}.$$

Максимум потужності в навантаженні досягається при виконанні умов:

1) $X_H = -X_i$;

2) $R_H = R_i$.

При цьому максимальна резистивна потужність у навантаженні

$$P_{H\max} = \frac{E_Д^2}{4R_H} = \frac{E^2}{8R_H}.$$

Оскільки втрати резистивної потужності відбуваються на резистивному внутрішньому опорі R_i, то ККД (коефіцієнт корисного використання резистивної потужності джерела):

$$\eta = \frac{P_H}{P_H + P_i} = \frac{I_{Дн}^2 R_H}{I_{Дн}^2 (R_H + R_i)} = \frac{R_H}{R_H + R_i}. \qquad (1.34)$$

Таким чином, чим більше R_H, тим вище коефіцієнт корисного використання резистивної потужності джерела.

Графіки залежностей нормованої резистивної потужності на навантаженні $\frac{P_H}{P_{max}}$ й ККД від величини резистивного опору навантаження R_H (для $X_H = -X_i$) показано на рис. 1.12.

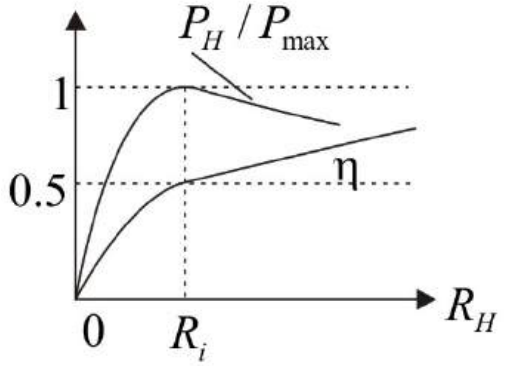


Рис. 1.12. Графіки залежностей нормованої потужності й ККД

Висновок. Умови для одержання максимумів активної потужності в навантаженні й ККД не збігаються. У колах електрозв'язку прагнуть забезпечити $R_H = R_i$, у колах енергопередачі $R_H \to \infty$.

Аналогічно можна показати, що для узгодження *джерела струму* з навантаженням потрібно забезпечити виконання таких самих умов.

2. СХЕМИ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ: ГРАФИ, СТРУКТУРНІ, ФУНКЦІОНАЛЬНІ, ПРИНЦИПОВІ, ЕКВІВАЛЕНТНІ

При аналізі реальне електричне коло (ЕК) заміняють на приблизну модель із сукупності ідеалізованих елементів, з'єднаних ідеальними провідниками (тобто, вважають, що провідники, які поєднують елементи схеми, не мають ні опору, ні ємності, ні індуктивності). Умовно-графічне зображення моделі електричного кола називають її ***схемою заміщення***.

У загальному вигляді структуру (топологію) схеми заміщення ЕК можна описати ***графом***.

Граф схеми – графічне зображення схеми, в якому гілки умовно показано лініями (ребрами), а вузли – крапками (вершинами).

У графі виділяють такі основні поняття:

– ***гілка*** – ділянка ЕК із тим самим струмом;

– ***вузол*** – точка (клема) з'єднання декількох гілок або елементів, що знаходяться під однаковим потенціалом;

– ***контур*** – будь-який замкнений шлях із гілок і вузлів;

– ***дерево графа*** – частина графа, яка містить всі вузли, але не містить жодного контуру.

Наприклад, у схемі заміщення ЕК, показаній на рис. 1.13, є сім гілок (1-2, 1-3, 2-3, 1-4, 2-4, 3-4 через L_2 і 3-4 через R_2), чотири вузли (1, 2, 3, 4) і 11 контурів.

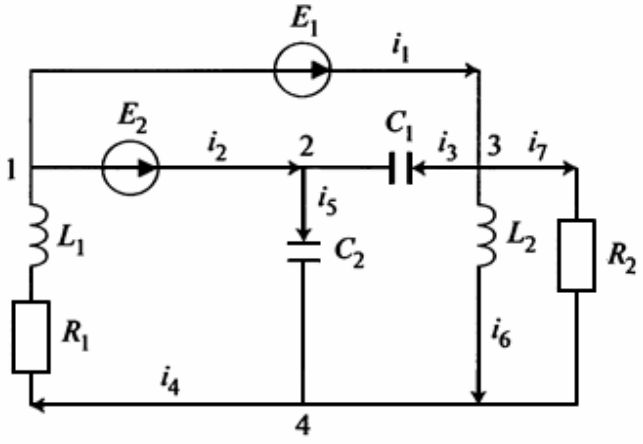


Рис. 1.13. Приклад схеми електричного кола

Граф можна формально описати за допомогою ***матриці з'єднань***, яка містить q рядків (за кількістю вузлів) і p стовпців (за кількістю гілок). На перетині і-го рядка й j-го стовпця записують:

– 1, якщо струм затікає в і-й вузол по j-й гілці;
– –1, якщо струм витікає з і-го вузла по j -й гілці;
– 0, якщо до і-го вузла j-а гілка не приєднана.

Наприклад, для схеми заміщення на рис. 1.13 матриця з'єднань має такий вигляд (номер гілки відповідає номеру струму в ній):

$$M_{4x7} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матриця $M_{q\times p}$ містить лінійно залежні рядки (сума елементів будь-якого стовпця дорівнює нулю). Кількість незалежних рядків (незалежних вузлів) у будь-якій схемі заміщення $m = q - 1$.

Виключивши один з рядків, наприклад, четвертий, одержимо

$$M_{3x7} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & .0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

З теорії графів відомо, що кількість незалежних (таких, що вирізняються хоча б одним елементом) контурів у графі, який складається з p гілок і m незалежних вузлів, дорівнює різниці $n = p - m$.

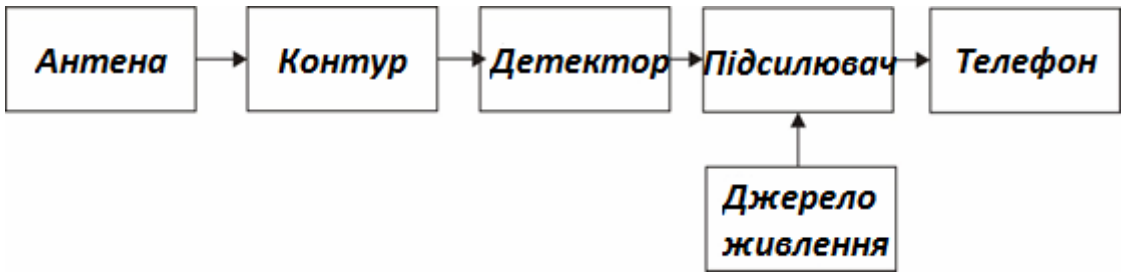
Для даної схеми: $p = 7$, $q = 4$, $m = 4 - 1 = 3$, отже $n = 7 - 3 = 4$.

Схема електрична структурна – це схема, на якій відображено основні функціональні частини виробу, їх призначення й взаємозв'язки.

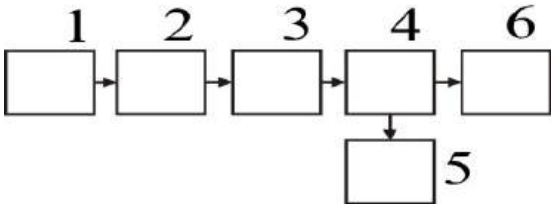
Такі схеми складають під час проектування виробу на стадіях, що передують розробленню схем інших типів, і користуються ними для загального ознайомлення з виробом. На схемі електричній структурній зображують усі основні функціональні частини виробу (елементи, пристрої й функціональні групи) і основні зв'язки між ними.

Функціональні частини виробу подають у вигляді прямокутників розмірами 10×10 або 10×15 мм або умовних графічних зображень, наведених у відповідних стандартах. Графічна побудова схеми має давати наочне уявлення про послідовність взаємодії функціональних частин виробу. На лініях взаємозв'язків рекомендується стрілками позначати напрямок процесів, що відбуваються у виробі.

На схемі мають бути зазначені найменування кожної функціональної частини виробу, якщо для цього застосовано прямокутник. Найменування в цьому випадку записують усередині прямокутників, як показано на рис. 1.14, а. За наявності великої кількості функціональних частин допускається замість найменування проставляти порядкові номери праворуч від зображення або над ним зазвичай зверху вниз і зліва направо. У цьому випадку найменування вказують у таблиці довільної форми, яку розміщують на полі схеми (див. рис. 1.14, б і табл. 1.1).



а



б

Рис. 1.14. Приклад виконання схеми електричної структурної:
а – з указанням елементів схеми; б – з нумерацією елементів схеми

Таблиця 1.1

Приклад нумерації елементів структурної схеми

Порядковий номер	Найменування
1	Антена
2	Коливальний контур
3	Детектор
4	Підсилювач
5	Джерело живлення
6	Телефон

На схемі допускається розміщувати технічні характеристики функціональних частин, пояснювальні написи, діаграми або таблиці, що визначають послідовність процесів у часі, а також вказувати параметри в характерних точках (величини напруг, струмів і т.п.).

На схемах нескладних виробів функціональні частини розташовують у вигляді прямого ланцюга відповідно до напрямку поширення сигналу зліва направо. Схеми виробів, що містять кілька каналів поширення сигналів, рекомендується виконувати у вигляді паралельних горизонтальних ланцюгів. Додаткові й допоміжні ланцюги при цьому необхідно виводити з основних ланцюгів. Для підвищення наочності основні ланцюги рекомендується розташовувати горизонтально, а додаткові й допоміжні – вертикально або горизонтально між основними ланцюгами.

Схема електрична функціональна – це схема, що пояснює певні процеси, що відбуваються в окремих функціональних колах виробу або у виробі в цілому. Такими схемами користуються для вивчення принципів роботи виробів, а також під час їх налагодження, контролю та ремонту.

Графічна побудова схеми має забезпечити найбільш наочне уявлення про послідовність процесів, що відбуваються.

На схемі зображують функціональні частини виробу (елементи, обладнання, функціональні групи) і зв'язки між ними у вигляді умовних графічних позначень (УГП), установлених у відповідних стандартах ЄСКД (єдиної системи конструкторської документації). Окремі функціональні частини допускається зображувати у вигляді прямокутників з відповідними розмірами.

Приклад схеми електричної функціональної показано на рис. 1.15.

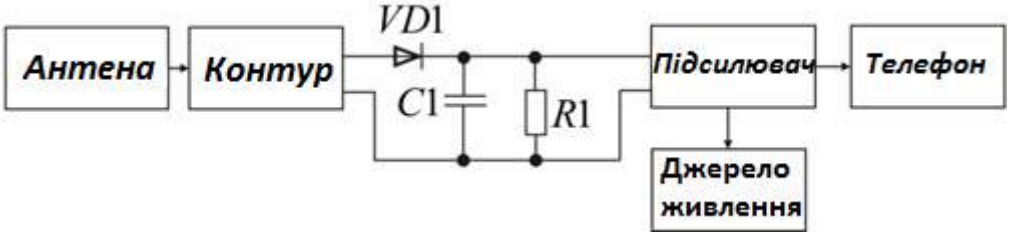


Рис. 1.15. Схема електрична функціональна приймача прямого посилення

Окремі функціональні частини на схемі допускається зображати у вигляді прямокутників. У цьому випадку частини схеми із елементною деталізацією подають за правилами виконання схем електричних принципових.

На схемі мають бути зазначені:

1. Для кожної функціональної групи – позначення, надане їй на принциповій схемі, і (або) її найменування. Якщо функціональна група зображена у вигляді УГП, то її найменування не вказують.

2. Для кожного елемента обладнання, зображеного у вигляді прямокутника, – позиційне позначення, надане йому на принциповій схемі, його найменування й тип і (або) позначення документа, на основі якого це обладнання застосоване.

3. Для кожного елемента обладнання, зображеного у вигляді УГП, – позиційне позначення, надане йому на принциповій схемі, і (або) його тип.

4. Для кожного елемента – позиційне позначення, надане йому на принциповій схемі, і (або) його тип. Найменування, позначення й типи рекомендується вписувати в прямокутники. Скорочені або умовні найменування, якщо такі є на схемі, слід пояснити на полі схеми.

Схема електрична принципова – це схема, на якій відображено повний склад елементів і зв'язків між ними, що й дає детальне уявлення про принципи роботи виробу.

На принциповій схемі зображують усі електричні елементи або пристрої, необхідні для здійснення і контролю у виробі встановлених електричних процесів, усі електричні взаємозв'язки між ними, а також електричні елементи (з'єднувачі, затискачі та інші), якими закінчуються вхідні і вихідні кола. На схемі допускається зображувати з'єднувальні і монтажні елементи, що встановлюють у виріб з конструктивних міркувань. Схеми виконують для виробів, що перебувають у відключеному стані. В обґрунтованих

випадках допускається окремі елементи схеми зображувати в робочому стані з вказівкою на полі схеми позначення режиму, для якого зображені ці елементи. Для забезпечення однозначності виконання електричного монтажу на схемі необхідно вказувати позначення виводів (контактів) елементів (обладнання), нанесені на виріб або указані в їх документації. Якщо в конструкції елемента (обладнання) і в його документації позначення виводів (контактів) не зазначені, то допускається умовно надавати їм позначення на схемі.

Крім того, принципова схема допомагає зрозуміти принцип роботи обладнання (рис. 1.16 і табл. 1.2).

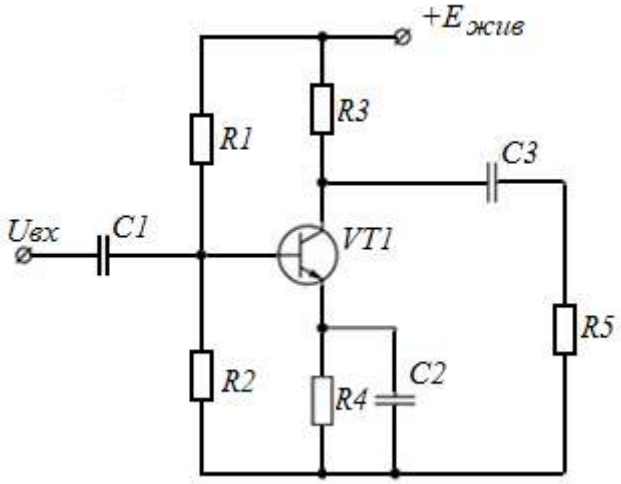


Рис. 1.16. Приклад схеми електричної принципової підсилювального каскаду

Таблиця 1.2

Спрощений спосіб подання одиниць виміру

Для резисторів	
0 … 999 Ом	Без указання одиниць виміру
10^3 … $999 \cdot 10^3$ Ом	У кілоомах з позначенням одиниць виміру літерою «к»
10^6 … $999 \cdot 10^6$ Ом	У мегаомах з позначенням одиниць виміру літерою «М»
Понад 10^9 Ом	У гігаомах з позначенням одиниць виміру літерою «Г»
Для конденсаторів	
0 … $9999 \cdot 10^{-12}$ Ф	У пікофарадах без указання одиниць виміру
10^{-8} … $9999 \cdot 10^{-6}$ Ф	У мікрофарадах з позначенням одиниць виміру літерами «мк»

Принципові схеми оформляють відповідно до таких основних правил:

– порядкові номери елементам (пристроям) слід надавати, починаючи з одиниці, у межах групи елементів (пристроїв), яким на схемі надане однакове літерне позиційне позначення (R1, R2, R3 і т.д., C1, C2, C3 і т.д.);

при цьому не допускається пропущення одного або декількох порядкових номерів на схемі;

– позиційні позначення проставляють на схемі поруч з умовними графічними позначеннями елементів і (або) пристроїв із правої сторони або над ними, не допускається перетинання позиційного позначення лініями зв'язку, УГП елемента або будь-якими іншими написами й лініями;

– лінії зв'язку мають складатися з горизонтальних і вертикальних відрізків і мати мінімальну кількість зламів і взаємних перетинань. Допускається застосовувати похилі відрізки ліній зв'язку, довжину яких слід за можливості обмежувати. Перетинання ліній зв'язку, якого не вдається уникнути, виконується під кутом 90°;

– у межах схеми всі лінії зв'язку мають бути однакової товщини; допускається використання декількох (не більше трьох) різних за товщиною ліній зв'язку для виділення функціональних груп у межах виробу;

– умовні графічні позначення елементів зображують на схемі так, як вони наведені у відповідних стандартах, або повернеными на кут, кратний 90°;

– для указання номіналів елементів (резисторів, конденсаторів) допускається застосовувати спрощений спосіб позначення одиниць виміру (див. табл. 1.2).

Схема електрична еквівалентна (схема заміщення) – це електрична схема, в якій усі елементи, що впливають на розрахунки (чинники впливу) замінені на їх ідеальні еквіваленти, а всі елементи, що не впливають на розрахунки, виключені. Така схема фактично є моделлю (ідеальним наближенням) реальної схеми для досліджуваного режиму роботи (рис. 1.17).

В еквівалентній схемі (на відміну від функціональної схеми) використовують кількісні параметри складових елементів, спираючись на які можна провести відносно простий розрахунок або наближено оцінити зазначений параметр реальної електричної схеми. Схеми електричні еквівалентні традиційно використовують для опису схем вимірювань.

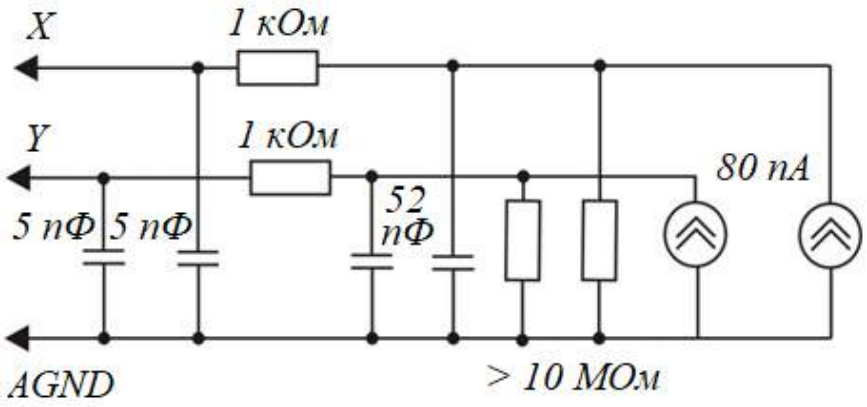


Рис. 1.17. Приклад схеми електричної еквівалентної (за змінним струмом) для диференціального входу модуля АЦП у робочому режимі

В схему електричну еквівалентну для аналізу фізики процесу, що відбувається, можуть бути введені також і неелектричні зв'язки між елементами схеми, наприклад теплові (між нагрівачем і термодатчиком), світлові (між випромінювачем і фотодатчиком), електромеханічні (між обмоткою й контактами реле) і т.д.

Дані для складання еквівалентної схеми одержують таким чином:

– з документації застосовуваних компонентів і пристроїв;

– розрахунковим шляхом (наприклад, можна розрахувати ємність кабелю, виходячи з його довжини й погонної ємності, наведеної в документації на кабель);

– шляхом прямих вимірів (наприклад, зазначену вище ємність кабелю можна виміряти);

– за запитом до виробника обладнання щодо додаткових характеристик входів / виходів, не зазначених у документації цього обладнання.

3. АНАЛІЗ ПРОСТИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

3.1. Основні закони електричних кіл

Розрахунки й аналіз електричних кіл проводять з використанням закону Ома, першого й другого законів Кірхгофа. На основі цих законів побудовані всі методи аналізу й синтезу електричних кіл.

Закон Ома встановлює взаємозв'язок струму, напруги й опору (провідності) для будь-якого елемента електричного кола:

$$i = u/R = uG. \qquad (3.1)$$

Перший закон Кірхгофа. *Алгебраїчна (з урахуванням знаків) сума струмів для будь-якого вузла дорівнює нулю,* тобто скільки струму «втікає» у вузол по одних гілках (ці струми беруться зі знаком «+»), стільки ж з нього «витікає» по інших гілках (ці струми беруться зі знаком «–»):

$$\sum_{k=1}^{m} i_k = 0. \qquad (3.2)$$

Другий закон Кірхгофа. *Алгебраїчна сума падінь напруг на елементах у будь-якому контурі дорівнює нулю,* тобто алгебраїчна сума ЕРС у контурі дорівнює алгебраїчній сумі падінь напруг на пасивних елементах цього контуру. При підсумовуванні ЕРС і падіння напруг беруться зі знаком «+», якщо їх напрямки збігаються з довільно вибраним напрямком обходу контуру, а якщо ні, то – зі знаком «–»:

$$\sum_{k=1}^{m} u_k = \sum_{l=1}^{n} e_l. \qquad (3.3)$$

Закони Ома й Кірхгофа в комплексній формі. Знаючи комплексний опір $\dot{Z}$ (або комплексну провідність $\dot{G}$) ділянки кола й одну з прикладених до певної ділянки кола величин (струму $i = \dot{I}$ або напруги $u = \dot{U}$), можна знайти невідому напругу або невідомий струм досліджуваної ділянки:

$$\dot{U} = \dot{I}\dot{Z};\ \dot{I} = \dot{U}/\dot{Z}. \qquad (3.4)$$

Аналогічно комплексні діючі значення напруги й струму на затискачах ділянки кола відповідно становитимуть

$$\dot{U}_Д = \dot{I}_Д\dot{Z};\ \dot{I}_Д = \dot{U}_Д/\dot{Z}. \qquad (3.5)$$

Зв'язок між діючими й амплітудними значеннями струмів і напруг має вигляд

$$U_Д = \frac{1}{\sqrt{2}}U;\quad I_Д = \frac{1}{\sqrt{2}}I.$$

Вирази (3.4), (3.5) є математичними записами закону Ома в комплексній формі.

Подаючи всі ідеалізовані пасивні елементи, які входять до модельованого кола, їх комплексними схемами заміщення, а струми й ЕРС усіх ідеалізованих джерел – їх комплексними амплітудами або комплексними діючими значеннями, одержуємо ***комплексну схему заміщення електричного кола***.

Миттєві значення струмів і напруг різних гілок електричного кола зв'язані між собою лінійними алгебраїчними рівняннями балансу струмів і напруг, які складаються на основі законів Кірхгофа.

Оскільки підсумовуванню гармонійних функцій часу відповідає підсумовування їх комплексних амплітуд, то можна перейти від законів Кірхгофа для миттєвих значень струмів і напруг до законів Кірхгофа для комплексних амплітуд струмів і напруг, які називаються зазвичай законами Кірхгофа в комплексній формі.

Перший закон Кірхгофа в комплексній формі: сума комплексних амплітуд (комплексних діючих значень) струмів усіх гілок, підключених до кожного з вузлів електричного кола, дорівнює нулю:

$$\sum_q \dot{I}_q = 0;\ \sum_q \dot{I}_{Дq} = 0, \qquad (3.6)$$

де q – номер гілки, підключеної до певного вузла.

Другий закон Кірхгофа в комплексній формі: сума комплексних амплітуд (комплексних діючих значень) напруг усіх гілок, що входять до будь-якого контуру електричного кола, дорівнює нулю:

$$\sum_q \dot{U}_q = 0;\ \sum_q \dot{U}_{Дq} = 0. \qquad (3.7)$$

Загальна схема застосування методу комплексних амплітуд

Аналіз кіл методом комплексних амплітуд складається з таких етапів:

1) заміна гармонійних струмів і напруг усіх гілок їх комплексними амплітудами, а еквівалентної схеми електричного кола для миттєвих значень – комплексною схемою заміщення;

2) складання рівнянь електричної рівноваги для комплексних ампулітуд струмів і напруг на основі законів Ома й Кірхгофа в комплексній формі;

3) розв'язання системи рівнянь електричної рівноваги щодо комплексних амплітуд досліджуваних струмів і напруг;

4) перехід від комплексних зображень струмів $\dot{I}(j\omega)$ і напруг $\dot{U}(j\omega)$ до їх оригіналів $i(t)$ і $u(t)$.

3.2. Види потужності в електричних колах

Розглянемо миттєву потужність пасивного лінійного двополюсника при гармонійному впливі.

Для впливу $u = U\cos(\omega t)$ ($\varphi_{0u} = 0$) відгук буде

$$i = I\cos(\omega t + \varphi_{0i}) = I\cos(\omega t - \varphi),$$

де φ – зсув за фазою між напругою та струмом.

Тоді миттєва потужність кола

$$p = ui = UI\cos(\omega t)\cos(\omega t - \varphi) = \frac{UI}{2}\cos(\varphi)\cos(2\omega t - \varphi) =$$

$$= \frac{UI}{2}\cos(\varphi) + \frac{UI}{2}\left[\cos(2\omega t)\cos(\varphi) + \sin(2\omega t)\sin(\varphi)\right] =$$

$$= \frac{UI}{2}\cos(\varphi)\left[1 + \cos(2\omega t)\right] + \frac{UI}{2}\sin(\varphi)\sin(2\omega t) =$$

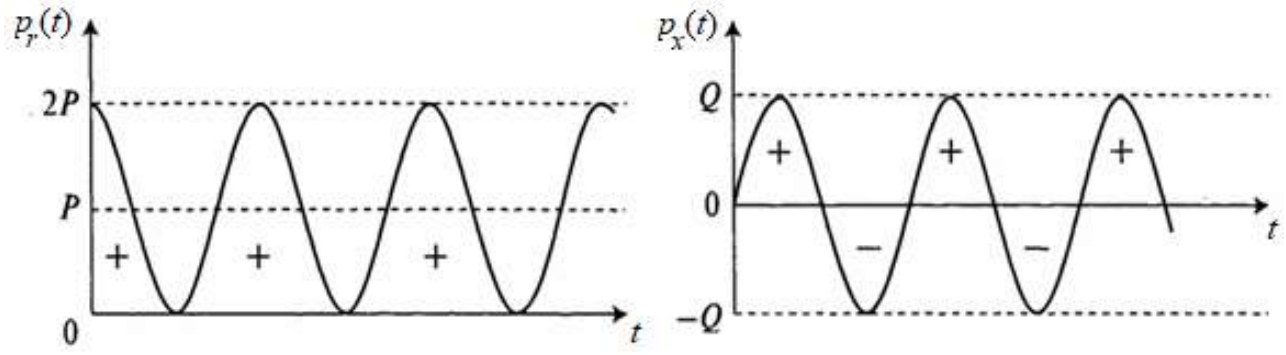
$$= p_r(t) + p_x(t) = P\left[1 + \cos(2\omega t)\right] + Q\sin(2\omega t), \qquad (3.8)$$

де $p_r(t)$ (завжди більше 0) – миттєва резистивна потужність втрат; $p_x(t)$ (може бути більше або менше 0) – миттєва реактивна потужність втрат.

Амплітуду $P = \frac{UI}{2}\cos(\varphi)$ називають ***резистивною (активною) потужністю*** кола.

Амплітуду $Q = \frac{UI}{2}\sin(\varphi)$ називають ***реактивною потужністю*** кола.

Часові діаграми миттєвої резистивної $p_r(t)$ та реактивної $p_x(t)$ потужностей кола показано на рис. 3.1.



а б

Рис. 3.1. Часові діаграми миттєвих резистивної (а) і реактивної (б) потужностей

Повною потужністю двополюсника (кола) називають величину

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \frac{UI}{2} = \frac{I^2 Z}{2} = U_Д I_Д = I_Д^2 Z, \qquad (3.9)$$

де Z – модуль опору двополюсника; U і I – ефективні (діючі) значення напруги й струму в колі.

Взаємозв'язок резистивної P, реактивної Q і повної S потужностей утворює на комплексній площині трикутник (рис. 3.2).

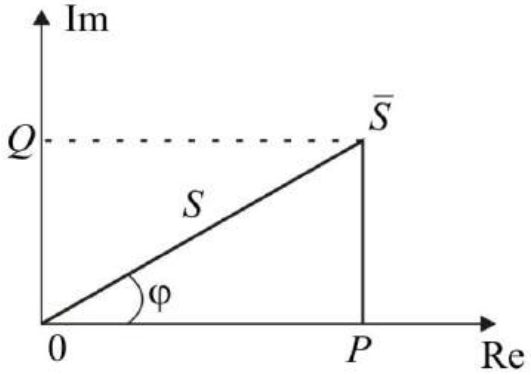


Рис. 3.2. Взаємозв'язок резистивної, реактивної й повної потужностей

Взаємозв'язок резистивної, реактивної й повної потужностей визначають таким способом:

$$\cos\varphi = \frac{R}{Z};\ \ \sin\varphi = \frac{X}{Z};\ \ \ tg\,\varphi = \frac{X}{R};$$

$$P = S\cos\varphi = \frac{I^2 Z}{2}\frac{R}{Z} = \frac{I^2 R}{2} = I_Д^2 R; \qquad (3.10)$$

$$Q = S\sin\varphi = \frac{I^2 Z}{2}\frac{X}{Z} = \frac{I^2 X}{2} = I_Д^2 X.$$

Величину $\cos\varphi = \frac{R}{Z} = \frac{P}{S}$ називають ***коефіцієнтом потужності*** кола, тому що вона відображає відношення *корисної резистивної потужності* до *повної потужності* кола, і використовують як один з основних параметрів кіл енергопередачі, а величину $tg\varphi = \frac{X}{R} = \frac{Q}{P}$ – ***добротністю*** кола, тому що вона відображає відношення *реактивної* й *резистивної потужностей,* тобто резонансні властивості кола, і її використовують як один з основних параметрів кіл електрозв'язку.

Аналогічно комплексному опору $\dot{Z}$ за відомими координатами на комплексній площині P і Q можна визначити ***комплексну потужність*** $\dot{S}$:

$$\dot{S} = P + jQ = S\left(\cos\varphi + j\sin\varphi\right) = Se^{j\varphi} = Se^{j\left(\varphi_{0u} - \varphi_{0i}\right)} =$$

$$= \frac{UI}{2}e^{j\left(\varphi_{0u}\right)}e^{j\left(-\varphi_{0i}\right)} = \frac{Ue^{j\left(\varphi_{0u}\right)}Ie^{j\left(-\varphi_{0i}\right)}}{2} = \frac{\dot{U}\dot{I}^*}{2} = \frac{I^2\dot{Z}}{2} = I_Д^2\dot{Z}, \qquad (3.11)$$

де $\dot{I}^*$ – величина, комплексно сполучена з $\dot{I}$, $\dot{I} = Ie^{j\varphi_{0i}}$, $\dot{I}^* = Ie^{-j\varphi_{0i}}$, $\dot{I}\dot{I}^* = I^2$, $\dot{I}_Д\dot{I}^*_Д = I^2_Д$.

3.3. Еквівалентні перетворення електричних кіл

Для зручності аналізу електричного кола часто застосовують еквівалентні перетворення. ***Умова еквівалентності перетворення одного кола в інше:*** збереження незмінними струмів і напруг (для активних ЕК) і опорів і провідностей (для пасивних ЕК) у точках перетворення.

1. Перетворення послідовно з'єднаних опорів

Елементи електричного кола з'єднані послідовно, якщо через них протікає той самий електричний струм (рис. 3.3).

Рис. 3.3. Послідовне з'єднання елементів ЕК

При послідовному з'єднанні елементів електричного кола *їх опори підсумовують*:

$$R_e = \sum_{i=1}^{N} R_i \,. \tag{3.12}$$

2. Перетворення паралельно з'єднаних провідностей

Елементи електричного кола з'єднані паралельно, якщо до них прикладена та сама електрична напруга (рис. 3.4).

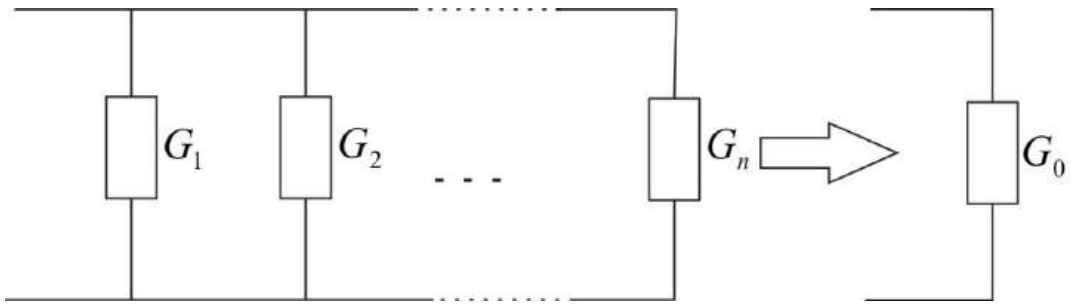


Рис. 3.4. Паралельне з'єднання елементів ЕК

При паралельному з'єднанні елементів електричного кола *їх провідності підсумовують:*

$$G_e = \sum_{i=1}^{N} G_i \,. \tag{3.13}$$

З першого й другого перетворень одержуємо два правила.

Правило дільника напруги

Відношення напруг на елементах послідовного кола дорівнює відношенню опорів цих елементів (рис. 3.5):

$$u_i \Big/ E = \frac{R_i}{\sum\limits_{k=1}^{N} R_k} \quad \Rightarrow \quad u_i = \frac{ER_i}{\sum\limits_{k=1}^{N} R_k}. \tag{3.14}$$

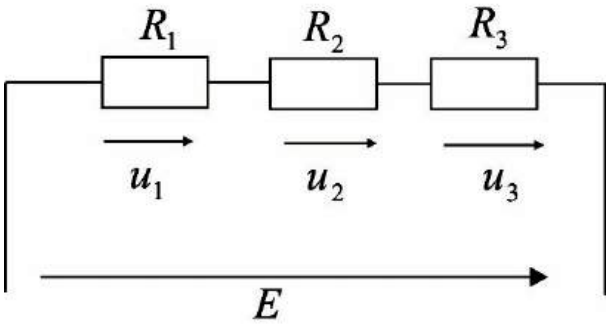


Рис. 3.5. Розподіл напруг на послідовно з'єднаних елементах

Правило дільника струму

Відношення струмів у паралельних гілках дорівнює відношенню провідностей цих гілок (рис. 3.6):

$$i \Big/ i_i = \frac{u \Big/ R}{u \Big/ R_i} = \frac{1 \Big/ R}{1 \Big/ R_i} = \frac{G}{G_i}, \tag{3.15}$$

звідки

$$i_i = \frac{iR}{\sum\limits_{k=1}^{N} R_k}. \tag{3.16}$$

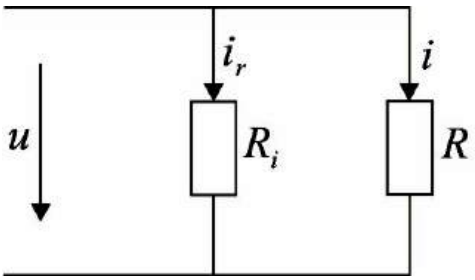


Рис. 3.6. Розподіл струму на паралельно з'єднаних елементах

3. Перетворення РДН (реального джерела напруги) у РДС (реальне джерело струму) і навпаки

У схемі з джерелом напруги струм навантаження

$$i = \frac{E}{R_i + R}.$$

У схемі з джерелом струму струм навантаження

$$i = \frac{iR_i}{R_i + R}.$$

З умови еквівалентності перетворення

$$E = IR_i. \qquad (3.17)$$

Взаємозамінними є тільки реальні джерела. Ідеальні джерела напруги й току не взаємозамінні. Перехід від однієї схеми заміщення до іншої є можливим тільки для джерел, внутрішній опір яких має кінцеве значення ($R_i \neq 0$ і $R_i \neq \infty$) (рис. 3.7).

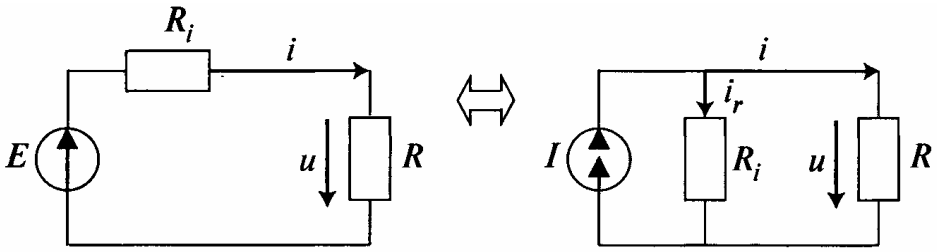


Рис. 3.7. Перетворення РДН у РДС

4. Заміна декількох послідовно з'єднаних РДН

При послідовному з'єднанні РДН їх внутрішні опори й ЕРС(з урахуванням напрямків) *підсумовують* (рис. 3.8):

$$E_e = \sum_{i=1}^{N} E_i \; ; \; R_e = \sum_{i=1}^{N} R_i \; . \qquad (3.18)$$

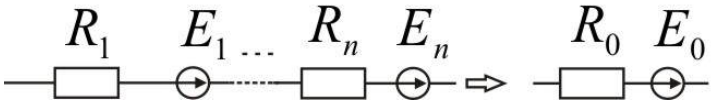


Рис. 3.8. Заміна послідовно з'єднаних РДН

5. Заміна декількох паралельно з'єднаних РДС

При паралельному з'єднанні РДС їх внутрішні провідності й струми (з урахуванням напрямків) *підсумовують* (рис. 3.9):

$$I_e = \sum_{i=1}^{N} I_i \; ; \; {}^{1}\!/_{R_e} = \sum_{i=1}^{N} {}^{1}\!/_{R_i} \; . \qquad (3.19)$$

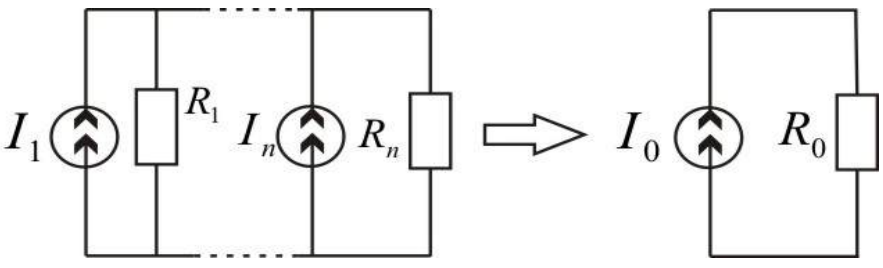


Рис. 3.9. Заміна паралельно з'єднаних РДС

6. Заміна декількох паралельно з'єднаних РДН одним еквівалентним РДС

РДН спочатку перетворюють у РДС і далі використовують перетворення 5.

7. Заміна декількох послідовно з'єднаних РДС одним еквівалентним РДН.

РДТ спочатку перетворюють у РДН і далі використовують перетворення 4.

8. Перетворення кола «зірка» у коло «трикутник» і навпаки показано на схемі (рис. 3.10).

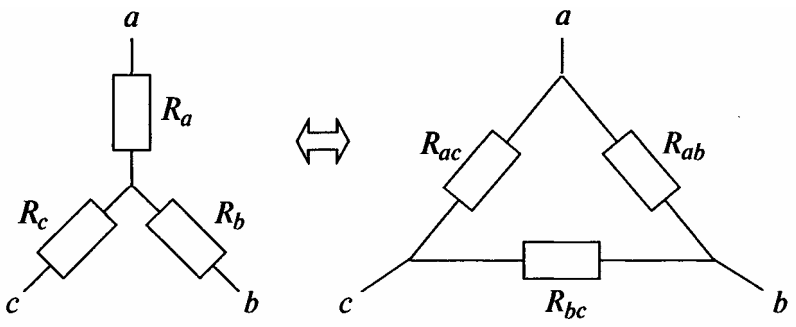


Рис. 3.10. З'єднання «зірка» та «трикутник»

Елементи при перетворенні з'єднання опорів за типом «зірка» у тип «трикутник» і навпаки обчислюють так:

$$R_a = \frac{R_{ab}R_{ac}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ac}}; \qquad R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_aR_b}{R_c};$$

$$R_a = \frac{R_{ab}R_{bc}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ac}}; \qquad R_{ab} = R_b + R_c + \frac{R_bR_c}{R_a};$$

$$R_c = \frac{R_{bc}R_{ac}}{R_{ab}+R_{bc}+R_{ac}}; \qquad R_{ac} = R_a + R_c + \frac{R_aR_c}{R_b}. \qquad (3.20)$$

Послідовне з'єднання одного резистивного (R) і одного реактивного (X) елементів показано на рис. 3.11.

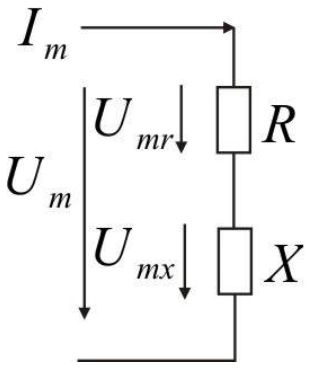


Рис. 3.11. Послідовне з'єднання резистивного й реактивного елементів

За вхідний вплив беруть *комплексну амплітуду загального струму* $\dot{I}$, а як відгук – *комплексну амплітуду напруги* $\dot{U}$, тоді за другим законом Кірхгофа одержуємо

$$\dot{U} = \dot{U}_r + \dot{U}_x = \dot{I}R + \dot{I}jX = \dot{I}(R + jX);$$

$$\dot{Z} = R + jX = Ze^{j\phi} = \sqrt{R^2 + X^2}e^{jarctg\left(X/R\right)}.$$

Для кола з індуктивним елементом

$$\dot{Z} = R + jX_l = R + j\omega L;\ Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2};$$

$$\phi_l = arctg\left(\omega L/R\right) > 0. \qquad (3.21)$$

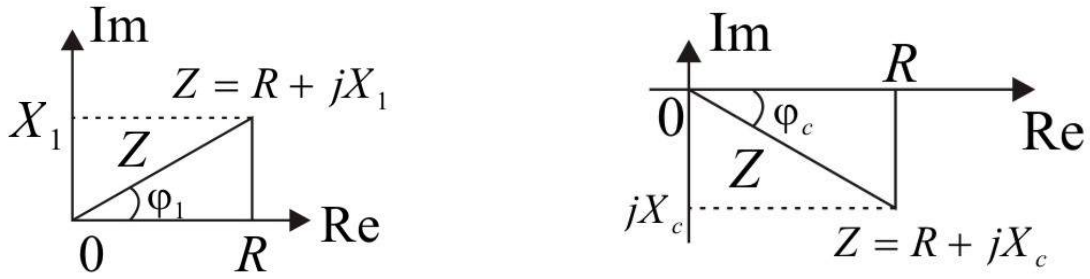
Для кола з ємнісним елементом

$$\dot{Z} = R + jX_c = R + j\frac{-1}{\omega C};\ Z = \sqrt{R^2 + 1/\left(\omega^2 C^2\right)};$$

$$\phi_c = arctg\left(-1/\omega CR\right) < 0. \qquad (3.22)$$

Таким чином, у колі з індуктивним елементом аргумент комплексного опору $\varphi_l > 0$, а у колі з ємнісним елементом $\varphi_c < 0$.

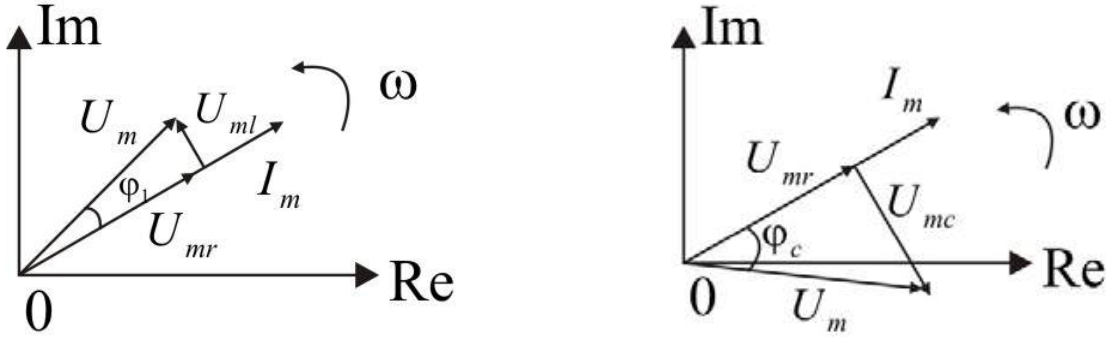
Наочне уявлення про характер кола дають векторні діаграми комплексних амплітуд струмів і напруг (рис. 3.12).



а б

Рис. 3.12. Векторні діаграми комплексних амплітуд струмів і напруг

Векторні діаграми струмів і напруг для послідовного змішаного кола при заданому вхідному струмі показано на рис. 3.13 (масштаби струмів і напруг різні, їх вибирають, виходячи зі зручності подання).



а б

Рис. 3.13. Векторні діаграми струмів і напруг кіл із послідовно включеними індуктивним (а) і ємнісним (б) елементами

У колі з індуктивним елементом (див. рис. 3.13, а*)* вектор струму *відстає* від вектора напруги, а у колі з ємнісним елементом (див. рис. 3.13, б) *випереджає* його.

Паралельне з'єднання одного резистивного й одного реактивного елементів зображено на рис. 3.14.

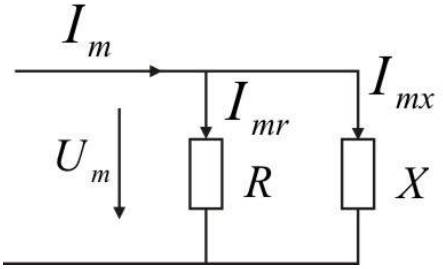


Рис. 3.14. Паралельне з'єднання резистивного й реактивного елементів

Якщо за вхідний вплив взяти *комплексну амплітуду загальної напруги* $\dot{U}$*,* а як відгук – *комплексну амплітуду струму* $\dot{I}$*,* тоді за першим законом Кірхгофа одержимо

$$\dot{I} = \dot{I}_r + \dot{I}_x = \frac{\dot{U}}{R} + \frac{\dot{U}}{jX} = \dot{U}\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{jX}\right);$$

$$\dot{Y} = \frac{1}{R} - j\frac{1}{X} = G + jB = Ye^{-j\phi} = \sqrt{G^2 + B^2}\, e^{jarctg\left(B/G\right)}.$$

Для кола з індуктивним елементом

$$\dot{Y}_L = \frac{1}{R} - j\frac{1}{X_L} = G - j\frac{1}{\omega L}; \qquad (3.23)$$

$-\varphi_L = arctg\left(-1/\omega LG\right) < 0$ або $\varphi_L > 0$ (індуктивний характер).

Таким чином, трикутник провідностей для паралельного кола з індуктивним елементом є аналогічним трикутнику опорів для послідовного кола з ємнісним елементом (див. рис. 3.13, б).

