

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 4

**Диференційні рівняння. Кратні інтеграли.
Криволінійні інтеграли**

2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Е. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 4

**Диференційні рівняння. Кратні інтеграли.
Криволінійні інтеграли**

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2020

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Е. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 4

**Диференційні рівняння. Кратні інтеграли.
Криволінійні інтеграли**

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2020

УДК 517.1/2(075.8)
ББК 22.161я73
В93

Подано основні розділи математичного аналізу за програмою другого курсу вищих навчальних закладів. Розділи містять теоретичний виклад матеріалу, основні означення, запитання для перевірки засвоєння пройденого матеріалу. Добрані приклади дають змогу закріпити матеріал під час його вивчення.

Для студентів вищих навчальних закладів, які вивчають механічні курси. Може використовуватися під час підготовки до складання іспитів, заліків.

Колектив авторів: Г. К. Бахмет, О. В. Головченко, О. Г. Ніколаєв,
Н. Л. Кальчук, О. М. Прохорова

Р е ц е н з е н т и: д-р фіз.-мат. наук, проф. В. М. Колодяжний,
д-р фіз.-мат. наук, проф. В. А. Дорошенко

Вища математика [Електроний ресурс] : навч. посібник: у 5 ч. / Г.
В93 К. Бахмет, О. В. Головченко, О. Г. Ніколаєв и ін. – Харків : Нац. аеро-
косм. ун-т ім. М. Е. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2020. – Ч. 4 : Дифе-
ренціальні рівняння. Кратні інтеграли. Криволінійні інтеграли. – 239с.

УДК 517.1/2(075.8)
ББК 22.161я73

© Колектив авторів, 2020
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Е. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2020

Функція багатьох змінних. Метричний простір. m -мірним евклідовий простір. Функція декількох змінних. Границя функції декількох змінних. Повторні границь. Неперервність функцій. Властивості неперервних функцій. Частинні похідні. Диференціал функції багатьох змінних. Частинні похідні 2-го та більш високих порядків. Диференціал 2-го порядку. Формула Тейлора

1. ФУНКЦІЯ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

1.1. Метричний простір

Def. Множина R , Для двох будь-яких елементів якого можна поставити у відповідність дійсну функцію, яка має такі властивості:

$\rho(x, y) \geq 0$ - невід'ємна, причому $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

$\rho(x, y) = \rho(y, x)$ - симетрична;

$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$ - нерівність трикутника,

називається метричним простором, а введена функція $\rho(x, y)$ називається метрикою.

1.2. m -мірним евклідовий простір

Def. Сукупність m чисел називається впорядкованою, якщо вказано, яке з цих чисел вважається першим, яке - другим і т. д.

впорядковану сукупність m чисел можна записати у вигляді

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m),$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m).$$

Def. Метричний простір, елементами якого є всі можливі впорядковані сукупності m чисел, а метрика представлена у вигляді

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2},$$

називається m -мірним евклідовим простором і позначається E^m або R^m .

В цьому випадку називають:

- впорядковану сукупність m чисел - точками або елементами;
- метрику $\rho(x, y)$ - відстанню між точками.

Зауваження. Для точок вводять такі позначення:

$$x_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)});$$

$$M_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}),$$

де $x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots, x_m^{(i)}$ - координати точки.

Def. Під ε -окілком точки x_0 розуміють сукупність всіх точок x , для яких виконується умова $\rho(x_0, x) < \varepsilon$, де $\varepsilon \rightarrow 0$ (нескінченно мала).
Позначається ε -окілок точки x_0 так: $U_\varepsilon(x_0)$.

1.3. Функція декількох змінних

Def. Нехай в просторі R^m задано множину точок $\{M\}$. Якщо кожній точці $M_i \in \{M\}$ поставлено у відповідність деяке число u , то кажуть, що на множині $\{M\}$ визначена функція m змінних.

Це записують так:

$$u = f(M) \text{ або } u = f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Зауваження. для R^2 функцію записують у вигляді

$$u = f(x_1, x_2), \quad u = f(x, y), \quad z = f(x, y), \quad z = z(x, y),$$

а для R^3 - у вигляді

$$u = f(x_1, x_2, x_3), \quad u = f(x, y, z), \quad u = u(x, y, z).$$

Для функції декількох змінних вводиться та ж термінологія, що і для функції однієї змінної, а саме:

- незалежні змінні чи аргументи: $x_1, x_2, x_3, \dots$;
- залежні змінні: u ;
- область визначення: $D_f \subset R^m$;
- область значень: Im_f .