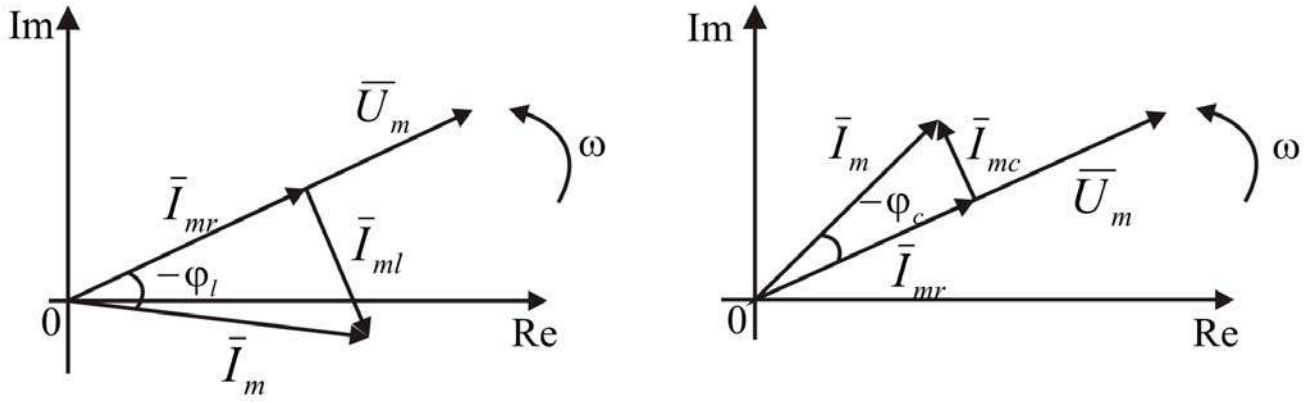
Для кола з ємнісним елементом

$$\dot{Y}_C = \frac{1}{R} - j\frac{1}{X_C} = G - j(-\omega C) = G + j\omega C = G + jB_C, \qquad (3.24)$$

$-\varphi_C = arctg\left(\omega C/G\right) > 0$, або $\varphi_C < 0$ (ємнісний характер).

Таким чином, трикутник провідностей для паралельного кола з ємнісним елементом є аналогічним трикутнику опорів для послідовного кола з індуктивним елементом (див. рис. 3.13, а).

Схеми паралельного з'єднання резистивного й реактивного елементів при заданій вхідній напрузі показано на рис. 3.14, а векторні діаграми – на рис. 3.15. У колі з індуктивним елементом (див. рис. 3.15, а) вектор струму *відстає* від вектора напруги, а у колі з ємнісним елементом (див. рис. 3.15, б) *випереджає* його.



а б

Рис. 3.15. Векторні діаграми струмів і напруг кіл із паралельно включеними індуктивним (а) і ємнісним (б) елементами

4. АНАЛІЗ СКЛАДНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Складне електричне коло – це коло, що містить елементи, що не утворюють послідовного, паралельного або послідовно-паралельного включення опорів, або коло, яке містить декілька генераторів.

Розрахунки складних електричних кіл проводять із застосуванням певних методів. Усі існуючі методи розрахунків кіл залежно від принципу їх реалізації можна поділити на дві великі групи:

1. Методи, основані на складанні рівнянь із використанням законів Кірхгофа з подальшим їх спільним розв'язанням. До цієї групи методів належать зокрема такі: безпосереднє використання законів Кірхгофа, метод контурних струмів, метод вузлових потенціалів.

2. Методи, основані на перетворенні складного електричного кола в просте з подальшим його аналізом за допомогою закону Ома. До цієї групи методів належать такі, як метод накладення, метод еквівалентного генератора, метод перетворення «трикутника» в «зірку» тощо.

4.1. Аналіз складних електричних кіл за методом рівнянь Кірхгофа

Універсальним методом аналізу кіл є використання законів Кірхгофа.

Перший закон Кірхгофа встановлює взаємозв'язок струмів для будь-якого вузла ЕК. Оскільки в ЕК, яке має *p* гілок і *q* вузлів, кількість незалежних вузлів $m = q - 1$, то кількість лінійно незалежних рівнянь, складених за першим законом Кірхгофа, також дорівнює *m.*

Другий закон Кірхгофа встановлює взаємозв'язок напруг у будь-якому контурі ЕК. Оскільки в ЕК, яке має *p* гілок і *q* вузлів, кількість незалежних контурів $n = p - m,$ то кількість лінійно незалежних рівнянь, складених за другим законом Кірхгофа, також дорівнює *n*.

Загальна кількість лінійно незалежних рівнянь для ЕК дорівнює $m + n = p,$ що відповідає загальній кількості невідомих струмів у гілках.

Приклад. Задано резистивне коло, в якому шість гілок (p = 6) і чотири вузли (q = 4) (рис. 4.1).

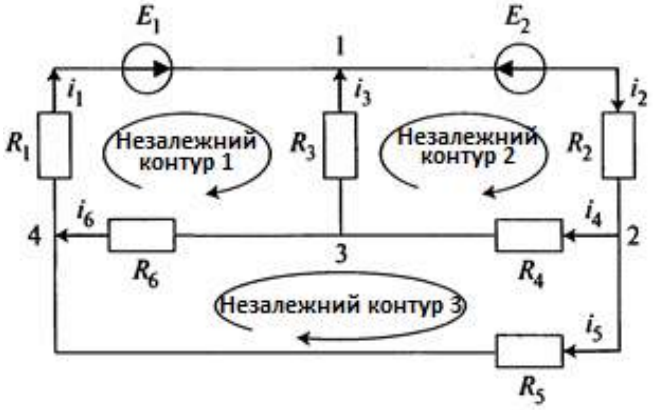


Рис. 4.1. Резистивне коло

Отже: $m = q - 1 = 4 - 1 = 3$; $n = p - m = 6 - 3 = 3$.

Позначимо в цьому колі довільні напрямки миттєвих струмів у гілках.

Складемо за першим законом Кірхгофа три рівняння ($m = 3$) для будь-яких трьох вузлів, наприклад:

$$\begin{cases} \textit{для вузла } 1: & i_1 - i_2 + i_3 = 0; \\ \textit{для вузла } 2: & i_2 - i_4 - i_5 = 0; \\ \textit{для вузла } 3: & -i_3 + i_4 - i_6 = 0. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Складемо за другим законом Кірхгофа три рівняння ($n = 3$) для будь-яких трьох контурів. Якщо вибрати напрямок обходу контурів за годинниковою стрілкою, то одержимо:

$$\begin{cases} \textit{для контуру } 1: & u_1 - u_3 + u_6 = E_1; \\ \textit{для контуру } 2: & u_3 + u_2 + u_4 = -E_2; \\ \textit{для контуру } 3: & -u_4 + u_5 - u_6 = 0. \end{cases} \qquad (4.2)$$

За законом Ома:

$$u_1 = i_1R_1;\ u_2 = i_2R_2;\ u_3 = i_3R_3;\ u_4 = i_4R_4;\ u_5 = i_5R_5;\ u_6 = i_6R_6.$$

Після підстановки цих співвідношень у формулу (4.1) з урахуванням виразу (4.2) одержимо шість рівнянь із шістьома невідомими струмами гілок. Ці рівняння можна розв'язати, наприклад, за методом Крамера.

Після визначення струмів у гілках за законом Ома знаходимо напруги на елементах цих гілок.

4.2. Аналіз складних електричних кіл методом контурних струмів

У методі контурних струмів (МКС) використовують $n = p - m$ лінійно незалежних рівнянь за кількістю незалежних контурів кола.

За наявності в колі *ідеальних джерел струму* (ІДС) можна визначити відповідний контурний струм, при цьому ІДС має входити тільки в один з незалежних контурів.

За наявності в схемі *реальних джерел струму* (РДС) їх слід шляхом еквівалентних перетворень замінити реальними джерелами напруги (РДН) або розглядати РДС як контур з ІДС, контурний струм в якому визначається струмом ІДС.

У МКС використовують такі основні поняття:

– *контурний струм* – умовний струм довільного напрямку, що протікає в кожному незалежному контурі, позначають $I_{K1}, I_{K2},\ldots, I_{Kn}$;

– *власний опір контуру* – алгебраїчна сума опорів усіх елементів контуру, позначають $R_{11}, R_{22}, \ldots, R_{nn}$;

– *взаємний опір суміжних контурів* – опір спільного елемента двох незалежних суміжних контурів, позначають R_{ij}, де i і j – номера суміжних контурів; беруть зі знаком «+», якщо напрямки контурних струмів суміжних контурів збігаються на спільному елементі, і зі знаком «–», якщо ні;

– *контурна ЕРС* – алгебраїчна сума всіх ЕРС для кожного незалежного контуру, позначають $E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}$; при підсумовуванні кожну ЕРС контуру беруть зі знаком «+», якщо її напрямок збігається з напрямком контурного струму, і зі знаком «–», якщо ні.

В алгоритм МКС входять чотири групи операцій:

1. *Вибір n незалежних контурів,* довільний вибір напрямків контурних струмів і струмів у гілках. Ідеальні джерела струму мають входити тільки в один певний незалежний контур, оскільки вони визначають величину його контурного струму.

2. *Запис системи стандартизованих лінійних рівнянь* для всіх незалежних контурів:

$$\begin{cases} I_{k1}R_{11} + I_{k2}R_{12} + \ldots + I_{kn}R_{1n} = E_{11}; \\ I_{k2}R_{21} + I_{k2}R_{22} + \ldots + I_{kn}R_{2n} = E_{22}; \\ - \\ I_{k1}R_{n1} + I_{k2}R_{n2} + \ldots + I_{kn}R_{nn} = E_{nn}, \end{cases} \tag{4.3}$$

а також розрахунки й підстановка в (4.3) коефіцієнтів при невідомих контурних струмах і вільних членів, тобто власних опорів контурів $R_{11}, R_{22}, \ldots, R_{nn}$, взаємних опорів R_{ij} (причому $R_{ij} = R_{ij}$,) і контурних ЕРС $E_{11}, E_{22},\ldots, E_{nn}$.

Система рівнянь (4.3) може бути подана в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \ldots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \ldots & R_{21} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ R_{n1} & R_{n2} & \ldots & R_{nn} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} I_{k1} \\ I_{k2} \\ \ldots \\ I_{kn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ \ldots \\ E_{nn} \end{bmatrix}. \tag{4.4}$$

3. *Розв'язання матричного рівняння* (4.4) щодо контурних струмів у вигляді

$$[I] = [R]^{-1}[E]$$

або *системи рівнянь* (4.3), наприклад, методом Крамера:

$$I_{ki} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, i = 1,\ldots,n,$$

де Δ – визначник матриці [*R*], а Δ_i – визначник Δ, в якому замість і-го стовпця знаходиться матриця-стовпець [*E*].

4. *Визначення струмів у гілках* за методом накладення отриманих значень контурних струмів I_{ki}.

Приклад. Потрібно визначити струми гілок у схемі на рис. 4.2.

Розв'язуємо задачу згідно з алгоритмом МКС.

1. У схемі є $n = 4$ незалежних контурів з контурними струмами $I_{к1}$, $I_{к2}$, $I_{к3}$ і $I_{к4}$, напрямок яких, як і напрямок струмів у гілках, виберемо довільно.

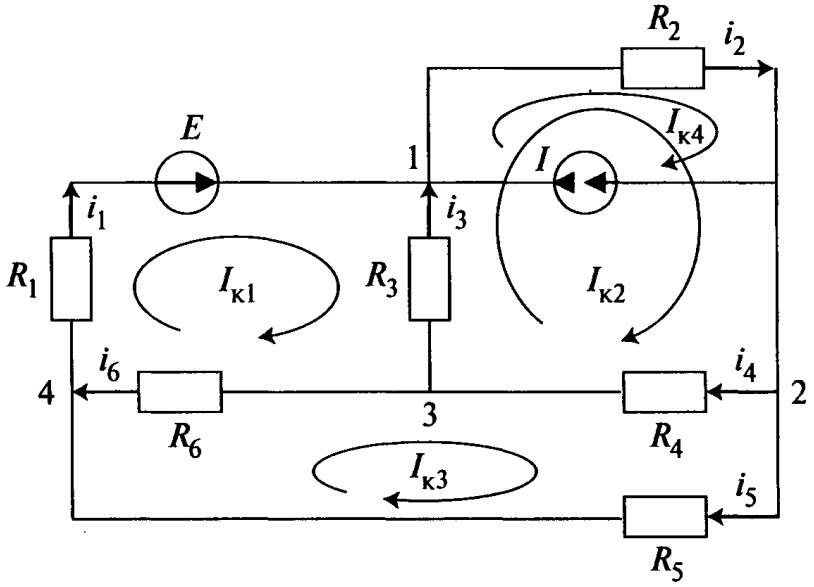


Рис. 4.2. Схема кола із сьома гілками

2. Оскільки контурний струм ($I_{к4} = I$) відомий, одержуємо систему стандартизованих рівнянь для трьох незалежних контурів:

$$\begin{cases} I_{k1}R_{11} + I_{k2}R_{12} + I_{k3}R_{13} + I_{k4}R_{14} = E_{11}; \\ I_{k2}R_{21} + I_{k2}R_{22} + I_{k3}R_{23} + I_{k4}R_{24} = E_{22};, \\ I_{k1}R_{31} + I_{k2}R_{32} + I_{k3}R_{33} + I_{k4}R_{34} = E_{33}, \end{cases}$$

де

$$R_{11} = R_1 + R_3 + R_6;\ R_{12} = R_{21} = -R_3;\ R_{14} = 0;\ E_{11} = E;$$

$$R_{22} = R_2 + R_3 + R_4;\ R_{23} = R_{32} = -R_4;\ R_{24} = R_2;\ E_{22} = 0;$$

$$R_{33} = R_4 + R_5 + R_6;\ R_{13} = R_{31} = -R_6;\ R_{34} = 0;\ E_{33} = 0.$$

3. Розв'язуємо цю систему рівнянь за методом Крамера. Позначимо:

$$E'_{11} = E_{11} - IR_{14},\ E'_{22} = E_{22} - IR_{24},\ E'_{33} = E_{33} - IR_{34}.$$

Запишемо й обчислимо визначники:

$$\Delta = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & R_{13} \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} \\ R_{31} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix};\quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} E'_{11} & R_{12} & R_{13} \\ E'_{22} & R_{22} & R_{23} \\ E'_{33} & R_{32} & R_{33} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} R_{11} & E'_{11} & R_{13} \\ R_{21} & E'_{22} & R_{23} \\ R_{31} & E'_{33} & R_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} R_{11} & R_{12} & E'_{11} \\ R_{21} & R_{22} & E'_{22} \\ R_{31} & R_{32} & E'_{33} \end{vmatrix}.$$

Контурні струми знаходимо як

$$I_{k1} = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \; I_{k2} = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \; I_{k3} = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

4. Визначимо дійсні струми в гілках за методом накладення контурних струмів:

$$i_1 = I_{k1}; \; i_2 = I_{k2}; \; i_3 = I_{k2} - I_{k1};$$
$$i_4 = I_{k2} - I_{k3}; \; i_5 = I_{k3}; \; i_6 = I_{k1} - I_{k3}.$$

4.3. Аналіз складних електричних кіл методом вузлових потенціалів

Метод вузлових потенціалів дозволяє скласти систему рівнянь, за якою можна визначити потенціали всіх вузлів схеми. Якщо відомі різниці вузлових потенціалів, то можна визначити струми у всіх гілках.

У схемі на рис. 4.3 є чотири вузли. Потенціал будь-якої точки схеми можна взяти таким, що дорівнює нулю. Тоді невідомими залишаться три потенціали. Вузол, величину потенціалу якого вибирають довільно, називають базисним.

Як базовий вузол у схемі на рис. 4.3 візьмемо вузол 4. Потім укажемо в схемі довільний напрямок струмів.

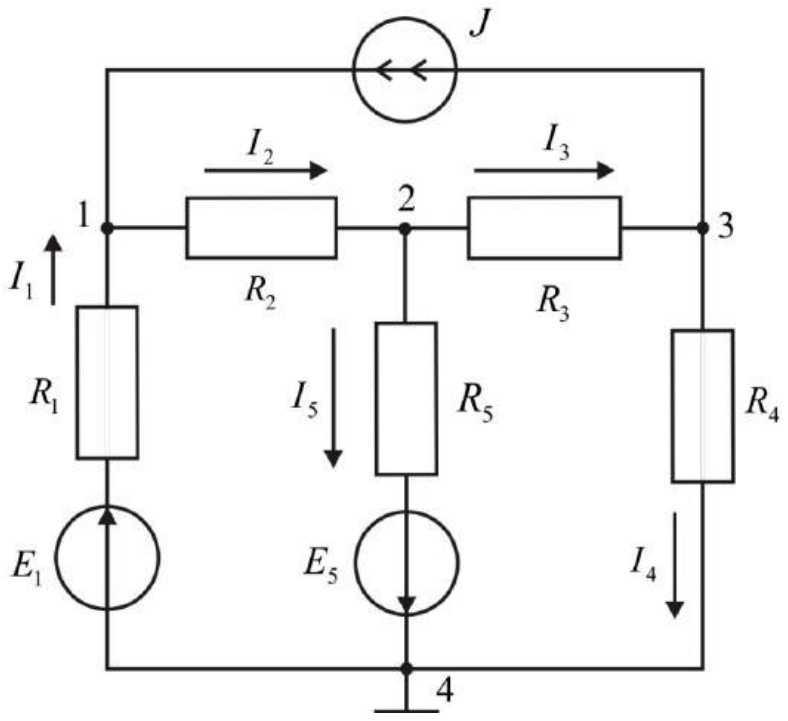


Рис. 4.3. Приклад схеми для розрахунків електричного кола методом вузлових потенціалів

Запишемо рівняння за першим законом Кірхгофа для вузла 1:

$$I_1 + J - I_2 = 0\,. \qquad (4.5)$$

Відповідно до законів Ома для активної й пасивної гілок

$$I_1 = \frac{\phi_4 - \phi_1 + E_1}{R_1} = (-\phi_1 + E_1)g_1,$$

де $g_1 = \frac{1}{R_1}$ – провідність першої гілки,

$$I_2 = \frac{\phi_1 - \phi_2}{R_2} = (\phi_1 - \phi_2)g_2,$$

де $g_2 = \frac{1}{R_2}$ – провідність другої гілки.

Підставимо вирази струмів у рівняння (4.5):

$$-\phi_1 g_1 + E_1 g_1 + J - \phi_1 g_2 + \phi_2 g_2 = 0\,;$$

$$\phi_1(g_1 + g_2) - \phi_2 g_2 = E_1 g_1 + J\,;$$

$$\phi_1 g_{11} - \phi_2 g_{12} = E_1 g_1 + J\,, \qquad (4.6)$$

де $g_{11} = g_1 + g_2$ – власна провідність вузла 1 (сума провідностей гілок, що сходяться в цьому вузлі); $g_{12} = g_2$ – взаємна провідність між вузлами 1 і 2; $E_1 g_1 + J$ – сума струмів джерел, що знаходяться в гілках, які сходяться у вузлі 1. Якщо струм джерела спрямовано до вузла, його величину записуємо зі знаком «+», якщо від вузла – зі знаком «–».

За аналогією запишемо:

– для вузла 2:

$$\phi_2(g_2 + g_3 + g_5) - \phi_1 g_2 - \phi_3 g_3 = -E_5 g_5\,; \qquad (4.7)$$

– для вузла 3:

$$\phi_3(g_3 + g_4) - \phi_2 g_3 = -J\,. \qquad (4.8)$$

Розв'язавши спільно рівняння (4.6) – (4.8), визначимо невідомі потенціали φ_1, φ_2, φ_3, а потім за законом Ома для активної або пасивної гілки знайдемо струми. Якщо число вузлів схеми – n, то кількість рівнянь за методом вузлових потенціалів – $(n - 1)$.

Якщо в деякій гілці знаходиться ідеальне джерело ЕРС, необхідно один із двох вузлів, між якими розташована ця гілка, взяти за базисний. Тоді потенціал іншого вузла буде відомим і дорівнюватиме величині ЕРС. Тим самим кількість рівнянь, що потрібно скласти, стане на одне менше.

4.4. Аналіз складних електричних кіл методом накладення (суперпозиції)

Метод накладення базується на принципі суперпозиції **(**слушному тільки в лінійних ЕК): у лінійному ЕК відгук (реакція) на суму впливів дорівнює сумі відгуків (реакцій) на кожен із впливів.

Визначення. *Струм (напруга) в і-й гілці активного лінійного ЕК дорівнює алгебраїчній сумі струмів (напруг), створюваних кожним джерелом окремо за умови, що всі інші джерела замінені своїми внутрішніми опорами.*

Приклад. Розглянемо схему, показану на рис. 4.4.

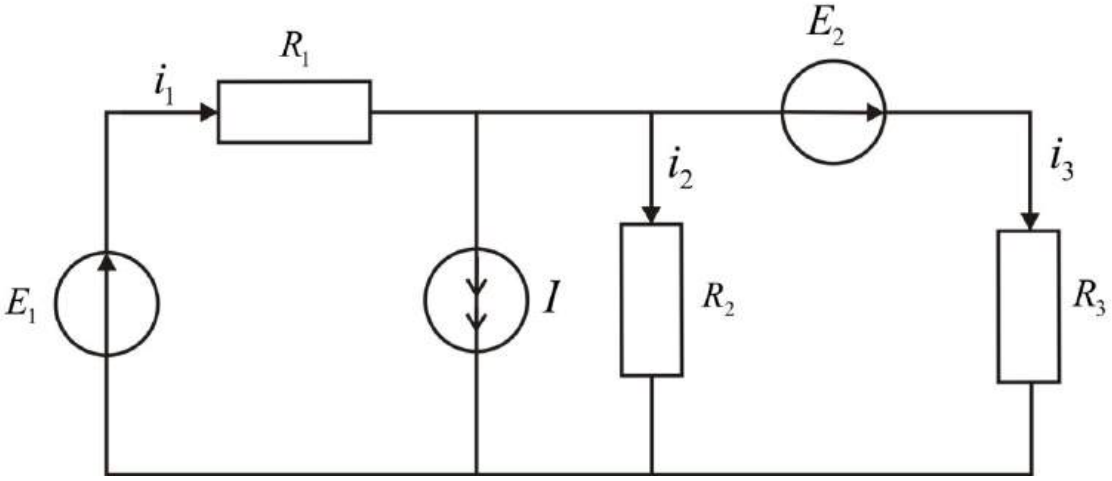


Рис. 4.4. Схема до задачі про застосування методу накладення

Знайдемо струми в гілках методом накладення. Струми i_2, i_3 дорівнюють алгебраїчній сумі струмів, створюваних кожним джерелом окремо, якщо інші джерела замінені своїми внутрішніми опорами, тобто

$$i_1 = i_{11} + i_{12} + i_{13};\ i_2 = i_{21} + i_{22} + i_{23};\ i_3 = i_{31} + i_{32} + i_{33},$$

де i_{11}, i_{21}, i_{31} – часткові струми в гілках від джерела E_1, якщо джерела струму I і напруги E_2 замінити в точках їх підключення внутрішніми опорами $R = \infty$ (розрив кола) і $R = 0$ (коротке замикання) відповідно; i_{12}, i_{22}, i_{32} – часткові струми в гілках від джерела I, якщо джерела напруг E_1 і E_2 замінити відповідно опорами $R = 0$ у точках їх підключення; i_{13}, i_{23}, i_{33} – часткові струми в гілках від джерела E_2, якщо джерела струму I і напруги E_1 замінити відповідно внутрішніми опорами $R = \infty$ і $R = 0$ у точках їх підключення.

Знайдемо ці струми, для чого зобразимо три часткові схеми заміщення, в яких враховані відповідні заміни джерел (рис. 4.5 – 4.7).

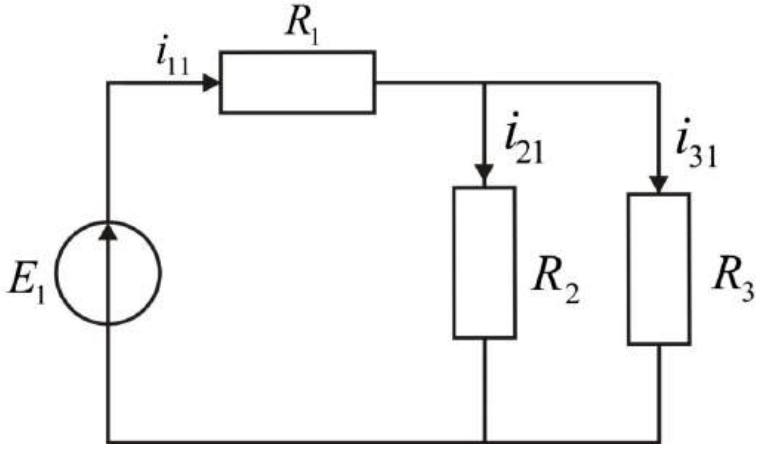


Рис. 4.5. Часткова схема заміщення ЕК при підключенні джерела E_1

1. Визначимо часткові струми від джерела E_1 (див. рис. 4.5):

$$i_{11} = \frac{E_1}{R_1 + R_{23}}; \quad R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Тоді струми i_{21} та i_{31} визначимо за правилом дільника струму:

$$i_{21} = \frac{i_{11} R_3}{R_2 + R_3}; \qquad i_{31} = \frac{i_{11} R_2}{R_2 + R_3}.$$

2. Визначимо часткові струми від джерела I за правилом дільника струму (див. рис. 4.6).

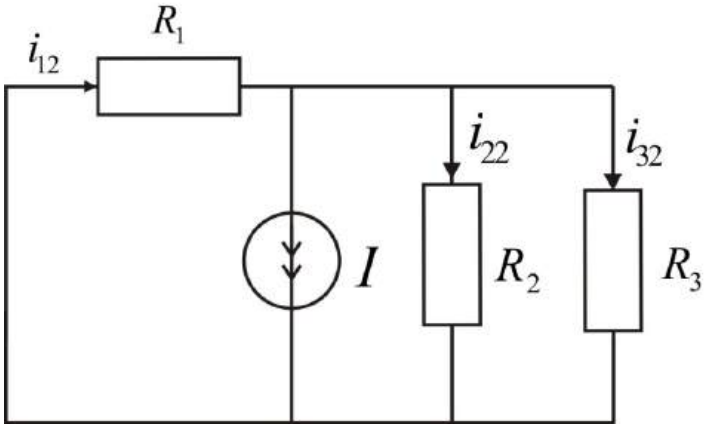


Рис. 4.6. Часткова схема заміщення ЕК при підключенні джерела струму I

$$i_{12} = \frac{I R_{23}}{R_1 + R_{23}};$$

$$i_{22} = \frac{-I R_{13}}{R_2 + R_{13}}; \quad R_{13} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3};$$

$$i_{32} = \frac{-I R_{12}}{R_3 + R_{12}}; \quad R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

3. Визначимо часткові струми від джерела E_2 за законом Ома (див. рис. 4.7):

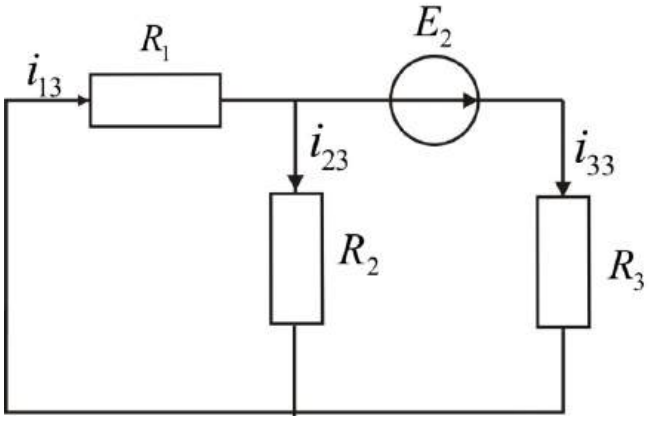


Рис. 4.7. Часткова схема заміщення ЕК при підключенні джерела E_2

$$i_{33} = \frac{E_2}{R_3 + R_{12}}.$$

Тоді струми i_{13} і i_{23} знайдемо так:

$$i_{13} = \frac{i_{33} R_2}{R_1 + R_2}; \qquad i_{23} = \frac{-i_{33} R_1}{R_1 + R_2}.$$

4.5. Аналіз складних електричних кіл методом еквівалентних джерел

За допомогою методу еквівалентного джерела можна визначити струм в одній з гілок (а саме на навантаженні). Заснований цей метод на можливості заміни будь-якої складної схеми у довільних точках підключення навантаження *a* й *b* простою схемою *еквівалентного джерела напруги* (ЕДН) (рис. 4.8, а) з параметрами U_{xx} і R_{ab} або *еквівалентного джерела струму* (ЕДС) (рис. 4.8, б) з параметрами $I_{кз}$ і R_{ab}, причому ці параметри взаємозв'язані співвідношенням $U_{xx} = I_{кз} R_{ab}$.

а б

Рис. 4.8. Схеми еквівалентних джерел: а – напруги; б – струму

Параметри еквівалентних джерел U_{xx}, $I_{кз}$ і R_{ab} визначають за такими правилами:

– *напруга холостого ходу* U_{xx} – напруга в точках еквівалентного перетворення *a* і *b* при відключенні навантаження в цих точках; якщо джерел декілька, то її знаходять зазвичай за методом накладення;

– *струм короткого замикання* $I_{кз}$ – струм у точках перетворення *a* та *b* при їх короткому замиканні; знаходять його також за методом накладення;

– *внутрішній опір еквівалентного джерела* R_{ab} – опір кола в точках перетворення *a* і *b* за умови заміни всіх джерел схеми їх внутрішніми опорами.

ЕРС $E = IR_i$ дозволяє визначати тільки одну з двох пар параметрів еквівалентних джерел: або U_{xx} і R_{ab}, або $I_{кз}$ і R_{ab}.

Метод еквівалентного джерела полягає в тому, що до гілки, яка підключена в точках *a* і *b* і в якій визначається струм (напруга), замість складного кола підключається проста схема еквівалентного джерела з попередньо визначеними параметрами; це дозволяє використовувати для розрахунків прості правила дільників напруги й струму, а також закон Ома.

Приклад. Розглянемо схему, зображену на рис. 4.9.

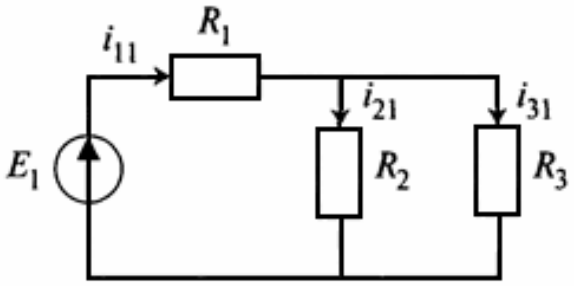


Рис. 4.9. Схема до задачі про застосування методу еквівалентного джерела

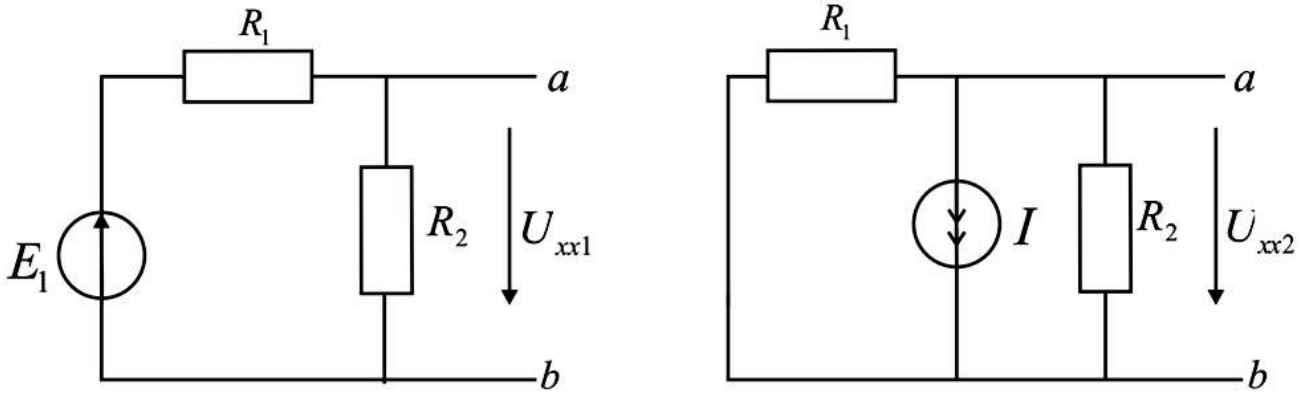
Визначимо струм i_3.

1. *Розв'язання методом еквівалентного джерела напруги.*

Знайдемо U_{xx} і R_{ab}. Вилучимо (тимчасово) елемент R_3, *а* для частини схеми, що залишилася, визначимо R_{ab} *і* U_{xx} за методом накладення:

$$U_{xx} = U_{xx1} + U_{xx2} + U_{xx3}.$$

Залишимо лише одне джерело E_1, а потім – одне джерело *I* (рис. 4.10).



а б

Рис. 4.10. Схеми ЕК при підключенні: а – джерела ЕРС E_1; б – джерела струму

У цих схемах за правилом дільника напруги

$$U_{xx1} = \frac{E_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

а за законом Ома

$$U_{xx2} = \frac{-IR_1R_2}{R_1 + R_2}.$$

Залишимо в схемі одне джерело E_2 (рис. 4.11).

Струм через елементи R_1 і R_2 у цій схемі не протікає, тобто $U_{xx} = E_2$.

Внутрішній опір (рис. 4.12)

$$R_{ab} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Тоді струм i_3 визначимо з простої схеми з еквівалентним джерелом напруги за законом Ома:

$$i_3 = \frac{U_{xx}}{R_3 + R_{ab}}.$$

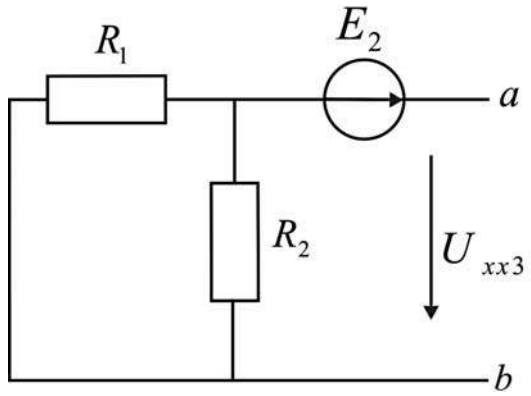


Рис. 4.11. Схема ЕК при підключенні джерела ЕРС E_2

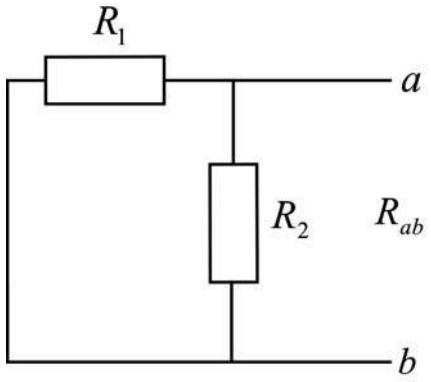


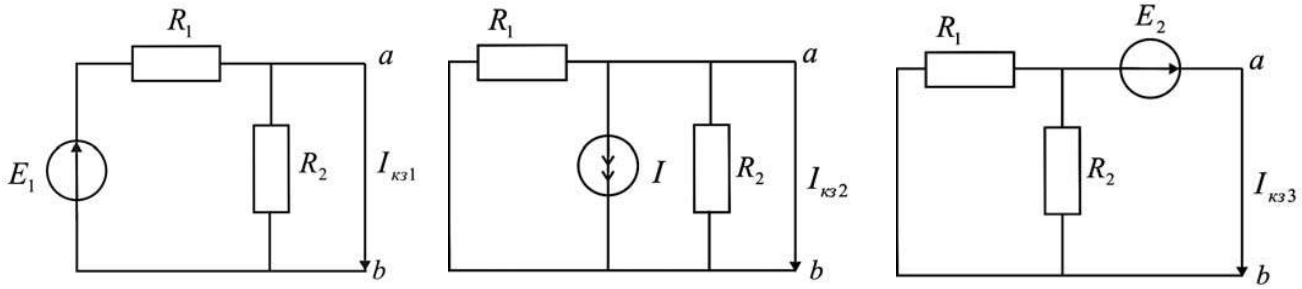
Рис. 4.12. Схема ЕК при визначенні внутрішнього опору

2. Розв'язання методом еквівалентного джерела струму.

Визначимо параметри $I_{кз}$ і R_{ab}. Параметр R_{ab} знаходимо так само, як і в першому випадку, а параметр $I_{кз}$ – за методом накладення:

$$I_{кз} = I_{кз1} + I_{кз2} + I_{кз3}.$$

Далі одержимо схеми, показані на рис. 4.13.



$$I_{кз1} = \frac{E_1}{R_1} \qquad I_{кз2} = -I \qquad I_{кз3} = \frac{E_2}{R_{ab}}$$

а б в

Рис. 4.13. Схеми ЕК до задачі про застосування методу еквівалентного джерела струму: а – при підключенні джерела ЕРС E_1; б – при підключенні джерела струму I; в – при підключенні джерела ЕРС E_2

Шуканий струм i_3 визначимо за правилом дільника напруги зі схеми, зображеної на рис. 4.14:

$$i_3 = \frac{I_{кз} R_{ab}}{R_3 + R_{ab}}.$$

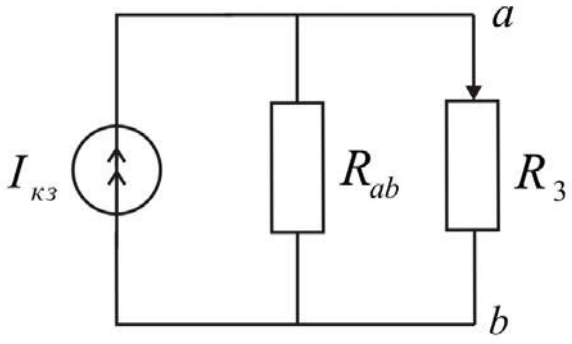
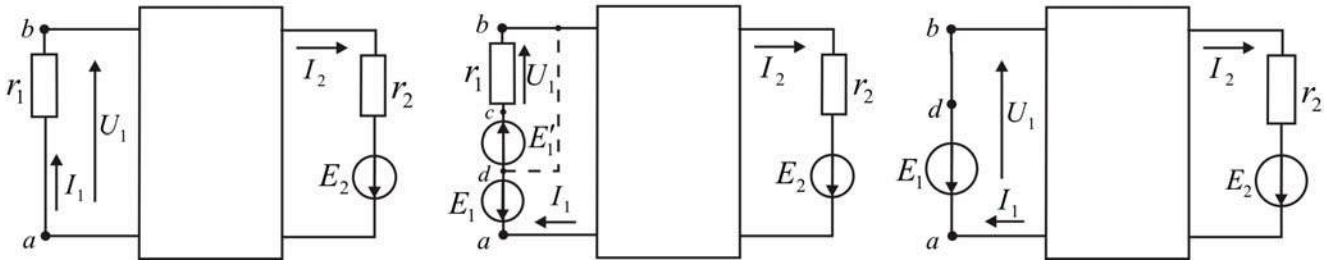


Рис. 4.14. Схема заміни ЕК еквівалентним джерелом струму

4.6. Теорема про компенсацію

В електричній схемі, зображеній на рис. 4.15, а, виділено гілку з опором r_1 і струмом I_1.



а б в

Рис. 4.15. Застосування теореми про компенсацію

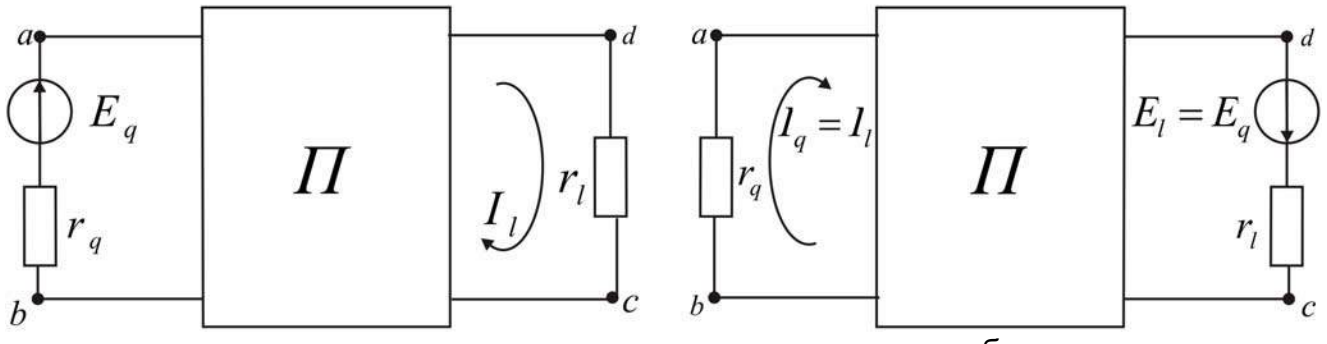
Ввімкнемо в цю гілку два джерела ЕРС E'_1 і E_1, що чисельно дорівнюють напрузі $U_1 = r_1 I_1$ і спрямовані назустріч одне одному (рис. 4.15, б); струми у всіх гілках схеми залишаться без зміни.

При переході з точки *d* у точку *c* потенціал підвищується на величину ЕРС $E'_1 = U_1$, а при переході з точки *c* у точку *b* знижується на ту саму величину, внаслідок чого потенціали точок *d* і *b* є однаковими. Ці точки можна з'єднати провідником (закоротити), тобто вилучити зі схеми джерело ЕРС E'_1 і опір r_1, не змінивши струми у всіх гілках (рис. 4.15, в).

З порівняння схем (див. рис. 4.15) безпосередньо випливає, що ***будь-який опір можна замінити джерелом з ЕРС, яка спрямована назустріч току й дорівнює напрузі на цьому опорі.*** Це положення називають теоремою про компенсацію.

4.7. Принцип взаємності

Припустимо, що у схемі довільної конфігурації *єдине* джерело ЕРС E_q діє в гілці з опором r_q у напрямку від точки *b* до точки *a* й створює в гілці з опором r_l струм, спрямований від точки *d* до точки *c* (рис. 4.16, а).



а б

Рис. 4.16. Пояснення принципу взаємності

Тоді таке ж єдине джерело ЕРС $E_l = E_q$, яке ввімкнено у гілку з опором r_l і діє у напрямку від точки *d* до *c* (рис. 4.16, б), створюватиме у гілці з опором r_q струм I_q, який буде спрямований від точки *b* до *a*, причому $I_q = I_l$.

5. СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

5.1. Закони комутації в електричних колах

Комутація – це миттєва (стрибкоподібна) зміна структури або параметрів ЕК (увімкнення, вимкнення, перемикання та ін.).

При комутації настає ***перехідний процес*** – процес переходу електричного кола з одного сталого режиму до іншого. При цьому розрізняють ***змушений*** перехідний процес (у результаті підключення до ЕК джерел) і ***вільний*** перехідний процес (наприклад, при відключенні джерел від ЕК).

На відміну від процесу комутації перехідний процес не може бути стрибкоподібним, тому що для стрибкоподібної зміни електричної енергії ЕК потрібна буде її нескінченна потужність ($p = dW/dt$). Реальне ЕК містить реактивні елементи *L* і *C*, які здатні запасати енергію *W* у магнітному й електричному полях: $W_l = Li^2/2$ та $W_C = Cu^2/2$ відповідно; при цьому ця енергія не може накопичуватися миттєво (стрибкоподібно).

Таким чином, при $L = const$ і $C = const$ слушні два закони комутації.

Перший закон комутації: *струм в індуктивному елементі стрибком змінитися не може,* тобто струм в індуктивному елементі до комутації $i_l(t)\big|_{t<0}$ має дорівнювати току в момент комутації $i_l(t)\big|_{t=0}$:

$$i_l(t)\big|_{t<0} = i_l(t)\big|_{t=0}. \qquad (5.1)$$

Другий закон комутації: *напруга на ємнісному елементі стрибком змінитися не може,* тобто напруга на ємнісному елементі до комутації $u_c(t)\big|_{t<0}$ має дорівнювати напрузі в момент комутації $u_c(t)\big|_{t=0}$:

$$u_c(t)\big|_{t<0} = u_c(t)\big|_{t=0}. \qquad (5.2)$$

Усі інші струми й напруги можуть змінюватися стрибком.

При аналізі перехідних процесів вихідний сталий режим називають ***початковими*** умовами (ПУ). Вони можуть бути ***нульовими***: $i_l(t)\big|_{t<0} = 0$ і $u_c(t)\big|_{t<0} = 0$ (наприклад, при ввімкненні кола) і ***ненульовими***: $i_l(t)\big|_{t<0} \neq 0$ і $u_c(t)\big|_{t<0} \neq 0$ (наприклад, при вимиканні кола).

Згідно із законами комутації при нульових початкових умовах маємо:

– $i_l(t)\big|_{t<0} = i_l(t)\big|_{t=0} = 0$ – індуктивний елемент у момент підключення є ***розривом*** кола;

– $u_c(t)\big|_{t<0} = u_c(t)\big|_{t=0} = 0$ – ємнісний елемент у момент підключення є ***коротким замиканням*** кола.

5.2. Перехідна характеристика лінійного електричного кола

Перехідна характеристика належить до часових характеристик кола, тобто відображає деякий перехідний процес за заздалегідь установленими впливами і початковими умовами. Для часового аналізу перехідних процесів використовують неперіодичні елементарні впливи типу одиничний стрибок $1(t)$, або функція Хевісайда:

$$1(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ 1/2, & t=0;\\ 1, & t>0\end{cases}$$

і одиничний імпульс $\delta(t)$, або функція Дірака:

$$\delta(t)=\begin{cases}0, & t<0;\\ \infty, & t=0;\\ 0, & t>0.\end{cases}$$

Відгук (реакцію) електричного кола на одиничні впливи називають ***часовими характеристиками***, при цьому розрізняють:

– *перехідну характеристику* $h_1(t)$ – відгук на одиничний стрибок $1(t)$;

– *імпульсну характеристику* $h_\delta(t)$ – відгук на одиничний імпульс $\delta(t)$.

Для порівняння електричних кіл за їх реакцією на ці впливи для кіл необхідно створити однакові умови. Найбільш простими й зручними є нульові початкові умови.

Перехідною характеристикою кола $h_1(t)$ називають відношення реакції кола на східчастий вплив до величини цього впливу при нульових початкових умовах:

$$h_1(t)=\frac{f_2(t)}{A}, \tag{5.3}$$

де $f_2(t)$ – реакція кола на східчастий вплив; A – величина східчастого впливу [В] або [А].

Якщо перехідна характеристика кола відома (або може бути обчислена), то відповідно до формули (5.3) можна знайти реакцію цього кола на східчастий вплив при нульових ПУ:

$$f_2(t)=Ah_1(t).$$

Встановимо зв'язок між операторною передавальною функцією кола, яка часто є відомою (або може бути знайдена), і перехідною характеристикою. Для цього визначимо поняття операторної передавальної функції:

$$H(p)=\frac{L[f_2(t)]}{L[A]}=\frac{f_2(p)}{A/p}=p\frac{f_2(p)}{A}. \tag{5.4}$$

Відношення перетвореної за Лапласом реакції кола до величини впливу A становить операторну перехідну характеристику кола:

$$h_1(p)=\frac{f_2(p)}{A}=\frac{H(p)}{p}. \tag{5.5}$$

Звідси за операторною передавальною функцією можна знайти операторну перехідну характеристику кола. Для визначення перехідної характеристики кола необхідно застосувати обернене перетворення Лапласа.

5.3. Імпульсна характеристика лінійного електричного кола

Імпульсною характеристикою кола $h_\delta(p)$ *називають відношення реакції кола на імпульсний вплив до площі цього впливу при нульових початкових умовах:*

$$h_\delta(t) = \frac{f_2(t)}{S_u}, \tag{5.6}$$

де $f_2(t)$ – реакція кола на східчастий вплив; S_u – площа імпульсу впливу.

Якщо імпульсна характеристика кола відома, можна знайти реакцію кола на заданий вплив: $f_2(t) = h_\delta(t)S_u$. Як функцію впливу часто використовують одиничний імпульсний вплив $\delta(t)$.

Встановимо зв'язок між передавальною функцією кола і її імпульсною характеристикою, для чого застосуємо операторний метод.

Якщо вплив (оригінал) розглядати у найбільш загальному випадку як добуток площі імпульсу на дельта-функцію, тобто $S_u\delta(t)$, то зображення цього впливу згідно з таблицею відповідностей має вигляд

$$H(p) = \frac{L\left[f_2(t)\right]}{L\left[S_u\delta(t)\right]} = \frac{f_2(p)}{S_u}. \tag{5.7}$$

Тоді відношення перетвореної за Лапласом реакції кола до величини площі імпульсу впливу являє собою операторну імпульсну характеристику:

$$h_\delta(p) = \frac{f_2(p)}{S_u}. \tag{5.8}$$

Для знаходження імпульсної характеристики кола необхідно застосувати обернене перетворення Лапласа.

Узагальнюючи формули, одержуємо зв'язок між операторною передавальною функцією $H(p)$ кола і операторними перехідною $h_1(p)$ і імпульсною $h_\delta(p)$ характеристиками кола:

$$H(p) = h_\delta(p) = ph_1(p). \tag{5.9}$$

Знаючи одну будь-яку характеристику кола, можна визначити інші.

Між функціями Хевісайда й Дірака існує однозначний взаємозв'язок:

$$\delta(t) = \frac{d1(t)}{dt}; \quad 1(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(t)dt. \tag{5.10}$$

Аналогічно взаємозв'язку впливів (5.10) існує взаємозв'язок відгуків:

$$h_\delta(t) = \frac{dh_1(t)}{dt}; \quad h_1(t) = \int_{-\infty}^{t} h_\delta(t)dt. \tag{5.11}$$

Згідно з таблицею перетворень оригіналів у лапсасіани, і навпаки, зображенням одиничного стрибка $1(t)$ є величина $1/p$, а зображенням одиничного імпульсу $\delta(t)$ – величина 1. Тому одиничний імпульс зручно використовувати при спектральному й часовому аналізах.

Перехідна характеристика $h_1(t)$ безпосередньо визначає змушений перехідний процес в колі.

5.4. Інтеграл Дюамеля

Аналіз перехідних процесів можна здійснювати не тільки при *одиничних впливах* шляхом визначення часових (перехідної і імпульсної) характеристик, але також і при *«зважених» одиничних стрибках,* тобто взятих з вагою E. Тому перехідну характеристику часто використовують для знаходження реакції кола на складний вплив.

Так, при впливі $E(t) = E1(t)$ відгуком є ***«зважена» перехідна характеристика*** $Eh_1(t)$.

Якщо довільний вплив подати у вигляді сукупності (суми) *«зважених» одиничних стрибків,* тобто у вигляді східчастого впливу, то відгук лінійного ЕК, відповідно до принципу суперпозиції, є сукупністю (сумою) *«зважених» перехідних характеристик,* отриманих для кожного одиничного стрибка, що входить до суми досліджуваного впливу.

Припустимо, що задано довільний вплив $v_1(t)$ (рис. 5.1).

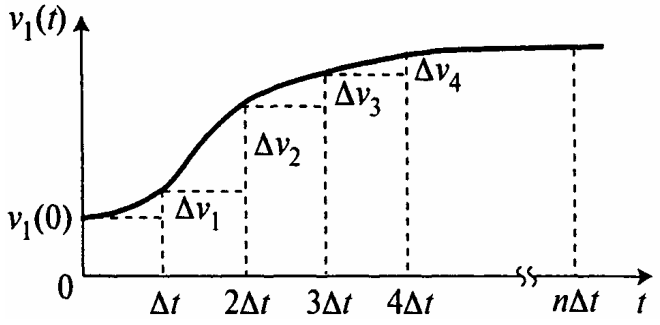


Рис. 5.1. Розбивання безперервної функції на сегменти

«Зважені» одиничні стрибки з вагою Δv_1 беремо через однакові проміжки Δt. Увесь інтервал розкладання містить n проміжків Δt.

У цьому випадку *східчастий вплив*

$$v_{1cm}(t) = v_1(0)1(t) + \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i 1(t - i\Delta t), \tag{5.12}$$

тоді *східчастий відгук* кола

$$v_{2cm}(t) = v_1(0)h_1(t) + \sum_{i=1}^{n} \Delta v_i h_1(t - i\Delta t). \tag{5.13}$$

Оскільки довільний вплив $v_1(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} v_{1cm}(t)$, то відгук

$$v_2(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{2cm}(t) = v_{1cm}(t) = v_1(0)h_1(t) + \lim_{\Delta t \to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} \Delta v_i h_1(t - i\Delta t)\right] =$$

$$= v_1(0)h_1(t) + \int_0^t \frac{dv_1(t)}{dt} h_1(t-\tau)d\tau. \qquad (5.14)$$

Вираз (5.14) називають ***інтегралом Дюамеля***.

Приклад. Нехай експонентний сигнал $v_1(t) = e^{-t/\tau_c}$ подається на вхід ланки ВЧ-1 з перехідною характеристикою кола $h_1(t) = e^{-t/\tau_ц}$, при цьому τ_c = 5 с і $\tau_ц$ = 2 с.

Тоді згідно з виразом (5.14) одержимо відгук на виході ланки ВЧ-1:

$$v_2(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{2cm}(t) = v_{1cm}(t) = v_1(0)h_1(t) + \lim_{\Delta t \to 0}\left[\sum_{i=1}^{n} \Delta v_i h_1(t - i\Delta t)\right] =$$

$$= v_1(0)h_1(t) + \int_0^t \frac{dv_1(t)}{dt} h_1(t-\tau)d\tau.$$

Часові діаграми вхідного й вихідного сигналів показано на рис. 5.2.

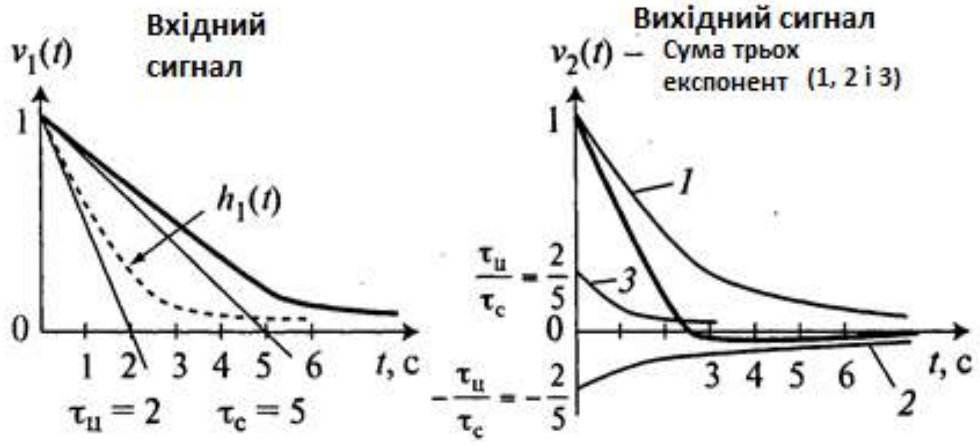


Рис. 5.2. Приклади часових діаграм вхідного й вихідного сигналів

5.5. Комплексна передавальна функція лінійного електричного кола (частотний коефіцієнт передачі)

Щоб визначити комплексну передавальну функцію (КПФ), лінійне електричне коло умовно подають у вигляді чотириполюсника (рис. 5.3) – схеми з двома парами затискачів: вхідними й вихідними.

КПФ – це відношення комплексної амплітуди відгуку $\dot{F}_{m\,вих}$ до комплексної амплітуди впливу $\dot{F}_{m\,вх}$:

$$\dot{H}(j\omega) = \dot{F}_{m\,вих} \big/ \dot{F}_{m\,вх} = \dot{F}_{вих} \big/ \dot{F}_{вх} . \qquad (5.15)$$

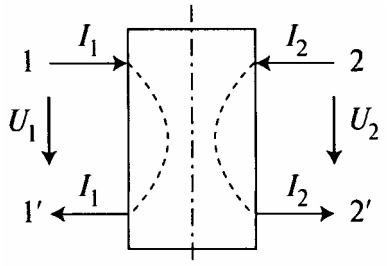


Рис. 5.3. Лінійне ЕК у вигляді чотириполюсника

Залежно від того, яка величина (струм або напруга) є впливом і відгуком, КПФ $\dot{H}(j\omega)$ має різні фізичні значення й розмірності:

1. Якщо $\dot{F}_{вх} = \dot{U}_{вх}$, $\dot{F}_{вих} = \dot{U}_{вих}$, то $\dot{H}_u(j\omega)$ – комплексний безрозмірний коефіцієнт передачі за напругою.

2. Якщо $\dot{F}_{вх} = \dot{I}_{вх}$, $\dot{F}_{вих} = \dot{I}_{вих}$, то $\dot{H}_i(j\omega)$ – комплексний безрозмірний коефіцієнт передачі за струмом.

3. Якщо $\dot{F}_{вх} = \dot{I}_{вх}$, $\dot{F}_{вих} = \dot{U}_{вих}$, то $\dot{H}_z(j\omega)$ – комплексний передатний опір.

4. Якщо $\dot{F}_{вх} = \dot{U}_{вх}$, $\dot{F}_{вих} = \dot{I}_{вих}$, то $\dot{H}_u(j\omega)$ – комплексна передатна провідність.

КПФ можна подати в показовій, тригонометричній і алгебраїчній формах:

$$\dot{H}(j\omega) = \left|\dot{H}(j\omega)\right| e^{j\varphi(\omega)} = H(\omega) e^{j\varphi(\omega)} = H(\omega)\cos\varphi(\omega) + H(\omega) j \sin\varphi(\omega) =$$
$$= Re\left[\dot{H}(j\omega)\right] + j\, Im\left[\dot{H}(j\omega)\right],$$

де $\left|H(j\omega)\right| = H(\omega)$, $\varphi(\omega)$, $\mathrm{Re}\left[\dot{H}(j\omega)\right]$, $\mathrm{Im}\left[\dot{H}(j\omega)\right]$ – відповідно модуль, аргумент, дійсна й уявна частини КПФ.

КПФ лінійного кола залежить від частоти впливу, схеми й параметрів кола й не залежить від комплексної амплітуди впливу. Якщо параметри лінійного кола не змінюються, то КПФ залежить тільки від частоти впливу.

Залежність модуля КПФ від частоти $\left|H(j\omega)\right|$ називають амплітудно-частотною характеристикою (АЧХ).

Залежність аргументу КПФ від частоти $\varphi(\omega) = \varphi_{вих}(\omega) - \varphi_{вх}(\omega)$ називають фазочастотною характеристикою (ФЧХ).

Виборчі властивості електричних кіл

Амплітуди відгуку кола $\dot{F}_{вих}$ й впливу $\dot{F}_{вх}$ з'єднані через АЧХ:

$$\dot{F}_{вих} = \dot{H}(j\omega)\dot{F}_{вх} . \qquad (5.16)$$

Якщо $\dot{H}(j\omega) = 0$, то відгук відсутній за будь-якої амплітуди вхідного сигналу – коло «не пропускає» вхідні впливи. Якщо $\dot{H}(j\omega) \neq 0$, то амплітуда

відгуку тим більше, чим більше значення АЧХ. Якщо АЧХ залежить від частоти, то коло має вибіркові властивості. Вибірковість – здатність кола із набору частот виділяти (пропускати) коливання одних частот і не пропускати коливання інших. Вибіркові властивості кіл характеризуються:

– ослабленням $A(\omega) = H_{max}/H(\omega) > 1$; $A(\omega) = 20\lg(H_{max}/H(\omega)) > 0$, *дБ*;

– смугою пропускання (СП) – діапазоном частот, у межах якого АЧХ зменшується не більш ніж у задане число раз n порівняно з H_{max}.

Залежно від форми АЧХ кількість граничних частот є різною (рис. 5.4).

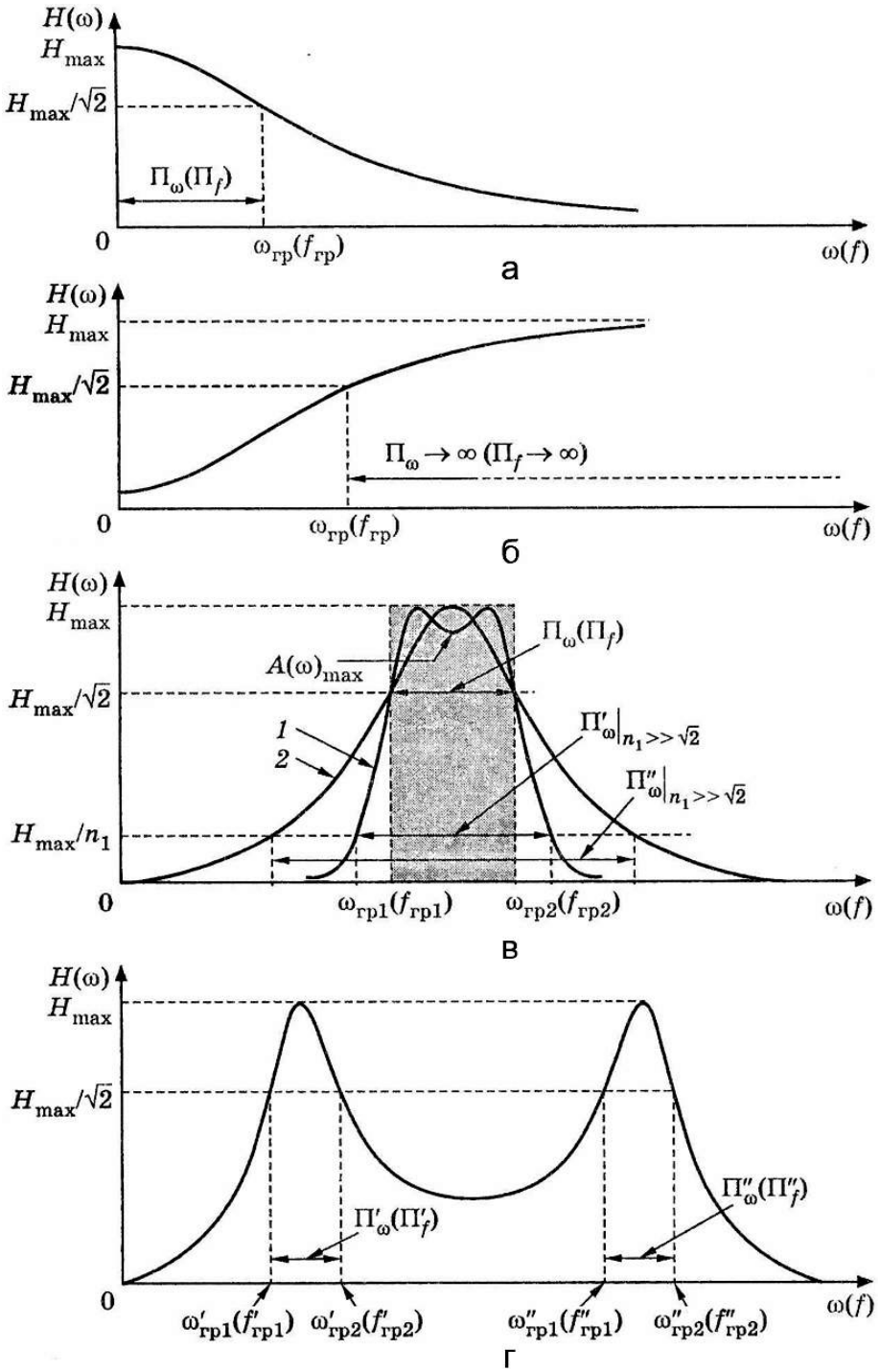


Рис. 5.4. Приклади форм АЧХ

Граничні частоти СП можуть бути отримані з таких рівнянь:

$$H(\omega)=\frac{H_{max}}{n};\quad A(\omega)=\frac{H_{max}}{H(\omega)}\le n;\quad H_{норм}(\omega)=\frac{H(\omega)}{H_{max}}\le\frac{1}{n}. \qquad (5.17)$$

Розраховувати СП заведено за рівнем значення $n=\sqrt{2}$, що відповідає зменшенню потужності коливання на межах СП в два рази.

Для оцінювання вибіркових властивостей кіл з однаковою СП їх АЧХ порівнюють із ідеальною прямокутною характеристикою (рис. 5.4, в), яка не змінює сигнал у СП і не пропускає його поза СП.

Для кількісного оцінювання прямокутності АЧХ використовують коефіцієнт прямокутності

$$k_{пр}=\frac{\Pi_\omega\Big|_{n1>>\sqrt{2}}}{\Pi_\omega\Big|_{n1=\sqrt{2}}}. \qquad (5.18)$$

Для ідеальної АЧХ $k_{пр}=1$, для реальної – $k_{пр}>1$.

5.6. Аналіз електричних кіл за методом розв'язання диференціальних рівнянь (класичним методом аналізу перехідних процесів)

Завдання аналізу **–** визначити ***закони зміни струмів і напруг на реактивних елементах ЕК після комутації.***

Перехідний процес описується диференціальним рівнянням. Розв'язок диференціального рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами дорівнює сумі двох розв'язків – усталеного v_y й вільного $v_в$:

$$v=v_y+v_в. \qquad (5.19)$$

Усталений розв'язок v_y – це напруга (струм) у новому режимі, що встановився, після закінчення перехідного процесу.

Вільний розв'язок $v_в$ – це напруга (струм), що має вигляд

$$v_в=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{s_i t}, \qquad (5.20)$$

де A_i – і-*й* коефіцієнт, який знаходять з початкових умов; s_i – і-*й* комплексний корінь однорідного характеристичного рівняння порядку *n.*

Алгоритм класичного методу аналізу перехідних процесів розглянемо на прикладі послідовного кола другого порядку (рис. 5.5).

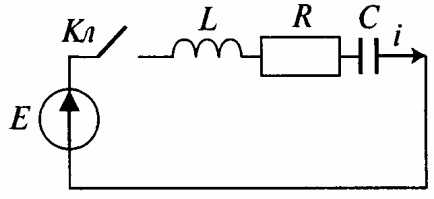


Рис. 5.5. Послідовне коло другого порядку

В ЕК елементи з'єднані послідовно, загальним для них є струм *i*, для якого й визначимо закон зміни після замикання ключа.

Алгоритм класичного методу аналізу містить сім пунктів.

1. ***Визначення початкових умов*** для тих електричних величин, які стрибком не змінюються. У даній схемі такою величиною є струм, що проходить через індуктивний елемент. До початку комутації струму не було. Отже, початкові умови – нульові, тобто

$$i(t)\big|_{t<0} = i(t)\big|_{t=0} = 0. \qquad (5.21)$$

2. ***Складання диференціального рівняння*** для визначення струму *i* після комутації за законами Кірхгофа. Для даної схеми за другим законом Кірхгофа система рівнянь має такий вигляд:

$$\begin{aligned} &\dot{u}_{ml} + \dot{u}_{mr} + \dot{u}_{mc} = E; \\ &L\frac{di}{dt} + iR + \frac{1}{C}\int_0^t idt = E; \\ &\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{di}{dt} + \frac{1}{LC}i = \frac{1}{L}\frac{dE}{dt}. \end{aligned} \qquad (5.22)$$

3. ***Визначення усталеного розв'язку*** при всіх $\frac{d}{dt} = 0$: $i_y = 0$, що свідчить про відсутність струму в ланцюзі після закінчення перехідного процесу, тому що при сталому режимі постійний струм через конденсатор не проходить.

4. ***Визначення вільного розв'язку*** при *n = 2:*

$$i_в = \mathrm{A}_1 e^{s_1 t} + \mathrm{A}_2 e^{s_2 t}, \qquad (5.23)$$

де s_1 і s_2 – корені однорідного характеристичного рівняння, отриманого з виразу $s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC} = 0$.

5. ***Запис повного розв'язку:***

$$i = i_y + i_в = \mathrm{A}_1 e^{s_1 t} + \mathrm{A}_2 e^{s_2 t}. \qquad (5.24)$$

6. ***Визначення коефіцієнтів*** A_1 і A_2 з початкових умов при $t = 0$:

$$i(0) = A_1 e^0 + A_2 e^0 = A_1 + A_2.$$

Згідно з визначеними у п. 1 початковими умовами $i(t)\big|_{t<0} = i(t)\big|_{t=0} = 0$.

Отже, $A_1 = -A_2 = A$.

7. ***Запис розв'язку в остаточному вигляді:***

$$i = A\left(e^{s_1 t} + e^{s_2 t}\right). \qquad (5.25)$$

Приклад. Розглянемо процес заряджання ємності (ключ *Кл* у положенні 1, рис. 5.6).

1. Вважатимемо, що до початку комутації конденсатор був розряджений, тобто початкові умови є нульовими: $u_c(t)\big|_{t<0} = 0$.

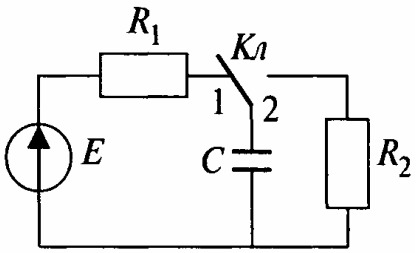


Рис. 5.6. Схема кола заряджання/розряджання ємності

2. Запишемо диференціальне рівняння за другим законом Кірхгофа після комутації: $R_1 i_з + u_c = R_1 C \frac{du_c}{dt} + u_c = E$.

Позначення $R_1 C = \tau_1$ називають ***постійною часу заряджання.***

Тоді диференціальне рівняння матиме вигляд $\tau_1 \frac{du_c}{dt} + u_c = E$.

3. Знайдемо усталений розв'язок при $\frac{du_c}{dt} = 0$: $u_{c.y} = E$ – після закінчення перехідного процесу конденсатор зарядиться до напруги джерела *E.*

4. Визначимо вільний розв'язок: $u_{c.в} = Ae^{st}$.

З характеристичного рівняння $\tau_1 s + u_c = 0$ знаходимо $s = -1/\tau_1$.

5. Повний розв'язок: $u_c = u_{c.y} + u_{c.в} = E + Ae^{-t/\tau_1}$.

6. Визначимо коефіцієнт A з початкових умов при $t = 0$: $u_c(0) = E + A = 0$, тобто $A = -E$.

7. Остаточний розв'язок: $u_c = E\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right)$.

Закон зміни струму при зарядженні конденсатора буде таким:

$$i_з = C\frac{du_c}{dt} = \frac{E}{R_1} e^{-\frac{t}{\tau_1}}.$$

Часові діаграми зміни напруги на ємності u_c й струму її заряджання $i_з$ показано на рис. 5.7.

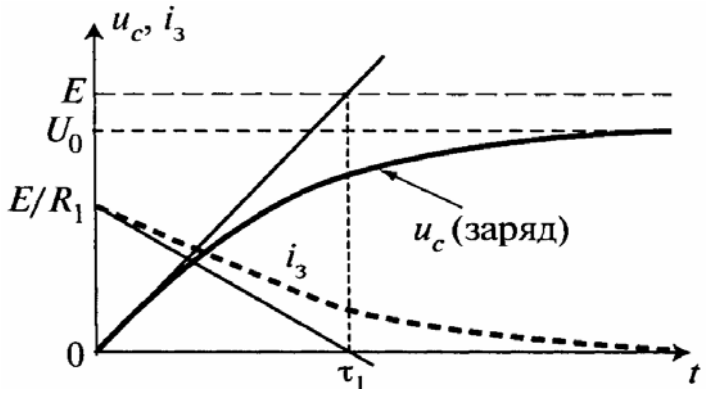


Рис. 5.7. Часові діаграми зміни напруги і струму на ємності

Аналогічно розглянемо процес розрядження ємності на резистор R_2 (ключ *Кл* у положенні 2), але за початкові умови візьмемо величину $u_C(t)\big|_{t<0} = u_C(t)\big|_{t=0} = U_0$, де U_0 – напруга, до якої встигнув зарядитися конденсатор до моменту перемикання ключа на процес розрядження.

Заряджання й розрядження ємності відбуваються за експонентним законом без стрибків напруги й зі стрибками струму в момент комутації.

5.7. Операторний метод аналізу електричних кіл

За великої кількості реактивних елементів зростає порядок диференціального рівняння *n.* Класичний метод аналізу перехідних процесів стає громіздким. У цьому випадку більш зручним є операторний метод аналізу, при якому використовують не диференціальні рівняння з оригіналами, а більш прості алгебраїчні рівняння із зображеннями за Лапласом.

Функцію $v(t)$ називають ***оригіналом,*** а функцію $V(s)$ – ***зображенням за Лапласом:***

$$V(s) = \int_0^\infty v(t)e^{-st}dt; \quad v(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{-\infty}^{\infty} V(s)e^{st}ds. \qquad (5.26)$$

Відповідність між ними позначимо так: $v(t) \Leftrightarrow V(s)$.

Для найпоширеніших оригіналів $v(t)$ і їх зображень за Лапласом $V(s)$ встановлено табличний взаємозв'язок (табл. 5.1).

Таблиця 5.1

Взаємозв'язок оригіналів $v(t)$ і їх зображень за Лапласом $V(s)$

№ п/п	Оригінал	Зображення	№ п/п	Оригінал	Зображення
1	$1(t)$	$1/s$	7	$-te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)^2}$
2	$A1(t)$	A/s	8	$\frac{1}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha t}\right)$	$\frac{1}{s(s+\alpha)}$
3	$\frac{d1(t)}{dt}$	1	9	$\frac{e^{-\alpha t}-e^{-\beta t}}{\beta-\alpha}$	$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
4	$t1(t)$	$1/s^2$	10	$\frac{\alpha e^{-\alpha t}-\beta e^{-\beta t}}{\alpha-\beta}$	$\frac{s}{(s+\alpha)(s+\beta)}$
5	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s+\alpha)}$	11	$\frac{1}{\alpha\beta}+\frac{\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha t}-\frac{1}{\beta}e^{-\beta t}}{\alpha-\beta}$	$\frac{1}{s(s+\alpha)(s+\beta)}$
6	$-\alpha e^{-\alpha t}$	$\frac{s}{(s+\alpha)}$			

При переході від оригіналів до зображень і навпаки використовують такі ***властивості перетворень Лапласа:***

$$K \Leftrightarrow \frac{K}{s} \quad (K - const); \tag{5.27}$$

$$Kv(t) \Leftrightarrow KV(s); \tag{5.28}$$

$$\sum_i v_i(t) \Leftrightarrow \sum_i V_i(s); \tag{5.29}$$

$$\frac{dv(t)}{dt} \Leftrightarrow sV(s); \tag{5.30}$$

$$\int v(t)dt \Leftrightarrow \frac{V(s)}{s}. \tag{5.31}$$

Операторні схеми заміщення ідеалізованих елементів

Згідно з виразом (5.27) постійні параметри ідеалізованих джерел мають такі зображення:

$$E \Leftrightarrow E(s) = \frac{E}{s}; \;\; I \Leftrightarrow I(s) = \frac{I}{s}. \tag{5.32}$$

Відношення зображень напруги $U(s)$ й струму $I(s)$ за законом Ома є *операторним опором* Z(s) або *операторною провідністю* $Y(s)$.

Приведемо операторні опори (провідності) пасивних ідеалізованих елементів.

Для резистивного елемента $u = iR$ і $U(s) = RI(s)$, тоді

$$\frac{U(s)}{I(s)} = Z_r(s) = R; \;\; Y_r(s) = \frac{1}{R} = G. \tag{5.33}$$

Операторний опір (провідність) резистивного елемента збігається з його електричним опором (провідністю).

Для індуктивного елемента $u_l = L\frac{di}{dt}$ і$U(s) = LsI(s)$, тоді

$$\frac{U(s)}{I(s)} = Z_l(s) = sL; \;\; Y_l(s) = \frac{1}{sL}. \tag{5.34}$$

Для ємнісного елемента $i_C = C\frac{du_C}{dt}$ і $I(s) = CsU(s)$, тоді

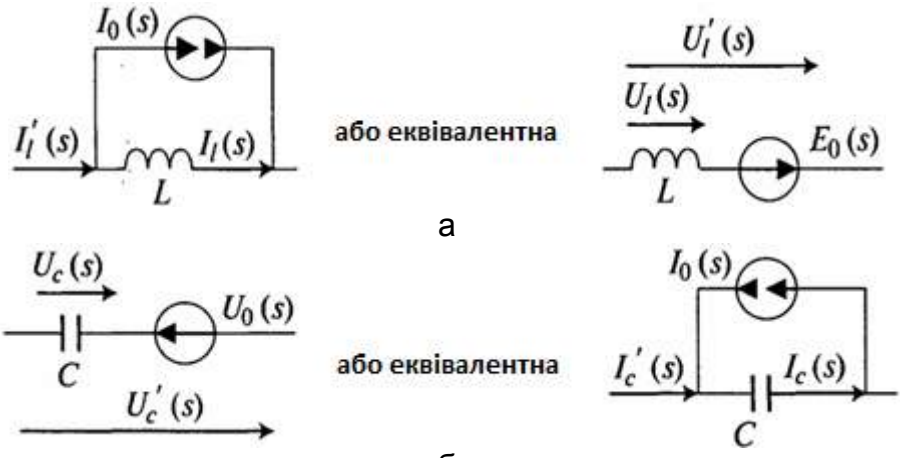
$$\frac{U(s)}{I(s)} = Z_C(s) = \frac{1}{sC}; \;\; Y_C(s) = sC. \tag{5.35}$$

Операторні опори (провідності) реактивних елементів є узагальненням комплексних опорів (провідностей), тобто будь-які комплексні величини – це окремий випадок операторних величин $s = j\omega$.

Операторна схема заміщення реактивного елемента при нульових початкових умовах збігається з його звичайною схемою заміщення, а при ненульових початкових умовах доповнюється джерелом струму або напруги, що враховують початковий струм I_0 в індуктивності (рис. 5.8, а) або початкову напругу на ємності U_0 (рис. 5.8, б):

$$I_l'(s) = I_l(s) + \frac{I_0}{s}; \quad E_0(s) = \frac{I_0}{s} sL = I_0 L; \quad U_l'(s) = U_l(s) - E_0(s); \qquad (5.36)$$

$$U_c'(s) = U_c(s) + \frac{U_0}{s}; \quad I_0(s) = \frac{U_0 / s}{1 / sC} = U_0 C; \quad I_c'(s) = I_c(s) - I_0(s). \qquad (5.37)$$



а

б

Рис. 5.8. Схема заміщення реактивного елемента: а – така, що враховує початковий струм в індуктивності; б – така, що враховує початкову напругу на ємності

Наприклад, для послідовної схеми кола (рис. 5.9) при ненульових початкових умовах операторна форма другого закону Кірхгофа має вигляд:

$$\frac{E}{s} + I_0 L - \frac{U_0}{s} = I(s)\left(R + sL + \frac{1}{sC}\right).$$

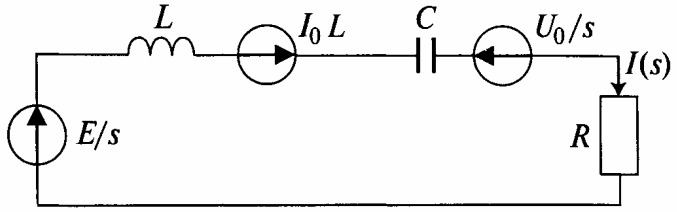


Рис. 5.9. Послідовна схема кола при ненульових початкових умовах

Алгоритм операторного методу аналізу містить п'ять пунктів:

1. *Визначення початкових умов* для оригіналів струму, що протікає через індуктивність, або напругу, що діє на клемах ємності.

2. Складання операторної схеми заміщення ЕК після комутації з урахуванням початкових умов.

3. *Складання алгебраїчного рівняння* за законами Кірхгофа для операторної схеми заміщення.

4. *Розв'язання алгебраїчних рівнянь* відносно $I(s)$ і $U(s)$ *й приведення розв'язків до табличного вигляду* для відшукання зображень.

5. *Перехід* за таблицею відповідності *від зображень до оригіналів розв'язків* $i(t)$ і $u(t)$ *й побудова їх часових діаграм.*

Розглянемо цей алгоритм на прикладі схеми розрядження ємності.

1. Вважаємо, що під час процесу зарядження ємність встигнула зарядитися до напруги U_0, тобто $u(t)\big|_{t<0} = U_0$.

2. Складемо операторну схему заміщення кола розрядження ємності (рис. 5.10). Постійна часу розрядження $\tau_p = RC$.

3. Складемо алгебраїчне рівняння для цієї схеми:

$$-\frac{U_0}{s} = I_p(s)\left(R + \frac{1}{sC}\right).$$

4. Розв'яжемо це рівняння відносно $I_p(s)$ й зведемо його до табличного вигляду:

$$I_p(s) = -\frac{U_0}{s}\frac{1}{R+\frac{1}{sC}} = \frac{-U_0}{R}\frac{1}{s+\frac{1}{RC}} = \frac{-U_0}{R}\frac{1}{s+\frac{1}{\tau_p}}.$$

Тоді зображення напруги на ємності з урахуванням ненульових ПУ

$$U'_c(s) = I_p(s)\frac{1}{sC} + \frac{U_0}{s} = \frac{-U_0}{R}\frac{1}{s+\frac{1}{\tau_p}}\frac{1}{sC} + \frac{U_0}{R} = U_0\left(\frac{-1}{s\tau_p\left(s+\frac{1}{\tau_p}\right)} + \frac{1}{s}\right) = \frac{U_0}{s+\frac{1}{\tau_p}}.$$

5. Перейдемо від зображень до оригіналів за допомогою табл. 5.1 (рядок 5) і з урахуванням властивості $Kv(t) \Leftrightarrow KV(s)$ одержимо

$$i_p(t) = \frac{-U_0}{R}e^{\left(\frac{-t}{\tau_p}\right)}; \quad i_c(t) = U_0 e^{\left(\frac{-t}{\tau_p}\right)}.$$

Часові діаграми змінення напруги на ємності u_c й струму її розрядження i_p покажемо на рис. 5.11.

Переваги операторного методу особливо виявляються у випадках великих показників порядку кіл, тобто великих показників порядку диференціальних рівнянь, що описують динамічні (перехідні) процеси в цих колах.

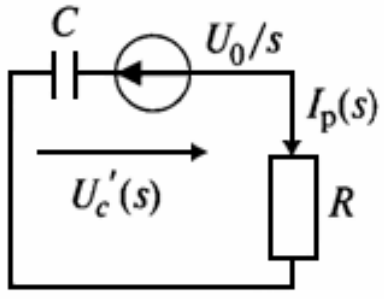


Рис. 5.10. Операторна схема заміщення кола розрядження ємності

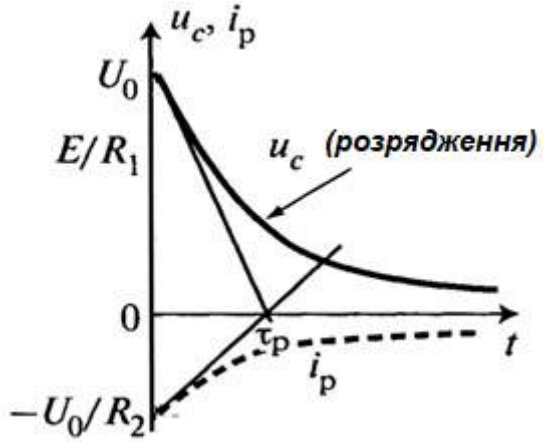


Рис. 5.11. Часові діаграми законів зміни напруги на ємності й струму її розрядження

5.8. Аналіз простих електричних кіл першого порядку

Відношення зображення відгуку кола $V_2(s)$ до зображення впливу $V_1(s)$ називають *операторною передавальною характеристикою* (ОПХ):

$$H(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}. \tag{5.38}$$

При використанні як впливу одиничного стрибка $1(t)$, зображення якого $V_1(s) = \frac{1}{s}$, *зображення перехідної характеристики* одержимо у вигляді $V_h(s) = \frac{1}{s}H(s)$. Таким чином,

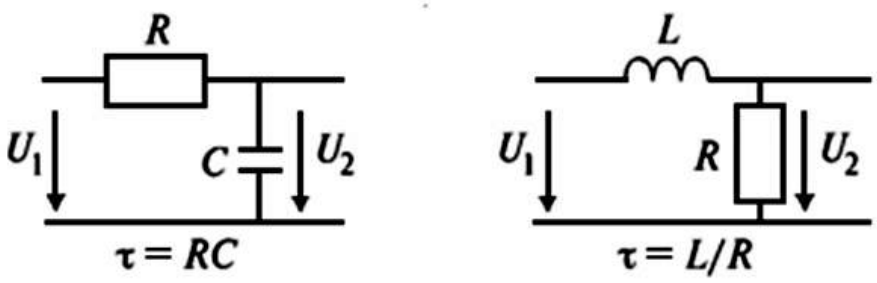
$$h_1(t) \leftrightarrow \frac{H(s)}{s}. \tag{5.39}$$

При використанні як впливу одиничного імпульсу $\delta(t)$, зображення якого $V_1(s) = 1$, *зображення імпульсної характеристики* збігається з ОПХ: $V_\delta(s) = 1 \cdot H(s)$, тобто

$$h_\delta(t) \leftrightarrow H(s). \tag{5.40}$$

Перейшовши від зображень до оригіналів, одержимо вирази для перехідної і імпульсної характеристик довільного кола.

Розглянемо ОПХ за напругою для найпростіших кіл (рис. 5.12).



а б

Рис. 5.12. Приклади низькочастотних кіл: а – RC-ланка; б – RL-ланка

Застосуємо правило дільника напруги для кожної зі схем (відношення напруг заміняємо відношенням опорів, на яких вони діють).

Тоді відповідно одержимо таке:

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{\frac{1}{sC}}{R + \frac{1}{sC}} = \frac{1}{1 + sRC} = \frac{1}{1 + s\tau_c};$$

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{R}{R + sL} = \frac{1}{1 + s\frac{L}{R}} = \frac{1}{1 + s\tau_l}.$$

Таким чином, для низькочастотних (НЧ) ланок

$$H(s)=\frac{1}{1+s\tau}. \qquad (5.41)$$

З урахуванням виразу (5.41) знайдемо перехідну й імпульсну характеристики НЧ-ланки:

$$V_h(s)=\frac{1}{s}H(s)=\frac{1}{s}\frac{1}{1+s\tau}=\frac{1}{s}\frac{1/\tau}{s+1/\tau}=\frac{1/\tau}{s\left(s+1/\tau\right)};$$

$$V_\delta(s)=H(s)=\frac{1}{1+s\tau}=\frac{1/\tau}{s+1/\tau}.$$

Далі за допомогою таблиці переходу від зображень до оригіналів (див. табл. 5.1) одержимо

$$h_1(t)=\frac{1}{\tau}\tau\left[1-e^{-t/\tau}\right]=1-e^{-t/\tau};$$

$$h_\delta(t)=\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}.$$

Перехідну і імпульсну характеристики НЧ-ланок показано на рис. 5.12.

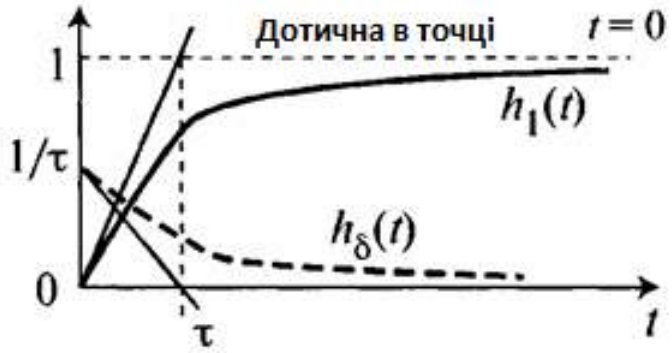


Рис. 5.12. Графіки перехідної і імпульсної характеристик НЧ-ланок

Аналогічно розглянутому прикладу можна визначити перехідну й імпульсну характеристики високочастотних (ВЧ) ланок.

6. РЕЗОНАНСНІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

У лінійному ЕК із двома дуальними реактивними елементами на певній частоті гармонійного впливу виникають явища резонансу напруг і резонансу струмів. Розглянемо два випадки.

6.1. Резонанс напруг

Послідовне з’єднання резистивного елемента й двох реактивних елементів показано на рис. 6.1.

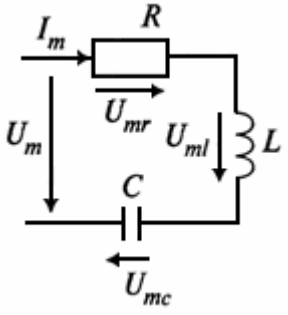


Рис. 6.1. Послідовне з'єднання резистора й двох реактивних елементів

Якщо як вплив розглядати *струм* $\dot{I}$, то за другим законом Кірхгофа

$$\dot{U} = \dot{U}_r + \dot{U}_l + \dot{U}_c = \dot{I}\left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}\right) = \dot{I}\dot{Z},$$

$$\dot{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = Ze^{j\varphi} = R + jX.$$

У такому колі можливі три випадки:

1) якщо $\omega L > \frac{1}{\omega C}$, то $X > 0$; $\varphi > 0$ – коло має індуктивний характер;

2) якщо $\omega L < \frac{1}{\omega C}$, то $X < 0$; $\varphi < 0$ – коло має ємнісний характер;

3) якщо $\omega L = \frac{1}{\omega C}$, то $X = 0$; $\varphi = 0$ – коло має резистивний характер.

В останньому випадку в ланцюзі на резонансній частоті

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \tag{6.1}$$

виникає *резонанс напруг,* тому що при $X = 0$ отримуємо $\dot{Z} = R$ і струм $\dot{I}$ у колі буде максимальним: $I_0 = U/R$. Цей струм створює на реактивних елементах однакові за величиною й протилежні за напрямком напруги $|U_{0l}| = |U_{0c}| = I_0 X_0 = UX_0/R$, які можуть перевищувати напругу впливу U у X_0/R раз (явище резонансу).

6.2. Послідовний коливальний контур, вторинні параметри, резонансні криві

Схема послідовного коливального контуру (КК) показана на рис. 6.2.

Струм, що протікає в цьому колі, можна визначити таким способом:

$$\dot{I} = \frac{Ee^{j\varphi_E}}{\sqrt{R^2 + X^2}e^{j\varphi}}. \tag{6.2}$$

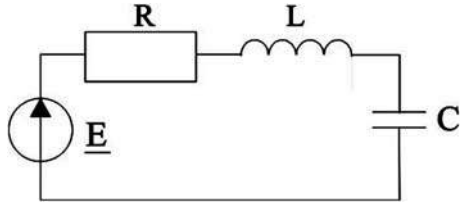


Рис. 6.2. Схема послідовного коливального контуру

Частотна залежність реактивного опору має вигляд, зображений графічно на рис. 6.3.

Період коливання й довжину хвилі резонансної частоти $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ визначають таким способом:

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = 2\pi\sqrt{LC};$$

$$\lambda_0 = cT_0 = c2\pi\sqrt{LC},$$

де c – швидкість поширення електромагнітних хвиль.

Частотну залежність повного опору показано на рис. 6.4.

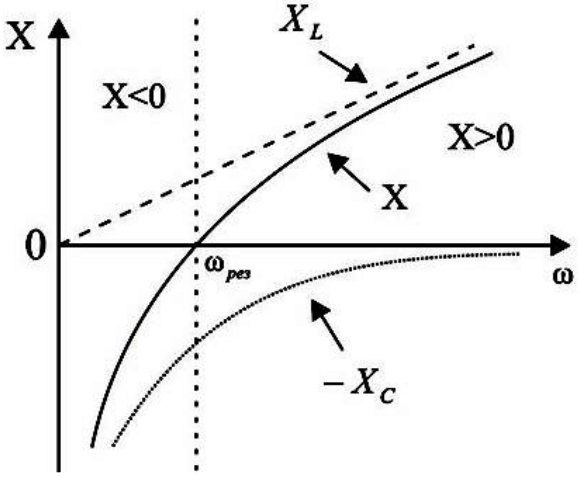


Рис. 6.3. Частотна залежність реактивного опору

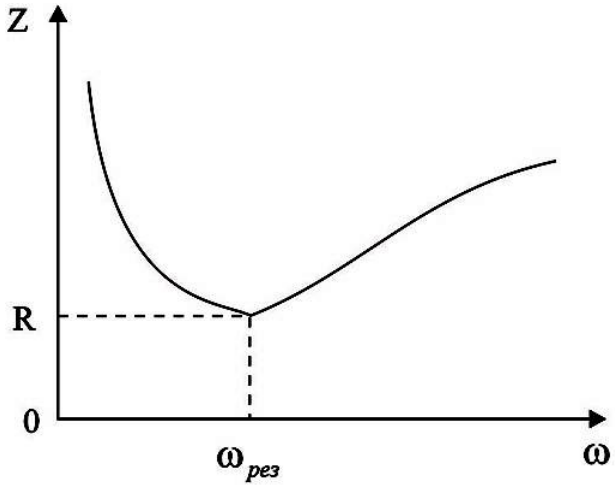


Рис. 6.4. Частотна залежність повного опору

Повний опір на ω_0 є активним, фазовий зсув дорівнює нулю, тому на частоті $\omega = \omega_0$ одержуємо мінімум $Z(\omega)$.

Графік залежності аргументу комплексного опору від частоти (ФЧХ) для послідовного КК має вигляд, зображений на рис. 6.5.

Частотна залежність діючого струму називається *резонансною кривою* (рис. 6.6).

При резонансі $I_Д = E/R = \max$. На практиці настроїти контур на резонанс можна зміною частоти, індуктивності і ємності.