Приклад запису функції:

$$z = x^2 + y^2, \quad u = x_1 x_2 - 4x_3^2 - x_4 x_2^2.$$

1.4. Границя функції декількох змінних

Def. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що для всіх $x \neq x_0$, що задовольняють умові $\rho(x, x_0) < \delta$, виконується умова

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Це можна записати так:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\rho(x, x_0) < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

У позначеннях це можна записати і у вигляді

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A.$$

З визначення випливає, що якщо границя існує, то вона не залежить від шляху, по якому точка M наближається до M_0 .

Властивості границь:

$$1. \lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) \pm g(M)) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \pm \lim_{M \rightarrow M_0} g(M).$$

$$2. \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) g(M) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \lim_{M \rightarrow M_0} g(M).$$

$$3. \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)}{\lim_{M \rightarrow M_0} g(M)} \text{ при } \lim_{M \rightarrow M_0} g(M) \neq 0.$$

Зауваження. Якщо $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 0$, то $f(M)$ - н. м. в. (нескінченно мала величина); якщо $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \infty$, то $f(M)$ - н. в. в. (нескінченно велика величина).

1.5. Повторні границь

Для функції декількох змінних вводять поняття повторних границь. Це поняття пов'язане з вивченням границь функції при змінній по черзі тільки однієї незалежної змінної і фіксованих значеннях інших. Наприклад, для функції двох змінних це виглядає так:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow \text{const}}} f(x, y) = \varphi(y).$$

Якщо існує

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = A,$$

то кажуть, що в точці $M(x_0, y_0)$ існує повторна границя, і пишуть

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A,$$

при цьому спочатку досліджують внутрішню границю функції при змінній величині x і постійній величині y , а потім - границю отриманого значення функції при змінній величині y .

1.6. Неперервність функції

Def. Функція $u = f(M)$ називається неперервною в точці M_0 , якщо вона має в цій точці границю, яка дорівнює значенню функції в цій точці, тобто

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

Def. Повним приростом функції $u = f(M)$ в точці M_0 називається вираз виду

$$\Delta u = f(M) - f(M_0).$$

Нехай точка M_0 має координати

$$(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}),$$

а точка M -

$$(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Якщо ввести позначення

$$x_1 - x_1^{(0)} = \Delta x_1,$$

$$x_2 - x_2^{(0)} = \Delta x_2,$$

...

$$x_m - x_m^{(0)} = \Delta x_m,$$

то приріст функції можна записати як

$$\Delta u = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_m^{(0)} + \Delta x_m) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}).$$

Тоді умова неперервності функції $u = f(M)$ в точці M_0 еквівалентно умові

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \Delta u = 0 \text{ або } \lim_{\substack{\Delta x_1 \rightarrow 0 \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \rightarrow 0}} \Delta u = 0.$$

Def. Точки, в яких функція $u = f(M)$ не є визначеною або не є неперервною, називаються точками розриву цієї функції.

Вводять назви:

- Δx - приріст аргументу;
- $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ - частинні прирости аргументу.

1.7. Властивості неперервних функцій

1. З визначення неперервності слід, що неперервні функції мають ті ж властивості, що й межі:

- а) сума або різниця неперервних функцій є неперервна функція;
- б) добуток неперервних функцій є неперервна функція;
- в) відношення двох неперервних функцій є неперервна функція у всіх точках, де знаменник не дорівнює нулю.

2. Неперервна функція від неперервної функції є неперервна функція.

3. Неперервність функції не залежить від розмірності простору.

4. Функція неперервна в заданій області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

5. Неперервна функція в замкнутій області досягає своїх найбільшого і найменшого значень.

6. Функція в замкнутій області обмежена: $|f(M)| < R$.

1.8. Частинні похідні (часткові похідні)

Нехай задано точку $M_0 = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ і довільну точку $M = (x_1, x_2, \dots, x_m)$. У цьому випадку приріст функції

$$\Delta u = f(x_1, x_2, \dots, x_m) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$$

утворюється в результаті частинних приростів $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$.