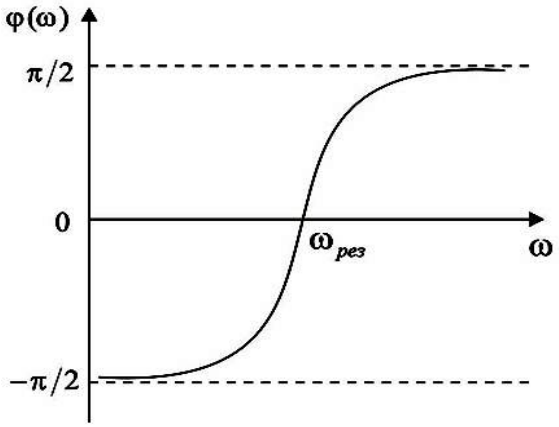


Рис. 6.5. Залежність аргументу комплексного опору від частоти

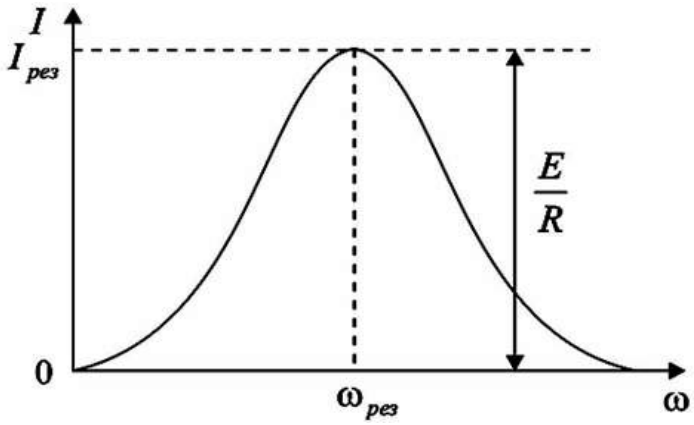


Рис. 6.6. Частотна залежність діючого струму

При резонансі значення опорів індуктивності і ємності однакові й називаються *характеристичним опором:*

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \qquad (6.3)$$

При цьому $\dot{U}_{0L} = j\omega_0 L\dot{I}_0 = j\frac{\dot{\rho}}{R}\dot{E}$; $\dot{U}_{0C} = -j\frac{1}{\omega_0 C}\dot{I}_0 = -j\frac{\dot{\rho}}{R}\dot{E}$.

Величину $\frac{\dot{\rho}}{R} = \mathrm{Q}$ називають *добротністю контуру:*

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\rho}{R} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}. \qquad (6.4)$$

Діючі значення напруги на реактивних елементах на частоті ω_0 перевищують діюче значення ЕРС в Q раз.

Величина, обернена добротності, називається *загасанням контуру*:

$$d = 1/Q. \qquad (6.5)$$

Величини *R*, *L*, *C* називаються первинними параметрами контуру; ω_0, T_0, *d, Q,* ρ – вторинними параметрами контуру.

Розраховуючи високодобротні контури в радіотехнічних системах, досліджують їхню поведінку в основному в області частот, які мало відрізняються від ω_0, тобто, коли частота генератора

$$\omega = \omega_0 \pm \Delta\omega. \qquad (6.6)$$

Величина $\Delta\omega$ називається *абсолютним розладнанням* і показує, як і наскільки відрізняється поточна частота від резонансної.

Частотні характеристики можна розглядати як функції величини X/R, що визначає частотну залежність ФЧХ і нормовану АЧХ поблизу резонансної частоти. Ця величина називається *узагальненим розладнанням*:

$$\xi = X/R. \qquad (6.7)$$

АЧХ як функція змінної ξ має вигляд

$$H(\xi) = \frac{1}{\sqrt{1+\xi}}. \qquad (6.8)$$

Часто замість точної формули застосовують наближену:

$$\xi = \frac{2\Delta\omega}{\omega_0} Q. \qquad (6.9)$$

На межах смуги пропускання $\xi = \pm 1$, тоді можна приблизно з виразу (6.9) знайти граничні частоти і смугу пропускання КК:

$$\omega_{гр1,2} = \omega_0 \pm \frac{\omega_0}{2Q} = \pm\frac{R}{2L} + \omega_0\sqrt{1+(0.5d)^2};$$
$$П_\omega = \omega_{гр1} - \omega_{гр2} = \frac{R}{L} = \frac{\omega_0}{Q}. \qquad (6.10)$$

Розглянемо вплив опорів джерела й навантаження на вибіркові властивості послідовного КК:

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\rho}{R_i + R_C + R_L};$$

$$d = \frac{1}{Q} = \frac{R_i + R_C + R_L}{\rho} = \frac{R_i}{\rho} + d_C + d_L;$$

$$Q_{LC} = \frac{1}{\frac{1}{Q_L} + \frac{1}{Q_C}} = \frac{Q_L Q_C}{Q_L + Q_C} = \frac{\rho}{R_L + R_C};$$

$$П_\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\omega_0}{Q_{LC}}\left(1 + \frac{R_i}{R_L + R_C}\right) = П_{\omega LC}\left(1 + \frac{R_i}{R_L + R_C}\right), \qquad (6.11)$$

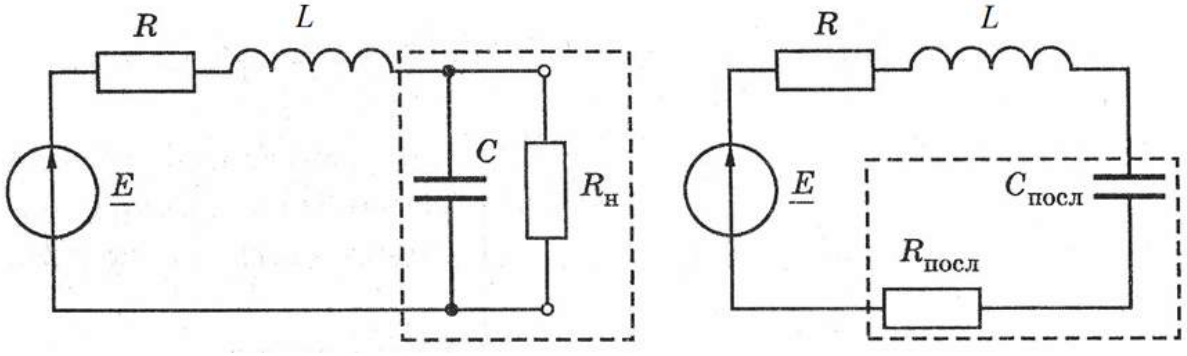
де $П_{\omega LC}$ – ширина смуги пропускання КК, який живиться від ідеального джерела напруги.

Таким чином, зі збільшенням внутрішнього опору R_i вибірковість електричного кола погіршується.

Розглянемо вплив навантаження на вибіркові властивості послідовного КК (рис. 6.7). Для спрощення доцільно перетворити паралельне з'єднання RC елементів у послідовне ($\dot{Z} = R_{посл} + jX_{посл}$). Тоді одержимо

$$\dot{Z} = R_{посл} + jX_{посл} = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G - jB} = \frac{1}{G^2 + B^2} + j\frac{1}{G^2 + B^2},$$

де $G = \frac{1}{R}$, $B = -\omega C$.



а б

Рис. 6.7. Перетворення паралельного (а) з'єднання RC елементів у послідовне (б)

На резонансній частоті

$$R_{посл} = \frac{1/R_H}{\left(1/R_H\right)^2 + (\omega_0 C)^2}; \quad X_{посл} = \frac{\omega_0 C}{\left(1/R_H\right)^2 + (\omega_0 C)^2}.$$

За умови, що $1/R_H << \omega_0 C$,

$$R_{посл} = \frac{1}{R_н (\omega_0 C)^2} = \frac{\rho^2}{R_н}; \quad X_{посл} = -\frac{\omega_0 C}{(\omega_0 C)^2} = \frac{1}{\omega_0 C}.$$

Параметри послідовної еквівалентної схеми:

$$C_{посл} = C; \quad R_e = R_{посл} + R.$$

Еквівалентну добротність і СП можна записати так:

$$Q_e = \frac{\rho}{R_e} = \frac{\rho}{R + R_{пос}} = \frac{\rho}{R + \rho^2 / R_н} = \frac{\rho / R}{1 + \rho^2 / R_н} = \frac{Q}{1 + Q\rho / R_н}; \qquad (6.12)$$

$$\Pi_{\omega e} = \frac{\omega_0}{Q_e} = \frac{\omega_0}{Q}\left(1 + Q\frac{\rho}{R_н}\right) = \Pi_\omega \left(1 + Q\frac{\rho}{R_н}\right).$$

Тут Q і Π_ω – добротність і СП ненавантаженого послідовного КК відповідно.

Таким чином, чим менше опір $R_н$, ***тем менше еквівалентна добротність*** Q_e ***і тем ширше СП***.

6.3. Резонанс струмів

Паралельне з'єднання резистивного й двох реактивних елементів показано на рис. 6.8.

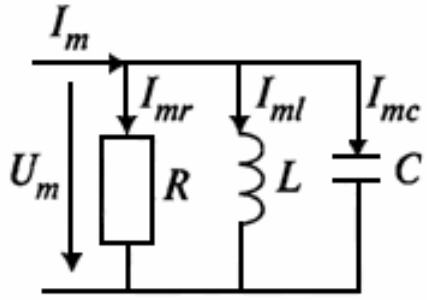


Рис. 6.8. Паралельне з'єднання резистора й двох реактивних елементів

Якщо за вплив взяти *напругу* $\dot{U}$, то за першим законом Кірхгофа

$$\dot{I} = \dot{I}_r + \dot{I}_l + \dot{I}_c = \dot{U}\left(G + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C\right) = \dot{U}\dot{Y};$$

$$\dot{Y} = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = G + jB = Ye^{-j\varphi};$$

$$B = \omega C - \frac{1}{\omega L}.$$

У такому колі також є можливими три випадки:

1) якщо $\frac{1}{\omega C} > \omega L$, то $B > 0$; $\varphi > 0$ (**–**$\varphi <$ 0) – ємнісний характер кола;

2) якщо $\frac{1}{\omega C} < \omega L$, то $B < 0$; $\varphi <$ 0 (**–**$\varphi >$ 0) – індуктивний характер кола;

3) якщо $\frac{1}{\omega C} = \omega L$, то B = 0; φ = 0 – резистивний характер кола.

В останньому випадку в колі на резонансній частоті ω_0 виникає *резонанс струмів,* тому що при B = 0 провідності $Y = G = 1/R$, тобто при заданій

напрузі впливу $\dot{U}$ забезпечується загальний струм $I_0 = UG$, а в реактивних елементах протікатимуть протилежні за напрямком і однакові за величиною струми $|I_{0l}| = |I_{0c}| = UB_0 = {I_0 B_0}/{R}$, які можуть у ${B_0}/{R}$ раз перевищувати струм I_0 (явище резонансу).

Графіки частотних залежностей реактивних опорів (провідностей) у колі із двома дуальними реактивними елементами зображено на рис. 6.9.

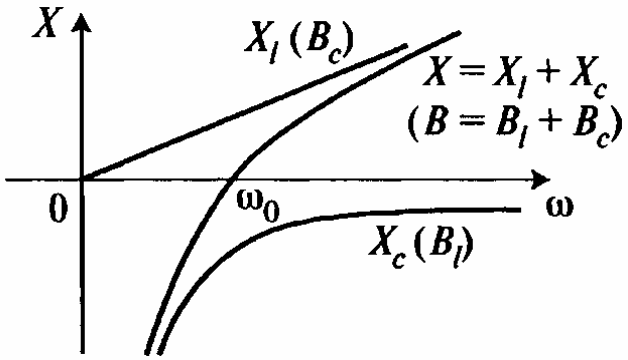


Рис. 6.9. Графіки частотних залежностей реактивних опорів у колі із двома дуальними реактивними елементами

6.4. Паралельний коливальний контур, вторинні параметри, резонансні криві

Розглянемо паралельний КК (рис. 6.10, а).

Опір витоку конденсатора R'_C можна замінити на послідовне з'єднання (рис. 6.10, б), при цьому $R_C = \rho^2 / R'_C$. Активний опір контура $R = R_C + R_L$.

Еквівалентний опір КК

$$\dot{Z}_e = \frac{\dot{Z}_1 \dot{Z}_2}{\dot{Z}_1 + \dot{Z}_2} = \frac{(R_L + j\omega L)\left(R_C + {1}/{j\omega C}\right)}{R_L + j\omega L + R_C + {1}/{j\omega C}},$$

де $\dot{Z}_1$ і $\dot{Z}_2$ – опори паралельних гілок.

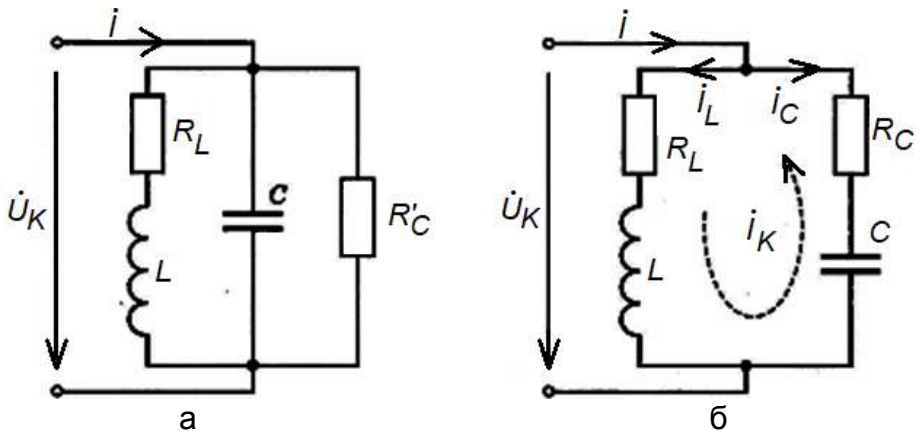


Рис. 6.10. Схеми паралельного коливального контуру

Якщо врахувати, що на резонансній частоті ω_0 $\rho = \omega L = 1/\omega C$ і КК складається з високодобротних елементів, тобто $R_L << \rho$, $R_C << \rho$, то

$$\dot{Z}_e = \frac{L/C}{R_L + R_C + j\left(\omega L - 1/\omega C\right)} = \frac{\rho^2}{R + j\left(\omega L - 1/\omega C\right)},$$

відповідно, $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Таким чином, формули резонансних частот послідовного й паралельного КК збігаються, але частково, тому що для паралельного КК були зроблені спрощення. Точна формула для ω_0 є такою:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\sqrt{\frac{\rho^2 - R_L^2}{\rho^2 - R_C^2}}. \qquad (6.13)$$

При цьому на резонансній частоті

$$Z_e = \frac{\rho^2}{R} = Q\rho = Q^2 R. \qquad (6.14)$$

З формули (6.14) витікає, що резонансні опори паралельного й послідовного КК, створені однаковими високодобротними індуктивностями і ємностями, відрізняються в Q^2 раз.

Визначаючи КПФ паралельного КК, впливом вважають струм $\dot{I}$ у спільних гілках, а відгуками – напругу $\dot{U}_к$ і струми $\dot{I}_L$ та $\dot{I}_C$ у гілках. Тому значення КПФ збігається з величиною комплексного вхідного опору, який можна подати у вигляді залежності від узагальненого розладнання:

$$\dot{Z}_e = \frac{\rho^2}{R + jX} = \frac{\rho^2}{R\left(1 + j\,X/R\right)} = \frac{Z_{e0}}{1 + j\xi} = \frac{Z_{e0}}{\sqrt{1+\xi^2}} e^{-j\,arctg\,\xi} = Z_e(\xi) e^{j\varphi(\xi)}.$$

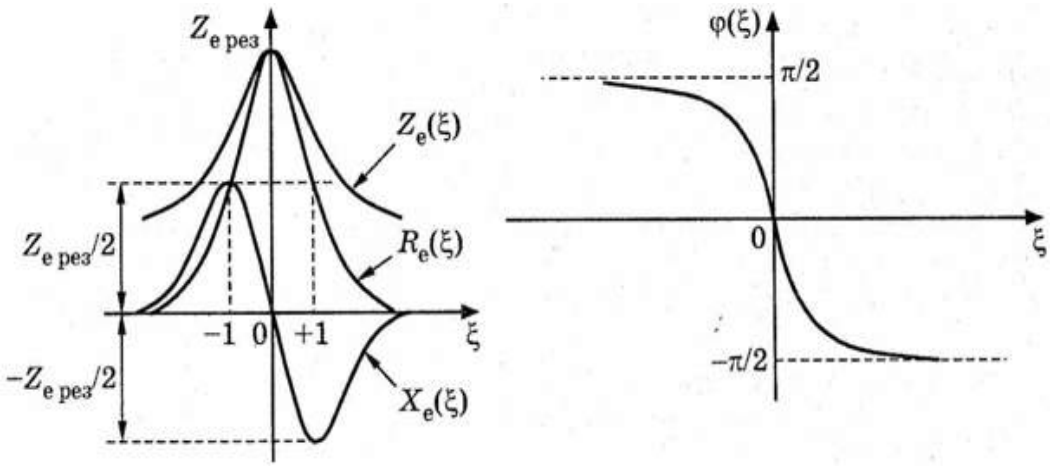
Звідси можна визначити частотні залежності активної і реактивної складових:

$$Z_e(j\xi) = \frac{Z_{e0}}{1 + j\xi} = \frac{Z_{e0}}{1 + j\xi}\frac{1 - j\xi}{1 - j\xi} = \frac{Z_{e0}}{1+\xi^2} - j\frac{Z_{e0}\xi}{1+\xi^2} = R_e(\xi) = jX_e(\xi),$$

де $R_e(\xi) = \dfrac{Z_{e0}}{1+\xi^2}$, $\quad X_e(\xi) = -\dfrac{Z_{e0}\xi}{1+\xi^2}$.

Графіки залежностей $Z_e(\xi)$, $R_e(\xi)$, $X_e(\xi)$ і $\varphi(\xi)$ показано на рис. 6.11.

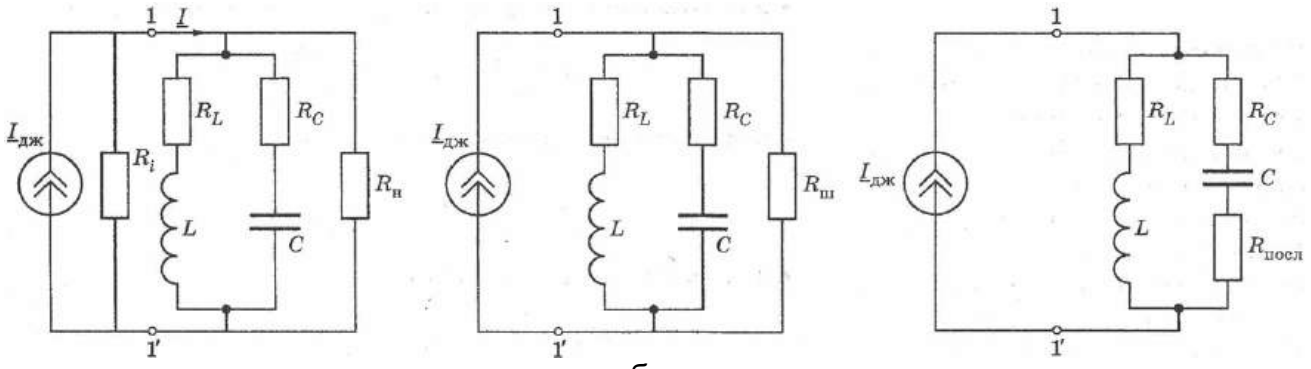
СП для паралельного КК розраховують аналогічно СП послідовного КК, тобто $П_\omega = \omega_0/Q$. Відрізняються тільки граничні значення АЧХ при $\omega = 0$ і $\omega \to \infty$. Для послідовного КК ці значення прямують до нуля, а для паралельного КК вони є такими: $Z_e(0) = R_L$ і $Z_e(\infty) = R_C$.



а б

Рис. 6.11. Графіки залежностей $Z_e(\xi)$, $R_e(\xi)$, $X_e(\xi)$ і $\varphi(\xi)$

Розглянемо вплив опорів джерела й навантаження на вибіркові властивості паралельного КК. Схеми включення елементів КК зображено на рис. 6.12.



а б в

Рис. 6.12. Схеми включення паралельного коливального контуру

Паралельно з'єднані R_i і R_H можна замінити еквівалентним $R_ш$. Тоді джерело струму можна розглядати як ідеальне, а опір $R_ш$ перерахувати в послідовний за формулою $R_{пос} = \rho^2 / R_ш$.

Опір загальних втрат $R_e = R_{пос} + R_L + R_C$, а еквівалентна добротність

$$Q_e = \frac{\rho}{R_e} = \frac{\rho}{R_C + R_L + R_{пос}} = \frac{\rho}{R + \rho^2\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_H}\right)} =$$

$$= \frac{\rho}{R\left[1 + \frac{\rho^2}{R}\left(\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_H}\right)\right]} = \frac{Q}{1 + \frac{Z_{e0}}{R_i} + \frac{Z_{e0}}{R_H}};$$

$$R = R_C + R_L;\ \ Q = \frac{\rho}{R};\ \ Z_{e0} = \frac{\rho^2}{R}.$$

Отже, Q_e залежить від власної добротності Q і відношень $\frac{Z_{e0}}{R_i}$ і $\frac{Z_{e0}}{R_H}$.

Зі зменшенням R_i (R_H) еквівалентна добротність зменшується.

Еквівалентна добротність Q_e визначає еквівалентну СП

$$\Pi_e = \frac{\omega_0}{Q_e},$$

яка зменшується при зменшенні Q_e. Разом із розширенням СП зменшення добротності призводить до зменшення еквівалентного резонансного опору, тому що $Z_e = Q\rho$.

Таким чином, використання вибіркових властивостей паралельного КК доцільно, коли внутрішні опори навантаження й джерела досить великі ($R_i >> Z_{e0}$ і $R_H >> Z_{e0}$).

Якщо коло живиться від джерела напруги (рис. 6.13), то як відгук розглядаємо $\dot{U}_K$, а як вплив – $\dot{E}$. У цьому випадку КПФ матиме вигляд

$$H_u(j\omega) = \frac{\dot{U}_K}{\dot{E}} = \frac{\dot{I}Z_e(j\omega)}{\dot{E}} = \frac{Z_e(j\omega)}{R_0 + Z_e(j\omega)} = \frac{1}{1 + R_0 / Z_e(j\omega)}.$$

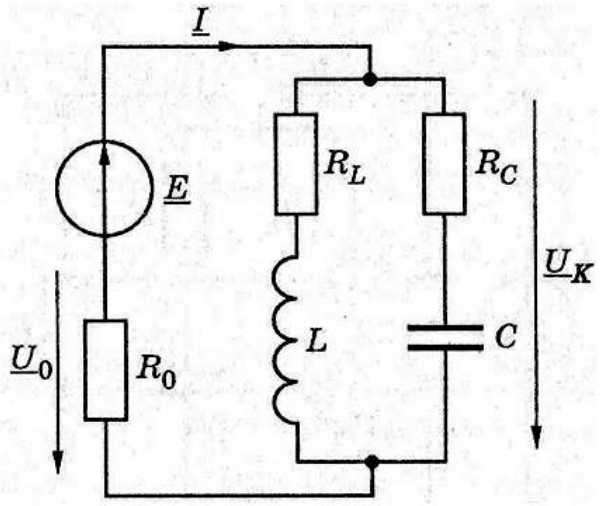


Рис. 6.13. Підключення паралельного КК із живленням від джерела напруги

Вплив R_0 на вибіркові властивості контуру зменшується зі збільшенням R_0, але при цьому також зменшується значення $H_u(\omega)$.

Якщо $R_0 \le Z_{e0}$, а відгуком є $\dot{U}_0$, то КПФ

$$H_{uR0}(j\omega) = \frac{\dot{U}_0}{\dot{E}} = \frac{\dot{U}_0}{\dot{U}_0 + \dot{U}_K} = \frac{1}{1 + \frac{\dot{U}_K}{\dot{U}_0}} = \frac{1}{1 + \frac{Z_{e0}(j\omega)}{R_0}}.$$

Така АЧХ матиме вигляд, зображений на рис. 6.14.

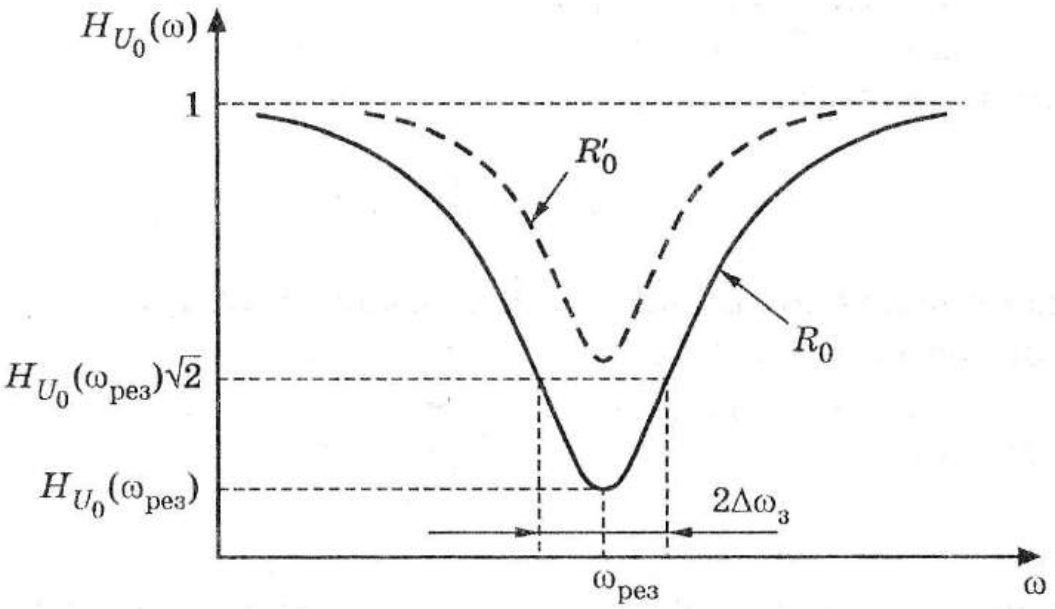


Рис. 6.14. АЧХ паралельного КК

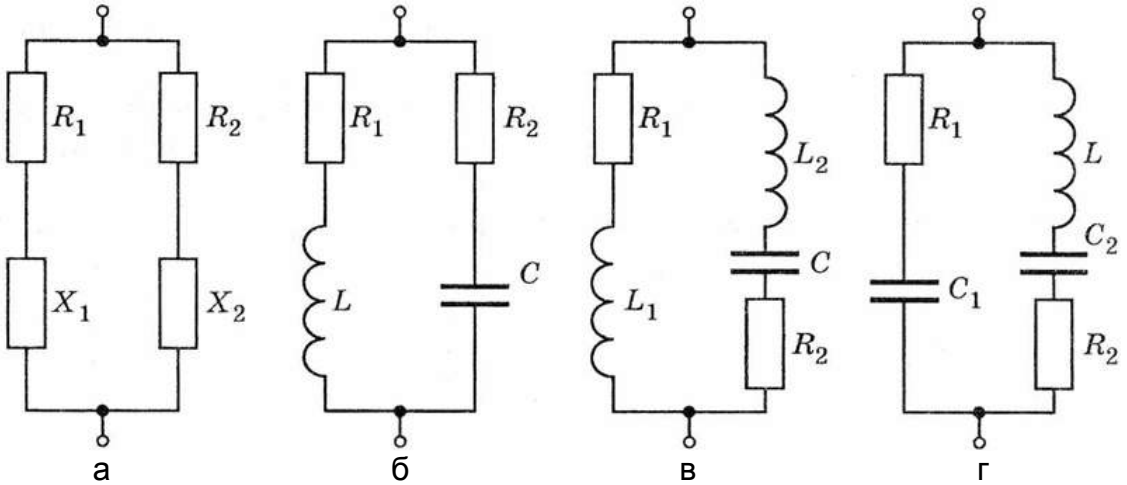
Щоб одержати в такому з'єднанні максимальну активну потужність, потрібно узгодити джерело ЕРС із навантаженням, тобто виконати умову $R_i = Z_{e0}$. Якщо $R_i < Z_{e0}$, то зменшення Z_{e0} нераціональне, бо призводить до звуження СП. Щоб зменшити резонансний опір, зберігши вибіркові характеристики контуру, необхідно застосувати складні паралельні контури.

Загальний вигляд схеми паралельного КК показано на рис. 6.15, а.

На частоті ω_0 у контурі з високою Q має виконуватися умова

$$X_1 + X_2 = 0. \qquad (6.15)$$

Опори X_1 і X_2 можуть бути довільними індуктивностями і ємностями. Схему на рис. 6.15, б називають простим паралельним КК (КК першого виду, або КК із повним включенням). Схеми на рис. 6.15, в, г називають КК другого й третього виду, або КК із розподіленими індуктивністю і ємністю відповідно. КК другого й третього виду називають складними, або КК із частковим включенням.



а б в г

Рис. 6.15. Схеми складних паралельних КК

Еквівалентний опір складного КК

$$\dot{Z}_e = \frac{\dot{Z}_1\dot{Z}_2}{\dot{Z}_1+\dot{Z}_2} = \frac{(R_1+jX_1)(R_2+jX_2)}{R_1+R_2+j(X_1+X_2)}.$$

У високодобротних контурах

$$\dot{Z}_e \approx \frac{jX_1jX_2}{R+j(X_1+X_2)}.$$

На частоті ω_0 опір контура є дійсною величиною, тому

$$\dot{Z}_e = \frac{-X_1X_2}{R} = \frac{X_1^2}{R} = \frac{X_2^2}{R} = \frac{X_1^2\rho^2}{\rho^2 R} = \frac{X_2^2\rho^2}{\rho^2 R} = p^2 Z_{e0},$$

де $p = \left.\frac{|X_1|}{\rho} = \frac{|X_2|}{\rho}\right|_{\omega=\omega_0}$ – коефіцієнт включення, який має значення від 0 до 1; $Z_{e0} = \rho^2/R$ – еквівалентний резонансний опір простого паралельного КК.

Розрахунки ω_0 і p здійснюються таким чином.

1. Для контуру другого виду

$$\omega_0 L_1 + \omega_0 L_2 - 1/\omega_0 C = 0,$$

звідки

$$\omega_0 = 1/\sqrt{(L_1+L_2)C}.$$

Резонансна частота при розподілі індуктивностей не змінюється, тоді $L = L_1 + L_2$, а p має вигляд

$$p = \frac{\omega_0 L_1}{\omega_0(L_1+L_2)} = \frac{L_1}{L}.$$

2. Для контуру третього виду

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C_1} - \frac{1}{\omega_0 C_2} = 0,$$

звідки

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C_1+C_21}{LC_1C_2}}.$$

Повна ємність контуру $C = C_1C_2/(C_1+C_2)$, тоді

$$p = \frac{\frac{1}{\omega_0 C_1}}{\frac{1}{\omega_0 C_1C_2/(C_1+C_2)}} = \frac{\frac{1}{C_1}}{\frac{C_1+C_2}{C_1C_2}} = \frac{C_2}{C_1+C_2}.$$

Таким чином, у складному паралельному КК порівняно із простим резонансний опір зменшується в p^2 раз при незмінній резонансній частоті ω_0. Характерною рисою складних контурів є наявність резонансів струмів і напруг (рис. 6.16).

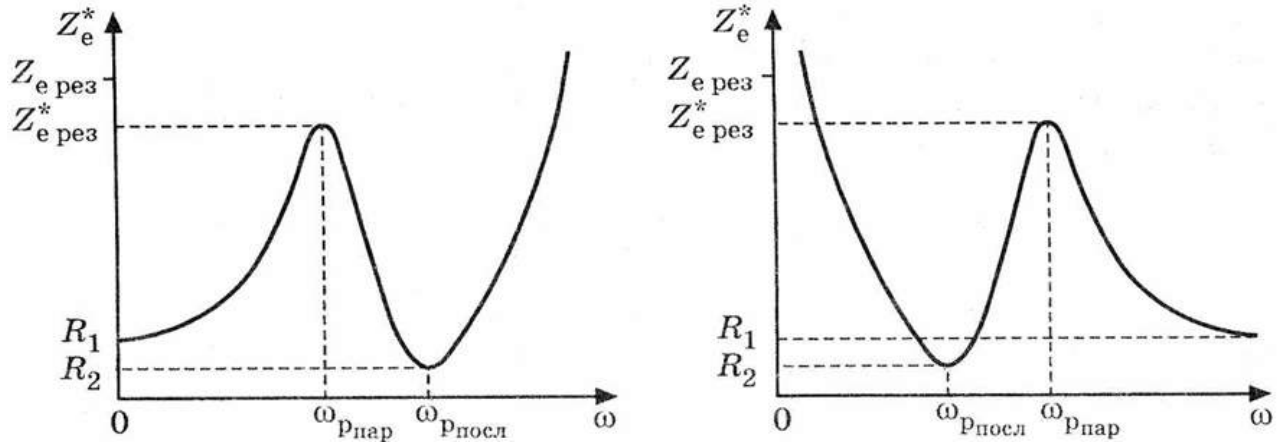


Рис. 6.16. Резонансні характеристики складних паралельних контурів

6.5. Індуктивно з'єднані кола

При протіканні змінного струму *I* через котушку індуктивності із числом витків *w* і осердям (магнітопроводом) довжиною λ навколо неї й усередині магнітопроводу виникає *магнітне поле,* яке характеризується такими основними параметрами:

– ***магніторушійною силою*** (МРС) $F = Iw$, виміряється в ампервитках; МРС аналогічна ЕРС в електричних колах;

– ***напруженістю магнітного поля*** *H* – відношенням МРС до довжини магнітопроводу λ, виміряється в амперах, поділених на метр (А/м), добуток $H\lambda$ – це *магнітна напруга;*

– ***магнітною індукцією*** $B = \mu_a H$ – інтенсивністю магнітного поля (μ_a – абсолютна магнітна проникність магнітопроводу), виміряється в теслах (Тл);

– ***магнітним потоком*** $\Phi = BS$ (*S* – площа перерізу магнітопроводу), виміряється у веберах (Вб);

– ***потокозчепленням*** $\psi = w\Phi$;

– ***індуктивністю самоіндукції*** *L*, виміряється в генрі (Гн):

$$L = \frac{d\Psi}{dI} = w\frac{d\Phi}{dI}. \qquad (6.16)$$

За законом Фарадея–Максвелла і правилом Ленца в такій котушці виникає ЕРС самоіндукції:

$$e = -\frac{d\Psi}{dt} = -w\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (6.17)$$

Для магнітного кола, що складається з *n* послідовних ділянок (за аналогією з другим законом Кірхгофа для електричного кола), формулюється ***закон повного струму:*** *МРС магнітного кола дорівнює сумі магнітних напруг на послідовних ділянках цього кола:*

$$wI = \sum_{i=1}^{n} H_i \lambda_i . \qquad (6.18)$$

За наявності в безпосередній близькості від котушки індуктивності іншої котушки, в останній завдяки індукції буде виникати ЕРС взаємоіндукції відповідно до закону Фарадея–Максвелла. Розглянемо параметри такого індуктивного зв'язку (рис. 6.17).

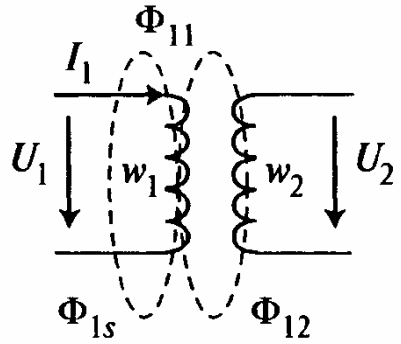


Рис. 6.17. Індуктивно з'єднані котушки

При підключенні до джерела в першій котушці створюється магнітний потік Φ_{11}, що складається з потоку розсіювання Φ_{1S} і потоку взаємоіндукції Φ_{12}, що охоплює витки другої котушки.

У такій схемі є три види потокозчеплення й індуктивностей:

1) потокозчеплення самоіндукції $\Psi_{11} = w_1\Phi_{11}$ та індуктивність самоіндукції $L_1 = \dfrac{d\Psi_{11}}{dI_{11}} = w_1\dfrac{d\Phi_{11}}{dI_1}$;

2) потокозчеплення розсіювання $\Psi_{1s} = w_1\Phi_{1s}$ та індуктивність розсіювання $L_{1s} = \dfrac{d\Psi_{1s}}{dI_1} = w_1\dfrac{d\Phi_{1s}}{dI_1}$;

3) потокозчеплення взаємоіндукції $\Psi_{12} = w_1\Phi_{12}$ та індуктивність взаємоіндукції $M_{12} = \dfrac{d\Psi_{12}}{dI_1} = w_2\dfrac{d\Phi_{12}}{dI_1}$.

За лінійності котушок

$$L_1 = w_1\frac{\Phi_1}{I_1}; \qquad L_{1s} = w_1\frac{\Phi_{1s}}{I_1}; \qquad M_{12} = w_1\frac{\Phi_{12}}{I_1}.$$

Аналогічно при підключенні другої котушки до джерела

$$L_2 = w_2\frac{\Phi_{22}}{I_2}; \qquad L_{2s} = w_2\frac{\Phi_{2s}}{I_2}; \qquad M_{21} = w_2\frac{\Phi_{21}}{I_2}.$$

Згідно із принципом взаємності $M = M_{12} = M_{21}$.

При підключенні першої котушки до джерела, а другої – до навантаження в них потечуть струми I_1 і I_2 відповідно, це створить загальне потокозчеплення в котушках:

$$\Psi_1 = \Psi_{11} \pm \Psi_{21} = w_1\Phi_{11} \pm w_1\Phi_{21};$$

$$\Psi_2 = \Psi_{22} \pm \Psi_{12} = w_2\Phi_{22} \pm w_2\Phi_{12}.$$

Знак «+» ставиться при узгодженому включенні котушок, а знак «–» – при зустрічному включенні (рис. 6.18).

а б

Рис. 6.18. Методи включення котушок: а – узгоджене; б – зустрічне

Для того, щоб на основі зображення схеми можна було робити висновок про спосіб включення котушок, досить вказати на схемі напрямки струмів і одну з пар однойменних затискачів (наприклад, вхідні затискачі на схемі позначають крапками).

Напруга на кожній котушці є такою:

$$U_1 = L_1\frac{dI_1}{dt} \pm M\frac{dI_2}{dt} = U_{11} \pm U_{M1};$$

$$U_2 = L_2\frac{dI_2}{dt} \pm M\frac{dI_1}{dt} = U_{22} \pm U_{M2}.$$

Тут U_{M1} і U_{M2} – внесені напруги в одній котушці зі струмом у результаті впливу на неї іншої котушки зі струмом.

Ступінь зв'язку двох індуктивно з'єднаних котушок оцінюється *коефіцієнтом індуктивного зв'язку*

$$K_M = \sqrt{\frac{\Phi_{12}\Phi_{21}}{\Phi_{11}\Phi_{22}}} = \frac{M}{\sqrt{L_1L_2}}. \qquad (6.19)$$

Значення K_M змінюється від 0 (відсутності зв'язку між котушками) до 1 (жорсткого зв'язку котушок).

Повний взаємозв'язок котушок ($M^2 = L_1L_2$) досягається за відсутності потоків розсіювання, тобто, якщо $\Phi_{1S} = \Phi_{2S} = 0$ і $\Phi_{11} = \Phi_{21};\ \Phi_{22} = \Phi_{12}$.

Оскільки

$$\Phi_{11} + \Phi_{21} = \Phi_{22} + \Phi_{12} = \Phi;\ u_1 = \frac{d\Psi_1}{dt} = w_1\frac{d\Phi}{dt};\ u_2 = \frac{d\Psi_2}{dt} = w_2\frac{d\Phi}{dt},$$

то відношення напруг $\frac{u_2}{u_1} = \frac{w_2}{w_1}$ називають *коефіцієнтом трансформації*.

6.6. З’єднані коливальні контури. Види резонансів. Частотні характеристики

З’єднаними називаються два або більше контурів, у яких процеси впливають один на одного (рис. 6.19).

Зазвичай використовують взаємоіндуктивний (трансформаторний), індуктивний (автотрансформаторний) і ємнісний зв’язки.

Перевагами використання з’єднаних КК є:

1) краща вибірковість через те, що АЧХ є більш прямокутною;
2) можливість плавного регулювання СП;
3) просте узгодження із джерелом.

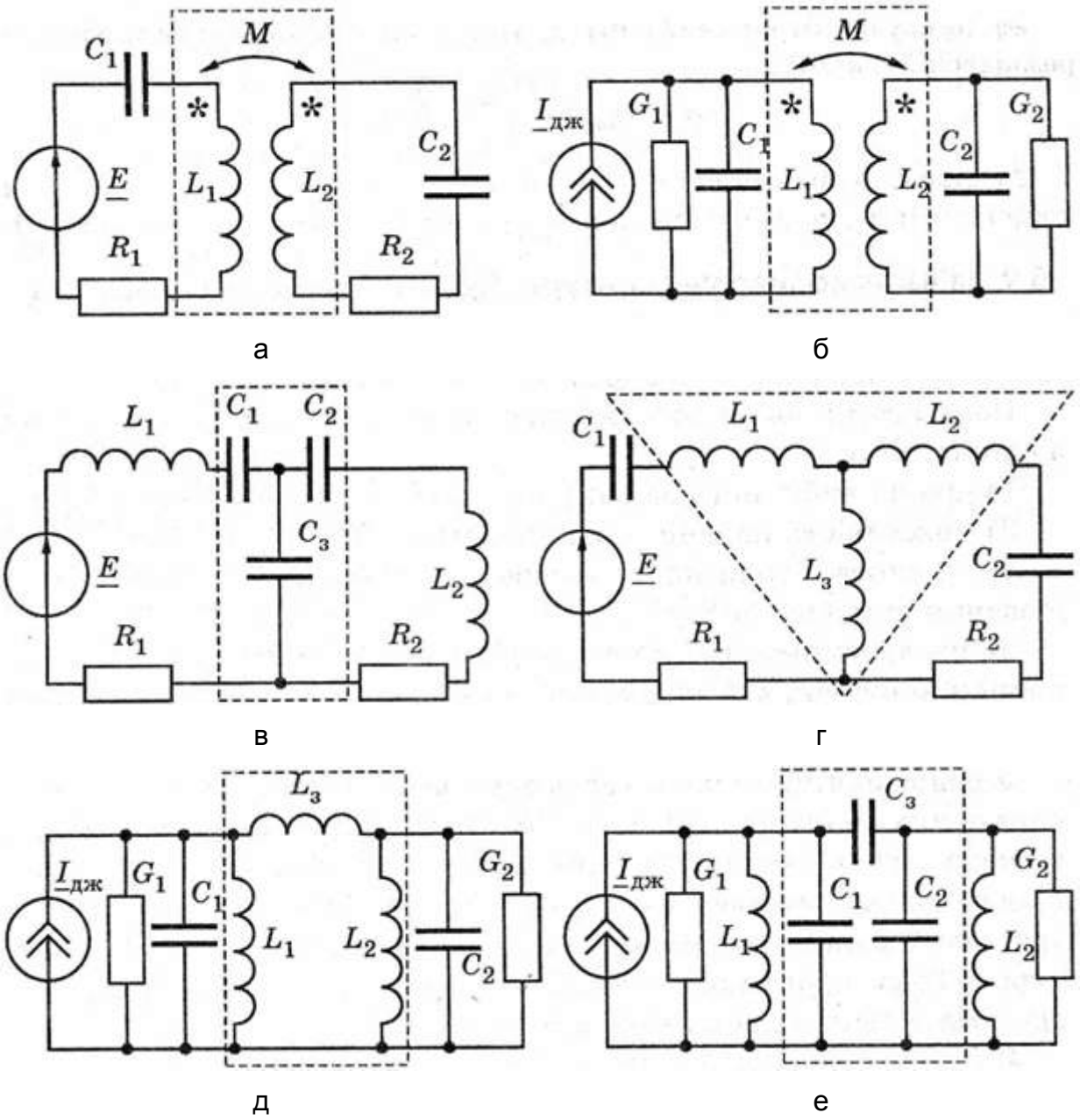


Рис. 6.19. Схеми з’єднаних контурів

Взаємоіндуктивний зв'язок є однаковим як для з'єднаних послідовних КК, так і для паралельних (див. рис. 6.19, а, б).

Індуктивний і ємнісний зв'язки реалізуються по-різному. Для послідовних КК елемент зв'язку одночасно входить у коло кожного контуру (див. рис. 6.19, в, г); такий зв'язок називається внутрішнім. У з'єднаних паралельних КК (див. рис. 6.19, д, е) елементи зв'язку підключені по-іншому, тому зв'язок називається зовнішнім.

Пунктиром на рис. 6.19 позначені ***чотириполюсники зв'язку***, які містять елементи, однотипні з елементом зв'язку, та характеризуються певним коефіцієнтом передачі, який знаходять так:

$$k = \sqrt{\dot{H}_{2xx}\dot{H}_{1xx}};$$
$$\dot{H}_{2xx} = \frac{\dot{U}_{2xx}}{\dot{E}}; \dot{H}_{1xx} = \frac{\dot{U}_{1xx}}{\dot{E}}, \qquad (6.20)$$

де $\dot{H}_{2xx}$ – комплексний коефіцієнт передачі за напругою, якщо джерело підключено до входу чотириполюсника зв'язку; $\dot{H}_{1xx}$ – комплексний коефіцієнт передачі за напругою, якщо джерело підключено до виходу чотириполюсника зв'язку.

Коефіцієнти зв'язку для різних режимів розраховують таким способом:

1) взаємоіндуктивного зв'язку

$$k = M \Big/ \sqrt{L_1 L_2}; \qquad (6.21)$$

2) внутрішнього ємнісного зв'язку

$$k = \sqrt{\frac{C_1 C_2}{(C_{зв} + C_1)(C_{зв} + C_2)}}; \qquad (6.22)$$

3) внутрішнього індуктивного зв'язку

$$k = \frac{L_{зв}}{\sqrt{(L_{зв} + L_1)(L_{зв} + L_2)}}; \qquad (6.23)$$

4) зовнішнього індуктивного зв'язку

$$k = \sqrt{\frac{L_1 L_2}{(L_{зв} + L_1)(L_{зв} + L_2)}}; \qquad (6.24)$$

5) зовнішнього ємнісного зв'язку

$$k = \frac{C_{зв}}{\sqrt{(C_{зв} + C_1)(C_{зв} + C_2)}}. \qquad (6.25)$$

Якщо з'єднані КК настроєні на одну частоту, що збігається із частотою генератора, то індуктивні і ємнісні опори КК приблизно дорівнюють хвильовому (характеристичному) опору; тоді

$$k = \frac{|x_{зв}|}{\sqrt{\rho_1 \rho_2}}. \qquad (6.26)$$

Види резонансу у з'єднаних контурах

Для двоконтурного кола (рис. 6.20), що живиться тільки з боку першого контуру з напругою $\dot{U}$, можна за правилом контурних струмів скласти два рівняння:

$$\dot{Z}_{11}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{12}\dot{I}_2 = \dot{U};$$
$$\dot{Z}_{21}\dot{I}_1 + \dot{Z}_{22}\dot{I}_2 = 0.$$

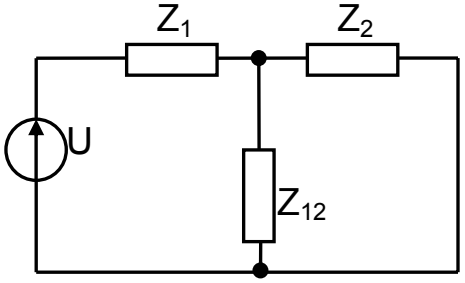


Рис. 6.20. Схема двоконтурного кола

Згідно з другим рівнянням струм

$$I_2 = -\frac{\dot{Z}_{21}}{\dot{Z}_{22}}\dot{I}_1 = \frac{jx_{зв}}{r_{22} + jx_{22}}\dot{I}_1 = H_1\dot{I}_1,$$

де функція передачі струмів

$$H_1 = \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} = \frac{x_{зв}}{|Z_{22}|}(x_{22} + jr_{22}).$$

Таким чином, струм у першому контурі

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_{11} - \dot{Z}_{12}^2/\dot{Z}_{22}} = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}};$$
$$\dot{Z} = r + jx = \dot{Z}_{11} + x_{зв}^2/\dot{Z}_{22} = \dot{Z}_{11} + \dot{Z}_{вн}.$$

де Z – вхідний опір кола; $\dot{Z}_{11}$ визначається параметрами тільки першого КК, $\dot{Z}_{вн}$ – повний внесений опір, який визначається параметрами зв'язку та другого контуру. Цей доданок вносять у випадку приєднання другого контуру до першого.

Комплексний струм першого КК

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}}{\dot{Z}_{11} + \dot{Z}_{вн}} = \frac{\dot{U}}{(r_{11} + r_{вн}) + j(x_{11} + x_{вн})}.$$

Комплексний струм другого КК

$$-\dot{I}_2 = \dot{I}_1\frac{\dot{Z}_{21}}{\dot{Z}_{22}} = \dot{I}_1\frac{jx_{12}}{r_{22} + jx_{22}} = \dot{I}_1\frac{x_{12}}{|Z_{22}|}(x_{22} + jr_{22}).$$

При резонансі власні опори КК будуть активними:

$$Z_{11} = r_{11} = R_1;\ Z_{22} = r_{22} = R_2.$$

Розглянемо умову одержання максимальних значень струмів у КК. Настроювання з'єднаних КК здійснюється зміною реактивних параметрів і може відбуватися по-різному. Розрізняють кілька видів резонансу.

Приватним резонансом називають резонанс, що досягається зміною параметрів одного контуру при незмінних параметрах іншого. Розрізняють перший приватний (змінюються параметри першого КК) і другий приватний (змінюються параметри другого КК) резонанси.

Розглянемо перший приватний резонанс, коли реактивна складова вхідного опору $x = x_{11} + x_{вн} = x_{11} - x_{22}\left(x_{зв}/|Z_{22}|\right)^2 = 0$. У цьому випадку забезпечується найбільше значення контурних струмів для заданого реактивного опору зв'язку x_{12}. Тоді діючі значення струмів у контурах

$$\begin{cases} I_{1max} = \dfrac{U}{r_{11} + r_{вн}} = \dfrac{U}{r_{11} + r_{22}\left(x_{зв}/|Z_{22}|\right)^2}; \\ I_{2max} = I_{1max}\dfrac{x_{зв}}{|Z_{22}|} = \dfrac{U}{|Z_{22}|\left(\dfrac{r_{11}}{x_{зв}} + \dfrac{r_{22}x_{зв}}{|Z_{22}|^2}\right)}. \end{cases} \tag{6.27}$$

Аналогічним чином (із відповідною заміною індексів) можна отримати формули для другого приватного резонансу.

З формули (6.27) видно, що максимальне значення струмів у режимі приватного резонансу залежить від опору зв'язку. Знаменник другого рівняння системи (6.27) має максимум тоді, коли

$$-\frac{r_{11}}{x_{зв}^2} + \frac{r_{22}}{|Z_{22}|^2} = 0,$$

звідки вибираємо оптимальне значення опору зв'язку:

$$x_{зв\ опт} = |Z_{22}|\sqrt{r_{11}/r_{22}}\ . \tag{6.28}$$

За такого значення одержуємо максимальний струм у другому контурі. Струми в контурах будуть такими:

$$\begin{cases} I_{1max} = \dfrac{U}{2r_{11}}; \\ I_{2max} = \dfrac{U}{2\sqrt{r_{11}r_{22}}}. \end{cases} \tag{6.29}$$

Приватний резонанс із подальшим добором оптимального зв'язку називають ***складним резонансом***.

Якщо кожний з контурів настроюється в резонанс окремо при розімкнутому іншому контурі, то це – ***основний резонанс***.

У цьому випадку $x_{11} = x_{22} = 0;\ Z_{11} = r_{11};\ Z_{22} = r_{22}$. Тоді діючі значення струмів визначатимуться, виходячи з формули (6.27):

$$\begin{cases} I_{1max} = \dfrac{U}{r_{11} + \dfrac{x_{зв}^2}{r_{22}}}; \\ I_{2max} = \dfrac{U}{r_{22}\left(\dfrac{r_{11}}{x_{зв}} + \dfrac{x_{зв}}{r_{22}}\right)}. \end{cases} \tag{6.30}$$

Якщо доповнити основний резонанс добором оптимального зв'язку, одержимо ***повний резонанс***. Оптимальний опір зв'язку підбираємо згідно з формулою (6.28) і $Z_{22} = r_{22}$:

$$x_{зв\ опт} = \sqrt{r_{11} r_{22}}\ . \tag{6.31}$$

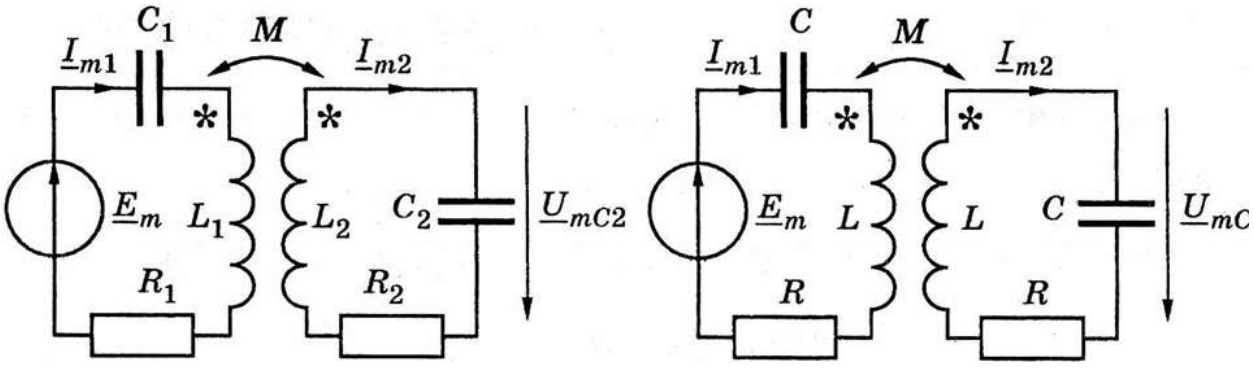
Діючі значення струмів при цьому матимуть вигляд

$$\begin{cases} I_{1max} = \dfrac{U}{2r_{11}}; \\ I_{2max} = \dfrac{U}{2\sqrt{r_{11} r_{22}}}. \end{cases} \tag{6.32}$$

Таким чином, струми при складному й повному резонансах однакові, але в останньому випадку вони досягаються при меншому значенні опору зв'язку. При $r_{11} = r_{22}$ струми в обох контурах будуть однаковими.

Частотні характеристики з'єднаних КК

Дослідження частотних властивостей системи з'єднаних КК дозволяє робити висновки про смугу пропускання та про рівномірність амплітуди коливань у СП. Розглянемо КПФ на прикладі індуктивно з'єднаних контурів (рис. 6.21). З'єднані контури можуть бути неідентичними (рис. 6.21, а) і ідентичними (рис. 6.21, б).



а б

Рис. 6.21. Індуктивно з'єднані контури

Обмежимося випадком, коли перший і другий КК мають однакову резонансну частоту: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L_1C_1}} = \frac{1}{\sqrt{L_2C_2}}$.

Щоб побудувати резонансні криві, проаналізуємо струм у другому контурі:

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{E}\dot{Z}_{12}}{\dot{Z}_{11}\dot{Z}_{22} - \left(\dot{Z}_{12}\right)^2}. \qquad (6.33)$$

Оскільки опір $\dot{Z}_{12}$ – реактивний, то $\dot{Z}_{11} = r_1\left(1 + j\xi_1\right)$; $\dot{Z}_{22} = r_2\left(1 + j\xi_2\right)$.

Тут

$$\xi_1 = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)Q_1 \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}Q_1; \quad \xi_2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)Q_2 \approx \frac{2\Delta\omega}{\omega_0}Q_2 = \frac{Q_2}{Q_1}\xi_1.$$

Тоді

$$\dot{I}_2 = \frac{j\dot{E}\frac{x_{12}}{r_1r_2}}{\left(1 + j\xi_1\right)\left(1 + j\xi_2\right) - \frac{\left(jx_{12}\right)^2}{r_1r_2}}.$$

Розглянемо область частот поблизу резонансу. КК настроєні на ту саму частоту ω_0, а $\frac{|x_{12}|}{\sqrt{r_1r_2}} = \frac{|x_{12}|}{\sqrt{\rho_1\rho_2}}\sqrt{\frac{\rho_1\rho_2}{r_1r_2}} = k\sqrt{Q_1Q_2}$.

Визначимо дійсно максимальне значення вторинного струму, яке досягається підбиранням найвигіднішого зв'язку:

$$I_{2\max\max} = \frac{E}{2\sqrt{r_{11}r_{22}}}.$$

Таким чином, отримаємо

$$\frac{I_2}{I_{2\max\max}} = \frac{2k\sqrt{Q_1Q_2}}{\left|\left(1 + j\xi_1\right)\left(1 + j\xi_2\right) + k^2Q_1Q_2\right|} =$$

$$= \frac{2k\sqrt{Q_1Q_2}}{\sqrt{\left(1 + k^2Q_1Q_2 - \xi_1\xi_2\right)^2 + \left(\xi_1 + \xi_2\right)^2}} = \qquad (6.34)$$

$$= \frac{2k\sqrt{Q_1Q_2}}{\sqrt{\left(1 + k^2Q_1Q_2 - \frac{Q_2}{Q_1}\xi_1^2\right)^2 + \left(1 + \frac{Q_2}{Q_1}\right)^2\xi_1^2}}.$$

Вираз (6.34) – рівняння нормованої АЧХ, що визначає величину струму I_2 в частках струму $I_{2\max\max}$.

Щоб дослідити форму АЧХ, продиференцюємо (6.34) за ξ_1 та прирівняємо похідну нулю. Це рівняння має три розв'язки.

Перший розв'язок: $\xi_1 = 0$ відповідає частоті $\omega = \omega_0$.

Другий і третій розв'язки виходять із умови

$$\xi_1^2 = Q_1^2\left(k^2 - k_{кр}^2\right),$$

де $k_{кр}$ – критичний коефіцієнт зв'язку:

$$k_{кр} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{Q_1^2} + \frac{1}{Q_2^2}\right)}.$$

Таким чином, якщо $k < k_{кр}$, то існує один максимум АЧХ (крива I_2 одногорба). У випадку $k > k_{кр}$ резонансна крива I_2 двогорба. Максимуми I_2 наступають при $\xi_1 = \pm Q_1\sqrt{k^2 - k_{кр}^2}$, а розв'язок $\xi_1 = 0$ відповідає западині двогорбої кривої.

Якщо обидва КК мають приблизно однакові добротності, розрахунки спрощуються:

$$\frac{I_2}{I_{2\max\max}} = \frac{2kQ}{\sqrt{\left(1 + k^2Q^2 - \xi^2\right)^2 + 4\xi^2}}.$$

Тоді $\xi_{I\ II} = \pm\sqrt{(Q_1 k)^2 - 1}$ і $k_{кр} = \frac{1}{Q} = d$.

На рис. 6.22 зображено нормовані АЧХ системи з'єднаних контурів.

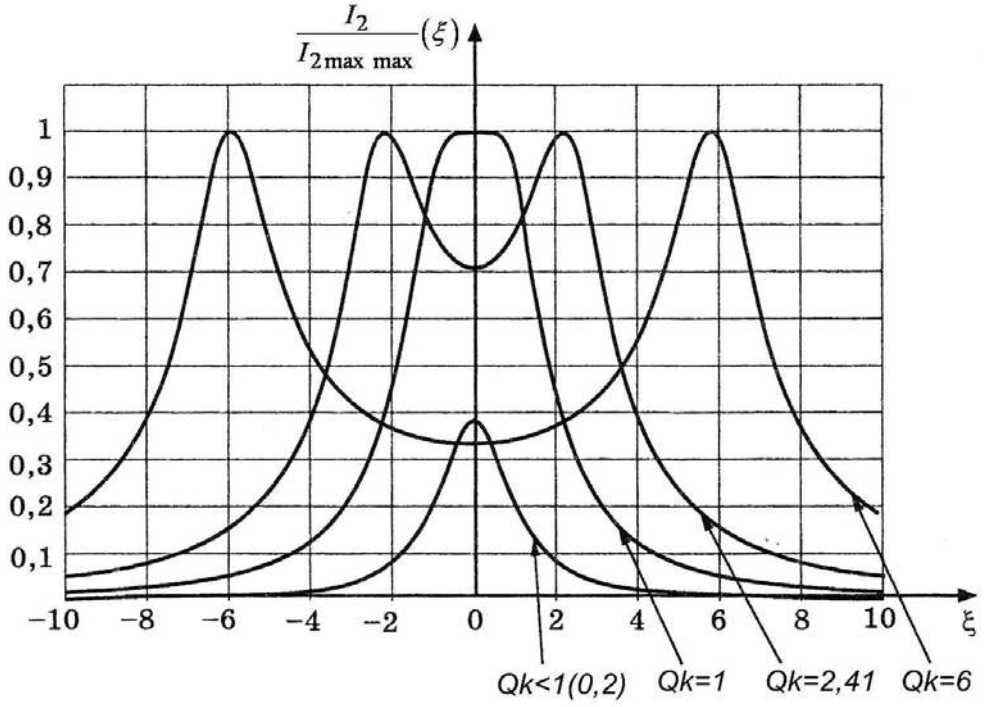


Рис. 6.22. Приклад резонансних кривих з'єднаних контурів

Тут так само спостерігаються три випадки (рис. 6.22):

1) $Qk < 1$ – резонансна крива має один максимум при $\xi = 0$, який менше 1, бо вторинний струм не досягає значення максимуму максиморума;

2) $Qk = 1$ – гранична одногорба крива, при $\xi = 0$ вторинний струм досягає граничного максимального значення;

3) $Qk > 1$ – резонансна крива двогорба, при значеннях ξ_I і ξ_{II} вторинний струм досягає значення максимуму максиморума (резонансна крива дорівнює 1).

За смугу пропускання з'єднаних КК вважають область частот, на межах якої резонансна крива зменшується на більш ніж у $\sqrt{2}$ раз порівняно з максимумом.

Для того, щоб визначити СП, потрібно розв'язати рівняння

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2kQ}{\sqrt{\left(1 + k^2Q^2 - \xi^2\right)^2 + 4\xi^2}}. \qquad (6.35)$$

Його розв'язком є вираз

$$\xi = \pm\sqrt{k^2Q^2 - 2kQ - 1},$$

який справедливий доти, доки западина резонансної кривої вище або дорівнює $1/\sqrt{2}$. У граничному випадку при $\xi = 0$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2kQ}{1 + k^2Q^2},$$

звідки

$$kQ = 2{,}41.$$

Підставивши отримане значення у формулу (6.35) одержимо $\xi = 3{,}1$ (смуга пропускання в 3,1 рази ширше, ніж у одиночного контуру). Якщо $kQ = 1$, то $\xi = 1{,}41$ (СП є ширшою в 1,41 рази порівняно з одиночним КК). Якщо $kQ = 0{,}68$, то $\xi = 1$ (СП дорівнює СП одиночного КК). Для $kQ < 0{,}68$ СП з'єднаних КК буде меншою за СП одиночного КК.

Величину kQ називають ***параметром зв'язку***.

Слід зазначити, що отримані частотні залежності вторинного струму мають наближений характер. Вони тим точніші, чим меншими є розладнання $\Delta\omega$ та параметр зв'язку kQ.

7. УЗАГАЛЬНЕНА ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ ЧОТИРИПОЛЮСНИХ КІЛ

Дослідження режиму роботи складного ЕК зводиться до встановлення зв'язку між струмами, напругами й потужностями різних його ділянок або гілок. Режим іншої частини кола може залишатися невідомим. У таких умовах досліджуване коло може визначатися узагальненими параметрами на відповідних затискачах, відносно яких параметри або задані, або мають

бути знайдені. Частина кола, що характеризується узагальненими параметрами, необхідними й достатніми для складання рівнянь зв'язків між струмами й потенціалами на її затискачах, називається ***багатополюсником***. Кількість полюсів багатополюсника дорівнює кількості затискачів на межі даної частини кола. Найчастіше розглядають двополюсники, триполюсники й чотириполюсники.

Чотириполюсники, що не містять у своїх гілках джерел енергії, називають ***пасивними***; до них належать, наприклад, лінії передачі електричної енергії й трансформатори. Чотириполюсники, що містять у своїх гілках джерела енергії, називають ***активними***.

7.1. Внутрішні (первинні) параметри лінійних чотириполюсних кіл

Розглянемо схему із двома джерелами енергії (рис. 7.1).

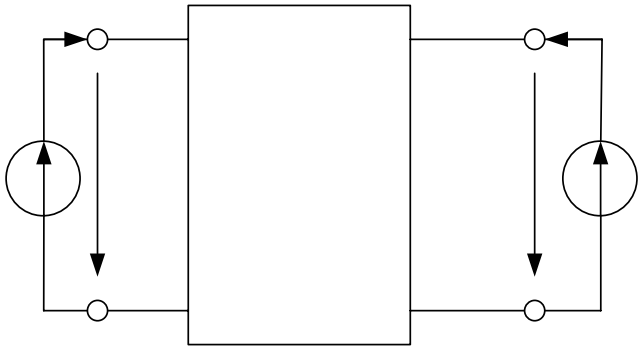


Рис. 7.1. Схема із двома джерелами енергії

Пасивну частину схеми можна розглядати як пасивний чотириполюсник з первинними – вхідними затискачами 1–1' і вторинними – вихідними затискачами 2–2'*;* при цьому внутрішні опори джерел енергії перенесені всередину чотириполюсника. Режим роботи чотириполюсника повністю визначений, якщо відомі величини $\dot{U}_1$, $\dot{U}_2$, $\dot{I}_1$, $\dot{I}_2$.

У радіотехніці дві із чотирьох величин, що визначають режим чотириполюсника, відомі (їх розглядають як задані впливи). Потрібно знайти дві інші величини (відгуки на ці впливи). Залежно від конкретних умов може зустрітися один із шести варіантів (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Можливі варіанти впливів і відгуків чотириполюсника

Варіанти	1	2	3	4	5	6
Впливи	$\dot{U}_1,\dot{U}_2$	$\dot{U}_2,\dot{I}_2$	$\dot{I}_1,\dot{I}_2$	$\dot{I}_1,\dot{U}_2$	$\dot{U}_1,\dot{I}_2$	$\dot{U}_1,\dot{I}_1$
Відгуки	$\dot{I}_1,\dot{I}_2$	$\dot{U}_1,\dot{I}_1$	$\dot{U}_1,\dot{U}_2$	$\dot{U}_1,\dot{I}_2$	$\dot{I}_1,\dot{U}_2$	$\dot{U}_1,\dot{I}_2$

Для розв'язання поставленого завдання необхідно скласти систему з двох рівнянь, які називаються *основними рівняннями чотириполюсника*.

Зупинимося на першому варіанті, коли відомі $\dot{U}_1$ і $\dot{U}_2$. За такої постановки завдання шукані струми являють собою функції напруг

$$\begin{cases} i_1 = f_1(u_1; u_2); \\ i_2 = f_2(u_1; u_2), \end{cases} \tag{7.1}$$

якщо припустити, що $\dot{U}_1$ і $\dot{U}_2$ змінюються на нескінченно малі величини du_1 і du_2. Зміни струмів визначаються повними диференціалами:

$$\begin{cases} di_1 = \dfrac{df_1}{\partial u_1} du_1 + \dfrac{df_1}{\partial u_2} du_2 = \dfrac{\partial i_1}{\partial u_1} du_1 + \dfrac{\partial i_1}{\partial u_2} du_2; \\ di_2 = \dfrac{df_2}{\partial u_1} du_1 + \dfrac{df_2}{\partial u_2} du_2 = \dfrac{\partial i_2}{\partial u_1} du_1 + \dfrac{\partial i_2}{\partial u_2} du_2. \end{cases} \tag{7.2}$$

Часткові похідні мають розмірності провідностей:

$$\frac{\partial i_1}{\partial u_1} = g_{11}; \quad \frac{\partial i_1}{\partial u_2} = g_{12}; \quad \frac{\partial i_2}{\partial u_1} = g_{21}; \quad \frac{\partial i_2}{\partial u_2} = g_{22}.$$

Тоді вираз (7.1) можна переписати в такому вигляді:

$$\begin{cases} i_1 = g_{11} du_1 + g_{12} du_2; \\ i_2 = g_{21} du_1 + g_{22} du_2. \end{cases} \tag{7.3}$$

Аналогічно формулі (7.3) можна встановити співвідношення й для комплексних амплітуд струмів і напруг:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{Y}_{11}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{12}\dot{U}_2 = \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1; \\ \dot{I}_2 = \dot{Y}_{21}\dot{U}_1 + \dot{Y}_{22}\dot{U}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2. \end{cases} \tag{7.4}$$

Струми i_1 і i_2 визначають при роздільному впливі $\dot{U}_1$ і $\dot{U}_2$ на вхідні й вихідні затискачі:

– $Y_{11} = \left.\dfrac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}$ – вхідна провідність при КЗ виході;

– $Y_{12} = \left.\dfrac{\dot{I}_2}{\dot{U}_1}\right|_{\dot{U}_2=0}$ – пряма передатна провідність при КЗ виході;

– $Y_{21} = \left.\dfrac{\dot{I}_1}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0}$ – зворотна передатна провідність при КЗ вході;

– $Y_{22} = \left.\dfrac{\dot{I}_2}{\dot{U}_2}\right|_{\dot{U}_1=0}$ – вихідна провідність при КЗ вході.

Для пасивного чотириполюсника є слушним принцип взаємності: $Y_{12} = Y_{21}$.

Якщо після перенесення джерела напруги до затискачів 2–2’ вихідні

струми $\dot{I}_2' = \dot{I}_1''$ і струми на вході $\dot{I}_1' = \dot{I}_2''$ залишаються тими самими, то такий чотириполюсник називається ***симетричним*** (зміна місць джерел живлення й навантаження не змінює величини струмів і напруг у зовнішніх колах). Прикладом симетричного чотириполюсника є схема Т-подібного чотириполюсника (рис. 7.2), в якому $Z_a = Z_b$.

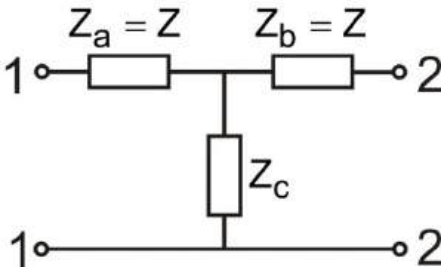


Рис. 7.2. Схема Т-подібного чотириполюсника

У симетричному чотириполюснику $\dot{I}_1' = \dot{I}_2''$, отже, $Y_{11} = Y_{22}$ (вхідна й вихідна провідності дорівнюють одна одній).

Коли чотириполюсник виконує роль проміжної ланки між джерелом і навантаженням, зазвичай заданими є параметри навантаження $\dot{I}_2$ і $\dot{U}_2$, а шукані величини характеризують режим на вході. Розв'язавши систему рівнянь (7.1) відносно $\dot{U}_1$ і $\dot{I}_1$, одержимо:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = -\dfrac{Y_{22}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \dfrac{1}{Y_{21}}\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = -\dfrac{Y_{11}Y_{22} - Y_{12}Y_{21}}{Y_{21}}\dot{U}_2 + \dfrac{Y_{11}}{Y_{21}}\dot{I}_2. \end{cases} \tag{7.5}$$

Ці рівняння можна записати у вигляді

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \end{cases} \tag{7.6}$$

Комплексні коефіцієнти A, B, C, D називають А-параметрами чотириполюсника.

У пасивному чотириполюснику $Y_{12} = Y_{21}$, тому

$$AD - BC = 1. \tag{7.7}$$

Це означає, що в такому чотириполюснику тільки три параметри є незалежними, а четвертий визначається однозначно.

Якщо чотириполюсник симетричний ($Y_{11} = Y_{22}$), то $A = D$ і, отже,

$$A^2 - BC = 1, \tag{7.8}$$

тобто тільки два параметри такого чотириполюсника є незалежними, тому він повністю характеризується будь-якими двома параметрами.

Якщо в чотириполюснику задані $\dot{I}_1$ і $\dot{I}_2$, то основні рівняння можна привести до вигляду

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2, \end{cases} \tag{7.9}$$

де $Z_{11} = \dot{U}_1/\dot{I}_1$, $Z_{12} = \dot{U}_2/\dot{I}_1$ при $\dot{I}_2 = 0$ (живлення відбувається з боку первинних затискачів, вторинні затискачі розімкнуті); $Z_{22} = \dot{U}_2/\dot{I}_2$, $Z_{21} = \dot{U}_1/\dot{I}_2$ при $\dot{I}_1 = 0$. Така форма запису називається Z-формою.

Складаючи основні рівняння чотириполюсника відносно відомих пар впливів $\dot{I}_1,\dot{U}_2$, $\dot{I}_2,\dot{U}_1$ і $\dot{I}_1,\dot{U}_1$, одержують рівняння в h-, f- та b-формах відповідно. Якщо відомо параметри чотириполюсника в одній із шести систем, то за допомогою формул переходу можна перейти до будь-якої іншої системи.

7.2. Зовнішні (вторинні) параметри лінійних чотириполюсних кіл

Розглянемо лінійний пасивний чотириполюсник (рис. 7.3).

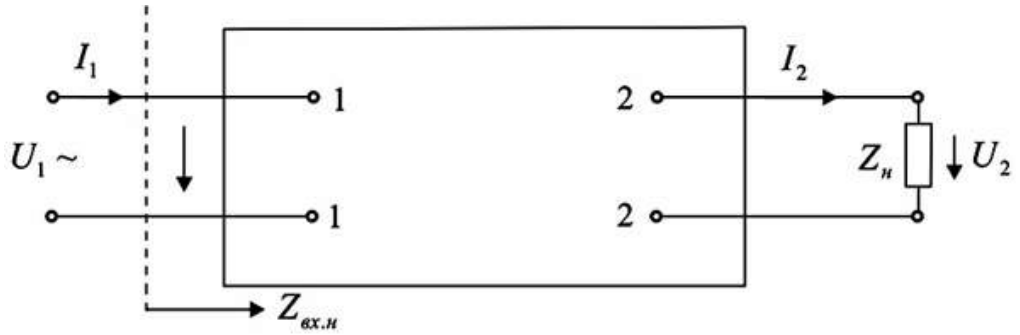


Рис. 7.3. Лінійний пасивний чотириполюсник

До затискачів 1–1 підведена гармонічна напруга U_1, а затискачі 2–2 замкнені на $Z_н$. Знайдемо вхідний опір навантаженого чотириполюсника:

$$Z_{вх.н} = \dot{U}_1/\dot{I}_1 .$$

Беручи до уваги, що $Z_н = \dot{U}_2/\dot{I}_2$, із системи (7.9) одержимо:

$$Z_{вх.н} = \frac{A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2}{C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2} = \frac{AZ_н + B}{CZ_н + D}. \tag{7.10}$$

Таким чином, значення вхідного опору чотириполюсника визначається параметрами самого чотириполюсника й величиною навантаження:

– якщо $Z_н = 0$ (режим КЗ), то $Z_{вх.н.кз} = \frac{B}{D}$;

– якщо $Z_н = \infty$ (режим ХХ), то, розділивши вираз (7.10) на $Z_н$, одержимо $Z_{вх.н.хх} = \frac{A}{C}$.

Для визначення вихідного опору $Z_{\text{вих.н}}$ навантаженого чотириполюсника необхідно заживити його справа (клеми 2–2), а клеми 1–1 замкнути на опір навантаження $Z_{\text{н}}$ (рис. 7.4).

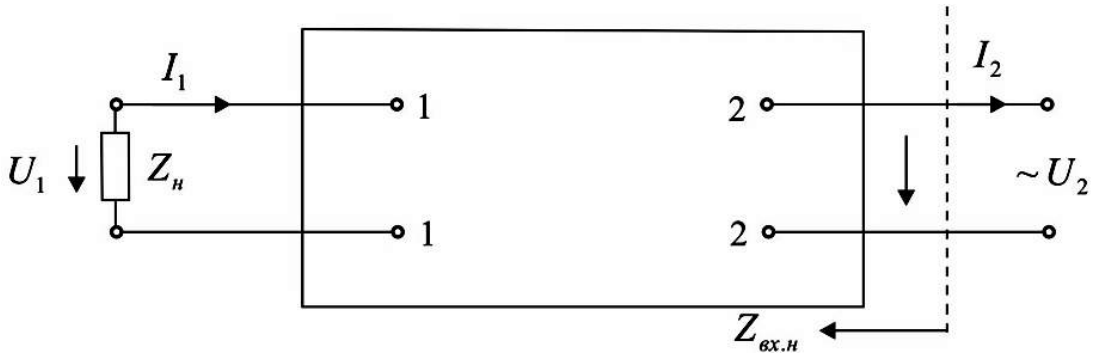


Рис. 7.4. Лінійний пасивний чотириполюсник із замкненими клемами

Оскільки чотириполюсник – пасивний ($AD - BC = 1$), система основних рівнянь відносно $\dot{U}_2$ і $\dot{I}_2$ матиме вигляд

$$\begin{cases} \dot{U}_2 = D\dot{U}_1 - B\dot{I}_1; \\ \dot{I}_2 = A\dot{I}_1 - C\dot{U}_1. \end{cases} \qquad (7.11)$$

Вихідний опір $Z_{\text{вих.н}} = -\dfrac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2}$, а опір навантаження $Z_{\text{н}} = -\dot{U}_1 / \dot{I}_1$.

Знак «–» поставлено тому, що при додатних $\dot{U}_1$ і $\dot{U}_2$ струми $\dot{I}_1$ і $\dot{I}_2$ мають напрямки, протилежні тим, які взяли за додатні.

Беручи до уваги, що $Z_{\text{н}} = -\dot{U}_1 / \dot{I}_1$, із системи (7.11) одержимо:

$$Z_{\text{вих.н}} = \frac{D\dot{U}_1 - B\dot{I}_1}{C\dot{U}_1 - A\dot{I}_1} = \frac{DZ_{\text{н}} + B}{CZ_{\text{н}} + A}. \qquad (7.12)$$

У режимі КЗ вихідний опір $Z_{\text{вих.н.кз}} = \dfrac{B}{A}$, у режимі ХХ – $Z_{\text{вих.н.хх}} = \dfrac{D}{C}$.

Якщо чотириполюсник – симетричний, то $A = D$ і $Z_{\text{вх.н}} = Z_{\text{вих.н}}$.

Отже, знаючи параметри чотириполюсника, можна легко розрахувати його вхідні й вихідні опори при будь-яких значеннях опору навантаження.

Характеристичні опори чотириполюсника

Характеристичні опори чотириполюсника ($Z'_{\text{вх}}$ і $Z'_{\text{вих}}$) – це опори, що мають такі властивості:

1) якщо навантажити вихід чотириполюсника на $Z'_{\text{вих}}$, його вхідний опір дорівнюватиме $Z'_{\text{вх}}$;

2) якщо навантажити вхід чотириполюсника на $Z'_{вх}$, його вихідний опір дорівнюватиме $Z'_{вих}$.

У рівняння (7.10) замість $Z_н$ підставимо $Z'_{вих}$, а замість $Z_{вх.н}$ – опір $Z'_{вх}$; у вираз (7.12) замість $Z_н$ – $Z'_{вих}$, а замість $Z_{вих.н}$ – $Z'_{вих}$.

Як результат одержимо систему із двох рівнянь:

$$\begin{cases} Z'_{вх} = \dfrac{AZ'_{вих} + B}{CZ'_{вих} + D}; \\ Z'_{вих} = \dfrac{DZ'_{вх} + B}{CZ'_{вх} + A}. \end{cases} \tag{7.13}$$

Звідси

$$\begin{cases} Z'_{вх} = \pm\sqrt{\dfrac{AB}{CD}}; \\ Z'_{вих} = \pm\sqrt{\dfrac{DB}{CA}}. \end{cases} \tag{7.14}$$

Величини $Z'_{вх}$ і $Z'_{вих}$ не залежать від опорів, включених між вхідними й вихідними затискачами, а залежать тільки від первинних параметрів чотириполюсника, тому їх розглядають як вторинні параметри.

Якщо порівняти рівняння системи (7.14) з виразами $Z_{вх.н.кз}$ і $Z_{вх.н.хх}$, то можна записати:

$$Z'_{вх} = \sqrt{Z_{вх.н.кз}Z_{вх.н.хх}}; \tag{7.15}$$

$$Z'_{вих} = \sqrt{Z_{вих.н.кз}Z_{вих.н.хх}}. \tag{7.16}$$

Для симетричних чотириполюсників ($Y_{11} = Y_{22}$)

$$Z'_{вх.с} = Z'_{вих.с} = \sqrt{\frac{B}{C}}. \tag{7.17}$$

Коефіцієнт трансформації чотириполюсника

Для чотириполюсника з узгодженим навантаженням, тобто, якщо

$$Z_н = \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} = Z'_{вих} = \sqrt{\frac{BD}{AC}},$$

основні рівняння матимуть вигляд

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{U}_2\left(A + \sqrt{\dfrac{ABC}{D}}\right); \\ \dot{I}_1 = \dot{I}_2\left(A + \sqrt{\dfrac{DBC}{A}}\right). \end{cases} \tag{7.18}$$

Коефіцієнтом трансформації називають величину

$$m_T = \sqrt{\frac{Z'_{вх}}{Z'_{вих}}} = \sqrt{\frac{A}{D}}. \qquad (7.19)$$

З урахуванням формули (7.17) можна записати

$$\begin{cases} \frac{1}{m_T}\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC}; \\ \frac{1}{m_T}\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = \sqrt{AD} + \sqrt{BC}. \end{cases} \qquad (7.20)$$

Для цих співвідношень, що дорівнюють одне одному, запишемо

$$\frac{1}{m_T}\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{1}{m_T}\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = e^{\Gamma}. \qquad (7.21)$$

Величина Г називається ***характеристичною постійної передачі*** чотириполюсника:

$$\Gamma = \ln\left(\frac{1}{m_T}\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right) = \ln\left(m_T\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right) = \ln\left(\sqrt{AD} + \sqrt{BC}\right). \qquad (7.22)$$

Коефіцієнт Г є комплексною величиною $\Gamma = a + jb$. Якщо $\Gamma = 0$, то $m_T = \dot{U}_1/\dot{U}_2$, і чотириполюсник є ідеальним трансформатором.

Якщо симетричний чотириполюсник узгоджений, то

$$\Gamma = \ln\left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right) = \ln\left(\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\right).$$

Відношення комплексних амплітуд $\dot{U}_1/\dot{U}_2$ можна подати у вигляді:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{U_1}{U_2}e^{-j\varphi},$$

де φ – зсув фаз між напругами. Звідси виходить, що

$$\ln\left(\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2}\right) = \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right) - j\varphi;$$

$$a = \ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right); \quad b = -\varphi.$$

Коефіцієнт a називають ***власним*** (хвильовим) ***загасанням чотириполюсника***. Коефіцієнт b – ***коефіцієнт фази*** (фазова постійна); $b > 0$, якщо початкова фаза вхідної напруги є більшою за початкову фазу напруги на виході.

Постійну передачі Г можна навести через передавальну функцію $K(j\omega)$: $\ln\left(\frac{U_1}{U_2}\right) = \ln\left(\frac{1}{K(j\omega)}\right) = \Gamma$, звідки

$$K(j\omega) = U_1/U_2 = e^{-\Gamma}. \qquad (7.23)$$

Зазвичай великий інтерес викликає співвідношення потужностей на вході й виході узгоджених чотириполюсників (вони широко використовуються в різних системах передачі інформації, енергії).

Якщо припустити, що чотириполюсник пасивний ($Z'_{вх} = Z'_{вих}$), узгоджений за навантаженням ($Z'_{вих} = Z_н = Z_0$), а характеристичний опір має сугубо активний характер, то споживана потужність опору навантаження

$$P_2 = \frac{U_2^2}{2Z_0}.$$

Потужність, підведена до входів чотириполюсника ($Z'_{вх} Z'_{вих} = Z_н = Z_0$),

$$P_1 = \frac{U_1^2}{2Z_0}.$$

Відношення цих потужностей називають ***коефіцієнтом корисної дії чотириполюсника:***

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{U_2^2}{U_1^2} = e^{-2\alpha}. \qquad (7.24)$$

7.3. Еквівалентні схеми пасивних чотириполюсників

Найпростіші (Г-, Т- і П-подібні) схеми чотириполюсників показано на рис. 7.5.

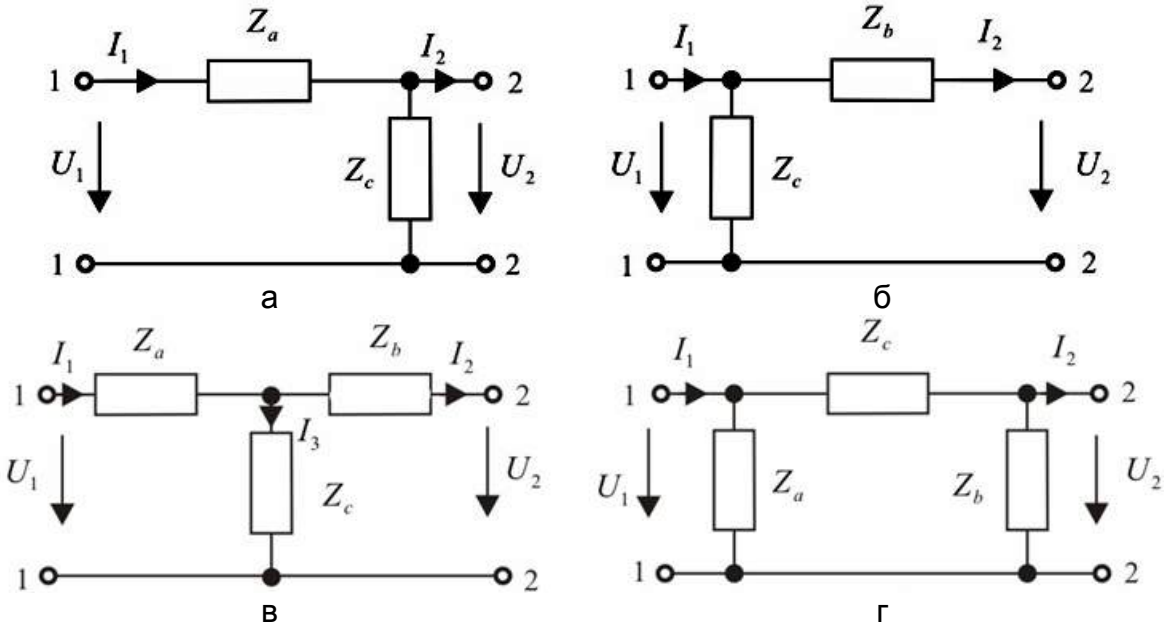


Рис. 7.5. Схеми найпростіших чотириполюсників

Розглянемо Т-подібну схему (рис. 7.5, в).

Нехай відомі Z_a, Z_b і Z_c. Запишемо рівняння Кірхгофа для Т-подібної схеми чотириполюсника:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \dot{I}_3; \\ \dot{U}_1 = \dot{I}_1 Z_a + \dot{I}_1 Z_b + \dot{U}_2. \end{cases} \qquad (7.25)$$

Приведемо ці рівняння до вигляду основних рівнянь чотириполюсника:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = A\dot{U}_2 + B\dot{I}_2; \\ \dot{I}_1 = C\dot{U}_2 + D\dot{I}_2. \end{cases}$$

Зі схеми (див. рис. 7.5, в) випливає, що $\dot{I}_3 = \dfrac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_b}{Z_c}$. Тоді

$$\dot{I}_1 = \dot{I}_2 + \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_b}{Z_c} = \frac{1}{Z_c}\dot{U}_2 + \left(1 + \frac{Z_b}{Z_c}\right)\dot{I}_2 .$$

Порівнявши це рівняння із системою основних рівнянь, зробимо такий висновок:

$$C = \frac{1}{Z_c}; \quad D = 1 + \frac{Z_b}{Z_c}.$$

Підставимо в друге рівняння системи (7.25) отриманий вираз для $\dot{I}_1$:

$$\dot{U}_1 = \left(1 + \frac{Z_a}{Z_c}\right)\dot{U}_2 + \left(Z_a + Z_b + \frac{Z_a Z_b}{Z_c}\right)\dot{I}_2 .$$

Порівнявши це рівняння з основним рівнянням чотириполюсника, можемо знайти коефіцієнти A і B:

$$A = 1 + \frac{Z_a}{Z_c}, \quad B = Z_a + Z_b + \frac{Z_a Z_b}{Z_c}.$$

Таким чином, знаючи дані еквівалентної схеми Т-подібного чотириполюсника, можна знайти його первинні параметри, а потім обчислити характеристичні вхідний і вихідний опори:

$$Z'_{вх} = \sqrt{\frac{AB}{CD}} = \sqrt{\frac{Z_a + Z_c}{Z_b + Z_c}\left(Z_a Z_b + Z_c Z_b + Z_a Z_c\right)};$$

$$Z'_{вих} = \sqrt{\frac{BD}{AC}} = \sqrt{\frac{Z_b + Z_c}{Z_a + Z_c}\left(Z_a Z_b + Z_c Z_b + Z_a Z_c\right)}.$$

Застосувавши подібну методику, можна одержати розрахункові формули для П-подібного чотириполюсника.

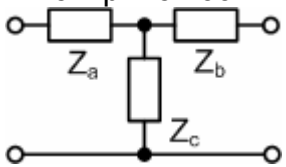
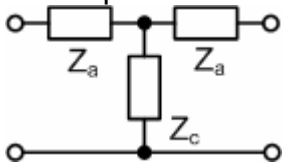
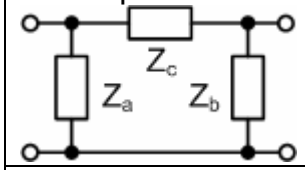
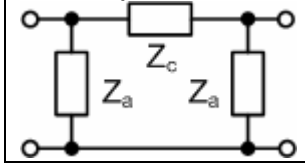
Розрахункові формули для Г-подібних схем можна отримати, якщо у виразах для Т-подібного чотириполюсника взяти $Z_b = 0$ або $Z_a = 0$, що відповідає схемам на рис. 7.5, а, б.

У табл. 7.2 наведено формули для розрахунків чотириполюсників.

З цієї таблиці виходить, що будь-який лінійний пасивний чотириполюсник, в якому відомі три незалежні параметри, може бути замінений еквівалентною Т- або П-подібною схемою.

Таблиця 7.2

Розрахункові формули для визначення параметрів чотириполюсників

Еквівалентні схеми	Параметри						
	A	D	B	C	$Z'_{вх}$	$Z'_{вих}$	Г
Несиметричний Т-чотириполюсник 	$1+\frac{Z_a}{Z_c}$	$1+\frac{Z_b}{Z_c}$	$Z_a+Z_b+\frac{Z_aZ_b}{Z_c}$	$\frac{1}{Z_c}$	$Z_\Sigma=\sqrt{Z_aZ_b+Z_bZ_c+Z_aZ_c}$	$\sqrt{\frac{Z_b+Z_c}{Z_a+Z_c}}\times Z_\Sigma$	$\mathrm{Arch}\left(\frac{\sqrt{(Z_a+Z_c)(Z_b+Z_c)}}{Z_c}\right)$
Симетричний Т-чотириполюсник 	$A=D=1+\frac{Z_a}{Z_c}$		$Z_a\left(2+\frac{Z_a}{Z_c}\right)$	$\frac{1}{Z_c}$	$Z'_{вх}=Z'_{вих}=\sqrt{Z_a(Z_a+2Z_c)}$		$\mathrm{Arch}\left(\frac{Z_a+Z_c}{Z_c}\right)$
Несиметричний П-чотириполюсник 	$1+\frac{Z_c}{Z_b}$	$1+\frac{Z_c}{Z_a}$	Z_c	$\frac{Z_a+Z_b+Z_c}{Z_aZ_b}$	$Z_a\sqrt{\frac{Z_b+Z_c}{Z_a+Z_c}}\times\sqrt{\frac{Z_c}{Z_a+Z_b+Z_c}}$	$Z_b\sqrt{\frac{Z_a+Z_c}{Z_b+Z_c}}\times\sqrt{\frac{Z_c}{Z_a+Z_b+Z_c}}$	$\mathrm{Arch}\left(\sqrt{\frac{(Z_a+Z_c)(Z_b+Z_c)}{Z_aZ_b}}\right)$
Несиметричний П-чотириполюсник 	$A=D=1+\frac{Z_c}{Z_a}$		Z_c	$\frac{2Z_a+Z_c}{Z_a^2}$	$Z'_{вх}=Z'_{вих}=Z_a\sqrt{\frac{Z_c}{2Z_a+Z_c}}$		$\mathrm{Arch}\left(\frac{Z_a+Z_c}{Z_a}\right)$

7.4. Методи з'єднання чотириполюсних кіл

Ланцюговою схемою з'єднання ряду чотириполюсників (рис. 7.6) називають таке з'єднання, в якому вихідні затискачі кожного зі складових кіл ланки з'єднані з вхідними затискачами наступної ланки. Опір навантаження Z_H підключається до виходу останньої ланки.

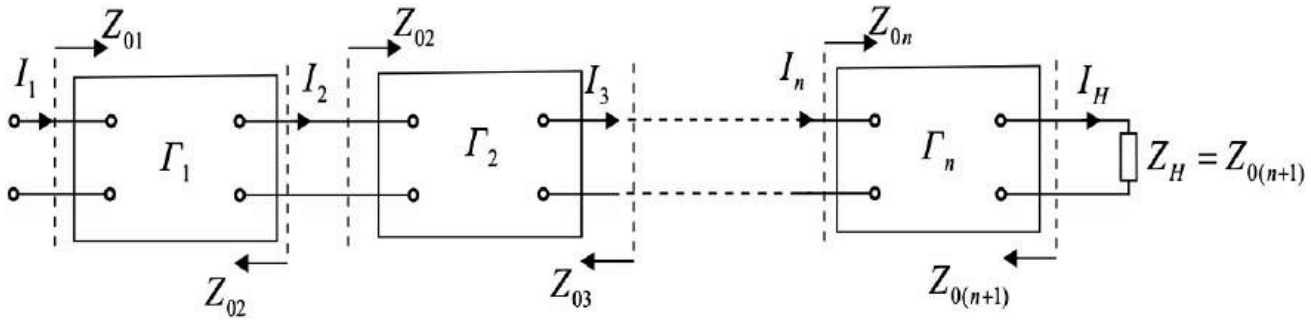


Рис. 7.6. Ланцюгова схема з'єднання чотириполюсників

У загальному вигляді складові ланки (чотириполюсники) можуть мати різні параметри, але при довільних характеристичних опорах ланок кола не будуть узгоджені між собою. Зазвичай прагнуть здійснити узгоджене включення окремих ланок. Для цього потрібно, щоб $Z'_{\text{вих}.n} = Z'_{\text{вх}.n+1}$.