Розглянемо випадок, коли всі частинні прирости, крім Δx_k , дорівнюють нулю:

$$\Delta x_1 = 0, \Delta x_2 = 0, \dots, \Delta x_k \neq 0, \dots, \Delta x_m = 0.$$

Тоді приріст Δu буде забезпечуватися тільки в результаті частинного приросту Δx_k . Такий приріст функції називають частинним приростом функції щодо змінної x_k і позначають так:

$$\Delta_{x_k} u.$$

Def. Якщо існує скінченна границя відношення частинного приросту функції щодо змінної Δx_k за умови, що $\Delta x_k \rightarrow 0$ (наближається до нуля), то ця границя називається частинною похідною функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ щодо переміщень x_k в точці $x^{(0)}$ і частинну похідну записують у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} \text{ або } u'_{x_k}, f'_{x_k}.$$

Для $z = z(x, y)$ частинні похідні можна записати у вигляді

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z'_x, z'_y.$$

З визначення похідної випливає, що основні формули диференціювання, які розглядалися для функції однієї змінної, залишаються в силі.

При знаходженні похідної всі змінні, крім обраної, приймаються за *const*.

ПРИКЛАД. Записати частинні похідні функції $z = \sin(x^2 y)$.

Рішення

$$z'_x = \cos(x^2 y) 2xy, \quad z'_y = \cos(x^2 y) x^2.$$

1.9. Диференціал функції багатьох змінних

Нехай функція $u = f(x, y, z)$ визначена у точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ та в деякому її окілку U_{M_0} . Якщо вибрати $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ таким чином, що точка $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z)$ належить заданому окілку, то повний приріст функції має вигляд

$$\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0).$$

Цей повний приріст функції може бути представлено як лінійал щодо частинних приростах, тобто:

$$\Delta f = f(x_0, y_0, z_0) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z + o(\rho),$$

де $\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$ та $\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{o(\rho)}{\rho} = 0$.

У цьому випадку функція $f(x, y, z)$ називається диференційованою, а її головна лінійна частина приросту щодо $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ називається диференціалом цієї функції. Цю головну частину приросту записують у вигляді

$$df(x, y, z) = A\Delta x + B\Delta y + C\Delta z.$$

Твердження. Якщо функція $u = f(x, y, z)$ - диференційована в точці M_0 , то вона має в цій точці часткові похідні по змінним x, y, z , які дорівнюють відповідно A, B, C .

◀ Нехай $\Delta x \neq 0, \Delta y = 0, \Delta z = 0$.

Тоді $\Delta f(x_0, y_0, z_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0) = \Delta_x f = A\Delta x + 0 + 0$.

Як наслідок, A можна записати у вигляді

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta_x f}{\Delta x} = f'_x.$$

Аналогічно визначаються $B = f'_y, C = f'_z$.

Отже,

$$df(x_0, y_0, z_0) = f'_x(M_0)\Delta x + f'_y(M_0)\Delta y + f'_z(M_0)\Delta z. \blacktriangleright$$

Висновок. нехай $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$. тоді

$$df = f'_{x_1} \Delta x_1 + f'_{x_2} \Delta x_2 + \dots + f'_{x_m} \Delta x_m = \sum_{i=1}^m f'_{x_i} \Delta x_i.$$

Для незалежної змінної диференціал

$$dx = (x)' \Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x.$$

Тому можна записати

$$df(x_0, y_0, z_0) = f'_x(M_0)dx + f'_y(M_0)dy + f'_z(M_0)dz,$$

$$df = f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + \dots + f'_{x_m} dx_m = \sum_{i=1}^m f'_{x_i} dx_i.$$

ПРИКЛАД. Для заданої функції трьох змінних $u = x^2 yz$ визначити диференціал.

Рішення

$$du = u'_x \Delta x + u'_y \Delta y + u'_z \Delta z = 2xyz \Delta x + x^2 z \Delta y + x^2 y \Delta z;$$

$$du = 2xyz dx + x^2 z dy + x^2 y dz.$$

1.10. Часткові похідні 2-го та більш високих порядків (частинні похідні)

Нехай функція $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ має частинну похідну f'_{x_k} . Ця похідна також є функцією $f'_{x_k}(x_1, x_2, \dots, x_m)$, і для неї можна також побудувати частинну похідну по якійсь змінній x_i . Цю похідну називають частинною похідною 2-го порядку по змінним x_k, x_i і записують у вигляді

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \text{ або } f''_{x_i x_k}.$$

Отже, частинна похідна 2-го порядку по x_k і x_i - це частинна похідна по x_i від частинної похідної по x_k , і це можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right).$$

За аналогією можна записати похідну 3-го порядку

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right)$$

і т. д.