Надалі для простоти візьмемо такі позначення: $Z'_{\text{вх}1} = Z'_{01}$; $Z'_{\text{вих}1} = Z'_{02}$; $Z'_{\text{вх}2} = Z'_{\text{вих}1} = Z'_{02}$ і т.д.

Для узгодженого включення чотириполюсників, врахувавши формули (7.20) – (7.22) можна записати

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2}\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{02}}} = e^{\Gamma_1};\ \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_3}\sqrt{\frac{Z_{02}}{Z_{03}}} = e^{\Gamma_2},\ \ldots,\ \frac{\dot{I}_n}{\dot{I}_{(n+1)}}\sqrt{\frac{Z_{0n}}{Z_{0(n+1)}}} = e^{\Gamma_n},$$

де Γ_n – постійна передачі n-ї ланки.

Перемноживши обидві частини цих рівнянь, одержимо

$$\frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_{(n+1)}}\sqrt{\frac{Z_{01}}{Z_{0(n+1)}}} = e^{(\Gamma_1+\Gamma_2+\ldots+\Gamma_n)} = e^{\Gamma_e}, \qquad (7.26)$$

де Γ_e – постійна передачі результуючого (еквівалентного) чотириполюсника.

Таким чином, постійна передачі ланцюгової схеми, складеної з узгоджених лінійних чотириполюсників, дорівнює сумі постійних передач чотириполюсників, що складають ланцюг:

$$\Gamma_e = a_e + jb_e = \sum_{i=1}^{n}\Gamma_i; \qquad (7.27)$$

$$a_e = \sum_{i=1}^{n} a_i;\ \ b_e = \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Якщо ланцюгова схема складається з ідентичних симетричних чотириполюсників, то $Z_{01} = Z_{02} = ... = Z_{0n} = Z_0$ (результуючий характеристичний опір дорівнює характеристичному опору однієї ланки).

Таким чином, в узгодженій ланцюговій схемі кількість ланок не впливає на величину вхідного опору, він завжди дорівнює Z_0. У цьому випадку результуючі значення постійної передачі, загасання й фазової постійної будуть такими:

$$\Gamma_e = n\Gamma_i = n(a + jb);$$

$$a_e = na;\ \ b_e = nb.$$

Звідси можна зробити висновок, що результуюче загасання a_e й фазова постійна b_e зростають пропорційно кількості ланок n.

Під ***послідовним*** з'єднанням чотириполюсників розуміють з'єднання, в якому як вхідні, так і вихідні затискачі з'єднані послідовно (рис. 7.7).

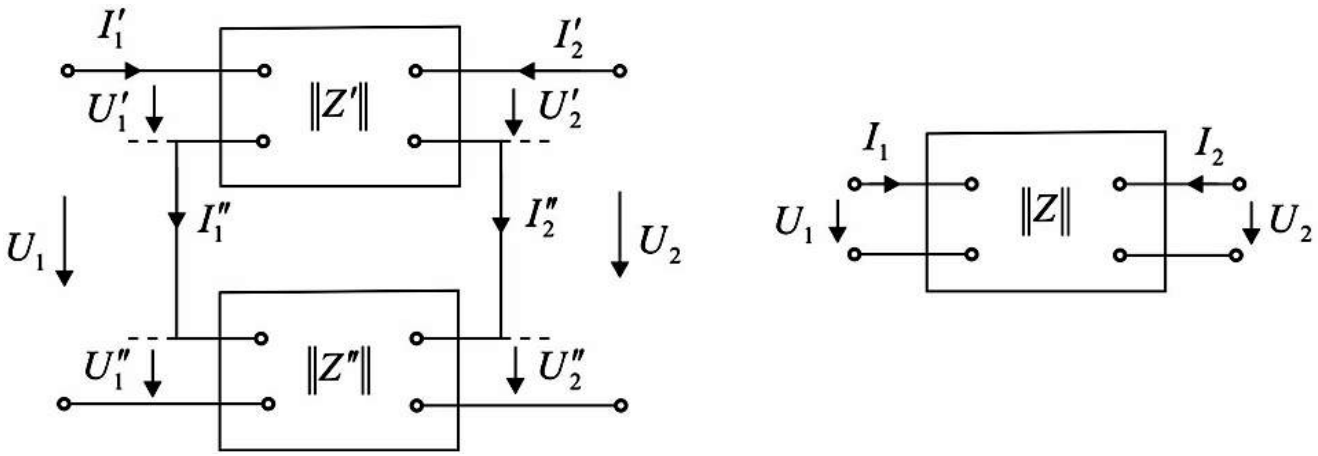


Рис. 7.7. Послідовне з'єднання чотириполюсників

У цьому випадку зручно навести основні рівняння чотириполюсника в Z-параметрах:

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2; \\ \dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2. \end{cases} \qquad (7.28)$$

У матричній формі система (7.28) матиме вигляд

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{U}_2' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{11}' & Z_{12}' \\ Z_{21}' & Z_{22}' \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{I}_2' \end{Vmatrix} = \|Z'\| \times \begin{Vmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{I}_2' \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{U}_2'' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} Z_{11}'' & Z_{12}'' \\ Z_{21}'' & Z_{22}'' \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{I}_2'' \end{Vmatrix} = \|Z''\| \times \begin{Vmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{I}_2'' \end{Vmatrix}. \qquad (7.29)$$

Тут $\|Z'\|$ і $\|Z''\|$ – Z-матриці складових чотириполюсників.

Результуючі струми й напруги

$$\dot{U}_1 = \dot{U}'_1 + \dot{U}''_1,\ \ \dot{U}_2 = \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2;$$
$$\dot{I}_1 = \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1,\ \ \dot{I}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2.$$

Підсумовуючи рівняння (7.29), одержуємо

$$\begin{Vmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}Z'_{11}+Z''_{11} & Z'_{12}+Z''_{12}\\ Z'_{21}+Z''_{21} & Z'_{22}+Z''_{22}\end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{Vmatrix} = \|Z\| \times \begin{Vmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{Vmatrix}. \qquad (7.30)$$

Таким чином, при послідовному з'єднанні Z-матриця результуючого чотириполюсника дорівнює сумі Z-матриць вихідних чотириполюсників.

При ***паралельному*** з'єднанні як вхідні, так і вихідні затискачі складових чотириполюсників ввімкнені паралельно (рис. 7.8).

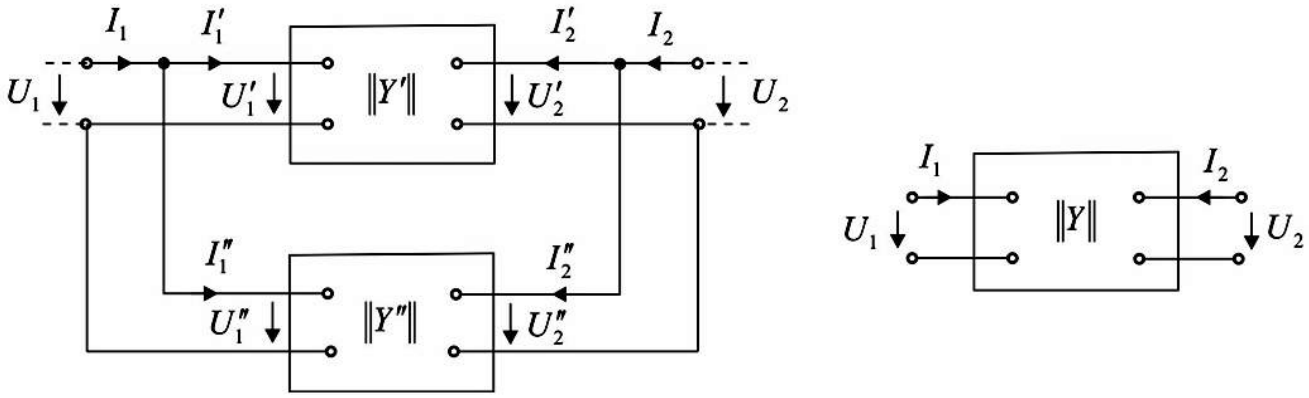


Рис. 7.8. Паралельне з'єднання чотириполюсників

У цьому випадку зручно скористатися системою основних рівнянь чотириполюсника у вигляді Y-параметрів:

$$\begin{cases}\dot{I}_1 = Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2 = \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1;\\ \dot{I}_2 = Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 = \dot{I}'_2 + \dot{I}''_2.\end{cases} \qquad (7.31)$$

Тоді з урахуванням напрямку струмів і напруг, зображених на рис. 7.8, у матричній формі система (7.31) матиме вигляд

$$\begin{Vmatrix}\dot{I}'_1\\ \dot{I}'_2\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}Y'_{11} & Y'_{12}\\ Y'_{21} & Y'_{22}\end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix}\dot{U}'_1\\ \dot{U}'_2\end{Vmatrix} = \|Y'\| \times \begin{Vmatrix}\dot{U}'_1\\ \dot{U}'_2\end{Vmatrix},$$
$$\begin{Vmatrix}\dot{I}''_1\\ \dot{I}''_2\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}Y''_{11} & Y''_{12}\\ Y''_{21} & Y''_{22}\end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix}\dot{U}''_1\\ \dot{U}''_2\end{Vmatrix} = \|Y''\| \times \begin{Vmatrix}\dot{U}''_1\\ \dot{U}''_2\end{Vmatrix}, \qquad (7.32)$$

де Y, Y′, Y″ – Y-матриці чотириполюсників.

Оскільки $\dot{U}'_1 = \dot{U}''_1 = \dot{U}_1$; $\dot{U}'_2 = \dot{U}''_2 = \dot{U}_2$; $\dot{I}'_1 = \dot{I}''_1 = \dot{I}_1$; $\dot{I}'_2 = \dot{I}''_2 = \dot{I}_2$, то рівнянням еквівалентного чотириполюсника буде

$$\begin{Vmatrix}\dot{I}_1\\ \dot{I}_2\end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix}Y'_{11}+Y''_{11} & Y'_{12}+Y''_{12}\\ Y'_{21}+Y''_{21} & Y'_{22}+Y''_{22}\end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{Vmatrix} = \|Y\| \times \begin{Vmatrix}\dot{U}_1\\ \dot{U}_2\end{Vmatrix}. \qquad (7.33)$$

Таким чином, $\|Y\| = \|Y'\| + \|Y''\|$, тобто при паралельному з'єднанні Y-матриця еквівалентної схеми дорівнює сумі Y-матриць вихідних чотириполюсників.

У випадку ***послідовно-паралельного*** з'єднання вхідні затискачі чотириполюсників ввімкнені послідовно, а вихідні – паралельно (рис. 7.9).

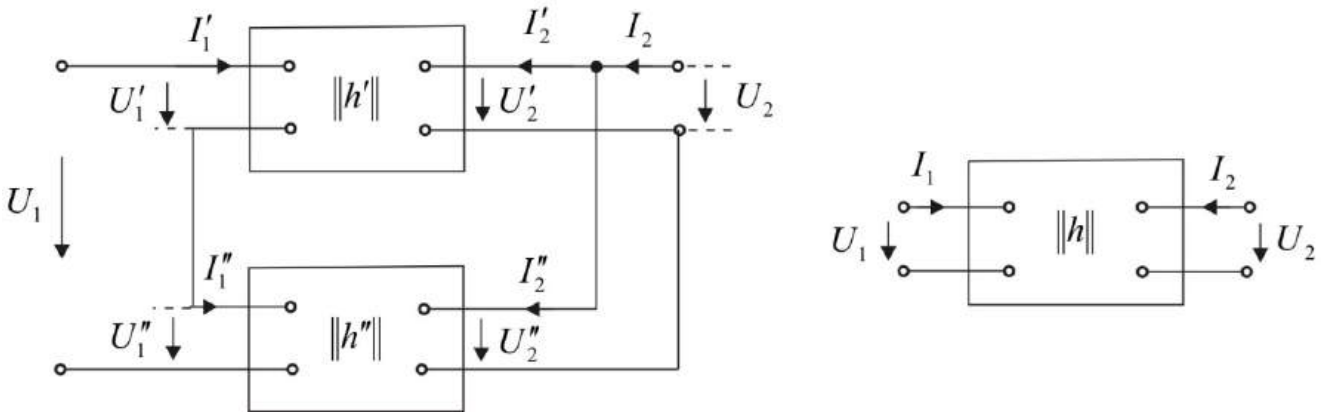


Рис. 7.9. Послідовно-паралельне з'єднання чотириполюсників

Для аналізу зручно скористатися системою h-параметрів

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = \dot{h}_{11}\dot{I}_1 + \dot{h}_{12}\dot{U}_2 = \dot{U}_1' + \dot{U}_1'', \\ \dot{I}_2 = \dot{h}_{21}\dot{I}_1 + \dot{h}_{22}\dot{U}_2 = \dot{I}_2' + \dot{I}_2''. \end{cases}$$

Позначимо через $\|h\|$, $\|h'\|$, $\|h''\|$ h-матриці вихідних чотириполюсників.

Тоді основні рівняння еквівалентного чотириполюсника матимуть вигляд

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_1' \\ \dot{I}_2' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dot{h}_{11}' & \dot{h}_{12}' \\ \dot{h}_{21}' & \dot{h}_{22}' \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{U}_2' \end{Vmatrix} = \|\dot{h}'\| \times \begin{Vmatrix} \dot{I}_1' \\ \dot{U}_2' \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_1'' \\ \dot{I}_2'' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dot{h}_{11}'' & \dot{h}_{12}'' \\ \dot{h}_{21}'' & \dot{h}_{22}'' \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{U}_2'' \end{Vmatrix} = \|\dot{h}''\| \times \begin{Vmatrix} \dot{I}_1'' \\ \dot{U}_2'' \end{Vmatrix}. \qquad (7.34)$$

Крім того, $\dot{U}_2' = \dot{U}_2'' = \dot{U}_2$; $\dot{I}_1 = \dot{I}_1' = \dot{I}_1''$, тому для результуючого чотириполюсника

$$\begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dot{h}_{11}' + \dot{h}_{11}'' & \dot{h}_{12}' + \dot{h}_{12}'' \\ \dot{h}_{21}' + \dot{h}_{21}'' & \dot{h}_{22}' + \dot{h}_{22}'' \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Vmatrix} = \|\dot{h}\| \times \begin{Vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Vmatrix}. \qquad (7.35)$$

Таким чином,

$$\|\dot{h}\| = \|\dot{h}'\| + \|\dot{h}''\|.$$

З'єднання чотириполюсників називають ***паралельно-послідовним***, якщо вхідні затискачі чотириполюсників з'єднані паралельно, а вихідні – послідовно (рис. 7.10).

У цьому випадку найкраще скористатися системою f-параметрів:

$$\begin{cases} \dot{I}_1 = \dot{f}_{11}\dot{U}_1 + \dot{f}_{12}\dot{I}_2 = \dot{I}'_1 + \dot{I}''_1; \\ \dot{U}_2 = \dot{f}_{21}\dot{U}_1 + \dot{f}_{22}\dot{I}_2 = \dot{U}'_2 + \dot{U}''_2. \end{cases}$$

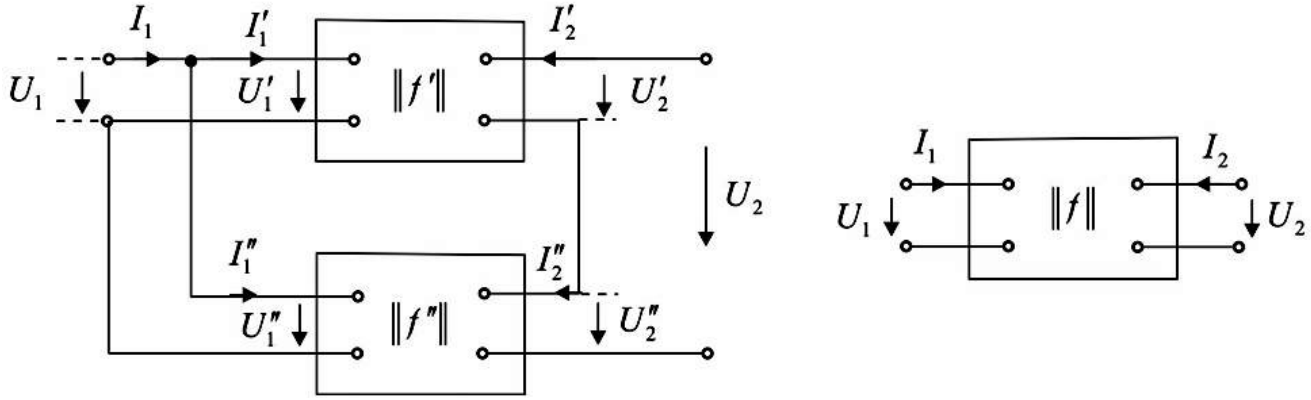


Рис. 7.10. Паралельно-послідовне з'єднання чотириполюсників

Тоді в матричній формі рівняння чотириполюсників матимуть вигляд

$$\begin{Vmatrix} \dot{I}'_1 \\ \dot{U}'_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dot{f}'_{11} & \dot{f}'_{12} \\ \dot{f}'_{21} & \dot{f}'_{22} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{Vmatrix} = \|\dot{f}'\| \times \begin{Vmatrix} \dot{U}'_1 \\ \dot{I}'_2 \end{Vmatrix};$$

$$\begin{Vmatrix} \dot{I}''_1 \\ \dot{U}''_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dot{f}''_{11} & \dot{f}''_{12} \\ \dot{f}''_{21} & \dot{f}''_{22} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{Vmatrix} = \|\dot{f}''\| \times \begin{Vmatrix} \dot{U}''_1 \\ \dot{I}''_2 \end{Vmatrix}. \qquad (7.36)$$

де $\|\dot{f}'\|$, $\|\dot{f}''\|$ – f-матриці вихідних чотириполюсників.

Для результуючого чотириполюсника основні рівняння будуть такими:

$$\begin{Vmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{U}_2 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \dot{f}'_{11} + \dot{f}''_{11} & \dot{f}'_{12} + \dot{f}''_{12} \\ \dot{f}'_{21} + \dot{f}''_{21} & \dot{f}'_{22} + \dot{f}''_{22} \end{Vmatrix} \times \begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{Vmatrix} = \|\dot{f}\| \times \begin{Vmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{I}_2 \end{Vmatrix}. \qquad (7.37)$$

Таким чином,

$$\|\dot{f}\| = \|\dot{f}'\| + \|\dot{f}''\|.$$

7.5. Зворотний зв'язок в електричних колах

Зворотний зв'язок (ЗЗ) – це вплив виходу активного чотириполюсника на його вхід. Без зворотного зв'язку неможливі системи автоматичного керування (регулювання), системи адаптації (пристосування) у кібернетиці й біології тощо.

Зворотний зв'язок може бути ***зовнішнім*** (утвореним за допомогою зовнішнього кола ЗЗ) і ***внутрішнім*** (створюваним з використанням властивостей активного елемента кола).

Розглянемо узагальнену схему активного лінійного електричного кола (АЛЕК) із зовнішнім зворотним зв'язком (рис. 7.11).

Якщо позначити операторні передавальні функції (ОПФ) чотириполюсника прямої передачі та чотириполюсника ЗЗ через H(s) та β(s) відповідно:

$$H(s) = H = \frac{u_2}{u_1 \pm u_{зз}};\quad u_1 = \frac{u_2}{H} \mp u_{зз};$$

$$\beta(s) = \beta = \frac{u_{зз}}{u_2};\quad u_2 = \frac{u_{зз}}{\beta},$$

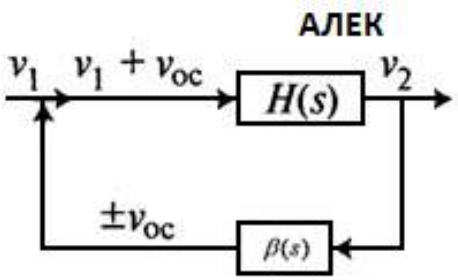


Рис. 7.11. Загальна схема активного лінійного кола із зовнішнім ЗЗ

то ОПФ схеми із зовнішнім ЗЗ матиме вигляд

$$H_{зз}(s) = \frac{u_2}{u_1} = \frac{\frac{u_{зз}}{\beta}}{\frac{u_2}{H} \mp u} = \frac{\frac{u_{зз}}{\beta}\frac{H}{u_2}}{1 \mp u_{зз}\frac{H}{u_2}} = \frac{H}{1 \mp \beta H}. \qquad (7.38)$$

Якщо на вхід схеми надходить сигнал $+u_{33}$ (сигнали u_1 і u_{33} синфазні), то ЗЗ називають ***позитивним зворотним зв'язком*** (ПЗЗ). Тоді, виходячи з виразу (7.38), ОПФ схеми із ПЗЗ буде такою:

$$H_{пзз}(s) = \frac{H}{1 - \beta H}.$$

Якщо на вхід схеми надходить сигнал $-u_{33}$ (сигнали u_1 і u_{33} протифазні), то ЗЗ називають ***негативним зворотним зв'язком*** (НЗЗ). Тоді, виходячи з рівняння (7.38), ОПФ схеми із НЗЗ матиме вигляд

$$H_{нзз}(s) = \frac{H}{1 + \beta H}.$$

Таким чином, ПЗЗ збільшує коефіцієнт передачі ($H_{пзз} > H$), а НЗЗ, навпаки, його знижує ($H_{нзз} < H$). Якщо $\beta H = 1$, тоді одержимо $H_{пзз} = \infty$, що означає самозбудження схеми із ПЗЗ, тобто перетворення її в генератор сигналів довільної форми.

Залежно від способу підключення входів і виходів зовнішнього кола ЗЗ до вихідного кола розрізняють *паралельний* й *послідовний* ЗЗ (рис. 7.12, а, б), а також *ЗЗ за напругою* й *ЗЗ за струмом* (рис. 7.12, в, г).

Найпростіше коло ЗЗ складається з одного резистора R_{oc} (рис. 7.13).

Паралельний ЗЗ за напругою (рис. 7.13, а) знижує вхідний і вихідний опори схеми шляхом шунтування їх вхідним і вихідним опорами кола ЗЗ. Послідовний ЗЗ за струмом (рис. 7.13, б), навпаки, підвищує вхідний і вихідний опори схеми на величину вхідного й вихідного опорів кола ЗЗ відповідно. Послідовний НЗЗ за напругою (рис. 7.13, в) підвищує $R_{вх}$ і знижує $R_{вих}$ (найчастіше застосовується в емітерних повторювачах). Паралельний ЗЗ за струмом (рис. 7.13, г) знижує $R_{вх}$ і підвищує $R_{вих}$ (використовується в транзисторних підсилювачах).

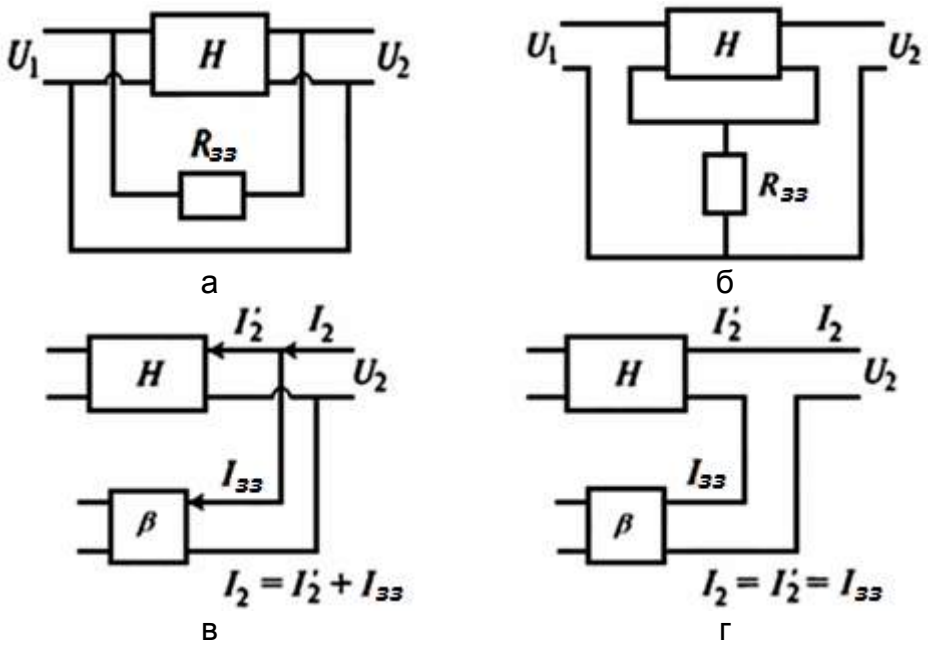


Рис. 7.12. Види зворотного зв'язка: а – паралельний; б – послідовний; в – за напругою; г – за струмом

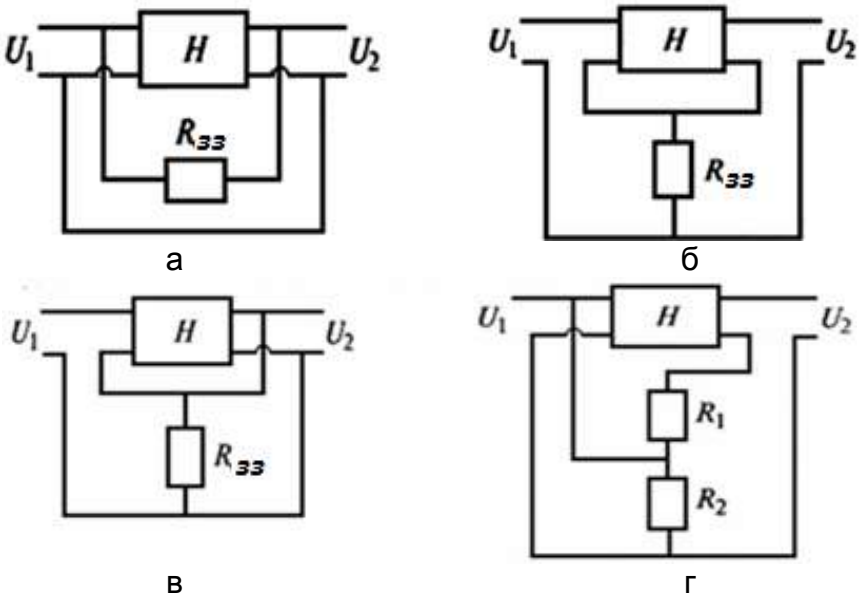


Рис. 7.13. Приклад найпростішого кола зі зворотнім зв'язком: а – паралельний ЗЗ за напругою; б – послідовний ЗЗ за струмом; в – послідовний ЗЗ за напругою; г – паралельний ЗЗ за струмом

7.6. Вплив зворотного зв'язку на параметри кіл

Нестабільність коефіцієнта передачі схеми із ЗЗ визначається його відносною зміною $\frac{\Delta H_{ЗЗ}}{H_{ЗЗ}}$.

Можливі два варіанти впливу ЗЗ на чотириполюсні кола:

1. При використанні НЗЗ продиференціюємо $H_{НЗЗ}(s) = \frac{H}{1+\beta H}$ за Н:

$$\frac{dH_{НЗЗ}}{dH}=\frac{(1+\beta H)-\beta H}{(1+\beta H)^2}=\frac{H_{НЗЗ}}{H}\frac{1}{1+\beta H}. \qquad (7.39)$$

Оскільки $1+\beta H>1$, то $\frac{dH_{НЗЗ}}{H_{НЗЗ}}<\frac{dH}{H}$; отже, ***НЗЗ знижує нестабільність коефіцієнта передачі кола***.

2. При використанні ПЗЗ продиференціюємо $H_{ПЗЗ}(s)=\frac{H}{1-\beta H}$ за H:

$$\frac{dH_{ПЗЗ}}{dH}=\frac{(1-\beta H)+\beta H}{(1-\beta H)^2}=\frac{H_{ПЗЗ}}{H}\frac{1}{1-\beta H}.$$

Оскільки $1-\beta H<1$, то $\frac{dH_{ПЗЗ}}{H_{ПЗЗ}}>\frac{dH}{H}$; таким чином, ***ПЗЗ збільшує нестабільність коефіцієнта передачі кола***.

Розглянемо вплив ЗЗ на ширину смуги пропускання на прикладі смугової ланки, для чого подамо її як послідовно з'єднані НЧ- і ВЧ-ланки із операторними передавальними функціями $H_н(s)=\frac{H_0}{1+s\tau_н}$; $H_в(s)=\frac{s\tau_в H_0}{1+s\tau_в}$; $\tau_н=1/\omega_н$ і $\tau_в=1/\omega_в$ – сталі часу на граничних частотах НЧ- і ВЧ-ланок.

Тоді ОПФ схеми без ЗЗ буде $H(s)=H_н(s)H_в(s)$.

Розглянемо окремо вплив НЗЗ на *граничні частоти* ланок НЧ і ВЧ.

Для НЧ-ланки

$$H_{НЗЗ}(s)=\frac{H_н(s)}{1+\beta H_н(s)}=\frac{\frac{H_0}{1+s\tau_н}}{1+\beta\frac{H_0}{1+s\tau_н}}=\frac{\frac{H_0}{1+s\tau_н}}{1+s\frac{\tau_н}{1+\beta H_0}}=\frac{H_{НЗЗ}}{1+s\tau_н}. \qquad (7.40)$$

Отже, $\frac{\tau_н}{1+\beta H_0}<\tau_н$ і відповідно $\omega_{НЗЗ}>\omega_н$.

Таким чином, ***НЗЗ збільшує граничну частоту ланки НЧ.***

Для ВЧ-ланки

$$H_{в\,НЗЗ}(s)=\frac{H_в(s)}{1+\beta H_в(s)}=\frac{\frac{s\tau_в H_0}{1+s\tau_в}}{1+\beta\frac{s\tau_в H_0}{1+s\tau_в}}=\frac{s\tau_в H_0}{1+s\tau_в(1+\beta H_0)}= \qquad (7.41)$$

$$=\frac{s\tau_в(1+\beta H_0)\frac{H_0}{1+\beta H_0}}{1+s\tau_в(1+\beta H_0)}=\frac{s\tau_{в\,НЗЗ}H_{НЗЗ}}{1+s\tau_{в\,НЗЗ}}.$$

Отже, $\tau_{в\,НЗЗ}=\tau_в(1+\beta H_0)>\tau_в$, а виходить, і $\omega_{в\,НЗЗ}<\omega_в$.

Таким чином, ***НЗЗ зменшує граничну частоту ланки ВЧ***. Збільшення верхньої й зниження нижньої граничних частот смуги пропускання смугової ланки свідчить про її ***розширення під впливом НЗЗ***.

Аналогічно можна показати, що ПЗЗ звужує ширину смуги пропускання АЛЕК. Вплив НЗЗ і ПЗЗ на $H(\omega)$ проілюстровано на рис. 7.14.

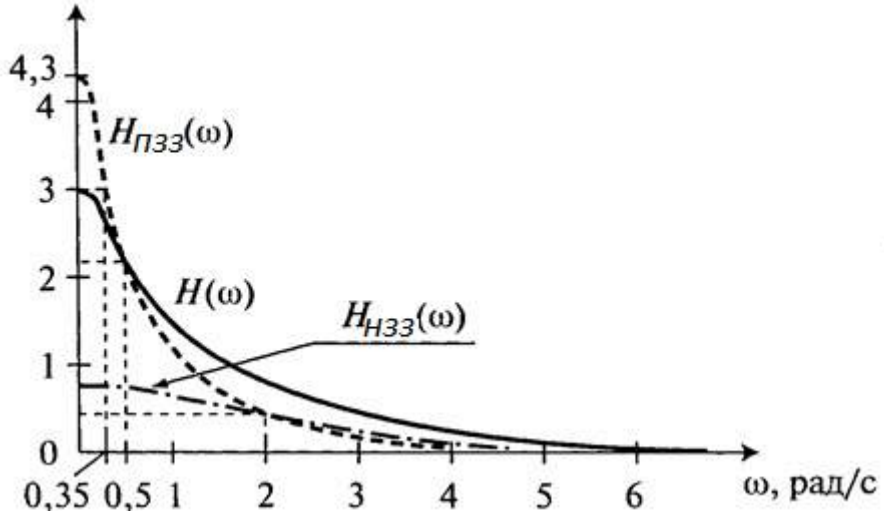


Рис. 7.14. Змінення КПФ за наявності ЗЗ

7.7. Стійкість електричних кіл

Стійкість активного електричного кола – це здатність повертатися у вихідний стан рівноваги (стаціонарний стан) після закінчення будь-якого впливу.

Пасивні ЕК завжди стійкі (ніколи не самозбуджуються).

Активні ЕК можуть бути:

1) стійкими;
2) нестійкими;
3) на границі стійкості.

Для оцінювання стійкості активного ЕК ОПФ подають у вигляді відношення двох поліномів і знаходять корені характеристичного полінома

$$H(s)=\frac{M(s)}{N(s)}=\frac{a_m s^m+a_{m-1}s^{m-1}+\ldots+a_0}{b_n s^n+b_{n-1}s^{n-1}+\ldots+b_0},\ m\le n. \qquad (7.42)$$

Ці корені визначають вільну складову відгуку (тобто, поведінку системи до й після впливу). Відгук кола в загальному випадку є сумою n коливальних процесів, кожний із частотою ω_i і амплітудою, яка змінюється за експонентним законом $e^{\sigma_i t}$:

$$U_в=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{s_i t}=\sum_{i=1}^{n}A_i e^{\sigma_i t}e^{\omega_i t}, \qquad (7.43)$$

де $s_i=\sigma_i+j\omega_i$.

При цьому і-й процес буде:

1) аперіодичним, якщо $\omega_i = 0$;

2) наростаючим, якщо $\sigma_i > 0$;

3) незатухаючим, якщо $\sigma_i = 0$;

4) загасаючим, якщо $\sigma_i < 0$.

У випадку *загасаючих* (аперіодичних) процесів корені полінома N(s) розташовуються в лівій півплощині комплексної площини ($\sigma_i < 0$). *Наростаючі* (аперіодичні) процеси характеризуються тим, що корені полінома N(s) містяться в правій півплощині ($\sigma_i > 0$), а *незатухаючі* – тим, що корені полінома $N(s)$ розташовані на уявній осі ($\sigma_i = 0$).

Активне ЕК буде стійким, якщо вільна складова його відгуку не містить наростаючих процесів і корені N(s) знаходяться в лівій півплощині або на уявній осі. Якщо хоча б один корінь полінома N(s) розташовано у правій півплощині, то активне коло буде нестійким на частоті цього кореня, а якщо він розташований на уявній осі, то коло перебуватиме на межі стійкості.

Спрощені методи аналізу стійкості активного ЕК основані на визначенні належності полінома N(s) до поліномів Гурвіца, корені яких завжди розташовані в лівій півплощині або на уявній осі, а також критерію Найквіста для аналізу схем із зовнішнім зворотним зв'язком.

Критерій Михайлова–Гурвіца основано на таких властивостях полінома Гурвіца:

1) усі коефіцієнти b_i (i = 1, …, n) є додатними ненульовими числами;

2) цей поліном можна подати сумою парної (з парними ступенями) і непарної (з непарними ступенями) складових, корені яких на уявній осі чергуються.

Використання цих властивостей для аналізу стійкості активних кіл називають *критерієм Михайлова*, суть якого полягає у такому:

– поліном $N(s)$ розбивають на $N_{пар}(s)$ і $N_{непар}(s)$:

$$N(s) = N_{пар}(s) + N_{непар}(s) = b_{2n}s^{2n} + b_{2n-2}s^{2n-2} + \ldots + b_0 + b_{2n-1}s^{2n-1} + b_{2n-3}s^{2n-3} + \ldots + b_1 s;$$

– знаходять корені $N_{пар}(s)$ $s'_1, s'_2, \ldots, s'_n$;

– знаходять корені $N_{непар}(s)$ $s_1, s_2, \ldots, s_n$;

– знайдені корені відкладають на уявній осі (рис. 7.15).

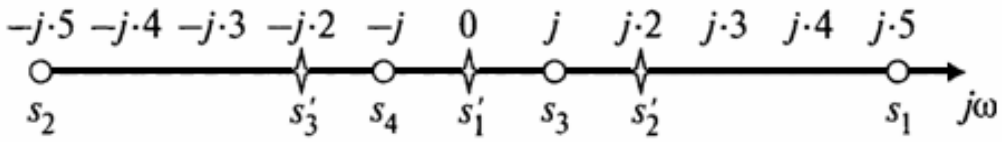


Рис. 7.15. Розташування коренів полінома Гурвіца на уявній осі

Якщо корені парної й непарної складових полінома $N(s)$ на уявній осі чергуються, то $N(s)$ є поліномом Гурвіца, а коло є стійким.

Належність полінома $N(s)$ до поліномів Гурвіца визначають також за допомогою *критерію Гурвіца*, який полягає у виконанні трьох операцій:

1. За заданим поліномом $N(s)$ складають *матрицю Гурвіца* розміром $n \times n$, для чого спочатку заповнюють ліву діагональ матриці коефіцієнтами b_{n-1}, b_{n-2}, b_0, а потім ліворуч і праворуч від діагоналі записують коефіцієнти, що залишилися, так, щоб у кожному рядку матриці номера коефіцієнтів зростали зліва направо; інші клітки матриці заповнюють нулями.

Наприклад:

$$\begin{bmatrix} b_4 & b_5 & 0 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & 0 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \end{bmatrix}.$$

2. Визначають головні діагональні мінори матриці Гурвіца.

Наприклад:

$$\Delta_1 = b_4;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} b_4 & b_5 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix};\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} b_4 & b_5 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 \\ b_0 & b_1 & b_2 \end{vmatrix};\ \Delta_4 = \begin{vmatrix} b_4 & b_5 & 0 & 0 \\ b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & b_0 & b_1 \end{vmatrix}.$$

3. Якщо всі мінори ненульові й додатні, то поліном $N(s)$ є поліномом Гурвіца, а аналізоване активне коло – стійке.

Критерії Михайлова й Гурвіца зручні при аналізі кіл із заданими параметрами (коефіцієнтами b_i). Однак вони мало придатні для аналіза кіл із змінюваними параметрами й не сприяють одержанню рекомендацій щодо перетворення нестійкого кола в стійке.

Ці недоліки не стосуються критерію Найквиста.

Критерій Найквиста використовують для аналізу стійкості кола із зовнішнім ЗЗ, тобто аналізують поліном $N(s) = 1 \mp \beta H = 1 \mp H_p(s)$. Величина $H_p(s) = u_{oc} / u_1$ є передавальною функцією схеми із розімкнутим ЗЗ (рис. 7.16). Таким чином, коло із зовнішнім ЗЗ буде нестійким (схильним до самозбудження), якщо виконуються умови, за яких $H(s) \to \infty$, тобто для ПЗЗ – якщо $H_p(s) = 1$, а для НЗЗ – якщо $H_p(s) = -1$.

Для аналізу $H_p(s)$ використовують комплексну передавальну функцію кола з розірваним ЗЗ

$$H_p(j\omega) = H_p(\omega)e^{j\varphi_p(\omega)}. \qquad (7.44)$$

Спільні зображення АЧХ і ФЧХ кола із розімкнутим ЗЗ на комплексній площині називають ***годографами*** (рис. 7.17).

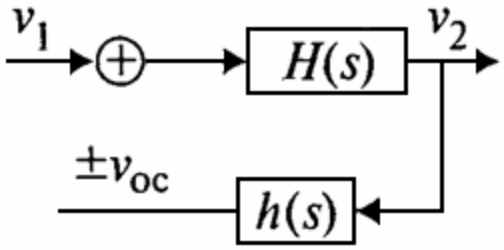


Рис. 7.16. Приклад кола з розімкнутим зворотним зв'язком

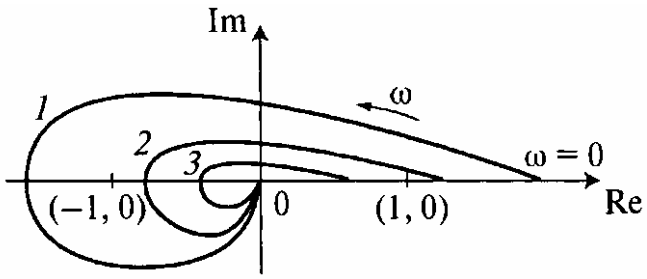


Рис. 7.17. Приклади годографів

Умови (критерії) стійкості за Найквистом: коло *нестійке*, якщо годограф функції $H_p(s)$ охоплює точку (–1, 0) для НЗЗ (годограф 1) або точку (1,0) для ПЗЗ (годографи 1 і 2); якщо ці умови не виконуються, то коло – *стійке* (годограф 3).

За формою годографа видно, що коло із НЗЗ є більш стійким, ніж коло із ПЗЗ, тому що охопити точку (–1, 0) складніше, чим точку (1, 0).

Для аналізу стійкості активних кіл електрозв'язку більш зручним є критерій Найквиста у вигляді вимог до АЧХ і ФЧХ кола із розімкнутим ЗЗ.

«Неохоплення» годографом точок (±1,0) на дійсній осі рівнозначне тому, що *для АЧХ кола із розімкнутим ЗЗ на критичній частоті* ω_{kp} *виконується умова* $H_p(\omega_{kp}) \le 1$ (критерій Найквиста), що проілюстровано графіками АЧХ і ФЧХ двох кіл із розімкнутим ЗЗ на рис. 7.18.

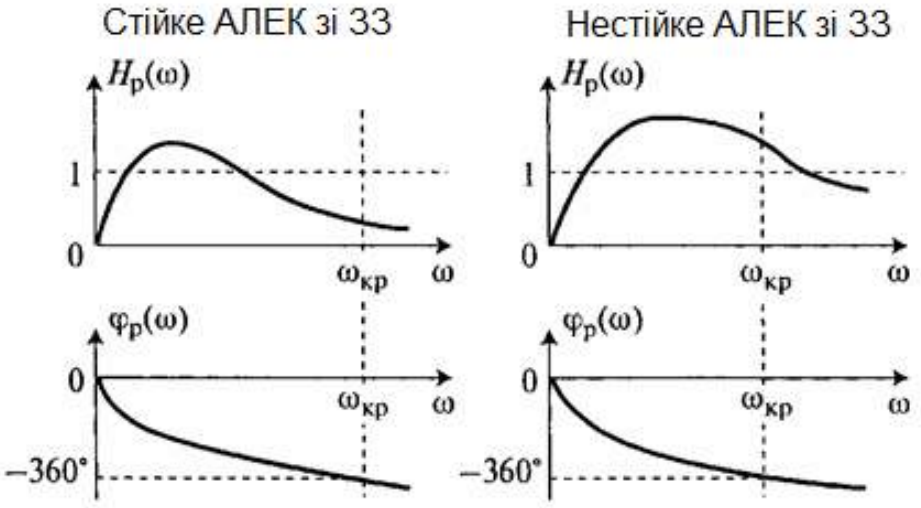


Рис. 7.18. Графіки АЧХ і ФЧХ двох кіл із розімкнутим ЗЗ

8. ЧАСТОТНО-ВИБІРКОВІ ЕЛЕКТРИЧНІ КОЛА

Частотно-вибірковими колами називають певні з'єднання пасивних елементів, характеристики яких залежать від частоти напруг і струмів, що впливають на них. Такі кола в різних варіантах широко застосовують у радіотехнічних пристроях і в обов'язковому порядку містять елементи L і C, реактивні опори яких залежать від частоти зовнішнього джерела сигналу. Ця особливість подібних з'єднань дозволяє пропускати через них коливання з одними частотами й затримувати коливання з іншими, тобто забезпечувати фільтрацію. Крім того, вибірковість може використовуватися для формування сигналів, що відрізняються за формою від сигналу зовнішнього впливу, наприклад, за допомогою підключень RC і RL з'єднань (так званих інтегрувальних і диференційованих ланок).

8.1. Класифікація вибіркових електричних кіл за частотним принципом. Основні завдання теорії фільтрації

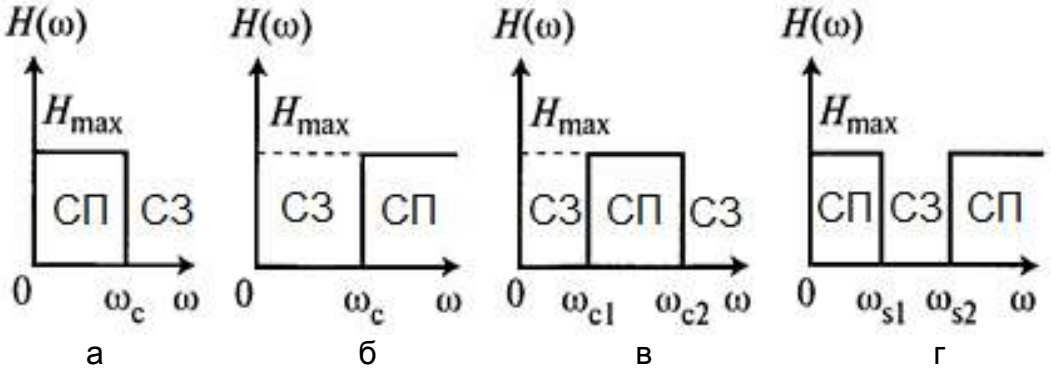
При проектуванні фільтрів прагнуть досягти абсолютно однакового коефіцієнта передачі (K = 1) у певній смузі частот (смузі прозорості) і забезпечити повне придушення частот, що не входять до смуги прозорості (рис. 8.1). Система, що відповідає цим параметрам, називається ***фільтрувальним чотириполюсником***, або ***електричним фільтром***.

Фільтром нижніх частот (ФНЧ) називають чотириполюсник, смуга прозорості якого простягається від $\omega = 0$ до деякої граничної частоти $\omega_{гр}$.

Якщо смуга пропускання займає всі частоти вище деякої $\omega_{гр}$, то такі чотириполюсники називають ***фільтрами верхніх частот (ФВЧ)***.

У ***смугових фільтрах (СФ)*** смуга прозорості обмежена з обох боків частотами $\omega_{гр1} \neq 0$, $\omega_{гр2} \neq 0$, причому ці частоти – скінчені.

Якщо ставиться завдання затримати певні частоти і пропустити всі інші, то мова йде про чотириполюсники, названі ***режекторними (загороджувальними) фільтрами (РФ)***.



а б в г

Рис. 8.1. Ідеалізовані характеристики фільтрів: а – ФНЧ; б – ФВЧ; в – ПФ; г – РФ

Ідеалізовані характеристики фільтрів показано на рис. 8.1, де $\omega_c = \omega_{гр}$ – частота зрізу, або гранична частота (визначає межі смуги пропускання СП); H_{max} – максимальне значення АЧХ (для пасивних фільтрів $H_{max} = 1$). Реальні фільтри не мають точно таких характеристик, вони є метою, до якої прагнуть. У реальних фільтрах між смугою придушення й смугою прозорості знаходиться смуга розфільтрування.

Електричний фільтр (ЕФ) якнайкраще виконує свої функції, якщо він узгоджений з навантаженням. У цьому випадку струми й напруги на вході й виході фільтра є однаковими за абсолютним значенням.

Основними завданнями теорії фільтрів є:

1) встановлення умов, за яких фільтр матиме смугу прозорості;
2) визначення ширини смуги прозорості;
3) знаходження рівнянь частотних характеристик фільтра.