Якщо похідну беруть за різними змінним, то вона називається змішаною.

Якщо похідну беруть за однаковими змінним, то це записують в такому вигляді:

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i^2} \text{ або } f''_{x_i x_i x_j} \text{ при } x_k = x_i; \\ & - \frac{\partial^3 f}{\partial x_j^3} \text{ або } f''_{x_j x_j x_j} \text{ при } x_k = x_i = x_j. \end{aligned}$$

ПРИКЛАД. Побудувати похідні 1-го і 2-го порядків для функції $z = e^{xy}$.

Рішення

$$z'_x = e^{xy} y, \quad z'_y = e^{xy} x;$$

$$z''_{xx} = e^{xy} y^2, \quad z''_{xy} = e^{xy} xy + e^{xy}, \quad z''_{yy} = e^{xy} x^2.$$

Твердження про змішані похідні. Значення змішаної похідної не залежить від порядку диференціювання:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Це можна перевірити на наведеному вище прикладі.

Нехай $z = e^{xy}$.

Тоді $z'_x = e^{xy} y$, $z''_{xy} = e^{xy} xy + e^{xy}$; $z'_y = e^{xy} x$, $z''_{yx} = e^{xy} xy + e^{xy}$.

Отже, $z''_{xy} = z''_{yx}$.

1.11. Диференціал 2-го порядку

Розглянемо функцію двох змінних $z = z(x, y)$. Її повний диференціал

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Якщо для функції $z = z(x, y)$ можна побудувати другі похідні, то можна побудувати і диференціал 2-го порядку як диференціал диференціала. При цьому тут для незалежних змінних $dx = \text{const}$, $dy = \text{const}$, тобто:

$$\begin{aligned} d^2 z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) dy\right) dx + \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) dy\right) dy = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dy dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy dy = \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2. \end{aligned}$$

Якщо побудувати диференціал 3-го порядку, то отримаємо

$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3.$$

Отже, можна записати

$$d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(x, y).$$

У цьому умовному записі відповідна степінь розглядається як порядок похідної стосовно функції f .

Зауваження. Нехай $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ - функція, що диференціюється в точці $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$. Тоді її диференціал можна записати у вигляді

$$du(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i.$$

Якщо x - проста змінна, то $x_i - x_i^{(0)} = \Delta x_i = dx_i$. Отже,

$$du = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Диференціал 2-го порядку має вигляд

$$d^2 u = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i.$$

За аналогією диференціал k -го порядку має вигляд

$$d^k u = d(d^{k-1} u) = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_k}.$$

1.12. Формула Тейлора

Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в точці $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ і в її окілці $U_{x^{(0)}}$ має неперервні частинні похідні до k -го порядку включно. Тоді для будь-якої точки з цього окілку можна записати

$$f(x) = f(x^{(0)}) + df(x^{(0)}) + \frac{df^2(x^{(0)})}{2!} + \frac{df^3(x^{(0)})}{3!} + \dots + \frac{df^k(x^{(0)})}{k!} + o(\rho^k),$$

де $\rho = \sqrt{\sum_{i=1}^m (\Delta x_i^{(0)})^2}$, $o(\rho^k)$ - залишковий елемент у формі Пеано.

Цей запис називають формулою Тейлора для функції m змінних із залишковим елементом у формі Пеано. У загальному вигляді це можна записати так:

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{df^i(x^{(0)})}{i!} + o(\rho^k),$$

де $d^0 f(x^{(0)}) = f(x^{(0)})$.

ПРИКЛАД. Записати формулу Тейлора для функції $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ з точністю до диференціала 2-го порядку в точці $M(0, 1)$.