Вимоги до частотних властивостей ЕФ задаються як вимоги до частотної характеристики загасання (ЧХЗ), яка визначає частотну залежність робочого загасання, дБ, і пов'язана з АЧХ співвідношенням

$$A(\omega) = -20\lg H(\omega). \qquad (8.1)$$

Вимоги до «якості фільтрації» задають у вигляді графіків допусків (рис. 8.2).

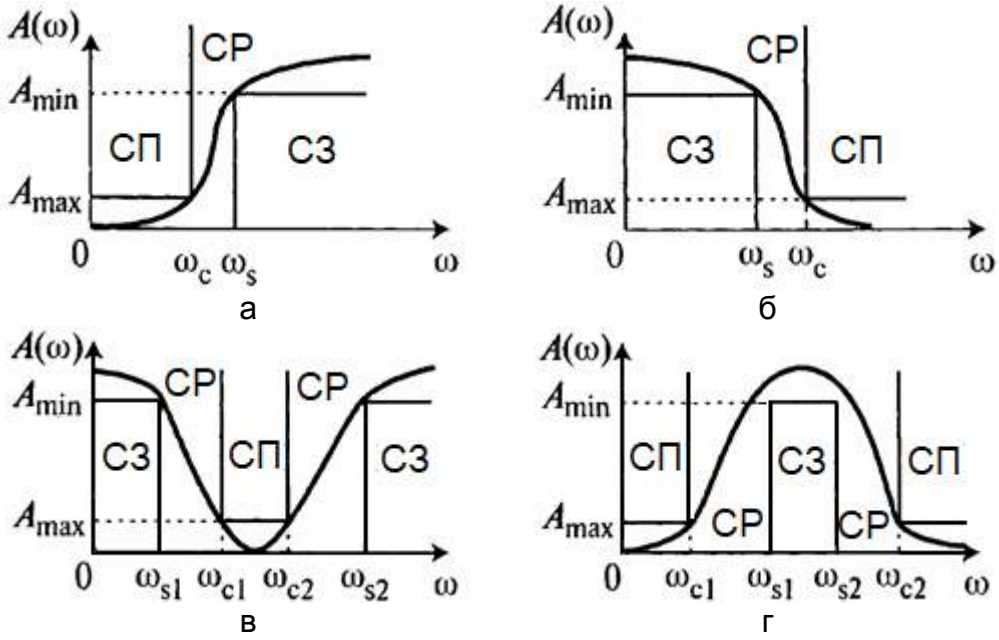


Рис. 8.2. Графіки допусків характеристик фільтрів: а – ФНЧ; б – ФВЧ; в – ПФ; г – РФ

Параметри, що задають якість фільтрації:

– A_{min} – мінімально припустиме загасання в смузі затримання (СЗ) $A(\omega) > A_{min}$;

– A_{max} – максимально припустиме загасання в смузі пропускання (нерівномірність ЧХЗ у СП) $A(\omega) < A_{max}$;

– $\omega_{c1} = \omega_{гр1}$, $\omega_{c2} = \omega_{гр2}$ – частоти зрізу смуги пропускання;

– $\omega_{s1} = \omega_{p1}$, $\omega_{s2} = \omega_{p2}$ – частоти зрізу СЗ (граничні частоти СР – смуги розфільтрування).

Реальні ЕФ можуть мати довільні ЧХЗ, але вони обов'язково мають вписуватися у межі заданих характеристик.

Умова прозорості фільтра

Часто фільтри будують за Т- і П-подібними схемами. Щоб установити єдині кількісні співвідношення для будь-яких схем фільтрів, скористуємося позначеннями опорів, показаних на рис. 8.3.

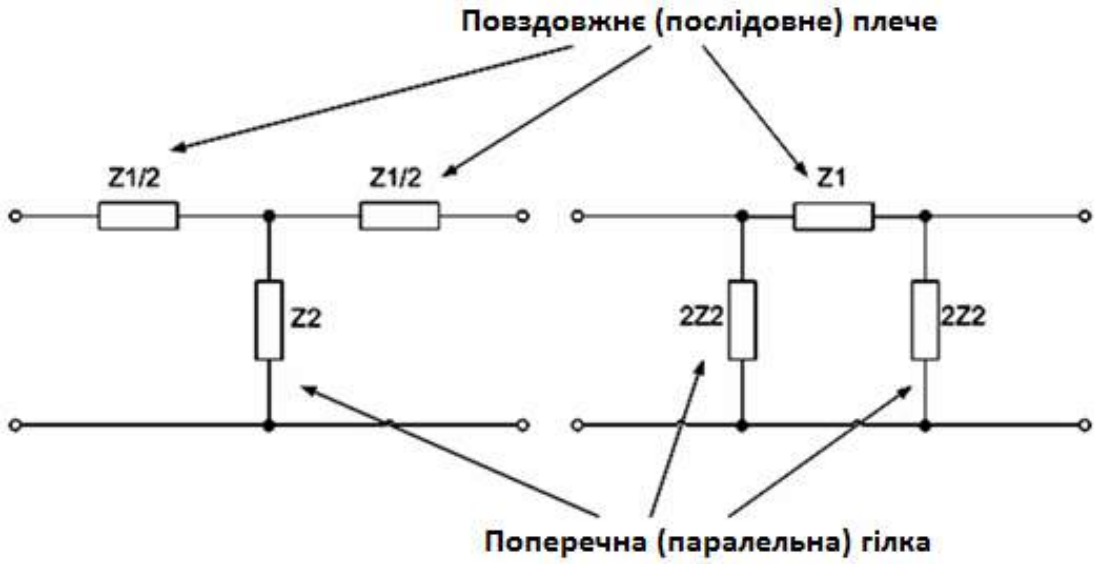


Рис. 8.3. Т- і П-подібні схеми фільтрів

Фільтр за умовою узгоджено з навантаженням:

$$\frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} = \frac{\dot{I}_1}{\dot{I}_2} = e^{\Gamma} = e^{a}e^{jb}.$$

Розглянуті чотириполюсники є симетричними, отже, $A = D = ch(\Gamma)$.

За вказаними позначеннями опорів на рис. 8.3 величина А буде однаковою для П- і Т-подібних чотириполюсників:

$$A = ch(\Gamma) = 1 + \frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}. \qquad (8.2)$$

У смузі прозорості загасання дорівнює нулю (a = 0), фазова постійна b може мати значення, відмінні від нуля (b ≠ 0). Тому постійна передачі в смузі прозорості є уявною величиною ($\Gamma = jb$). Тоді

$$ch(\Gamma) = ch(jb) = \cos(b) = 1 + \frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}.$$

За визначенням $\cos(b) \le 1$, тому необхідною умовою наявності в чотириполюснику смуги прозорості є різні знаки опорів $\dot{Z}_1$ і $\dot{Z}_2$ ($\dot{Z}_1$ – додатний, $\dot{Z}_2$ – від'ємний або навпаки). Ця умова є необхідною, але не достатньою. Згадаємо, що Г – уявна величина (елементи $\dot{Z}_1$ і $\dot{Z}_2$ є ємністю або індуктивністю), $\cos(b)$ має значення від –1 до 1, тоді

$$-1 \le 1 + \frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2} \le 1 \tag{8.3}$$

або

$$\begin{gathered} -2 \le \frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2} \le 0 \;\Rightarrow\; -1 \le \frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2} \le 0, \\ -1 \le \frac{x_1}{4x_2} \le 0 \;\Rightarrow\; |4x_2| > |x_1|. \end{gathered} \tag{8.4}$$

Таким чином, необхідною й достатньою умовою наявності смуги прозорості є те, що опори x_1 і x_2 повинні мати різні знаки, а за абсолютною величиною x_1 має бути меншим за $4x_2$. Рівняння (8.3) одержало назву «основна нерівність теорії фільтрів».

Граничні частоти смуги прозорості

Виходячи з формули (8.4) можна визначити граничні частоти СП.

Оскільки опори x_1 і x_2 є функціями частоти, а вигляд цих функцій відомий, то граничні частоти можна знайти, розв'язавши систему рівнянь

$$\begin{cases} \dfrac{x_1(\omega_{гр})}{4x_2(\omega_{гр})} = -1; \\ \dfrac{x_1(\omega_{гр})}{4x_2(\omega_{гр})} = 0. \end{cases} \tag{8.5}$$

Крім того, взявши до уваги формулу (8.2), основне рівняння теорії фільтрів можна записати як

$$-1 \le A \le 1. \tag{8.6}$$

Оскільки параметр $A = -\dfrac{Y_{22}}{Y_{21}} = \dfrac{1}{K_{xx}(j\omega)}$ (дорівнює оберненій величині коефіцієнта передачі), то

$$-1 \ge K_{xx}(j\omega) \ge 1.$$

Таким чином, у СП модуль коефіцієнта передачі $|K_{xx}(j\omega)| \ge 1$. Для граничних частот ця нерівність перетворюється в рівність $|K_{xx}(j\omega)| = 1$. Таке визначення $\omega_{гр}$ зручне при експериментальному дослідженні фільтрів.

Частотні характеристики фільтра

Частотними характеристиками фільтра є АЧХ $a(\omega)$ і ФЧХ $b(\omega)$. Очевидно, що в смузі прозорості $a(\omega)=0$.

Тепер необхідно зрозуміти, який вигляд матиме $a(\omega)$ у смузі затримання. Якщо візьмемо до уваги позначення на рис. 8.3 і підставимо їх у табл. 7.2, то одержимо, що для Т- і П-подібних чотириполюсників $A=D=ch(\Gamma)=1+\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}$, отже,

$$ch(\Gamma)=ch(a+jb)=ch(a)\cos b+jsh(a)\sin b=1+\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}. \qquad (8.7)$$

Оскільки $\dot{Z}_1=jx_1$ і $\dot{Z}_2=jx_2$ – уявні величини, то $1+\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}$ – реальна, таким чином, $sh(a)\sin b=0$. Але у смузі придушення $a\neq 0$, тому й $sh(a)\neq 0$, отже, $\sin b=0$ (***тобто в СЗ фазовий кут*** $b=0^\circ$ ***або*** $b=180^\circ$).

Дійсна частина буде $ch(a)\cos b=1+\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}$. Оскільки $b=0^\circ$ або $b=180^\circ$, то $\cos b=\pm 1$ і $ch(a)=\pm\left(1+\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}\right)$. Через те, що у смузі прозорості $-1\le 1+\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}\le 1$, то в смузі придушення $-1>1+\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}>1$, але $ch(a)$ може бути тільки більше 1. Звідси можна зробити такі висновки:

– якщо $1+\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}>1$ або $\frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}>0$, то $\cos b=1$ і кут $b=0^\circ$;

– якщо $1+\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}<-1$ або $\frac{\dot{Z}_1}{4\dot{Z}_2}<-1$, то $\cos b=-1$ і кут $b=180^\circ$.

У всіх випадках

$$ch(a)=\left|1+\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}\right|. \qquad (8.8)$$

Вираз (8.8) – це рівняння АЧХ у смузі придушення (затримання).

Зробимо такі висновки:

– у смузі прозорості $a=0$, $b=\arccos\left(1+\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}\right)$;

– у смузі придушення $ch(a)=\left|1+\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}\right|$; $b=0^\circ$ або $b=180^\circ$.

8.2. Фільтр нижніх частот

У цьому фільтрі постійний струм і всі коливання нижче $\omega_{гр}$ мають пропускатися, а коливання з $\omega > \omega_{гр}$ – пригнічуватися.

Для цього послідовна гілка ФНЧ повинна мати малий опір для нижніх частот і великий опір для верхніх частот; цим вимогам задовольняє індуктивність L. Паралельна гілка**,** навпаки, повинна мати великий опір для низьких частот (струми цих коливань не повинні шунтуватися) і малий опір – для високих (струми цих коливань на виході будуть ослаблені); цій умові відповідає ємність С.

Таким чином, у найпростішому ФНЧ $Z_1 = j\omega L$, а $Z_2 = \dfrac{1}{j\omega C}$.

Основними схемами ФНЧ є Т- і П-подібні схеми (рис. 8.4).

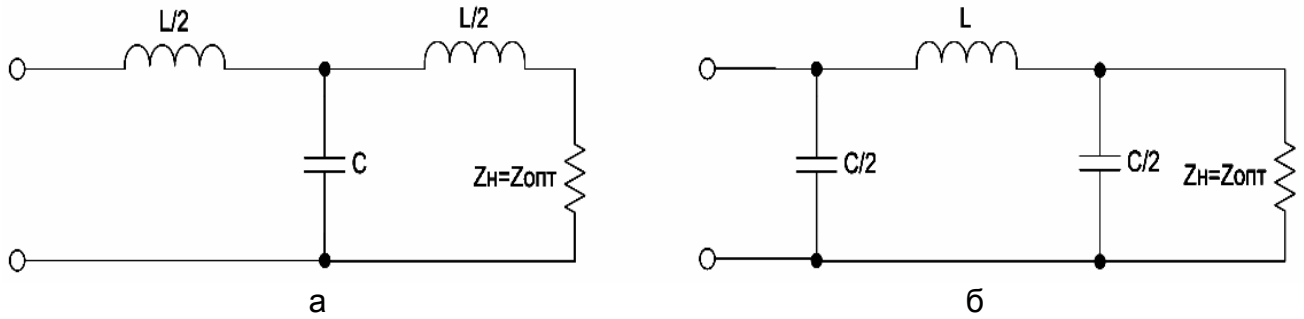


Рис. 8.4. Основні схеми ФНЧ: а – Т- подібна; б – П-подібна

Фільтри, в яких у поздовжню й поперечну гілки включені взаємно обернені елементи в такий спосіб, що добуток Z_1 і Z_2 дорівнює додатній постійній величині ($Z_1Z_2 = K^2$), називають фільтрами типу *К.*

ФНЧ у режимі узгодження

Для фільтра в режимі узгодження застосовують загальні співвідношення теорії фільтрів. Знайдемо граничні частоти, скориставшись системою рівнянь (8.5). Маємо $x_1 = \omega L$, а $x_2 = -\dfrac{1}{\omega C}$. Тому

$$\frac{x_1}{4x_2} = -\frac{\omega^2 LC}{4}.$$

Прирівнявши цей вираз до нуля, одержимо $\omega_{гр1} = 0$.

Для знаходження іншої $\omega_{гр}$ маємо $\dfrac{x_1}{4x_2} = -\dfrac{\omega^2 LC}{4} = -1$, звідки

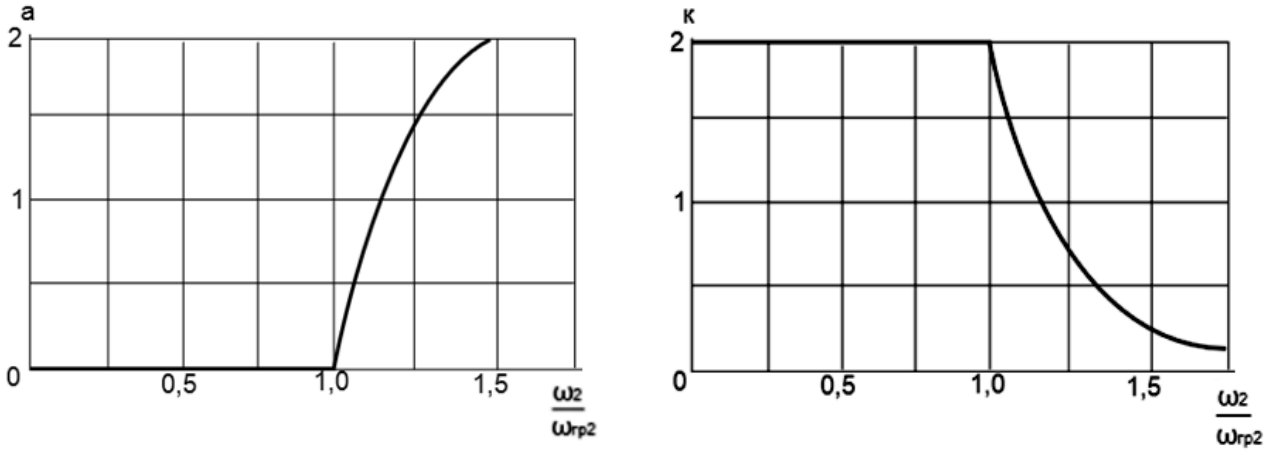
$\omega_{гр2} = \dfrac{2}{\sqrt{LC}}$.

Визначивши $\omega_{гр}$, звернемося до рівнянь частотних характеристик. У цьому випадку $\frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2} = -\frac{\omega^2 LC}{2} = -2\frac{\omega^2}{\omega_{гр}^2}$. Тому

$$ch(a) = 1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_{гр}^2};$$

$$a = arcch\left(1 - 2\frac{\omega^2}{\omega_{гр}^2}\right).$$

АЧХ загасання матиме вигляд, зображений на рис. 8.5. Фазочастотна характеристика ФНЧ у смузі прозорості $b = \arccos\left(1 + \frac{\dot{Z}_1}{2\dot{Z}_2}\right)$ (рис. 8.6), а в смузі придушення – $b = 180^\circ$, тому що $\frac{x_1}{3x_2} < -1$.



а б

Рис. 8.5. Частотні характеристики: а – частотна характеристика загасання; б – АЧХ

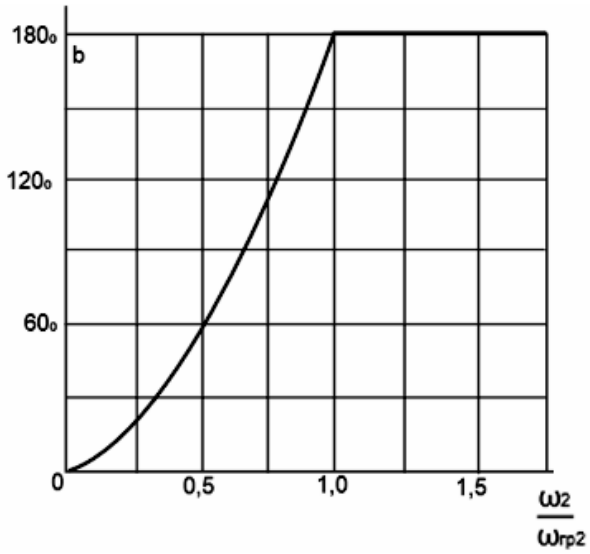


Рис. 8.6. Фазочастотна характеристика ФНЧ

Частотні характеристики такого вигляду фільтр має лише в тому випадку, якщо він навантажений на опір, який дорівнює характеристичному.

Для Т-чотириполюсника з урахуванням даних табл. 7.2 і $Z_a = Z_1/2$, $Z_c = Z_2$ знайдемо

$$Z_{0T} = \pm\sqrt{Z_1 Z_2\left(1+\frac{Z_1}{4Z_2}\right)} = \pm\rho\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_{гр}^2}}.$$

У випадку П-подібної схеми чотириполюсника також скористаємося табл. 7.2 і тим, що $Z_a = 2Z_2$, $Z_c = Z_1$, тоді

$$Z_{0П} = \pm\sqrt{\frac{Z_1 Z_2}{1+\frac{Z_1}{4Z_2}}} = \frac{\rho}{\pm\sqrt{1-\frac{\omega^2}{\omega_{гр}^2}}}.$$

Таким чином, для будь-якої схеми фільтра характеристичний опір Z_0 і за характером, і за величиною залежить від частоти. Тому, щоб здійснити узгодження, то для кожної частоти потрібно підбирати свій опір навантаження. У дійсності опір навантаження є зазвичай активним (не залежить від частоти). Отже, фільтр у діапазоні частот працює на неузгоджене навантаження, тому до режиму узгодження можна тільки наблизитися. Одним із кращих наближень є $R_н = \rho$.

Параметри фільтра (L і C) визначають, виходячи з рівнянь $R_н = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$ і $\omega_{гр} = \frac{2}{\sqrt{LC}}$:

$$C = \frac{2}{\omega_{гр} R_н};\ L = \frac{2R_н}{\omega_{гр}}. \qquad (8.9)$$

8.3. Фільтр верхніх частот

Під час проходження через ФВЧ коливання, нижчі за $\omega_{гр}$, мають затримуватися, а частоти, вищі ніж $\omega_{гр}$, – пропускатися безперешкодно. Для цього потрібно до послідовного плеча підключити ємність, а до паралельного – індуктивність (рис. 8.7).

Цей фільтр також є фільтром типу K, тому що $Z_1 Z_2 = L/C = \rho^2$.

Граничні частоти знаходимо з рівностей $\frac{x_1(\omega_{гр})}{4x_2(\omega_{гр})} = -1$ і $\frac{x_1(\omega_{гр})}{4x_2(\omega_{гр})} = 0$,

звідки $\omega_{гр1} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$, $\omega_{гр2} = \infty$.

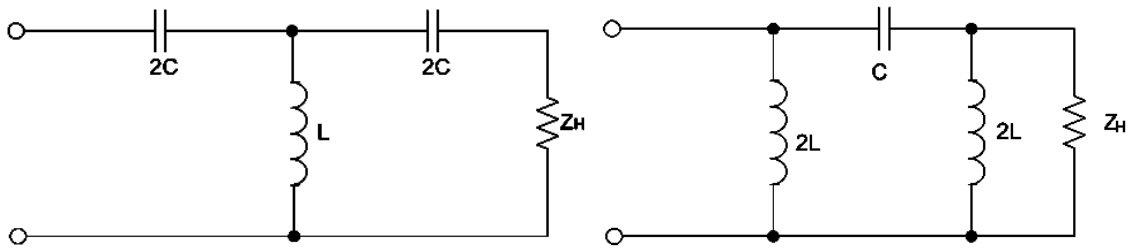


Рис. 8.7. Схеми ФВЧ

Як і у ФНЧ, у ФВЧ найкращі частотні характеристики досягаються при узгодженому навантаженні. Для Т-чотириполюсника

$$Z_{0T} = \pm\rho\sqrt{1-\frac{\omega_{гр}^2}{\omega^2}}\,.$$

У випадку П-подібної схеми чотириполюсника

$$Z_{0П} = \pm\frac{\rho}{\sqrt{1-\frac{\omega_{гр}^2}{\omega^2}}}\,.$$

У смузі прозорості $a = 0$, $b = \arccos\left(1-2\frac{\omega_{гр}^2}{\omega^2}\right)$.

У смузі придушення $a = \operatorname{arch}\left|1+\frac{Z_1}{2Z_2}\right| = \operatorname{arch}\left|1-2\frac{\omega_{гр}^2}{\omega^2}\right|$, $b = 180^\circ$.

Графічно частотні характеристики ФВЧ зображено на рис. 8.8.

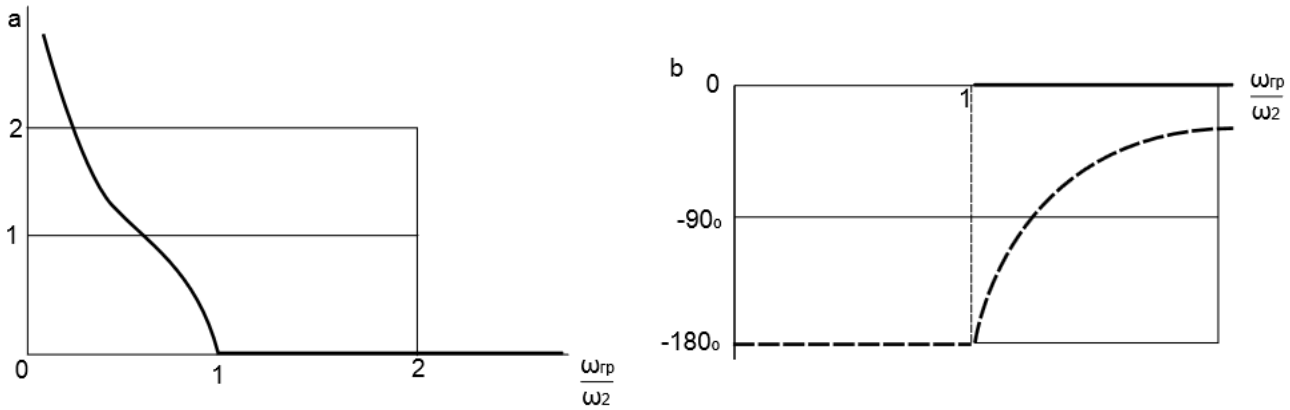


Рис. 8.8. Частотні характеристики ФВЧ

Досить точним наближенням до режиму узгодження є $R_н = \rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

З умови $\omega_{гр} = \frac{1}{2\sqrt{LC}}$ можна обчислити елементи C і L фільтра:

$$C = \frac{1}{2\omega_{гр} R_н}; \quad L = \frac{R_н}{2\omega_{гр}}. \qquad (8.10)$$

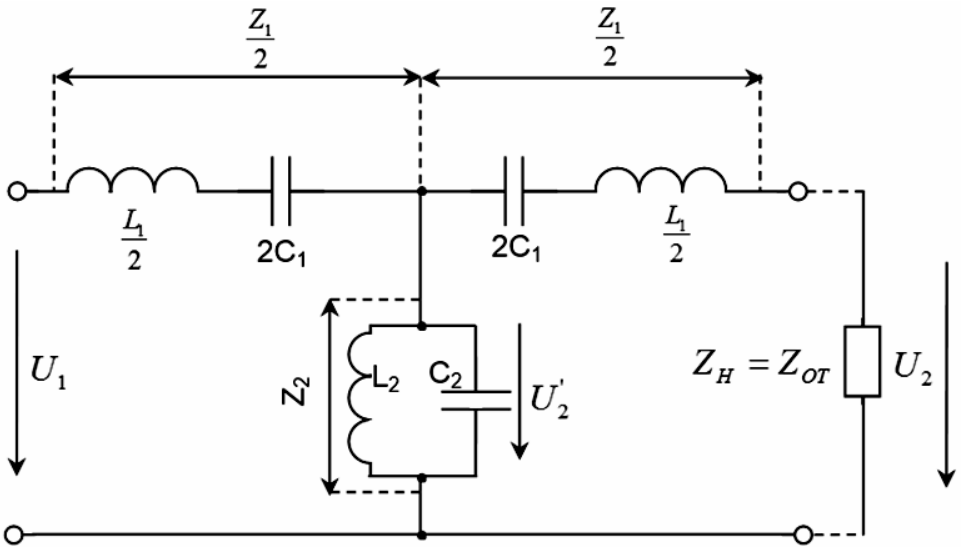
8.4. Смуговий фільтр

Схеми елементарного смугового фільтра (СФ) зображено на рис. 8.9.

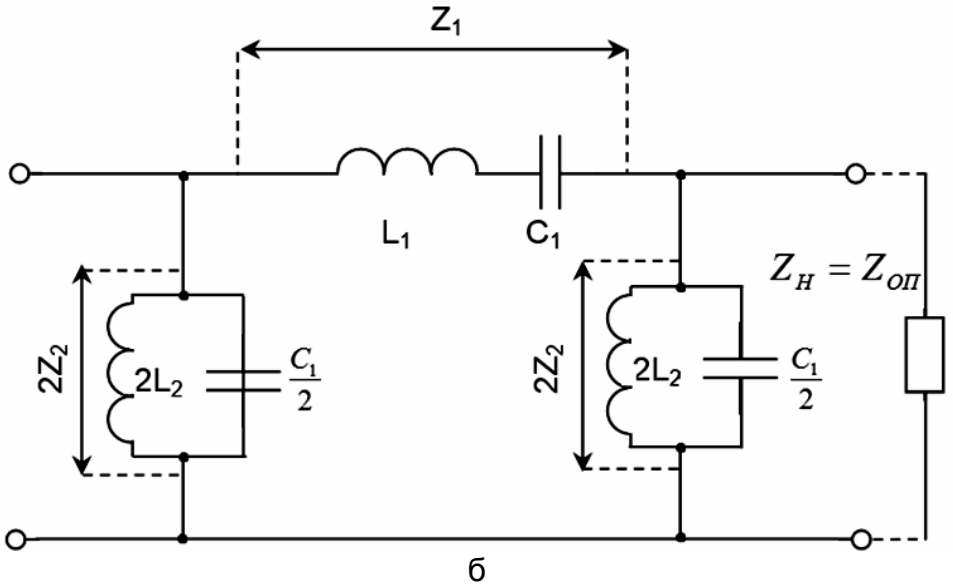
У поздовжню гілку включено послідовний КК, а в поперечну – паралельний КК. Розглянемо роботу СФ на прикладі Т-подібної схеми чотириполюсника (рис. 8.9, а), аналогічні міркування слушні й для П-подібних СФ (рис. 8.9, б).

Усі коливальні контури настроєні на ту саму резонансну частоту ω_0. У цьому випадку послідовні гілки стають коротко замкненими перемичками, а паралельні – розривом гілок (рис. 8.10).

Напруга на виході дорівнює вхідній ($K_{xx} = 1, a = 0$).



а



б

Рис. 8.9. Частотні характеристики ФВЧ

При частотах $\omega > \omega_0$ послідовні гілки є індуктивностями, а паралельні – ємностями. Еквівалентну схему фільтра показано на рис. 8.11.

Ця схема подібна до схеми ФНЧ (фільтр має смугу пропускання від ω_0 до деякої граничної частоти $\omega_{гр2} = \omega_в$).

На частотах $\omega < \omega_0$ послідовні гілки являють собою ємності, а паралельні – індуктивності. Еквівалентну схему зображено на рис. 8.12.

З еквівалентної схеми видно, що для частот $\omega < \omega_0$ вона є ФВЧ (у діапазоні частот від $\omega_н = \omega_{гр1}$ до ω_0 $K_{xx} > 1$).

АЧХ такого фільтра зображено на рис. 8.13. Сплеск АЧХ на частоті ω_I пояснюється послідовним резонансом контуру $2C_{1e}$, L_{2e}, а на частоті ω_{II} – послідовним резонансом контуру $L_{1e}/2$, C_{2e}.

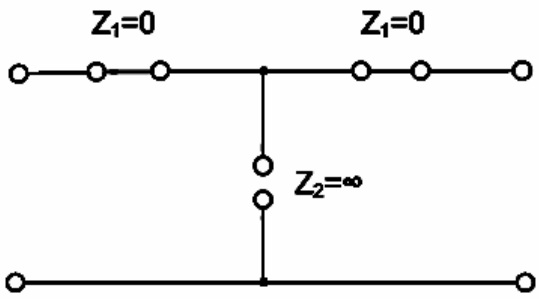


Рис. 8.10. Еквівалентна схема СФ на резонансній частоті

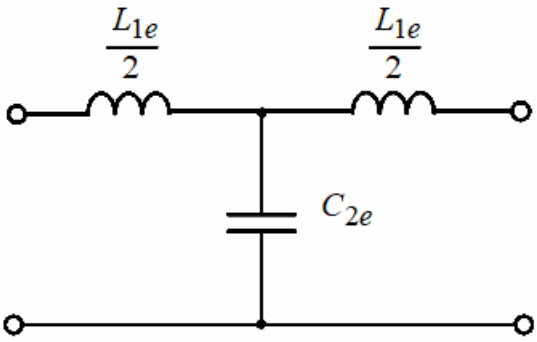


Рис. 8.11. Еквівалентна схема СФ в області високих частот

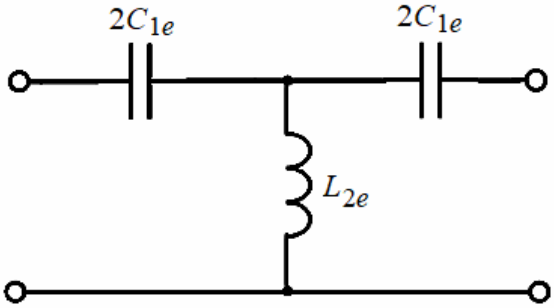


Рис. 8.12. Еквівалентна схема СФ в області низьких частот

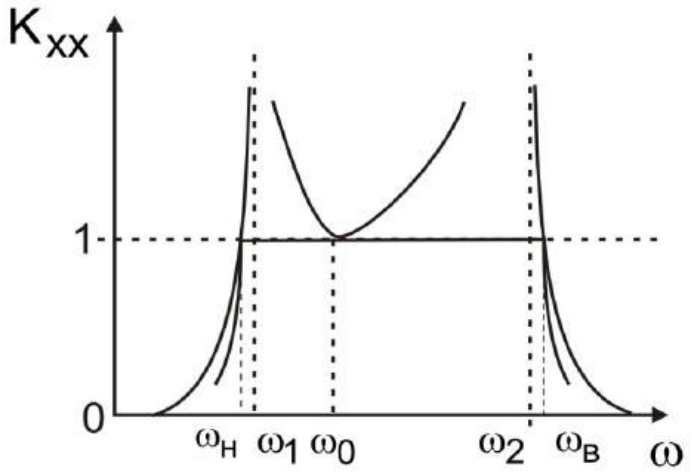


Рис. 8.13. АЧХ смугового фільтра

При холостому ході $U_2 = U_2'$ (див. рис. 8.9), тоді

$$K_{xx} = \frac{Z_2}{Z_2 + \dfrac{Z_1}{2}} = \frac{1}{1 + \dfrac{Z_1}{2Z_2}}.$$

Опори Z_1 і Z_2 будуть такими:

$$Z_1 = j\left(\omega L_1 - \frac{1}{\omega C_1}\right) = j\rho_1\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right), \qquad \rho_1 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}};$$

$$Z_2 = \frac{j\omega L_2 \dfrac{1}{j\omega C_2}}{j\left(\omega L_2 - \dfrac{1}{j\omega C_2}\right)} = \rho_2 \frac{1}{j\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}, \quad \rho_2 = \sqrt{\frac{L_2}{C_2}}. \tag{8.11}$$

Добуток $Z_1 Z_2 = \rho_1 \rho_2$, тобто СФ належить до фільтрів типу К. Крім того, КК налаштовані на ту саму ω_0, отже, $L_1 C_1 = L_2 C_2$ і $\dfrac{\rho_1}{\rho_2} = \dfrac{C_2}{C_1}$.

Таким чином,

$$\frac{Z_1}{2Z_2} = -\frac{1}{2}\frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = -\frac{1}{2}\frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2. \tag{8.12}$$

Тоді одержимо

$$K_{xx} = \frac{1}{1 - \dfrac{1}{2}\dfrac{C_2}{C_1}\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}. \tag{8.13}$$

Щоб знайти частоти $\omega_{гр1}$ і $\omega_{гр2}$, скористаємося умовою $K_{xx}(\omega_{гр}) = 1$.

З формули (8.12) одержуємо, що $|K_{xx}(\omega_{гр})| = 1$ за умов:

1) $\frac{1}{2}\frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2=0$, тобто $\omega=\omega_0$;

2) $\frac{1}{2}\frac{C_2}{C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2=2$, або $\omega^2\pm\frac{2}{\sqrt{L_1C_2}}\omega-\omega_0^2=0$.

Розв'язавши це квадратне рівняння, знаходимо:

$$\omega_{гр1}=\omega_н=\sqrt{\frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_1C_2}}+\frac{1}{\sqrt{L_1C_2}};$$
$$\omega_{гр2}=\omega_в=\sqrt{\frac{1}{L_1C_1}+\frac{1}{L_1C_2}}-\frac{1}{\sqrt{L_1C_2}}. \qquad (8.14)$$

Щоб досягти рівномірності АЧХ у смузі прозорості, необхідно навантажити фільтр на опір, який дорівнює характеристичному.

Для Т-подібної схеми СФ одержимо

$$Z_{0Т}=\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}\sqrt{1-\frac{C_2}{4C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}, \qquad (8.15)$$

для П-подібної схеми СФ:

$$Z_{0П}=\sqrt{\frac{L_1}{C_2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{C_2}{4C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}. \qquad (8.16)$$

У режимі узгодження фільтр матиме такі частотні характеристики:

1) частотна залежність загасання в смузі придушення визначається аналогічно ФНЧ і ФВЧ (рис. 8.14):

$$\mathrm{ch}(a)=\left|1+\frac{Z_1}{2Z_2}\right|=\left|1-\frac{C_2}{2C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right|; \qquad (8.17)$$

2) рівняння фазочастотної характеристики:

$$\cos(b)=1+\frac{Z_1}{2Z_2}=1-\frac{C_2}{2C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2;$$
$$b=\arccos\left(1+\frac{Z_1}{2Z_2}\right)=\arccos\left(1-\frac{C_2}{2C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right). \qquad (8.18)$$

Графік ФЧХ для СФ показано на рис. 8.15.

На частотах від ω_0 до $\omega_в$ b змінюється від 0° до 180° (так само, як ФЧХ ФНЧ). На частотах від $\omega_н$ до ω_0 залежність b аналогічна ФЧХ ФВЧ (змінюється від –180° до 0°). У смугах придушення $b=\pm180^\circ$.

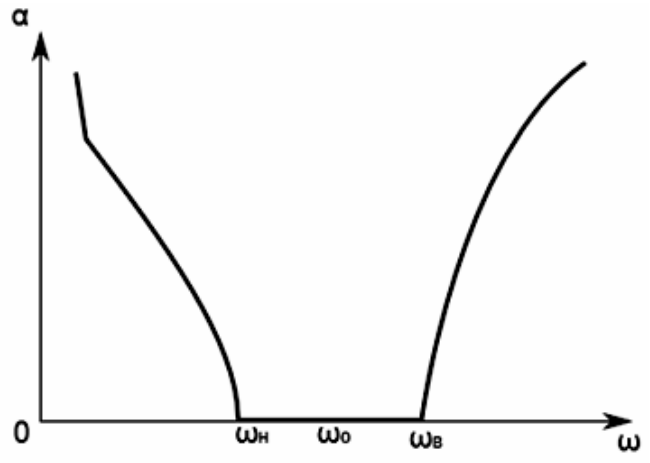


Рис. 8.14. Частотна залежність загасання СФ

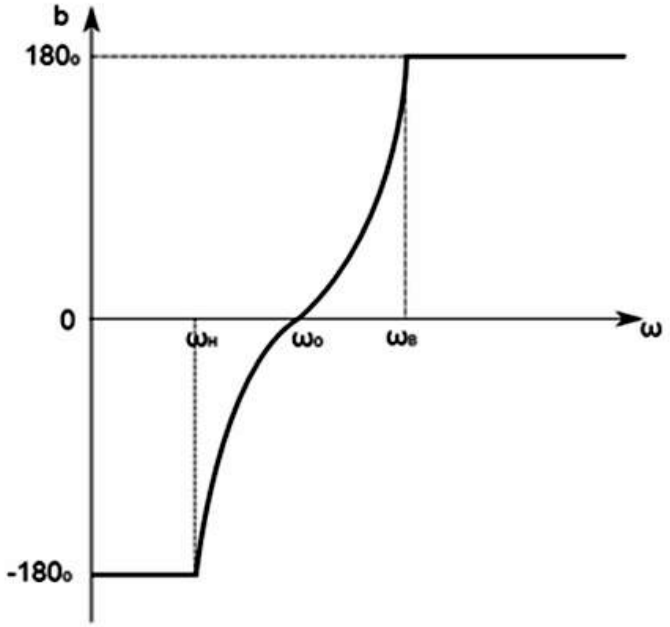


Рис. 8.15. Графік фазочастотної характеристики

Визначимо рівняння для знаходження L_1, C_1, L_2 і C_2.

Оскільки досить точним наближенням до погодженої роботи фільтра є таке навантаження, яке дорівнює характеристичному опору, то

$$R_н = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}.$$

Тут враховано, що

$$\sqrt{1-\frac{C_2}{4C_1}\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} \to 1.$$

Ширина смуги пропускання

$$\omega_в - \omega_н = \frac{2}{\sqrt{L_1 C_2}} = \frac{2}{C_2 R_н}. \qquad (8.19)$$

Звідси можна знайти C_2:

$$C_2 = \frac{2}{R_н(\omega_в - \omega_н)}. \qquad (8.20)$$

Оскільки

$$\omega_0^2 = \frac{1}{L_2 C_2} = \omega_в \omega_н,$$

то

$$C_2 = \frac{2}{R_н(\omega_в - \omega_н)}. \qquad (8.21)$$

Тепер визначимо L_1 і C_1:

$$L_1 = R_н^2 C_2 = \frac{2R_н}{\omega_в - \omega_н}; \qquad (8.22)$$

$$C_1 = \frac{1}{\omega_0^2 L_1} = \frac{\omega_в - \omega_н}{2R_н \omega_в \omega_н}. \qquad (8.23)$$

8.5. Режекторний фільтр

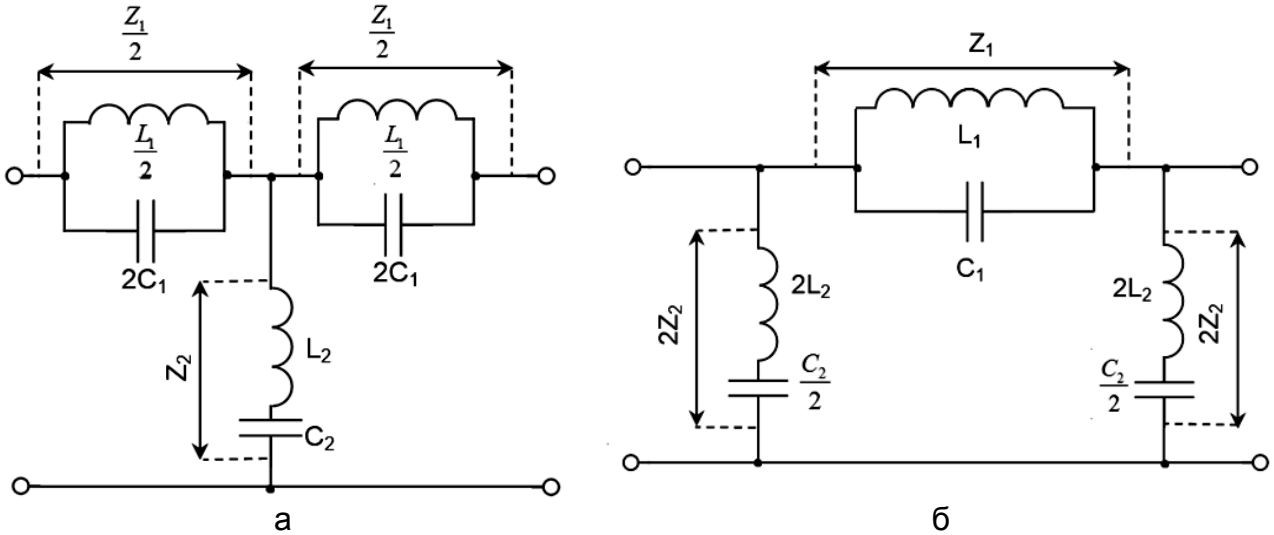
Якщо в схемі смугового фільтра типу К поміняти місцями паралельний і послідовний КК, то СФ перетвориться в загороджувальний (рис. 8.16).

Як і в ПФ, у цьому випадку КК також настроєні на ту саму ω_0.

При $\omega = \omega_0$ послідовна гілка виявиться розімкненою, а паралельна – замкненою (рис. 8.17, а).

На частотах $\omega > \omega_0$ послідовна гілка набуває ємнісного характеру, а паралельна – індуктивного (рис. 8.17, б).

При частотах $\omega < \omega_0$ послідовна галузь, навпаки, набуває індуктивного характеру, а паралельна – ємнісного (рис. 8.17, в).



а б

Рис. 8.16. Схеми режекторного фільтра (РФ)

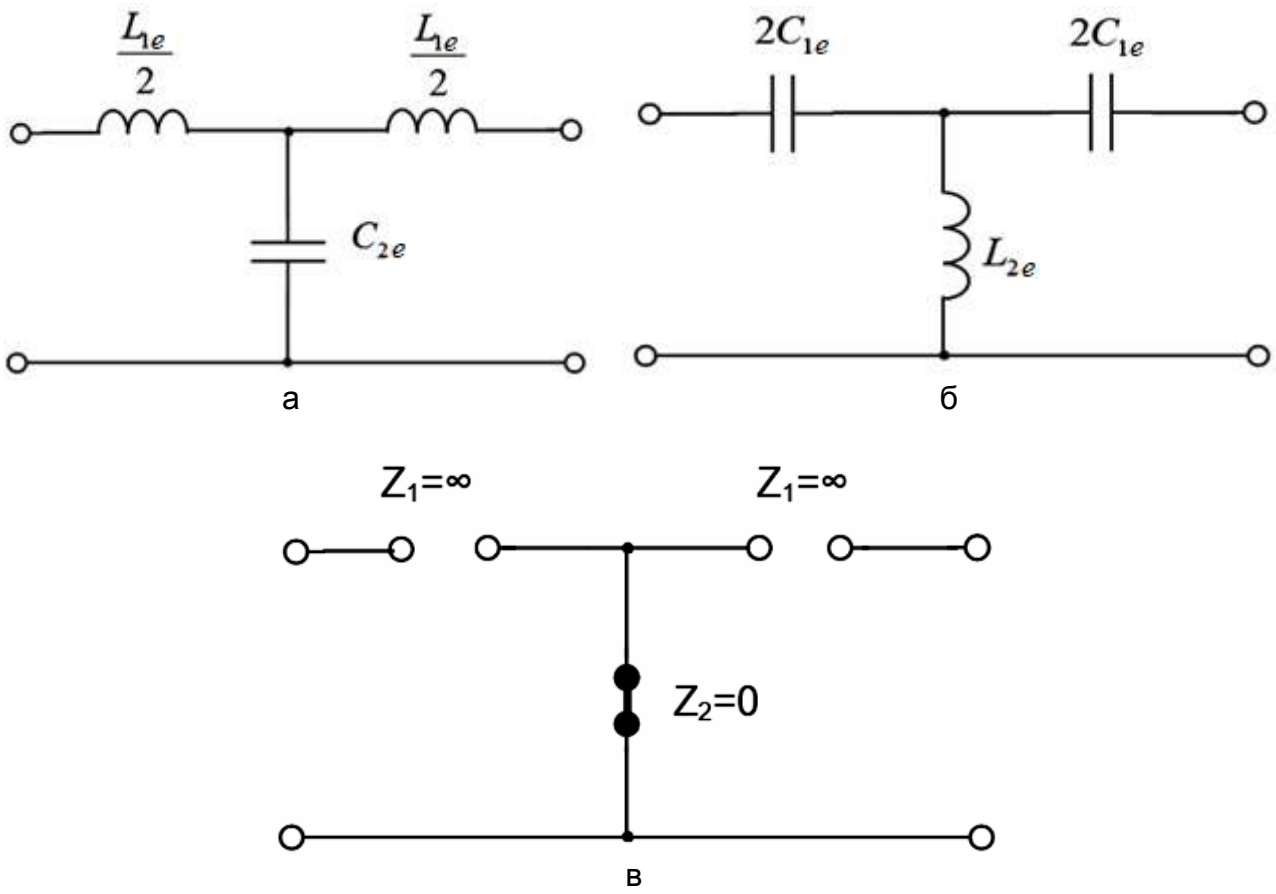


Рис. 8.17. Еквівалентні схеми РФ

Якщо для РФ зробити розрахунки, аналогічні СФ, то одержимо такі рівняння для характеристичних опорів:

– для Т-подібної схеми РФ

$$Z_{0T} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}\sqrt{1-\frac{C_2}{2C_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}; \qquad (8.24)$$

– для П-подібної схеми РФ

$$Z_{0П} = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{C_2}{2C_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}. \qquad (8.25)$$

Загасання в смузі придушення змінюється за законом

$$ch(a) = \left|1+\frac{Z_1}{2Z_2}\right| = \left|1-\frac{C_2}{2C_1\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}\right|. \qquad (8.26)$$

Частотну характеристику загасання РФ показано на рис. 8.18.