Рішення

Знаходимо часткові похідні в точці $M(0, 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^2} \right),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{\frac{x}{y}} \frac{1}{y^2},$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x} = e^{\frac{0}{1}} \frac{1}{1} = 1;$$

$$\frac{\partial f(M)}{\partial y} = e^{\frac{0}{1}} \left(-\frac{0}{1^2} \right) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} = e^{\frac{0}{1}} \frac{1}{1^2} = 1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{x}{y^3} \right) + e^{\frac{x}{y}} \left(-\frac{1}{y^2} \right), \quad \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x \partial y} = e^{\frac{0}{1}} \left(-\frac{0}{1^3} \right) + e^{\frac{0}{1}} \left(-\frac{1}{1^2} \right) = -1;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^{\frac{x}{y}} \frac{x^2}{y^4} + e^{\frac{x}{y}} \frac{2x}{y^3}, \quad \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} = e^{\frac{0}{1}} \frac{0^2}{1^4} + e^{\frac{0}{1}} \frac{2 \cdot 0}{1^3} = 0.$$

З огляду на те, що для точки $M(0, 1)$ $x_0 = 0$, а $y_0 = 1$, обчислюємо диференціали в цій точці:

$$dx = \Delta x = x - x_0 = x; \quad dy = \Delta y = y - y_0 = y - 1;$$

$$dx^2 = x^2; \quad dy^2 = (y - 1)^2; \quad dx dy = x(y - 1);$$

$$d^0 f(M) = f(M) = e^{\frac{0}{1}} = 1;$$

$$df(M) = \frac{\partial f(M)}{\partial x} dx + \frac{\partial f(M)}{\partial y} dy = e^{\frac{0}{1}} = 1 \cdot x + 0 \cdot (y - 1) = x;$$

$$d^2 f(M) = \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f(M)}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 f(M)}{\partial y^2} dy^2 =$$

$$= 1 \cdot x^2 + 2 \cdot (-1) x(y - 1) + 0 \cdot (y - 1)^2 = x^2 - 2x(y - 1).$$

Запис формули Тейлора для функції $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ з точністю до диференціала 2-го порядку в точці $M(0, 1)$ матиме вигляд

$$f(x) = df^0(M) + df^1(M) + \frac{df^2(M)}{2!} + o(\rho^2) = 1 + x + \frac{x^2 - 2x(y - 1)}{2} + o(\rho^2).$$

$$\text{Таким чином, } e^{\frac{x}{y}} = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} - xy + o(\rho^k).$$

1.13. Висновки

Def. Множина R , для двох будь-яких елементів якої можна поставити у відповідність функцію ρ , яка має такі властивості:

$$\rho(x, y) \geq 0 \text{ - невід'ємна, причому } \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$\rho(x, y) = \rho(y, x) \text{ - симетрична};$$

$$\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z) \text{ - нерівність трикутника},$$

називається метричним простором, а введена функція $\rho(x, y)$ називається метрикою.

Def. Сукупність m чисел називається впорядкованою, якщо вказано, яке з цих чисел вважається першим, яке - другим і т. д.

Впорядковану сукупність m чисел називають **точками** або елементами, а самі числа - координатами точки.

Def. Метричний простір, елементами якого є всі можливі впорядковані сукупності m чисел, а метрика представлена у вигляді

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2},$$

називається m -мірним евклідовим простором і позначається як E^m або R^m .

Метрику $\rho(x, y)$ називають відстанню між точками.

Def. Під ε -окілком точки x_0 розуміють сукупність всіх точок x , для яких виконується умова $\rho(x_0, x) < \varepsilon$, де $\varepsilon \rightarrow 0$ (нескінченно мала).

Позначається ε -окілок точки x_0 так: $U_\varepsilon(x_0)$.

Def. Нехай в просторі R^m задано множину точок $\{M\}$. Якщо кожній точці $M_i \in \{M\}$ поставлено у відповідність деяке число u , то кажуть, що на множині $\{M\}$ визначена функція m змінних.

У загальному вигляді функцію записують наступним чином:

$$u = f(M) \text{ або } u = f(x_1, x_2, \dots, x_m).$$

Для R^2 функцію записують у вигляді

$$u = f(x_1, x_2), u = f(x, y), z = f(x, y), z = z(x, y),$$

а для R^3 - у вигляді

$$u = f(x_1, x_2, x_3), u = f(x, y, z), u = u(x, y, z).$$

Def. Число A називається границею функції $f(x)$ при $x \rightarrow x_0$, якщо для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує число $\delta > 0$, таке, що для всіх $x \neq x_0$, що задовольняють умові $\rho(x, x_0) < \delta$, виконується умова

$$|f(x) - A| < \varepsilon;$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0) : (\rho(x, x_0) < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$$