ЧХЗ показує, що в діапазоні частот $\omega_в...\omega_н$ фільтр дійсно має велике загасання, а при ω_0 загасання прямує до нескінченності.

Рівняння ФЧХ у смузі прозорості визначаємо як

$$\cos(b) = 1 + \frac{Z_1}{2Z_2} = 1 - \frac{C_2}{2C_1\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}. \qquad (8.27)$$

Графік ФЧХ зображено на рис. 8.19.

Крива $b(\omega)$ являє собою комбінацію ФЧХ фільтрів ВЧ і НЧ.

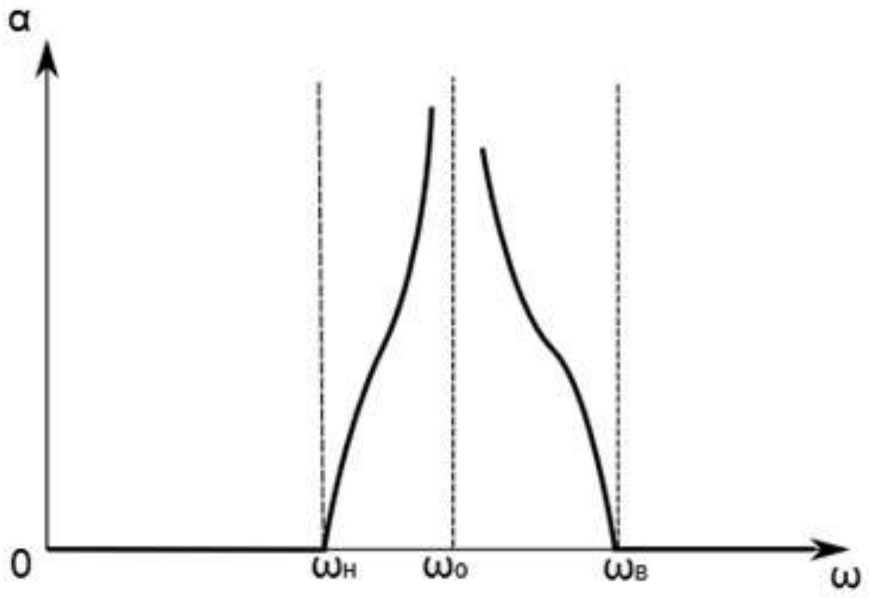


Рис. 8.18. Характеристика загасання РФ

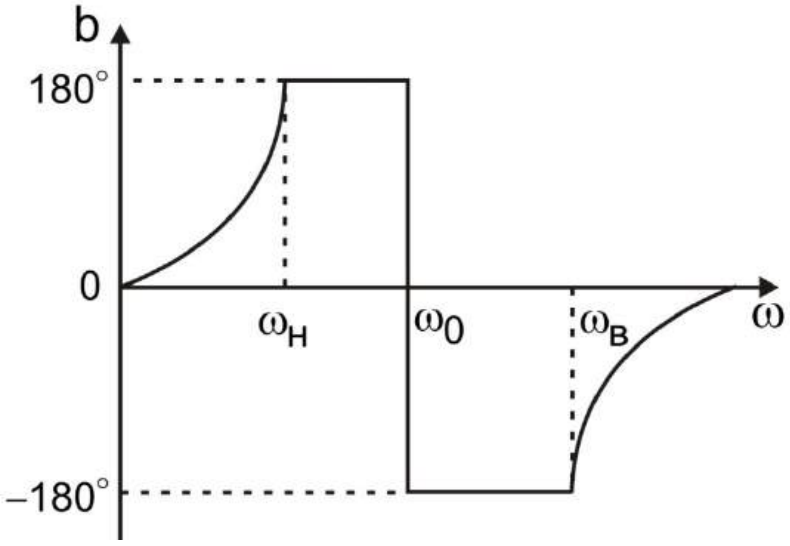


Рис. 8.19. Графічне зображення ФЧХ РФ

Для визначення елементів фільтра використовуємо такі формули:

$$L_1 = \frac{2R_н(\omega_в - \omega_н)}{\omega_в\omega_н}; \quad (8.28)$$

$$C_1 = \frac{1}{2R_н(\omega_в - \omega_н)}; \quad (8.29)$$

$$L_2 = \frac{R_н}{2(\omega_в - \omega_н)}; \quad (8.30)$$

$$C_2 = \frac{2(\omega_в - \omega_н)}{R_н\omega_в\omega_н}. \quad (8.31)$$

У цих формулах $R_н = \sqrt{\frac{L_1}{C_2}} \approx Z_{0Т} \approx Z_{0П}$.

8.6. Активні чотириполюсники на базі операційного підсилювача

Необхідний критерій активності чотириполюсника *– наявність джерел електричної енергії*.

Достатній критерій активності чотириполюсника *– віддача електричної енергії в зовнішні кола (електрична енергія на виході перевищує електричну енергію на вході).*

До активних чотириполюсників належать керовані джерела напруги або струму:

– однобічні без зворотного зв'язку (підсилювачі);
– однобічні із зовнішнім зворотним зв'язком (підсилювачі);
– двобічні із внутрішнім ЗЗ (перетворювачі опорів).

Розрізняють чотири види ***однобічних керованих джерел***:

1) джерело напруги, кероване напругою (ДНКН);
2) джерело напруги, кероване струмом (ДНКС);
3) джерело струму, кероване напругою (ДСКН);
4) джерело струму, кероване струмом (ДСКС).

Схеми заміщення ідеалізованих однобічних керованих джерел показано на рис. 8.20.

Ідеалізовані схеми заміщення реалізуються за допомогою операційних підсилювачів (ОП). Графічне позначення ОП зображено на рис. 8.21.

ОП мають такі властивості:

1. $Z^+_{вх} = Z^-_{вх} \to 0$; $Z_{вих} \to 0$.
2. $\Delta U = U_1^+ - U_1^- \to 0$ (віртуальна «земля» або «нуль»).
3. $K_u = \frac{U_2}{\Delta U} \to \infty$.

Схеми реалізації однобічних керованих джерел показано на рис. 8.22.

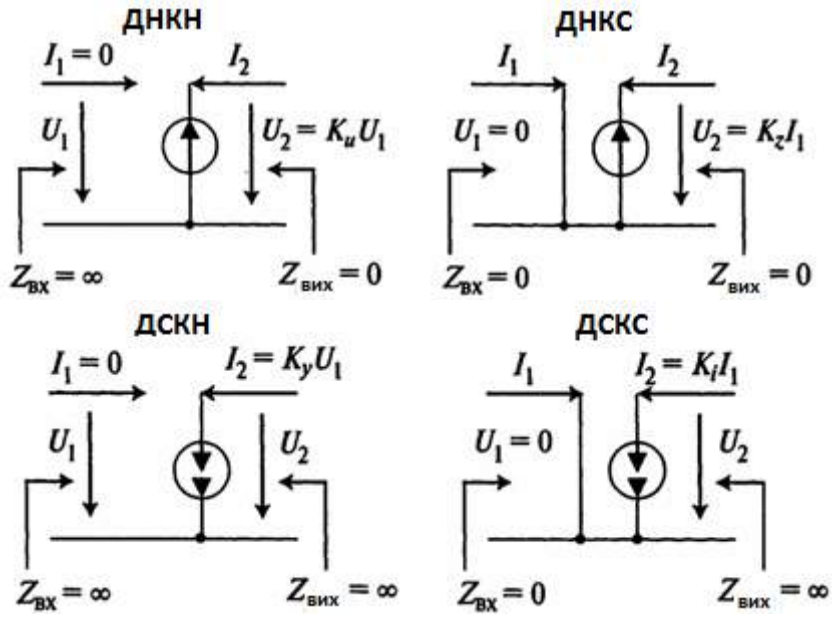


Рис. 8.20. Схеми заміщення ідеалізованих однобічних керованих джерел

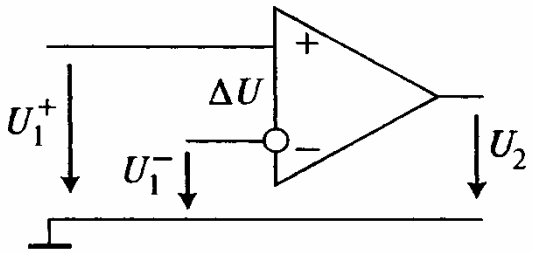


Рис. 8.21. Позначення операційного підсилювача

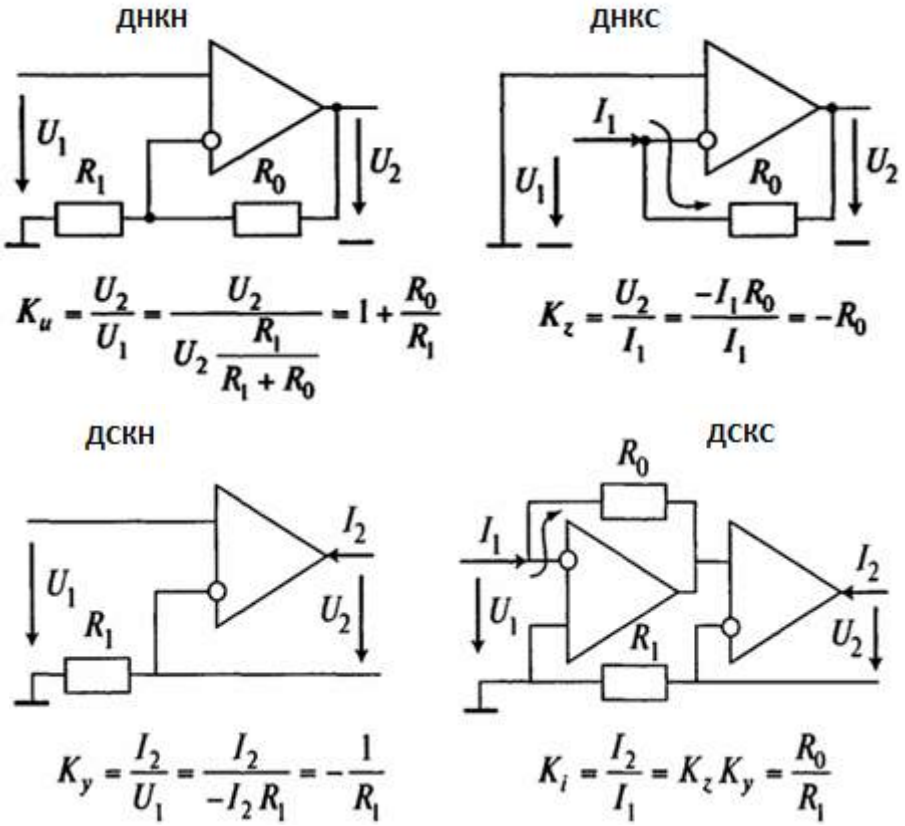


Рис. 8.22. Схеми реалізації однобічних керованих джерел

Двобічні чотириполюсники із внутрішнім зворотним зв'язком (перетворювачі опорів (ПО)) призначені для зміни величини, знака й характеру опорів навантаження; вони бувають пасивними й активними.

Пасивні ПО змінюють тільки величину й характер опорів навантаження (*ідеальний трансформатор, чвертьхвильовий трансформатор на відрізку довгої лінії).*

Активні ПО змінюють також знак опору навантаження, що дозволяє одержувати від'ємні параметри кіл.

До активних ПО належать двобічні керовані джерела, які реалізують шляхом паралельного з'єднання:

– входу ДНКН (ДСКС) з виходом ДСКС (ДНКН), а виходу ДНКН (ДСКС) із входом ДСКС (ДНКН);

– входу (виходу) одного ДНКС (ДСКН) з виходом (входом) іншого ДНКС (ДСКН).

Активні ПО підрозділяють на *конвертори опорів та інвертори опорів.*

Конвертором опорів (КО) є чотириполюсник, операторний вхідний опір якого визначають за формулою

$$Z_{вх} = K_K Z_н,$$

де K_K – *коефіцієнт конверсії.*

Якщо $K_K > 0$, отримують конвертор додатних опорів (КДО), який реалізується активними й пасивними колами, якщо $K_K < 0$ – конвертор від'ємних опорів (КВО), який може бути реалізованим тільки на активних чотириполюсниках.

Активні конвертори опорів – це двобічні керовані джерела з матрицею А-параметрів, в якій $A_{12} = A_{21} = 0$; при цьому

$$Z_{вх} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A_{11}}{A_{22}} Z_н; \quad K_K = \frac{A_{11}}{A_{22}}.$$

Розглянемо типову схему реалізації КВО на ОП, показану на рис. 8.23. Ця схема є базовою при реалізації всіх інших схем активних ПО.

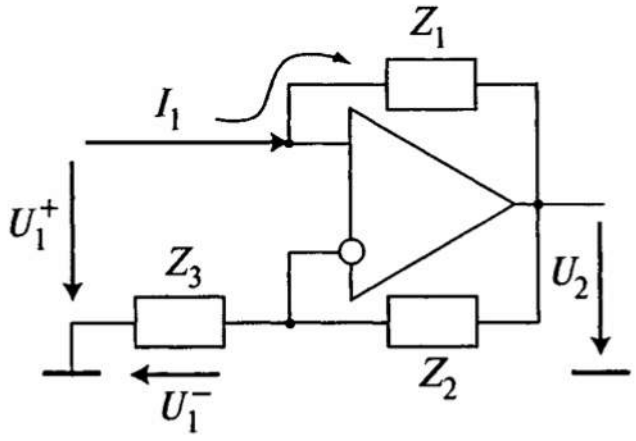


Рис. 8.23. Типова схема реалізації КВО

У цій схемі

$$U_1^+ = U_1^- = U_1 = U_2 \frac{Z_3}{Z_2 + Z_3};\ U_2 = \frac{U_1(Z_2 + Z_3)}{Z_3};$$

$$I_1 = \frac{U_1 - U_2}{Z_1} = -\frac{U_1 Z_2}{Z_1 Z_3};\ Z_{вх} = \frac{U_1}{I_1} = -\frac{Z_1 Z_3}{Z_2}.$$

Якщо навантаження $Z_н$ – резистивне, то його включають замість Z_3 (або Z_1; краще, якщо замість опору Z_3, який заземлено, що знижує перешкоди від електромагнітних завад). У такий спосіб забезпечується реалізація КВО із коефіцієнтом конверсії $K_K = -Z_1/Z_2$.

Якщо взяти $Z_1 = R_1$ і $Z_2 = R_2$, замість додатних навантажень R, L, C можна одержати від'ємні значення елементів –R, –L, –C, при цьому їх також можна змінити. Наприклад, підключення ємнісного навантаження замість опору Z_1 (якщо $R_3 << R_2$) або $Z_з$ (якщо $R_1 << R_2$) забезпечує реалізацію від'ємної «суперємності» ($-R_3/R_2C_1$). Тоді вхідний опір КВО буде

$$Z_{вх} = -\frac{Z_1 Z_3}{Z_2} = -\frac{1}{j\omega C_1}\frac{R_3}{R_2} = -\frac{1}{j\omega}\frac{R_3}{C_1 R_2}.$$

Для одержання додатних величин елементів R, L, C іншого номіналу замість одного з опорів (Z_1 або Z_2) включають схему КВО (рис. 8.24), у якій реалізується одне з від'ємних значень елементів ($–R_1$ або $–R_2$). При цьому опір R може бути будь-яким (наприклад, R = 1 кОм).

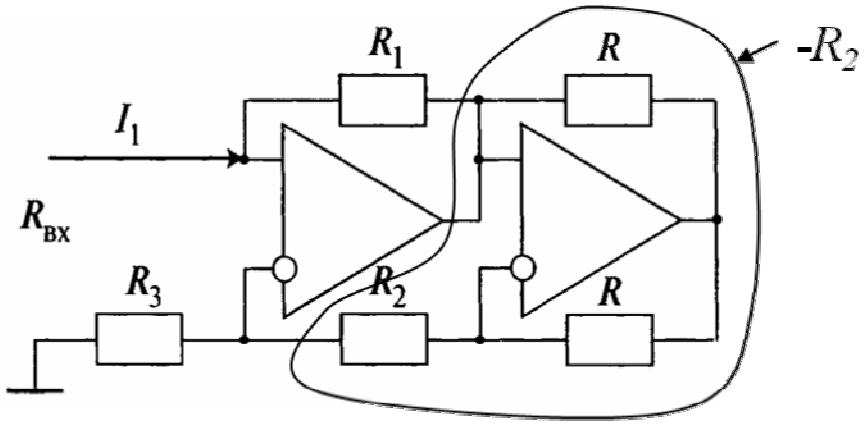


Рис. 8.24. Типова схема реалізації КО

Інвертор опорів (ІО) – чотириполюсник, операторний вхідний опір якого визначають за формулою

$$Z_{вх} = \frac{K_i}{Z_н},$$

де K_i – *коефіцієнт інверсії.* ІО використовують при реалізації активних фільтрів, підсилювачів тощо. ІО реалізується активними елементами.

Якщо $K_i > 0$, одержимо інвертор додатних опорів (ІДО), а якщо $K_i < 0$ – інвертор від'ємних опорів (ІВО).

Активні інвертори опорів – це двобічні керовані джерела з матрицею А-параметрів, у якій $A_{11} = A_{22} = 0$; при цьому

$$Z_{вх} = \frac{U_1}{I_1} = \frac{A_{12}}{A_{21}}\frac{1}{Z_н};\ K_i = \frac{A_{12}}{A_{21}}.$$

Інвертор опорів реалізують за схемою КВО, якщо замість Z_2 ввімкнути навантаження, тоді коефіцієнт інверсії $K_i = -R_1R_2$ (одержуємо ІВО).

Щоб отримати ІДО, потрібно замість Z_3 підключити схему КВО, в якій реалізується $-R_3$.

Схему активного ІДО називають *гіратором* і використовують для створення штучних індуктивних елементів.

Схему реалізації індуктивності L = 106 Гн показано на рис. 8.25, де $R_1 = R_3 = 100\,\text{кОм},\ C_1 = C_н = 100\,\text{мкФ},\ Z_{вх} = \dfrac{-R_1(-R_3)}{1/j\omega C_2} = j\omega R_1R_3C_2 = j\omega L_{вх}$.

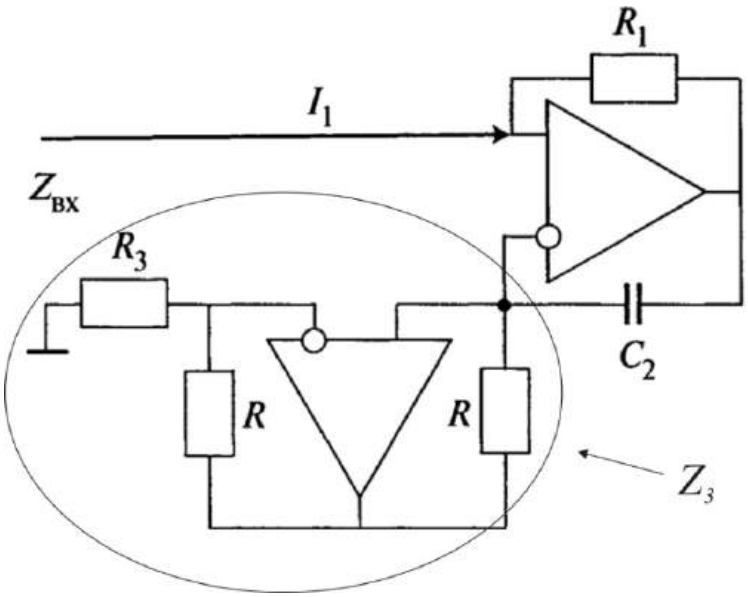


Рис. 8.25. Типова схема реалізації ІДО і ІВО

8.7. Синтез частотно-вибіркових кіл за методом Баттерворта

Частотну залежність ідеального ФНЧ можна подати так:

$$H_p(j\omega) = \frac{\dot{P}_2}{\dot{P}_1} = \begin{cases} 1, 0 \le \omega \le \omega_c; \\ 0, \omega > \omega_c, \end{cases} \qquad (8.32)$$

де $H_p(j\omega)$ – коефіцієнт передачі потужності; $\dot{P}_1$ і $\dot{P}_2$ – повні потужності на вході й виході фільтра відповідно, Вт; $\omega = 2\pi f$ – кутова (циклічна) частота, рад/с; f – частота, Гц; ω_c – кутова частота зрізу.

Ідеальну частотну характеристику (рис. 8.26) не можна реалізувати, тому виникає завдання добору припустимої апроксимуючої функції.

Фільтр із максимально плоскою характеристикою, або фільтр Баттерворта, задається функцією виду

$$H_p(j\omega) = \frac{1}{1+\omega^{*2n}}, \qquad (8.33)$$

де $\omega^* = \omega/\omega_c$ – нормована частота (безрозмірна); n – порядок фільтра (ціле число).

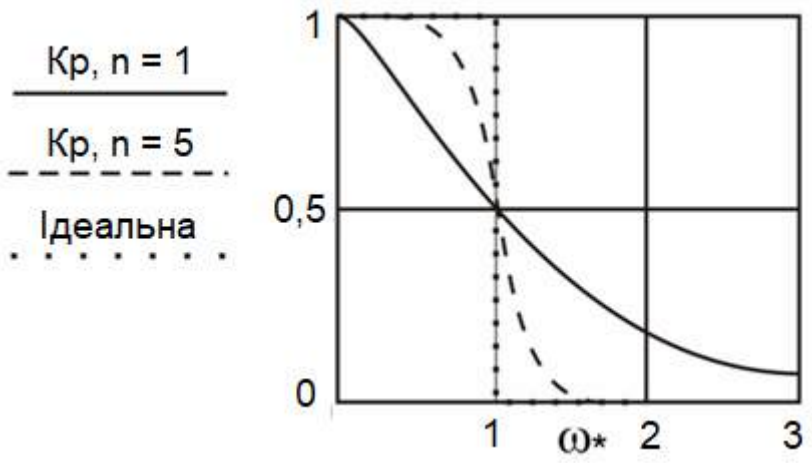


Рис. 8.26. АЧХ фільтра Баттерворта при різних порядках

З рис. 8.26 видно що, по-перше, зі зростанням порядку фільтра апроксимаційна функція наближається до ідеальної, по-друге, усі функції перетинаються в точці $K_p(1) = 0{,}5$. Таким чином, незалежно від порядку фільтра на частоті $\omega = \omega_c$ на виході фільтра залишається половина вхідної потужності. Крім того, починаючи з частоти $\omega^* = 1{,}5$, графік, який відповідає фільтру п'ятого порядку, втрачає інформативність. Тому найчастіше коефіцієнт передачі потужності подають у логарифмічній шкалі або переходять до загасання $A(j\omega) = 1/H_p(j\omega)$ у логарифмічній шкалі. Величини $A(j\omega)$ і $H(j\omega)$ різняться лише знаками. Значенню $H(j\omega) = 0{,}5$ у логарифмічній шкалі відповідає значення –3 дБ. На цій частоті ($\omega^* = 1$) $A(j\omega) = 2$ відповідає 3 дБ. На частоті $\omega^* = 0$ одержуємо $A(j\omega) = H(j\omega) = 0$ дБ. Звідси випливає, що в таких фільтрах нерівномірність характеристики у смузі пропускання становить 3 дБ. Зазвичай потребується менша нерівномірність, тому в більш загальному вигляді завдання синтезу подають наведеним нижче способом.

ФНЧ має смугу пропускання, смугу затримування (загасання) і перехідну зону. Перехідна зона знаходиться між двома точками: верхньою межею смуги пропускання $\omega_г$ і нижньою межею смуги затримування $\omega_з$ (рис. 8.27). Нерівномірність характеристики в смузі пропускання має бути не більшою за a_{max}, а в смузі затримування загасання має бути не меншим за a_{min}. У перехідній зоні значення загасання не задається й може бути яким завгодно.

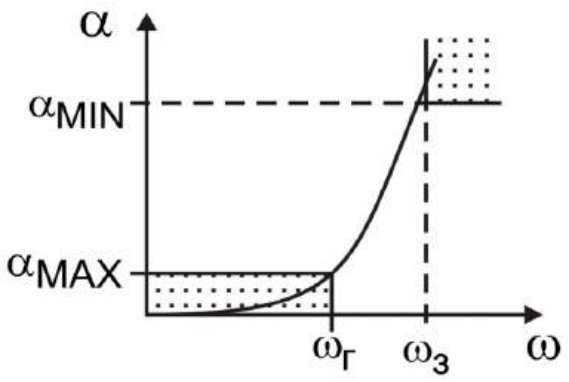


Рис. 8.27. Перехідна зона

Значення $H(\omega)$ задають формулою

$$H_p(\omega^*) = \frac{1}{1+\varepsilon^2\omega^{*2n}}, \tag{8.34}$$

де ε – коефіцієнт нерівномірності характеристики в смузі пропускання. Тоді

$$A_p(\omega^*) = 10\lg(1+\varepsilon^2\omega^{*2n}). \tag{8.35}$$

Розрахунки фільтра почнемо з обчислення ε. Знаючи, що найбільше загасання в смузі пропускання буде на верхній межі цієї смуги, підставимо у формулу (8.31) значення ω^* = 1, $A_p(\omega^*) = a_{max}$ і знайдемо ε:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{0,1a_{max}} - 1}. \tag{8.36}$$

Далі визначимо порядок фільтра. Виходячи з того, що мінімальне загасання в смузі затримування відповідає частоті $\omega_з^* = \omega_з/\omega_г = f_з/f_г$, підставимо у вираз (8.35) значення $\omega^* = \omega_з^*$, $A_p(\omega^*) = a_{max}$ і знайдемо n:

$$n \geq \frac{\lg\left(\dfrac{10^{0,1a_{min}} - 1}{\varepsilon^2}\right)}{2\lg(\omega_{*з})}. \tag{8.37}$$

Значення n округляємо до більшого цілого.

Увівши нормовану комплексну частоту $p^* = \sigma^* + j\omega^*$, одержимо

$$H_p(\omega^*) = \frac{1}{1+(-1)^2\varepsilon^2 p^{*2n}}. \tag{8.38}$$

Поліном у знаменнику формули (8.38) можна розкласти на 2n співмножників:

$$1+(-1)^2\varepsilon^2 p^{*2n} = B(p^* - p_1^*)(p^* - p_2^*)\times\ldots\times(p^* - p_{2n}^*),$$

де $p_1^*, p_2^*, \ldots, p_{2n}^*$ – корені полінома; B – константа.

Ці корені розташовуються на колі радіусом $1/\sqrt[n]{\varepsilon}$ (рис. 8.28).

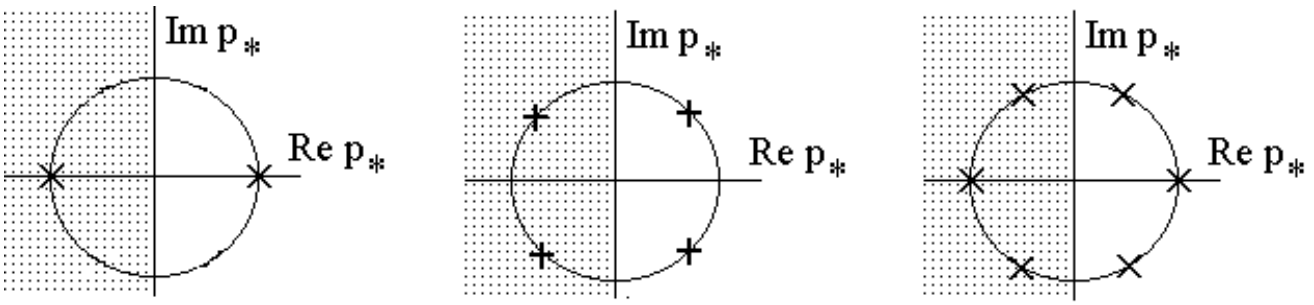
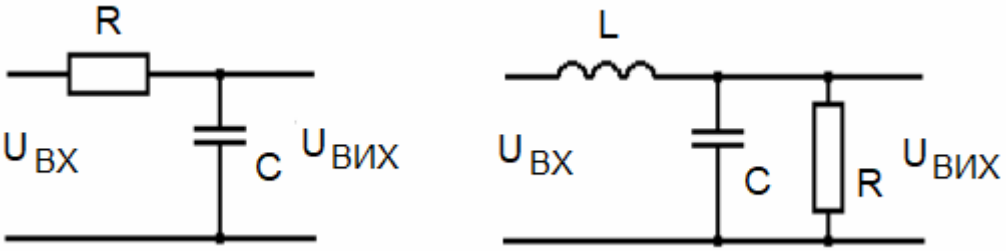


Рис. 8.28. Розподіл коренів для n = 1, 2 і 3

На рис. 8.28 корені позначені як (×). Відзначимо, що якщо n непарне, то є два дійсні корені, якщо n > 1, то є декілька пар комплексно сполучених коренів. У синтезі використовують половину коренів – тільки ті, які мають від'ємну дійсну частину (ліва півплощина). Тому, переходячи до денормованого значення комплексної частоти $p = p^*\omega_г = \sigma + j\omega$, запишемо необхідний коефіцієнт передачі за напругою фільтра:

$$H_p(p) = B(p - p_1)(p - p_2)...(p - p_n), \qquad (8.39)$$

де $p_1, p_2, ..., p_n$ – денормовані корені полінома, що мають від'ємні дійсні частини $p_i = p_i^*\omega_г$. З метою реалізації залежності (8.39) можна використовувати, наприклад, ланки, зображені на рис. 8.29.



а б

Рис. 8.29. Ланки простих ФНЧ

Ланка на рис. 8.29, а має коефіцієнт передачі за напругою

$$H(p) = \frac{1}{pRC + 1}.$$

Розклавши поліном у знаменнику на множники, одержимо

$$H(p) = \frac{1}{B(p - p_1)}; \quad p_1 = -1/RC, \qquad (8.40)$$

де B = RC – константа; p_1 – корінь полінома. Відзначимо, що ця ланка (ланка 1-го порядку) має один дійсний корінь.

Ланка на рис. 8.29, б має коефіцієнт передачі

$$H(p) = \frac{1}{p^2LC + pL/R + 1}.$$

Розклавши знаменник останнього дробу на множники, одержимо

$$H(p) = \frac{1}{B(p - p_1)(p - p_2)};\ \ p_{1,2} = \frac{-1}{RC} \pm j\sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{(2RC)^2}}, \qquad (8.41)$$

де $B_1 = LC$ – константа; $p_{1,2}$ – корені полінома. Таким чином, ця ланка (ланка 2-го порядку) має два комплексно-сполучені корені (якщо вираз під коренем більше нуля).

Крім того, відомо, що, з'єднуючи ланки послідовно, одержуємо коло, коефіцієнт передачі якого дорівнює добутку коефіцієнтів передачі окремих ланок. Отже, щоб реалізувати функцію (8.39), по-перше, скомбінуємо потрібну кількість ланок зазначених типів, по-друге, визначимо номінали елементів кожної ланки, виходячи з рівності відповідних частин полінома (8.39) і поліномів ланок.

Розглянемо приклад.

Потрібно синтезувати ФНЧ із максимально плоскою характеристикою, що має такі параметри: $f_г = 10$ кГц, $f_з = 16$ кГц, $a_{max} = 0{,}5$ дБ, $a_{min} = 9$ дБ, опір навантаження $R_н = 600$ Ом.

Розв'язання.

1. З формули (8.36) знаходимо $\varepsilon = \sqrt{10^{0{,}1 \cdot 0{,}5} - 1} = 0{,}3493$.

2. З формули (8.37) знаходимо

$$n \geq \frac{\lg\left(\frac{10^{0{,}1 \cdot 9} - 1}{0.3493^2}\right)}{2\lg\left(\frac{16000}{10000}\right)} = 4.299.$$

Беремо n = 5.

3. Підставляючи значення n у вираз (8.38), одержуємо поліном, корені якого потрібно знайти:

$$1 - \varepsilon^2 p^{*10}.$$

4. Знаходимо десять коренів полінома й вибираємо з них тільки ті, які мають від'ємну дійсну частину:

$p_1^* = -1{,}2341$, $p_{2,3}^* = -0{,}9984 \pm j0{,}72554$, $p_{4,5}^* = -0{,}3814 \pm j1{,}1737$.

5. Зводимо нормовані комплексні частоти, знайдені в п. 4, до шуканих частот за формулою $p_i = p_i^* 2\pi f_г$ (денормування):

$p_1 = -1{,}2341 \cdot 2\pi \cdot 10^4 = -77540$;

$p_{2,3} = (-0{,}9984 \pm j0{,}72554) \cdot 2\pi \cdot 10^4 = -62730 \pm j45580$;

$p_{4,5} = (-0{,}3814 \pm j1{,}1737) \cdot 2\pi \cdot 10^4 = -23950 \pm j73750$.

Вводимо такі позначення, які відповідають порядковим номерам ланок:

$R_{p_1} = \mathrm{Re}(p_1) = -77540;$

$R_{p_2} = \mathrm{Re}(p_2) = -62730;$

$R_{p_3} = \mathrm{Re}(p_3) = -23950;$

$I_{p_2} = \mathrm{Im}(p_2) = 45580;$

$I_{p_3} = \mathrm{Im}(p_3) = 73750.$

6. Схему фільтра формуємо з однієї ланки першого порядку й двох ланок другого порядку (рис. 8.30). Ланка R1C1 відповідає кореню p_1, ланка L2R2C2 – кореням $p_{2,3}$, ланка L3R3C3 – кореням $p_{4,5}$. Повторювачі X2 і X3 необхідні для розв'язання ланок.

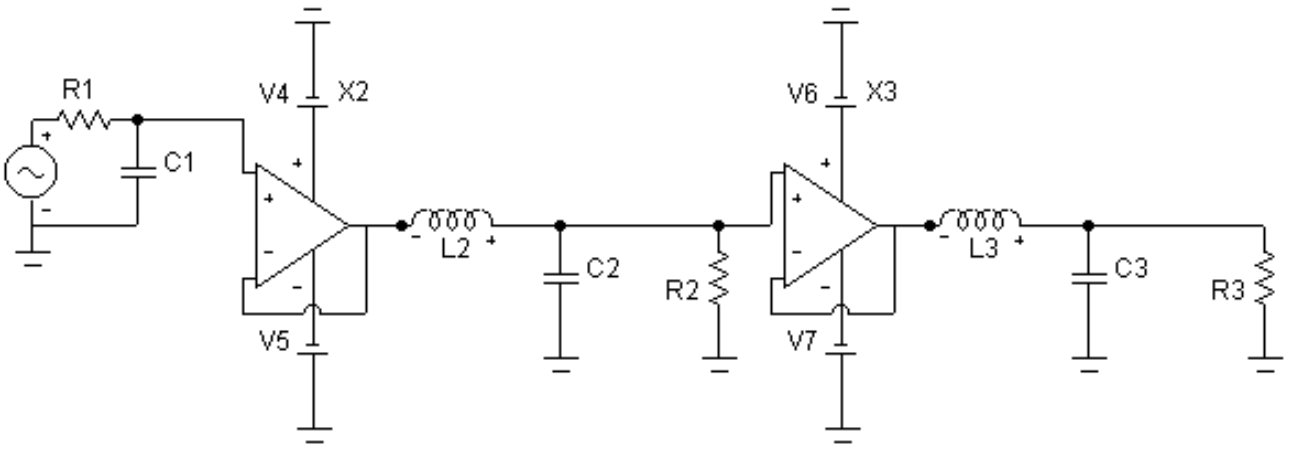


Рис. 8.30. Принципова схема ФНЧ на базі ОП

7. Дорівнюємо компоненти коренів, знайдені в п. 5, до відповідних компонентів у виразах (8.40), (8.41) і знаходимо номінали елементів.

Перша ланка: $R_{p_1} = -1/(R1C1)$.

Вважаючи, що резистор підібрати легше, чим конденсатор, визначаємо опір: $R1 = -1/(R_{p_1}C1)$.

Беручи C1 = 10 нф, одержуємо

$$R1 = -1/(-77540 \cdot 10^{-8}) = 1290 \text{ Ом}.$$

Друга ланка: $R_{p_2} = -1/(2R2C2)$.

Звідси $R2 = -1/(2R_{p_2}C2)$. Вибираючи номінал C2 = 10 нф, одержуємо

$$R2 = -1/2 \cdot (-62730 \cdot 10^{-8}) = 797 \text{ Ом}.$$

Далі з $I_{p_2} = \sqrt{\dfrac{1}{L2C2} - \dfrac{1}{(2R2C2)^2}}$ обчислюємо

$$L2 = \frac{1}{C2\left(I_{p_2}^2 + \frac{1}{(2R2C2)^2}\right)} = \frac{1}{10^{-8}\left(45580^2 + \frac{1}{\left(2\cdot 797\cdot 10^{-8}\right)^2}\right)} = 16{,}63 \text{ мГн.}$$

Третя ланка: $R_{p3} = -1/(2R3C3)$ Ом; $R3 = R_н = 600$ Ом, звідси

$$C3 = -\frac{1}{2R_{p3}R3} = 34{,}78 \text{ нФ.}$$

З рівняння $I_{p_3} = \sqrt{\frac{1}{L3C3} - \frac{1}{(2R3C3)^2}}$ обчислюємо

$$L3 = \frac{1}{C3\left(I_{p_3}^2 + \frac{1}{(2R3C3)^2}\right)} = 4{,}782 \text{ мГн.}$$

Схема ФНЧ з розрахованими елементами зображена на рис. 8.31.

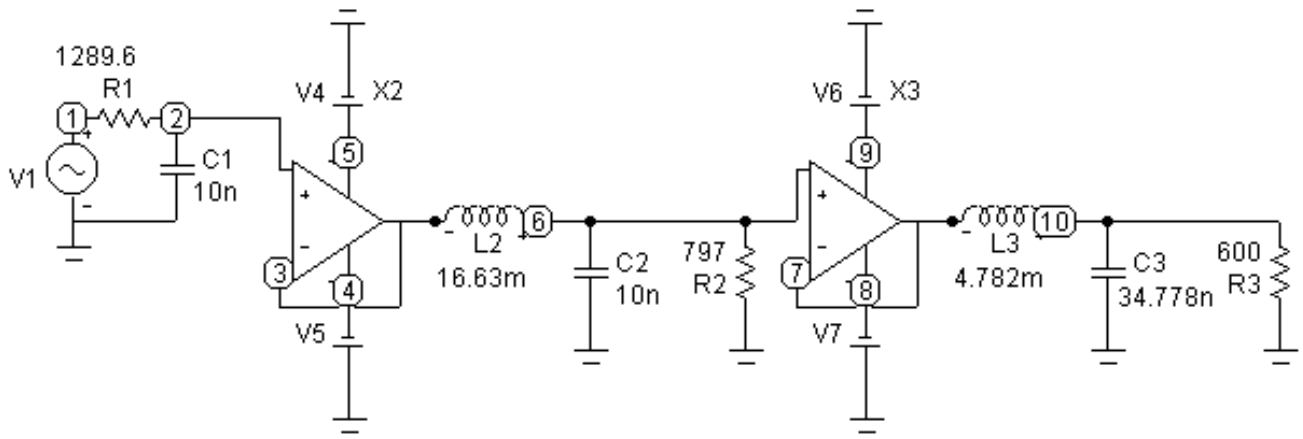


Рис. 8.31. Принципова схема ФНЧ на базі ОП з розрахованими елементами

8.8. Синтез частотно-вибіркових кіл за методом Чебишева

Якщо пласка характеристика не потребується, то раціонально використовувати фільтр Чебишева, тому що він має більш швидке наростання загасання й тому потрібна менша (ніж у фільтра Баттерворта) кількість ланок. Для порівняння на рис. 8.32 показані характеристики фільтрів п'ятого порядку Баттерворта й Чебишева.

Фільтру Чебишева відповідає така формула:

$$T_n(\omega^*) = \begin{cases} \cos\left(n\cdot \arccos(\omega^*)\right) & |\omega^*| < 1; \\ \operatorname{ch}\left(n\cdot \operatorname{arch}(\omega^*)\right) & |\omega^*| > 1, \end{cases} \qquad (8.42)$$

де n – порядок фільтра.

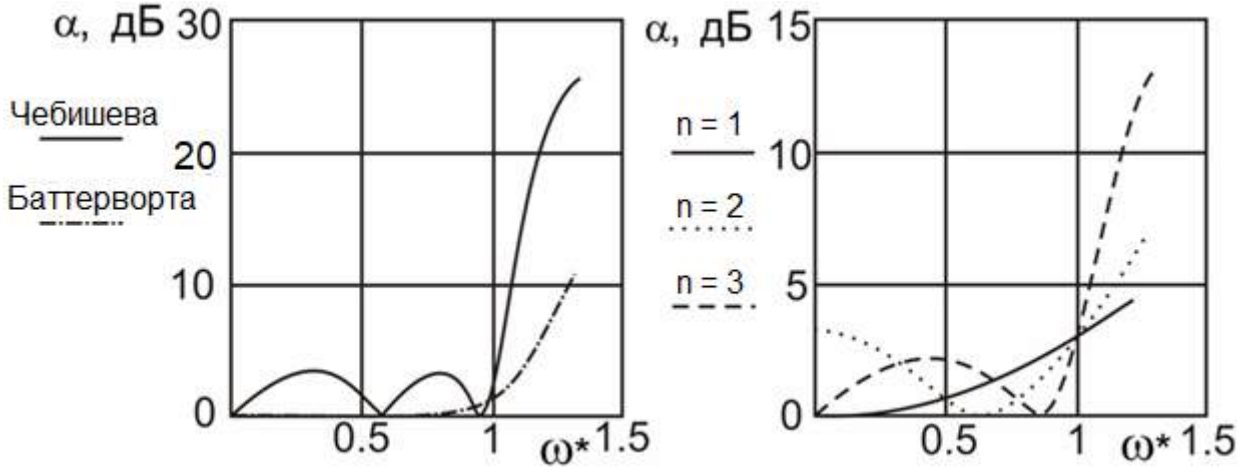


Рис. 8.32. Характеристики загасання фільтрів Баттерворта й Чебишева (n = 1, 2 і 3)

Функцію $T_n(\omega^*)$ можна подати у вигляді поліномів Чебишева:

$$T_0(\omega^*) = 0;\ T_1(\omega^*) = \omega^*;\ T_2(\omega^*) = 2\omega^{*2} - 1,\ \ldots$$

$$\ldots,\ T_n(\omega^*) = 2\omega^{*2}T_{n-1}(\omega^*) - T_{n-2}(\omega^*).$$

На рис. 8.32 видно, що фільтри Чебишева мають хвилеподібну характеристику в смузі пропускання, причому кількість точок з нульовою похідною дорівнює порядку фільтра. Ці графіки відповідають фільтрам з нерівномірністю 3 дБ у смузі пропускання (ε = 1). При ω^* = 1 усі фільтри мають максимум нерівномірності. Тому, якщо потребуватиметься довільна нерівномірність у смузі пропускання, то, підставивши в залежність (8.42) значення $A(\omega^*) = a_{max}$, ω^* = 1, і виразивши ε, одержимо формулу (8.36).

Формулу для обчислення порядку фільтра одержимо, якщо підставимо у вираз (8.42) значення $A(\omega^*) = a_{max}$, $\omega^* = \omega_з^*$ і виразимо n:

$$n \geq \frac{\operatorname{arch}\left(10^{0,1a_{min}} - 1/\varepsilon^2\right)}{\operatorname{arch}(\omega_з^*)}. \qquad (8.43)$$

Підставив у вираз (8.35) нормовану комплексну частоту p^*, одержимо

$$A_p(p^*) = 10\lg\left(1 + \varepsilon^2 T_n^2(p^*)\right). \qquad (8.44)$$

Корені полінома під знаком логарифма у (8.44) знаходять так:

$$\operatorname{Re}(p_i) = \operatorname{Re}(p_i^*)\omega_г \operatorname{sh}(a);\ \operatorname{Im}(p_i) = \operatorname{Im}(p_i^*)\omega_г \operatorname{ch}(a);\ a = \frac{1}{n}\operatorname{arsh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{1}{\varepsilon} + \sqrt{\frac{1}{\varepsilon^2} + 1}\right),$$

де p_i^* – корені полінома (8.38) при ε = 1. Подальші розрахунки фільтра виконують за аналогією з розрахунками фільтра Баттерворта.

Наприкінці слід зазначити, що розглянуті в цьому посібнику основні закони, принципи побудови та розрахунків лінійних електричних кіл є основою для подальшого вивчення нелінійних та параметричних ланцюгів.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Атабеков, Г. И. Основы теории цепей : учебник / Г. И. Атабеков. – 3-е изд. – СПб. : Лань, 2009. – 432 с.
2. Атабеков, Г. И. Теоретические основы электротехники. Линейные электрические цепи : учеб. пособие / Г. И. Атабеков. – 7-е изд., стер. – СПб. : Лань, 2009. – 592 с.
3. Баскаков, С. И. Радиотехнические цепи и сигналы / С. И. Баскаков. – 3-е изд. – М. : Высш. шк., 2000 – 462 с.
4. Гоноровский, И. С. Радиотехнические цепи и сигналы / И. С. Гоноровский. – М. : Радио и связь, 1986. – 512 с.
5. Гумен, М. Б. Основи теорії електричних кіл : підруч. для студ. техн. спец. вищ. навч. закл. У 3 кн. Кн. 1. Аналіз лінійних електричних кіл. Часова область / М. Б. Гумен, А. М. Гуржій, В. М. Співак. – Київ : Вища шк., 2003. – 399 с.
6. Гумен, М. Б. Основи теорії електричних кіл : підруч. для студ. техн. спец. вищ. навч. закл. У 3 кн. Кн. 2. Аналіз лінійних електричних кіл / М. Б. Гумен, А. М. Гуржій, В. М. Співак. – Київ : Вища шк., 2004. – 358 с.
7. Добротворский, К. Н. Теория электрических цепей / К. Н. Добротворский. – М. : Радио и связь, 1989. – 472 с.
8. Запасный, А. И. Основы теории цепей : учеб. пособие / А. И. Запасный. – М. : РИОР, 2006. – 336 с.
9. Зернов, Н. В. Теория радиотехнических цепей / Н. В. Зернов, В. Г. Карпов. – 2-е изд, перераб. и доп. – Л. : Энергия, 1972. – 815 с.

Навчальне видання

Зряхов Михайло Сергійович
Васильєва Ірина Карлівна
Рубель Олексій Сергійович

ТЕОРІЯ ЛІНІЙНИХ ЕЛЕКТРИЧНИХ КІЛ

Редактор В. М. Коваль

Зв. план, 2021
Підписано до видання 30.12.2021
Ум. друк. арк. 7,4. Обл.-вид. арк. 8,38. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001