Межу можна записати і в такому вигляді:

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = A.$$

Властивості меж:

$$1. \lim_{M \rightarrow M_0} (f(M) \pm g(M)) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \pm \lim_{M \rightarrow M_0} g(M).$$

$$2. \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) g(M) = \lim_{M \rightarrow M_0} f(M) \lim_{M \rightarrow M_0} g(M).$$

$$3. \lim_{M \rightarrow M_0} \frac{f(M)}{g(M)} = \frac{\lim_{M \rightarrow M_0} f(M)}{\lim_{M \rightarrow M_0} g(M)} \text{ при } \lim_{M \rightarrow M_0} g(M) \neq 0.$$

Зауваження. Якщо $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 0$, то $f(M)$ - н. м. в. (нескінченно мала величина); якщо $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \infty$, то $f(M)$ - н. в. в. (нескінченно велика величина).

Кажуть, що в точці $M(x_0, y_0)$ існує повторна межа, якщо

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = A,$$

при цьому спочатку досліджують внутрішню межу функції при змінній величині x і постійній величині y , а потім - межу отриманого значення функції при змінній величині y .

Def. функція $u = f(M)$ називається неперервною в точці M_0 , якщо

$$\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0).$$

Def. Повним приростом функції $u = f(M)$ в точці M_0 називається вираз виду

$$\Delta u = f(M) - f(M_0).$$

Цей приріст можна записати у вигляді

$$\Delta u = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_m^{(0)} + \Delta x_m) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}).$$

Умова неперервності функції $u = f(M)$ в точці M_0 еквівалентно умові

$$\lim_{M \rightarrow M_0} \Delta u = 0 \text{ або } \begin{matrix} \lim_{\Delta x_1 \rightarrow 0} \\ \Delta x_2 \rightarrow 0 \\ \dots \\ \Delta x_m \rightarrow 0 \end{matrix} \Delta u = 0.$$

Def. Точки, в яких функція $u = f(M)$ не є визначеною або не є неперервною, називаються точками розриву цієї функції.

Розрізняють: Δx - приріст аргументу; $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ - частинні прирости аргументу.

Властивості неперервних функцій:

1. Властивості, аналогічні властивостям меж:

а) сума або різниця неперервних функцій є неперервна функція;

б) добуток неперервних функцій є неперервна функція;

в) відношення двох неперервних функцій є неперервна функція у всіх точках, де знаменник не дорівнює нулю.

2. Неперервна функція від неперервної функції є неперервна функція.

3. Неперервність функції не залежить від розмірності простору.

4. Функція неперервна в заданій області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області.

5. Неперервна функція в замкнутій області досягає своїх найбільшого і найменшого значень.

6. Функція в замкнутій області обмежена: $\|f(M)\| < R$.

Приріст функції, коли всі частинні прирости, крім Δx_k , дорівнюють нулю, називають частковим приростом функції відносно змінної x_k і позначають наступним чином:

$$\Delta_{x_k} u.$$

Def. Якщо існує кінцева границя відносини часткового приросту функції щодо змінної Δx_k за умови, що $\Delta x_k \rightarrow 0$, то ця границя називають частковою похідною функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ щодо переміщень x_k в точці $x^{(0)}$ і позначають

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} \text{ або } u'_{x_k}, f'_{x_k}.$$

Для $z = z(x, y)$ часткові похідні можна записати у вигляді

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, z'_x, z'_y.$$

Основні формули диференціювання, які розглядалися для функції однієї змінної, залишаються в силі і для часткових похідних.

При знаходженні похідної всі змінні, крім обраної, приймаються за const.

Для функції $u = f(x, y, z)$, визначеної в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і в деякій її околиці U_{M_0} , головна лінійна частина приросту щодо Δx , Δy , Δz називається диференціалом цієї функції:

$$df(x, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \Delta z.$$

Для загального випадку, коли $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$,

$$du = f'_{x_1} dx_1 + f'_{x_2} dx_2 + \dots + f'_{x_m} dx_m = \sum_{i=1}^m f'_{x_i} dx_i.$$

Частинна похідна 2-го порядку по змінним x_k , x_i має вигляд

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \text{ або } f''_{x_i x_k}.$$

Похідна 3-го порядку

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \right).$$

Якщо похідну беруть за різними змінним, то вона називається змішаною.

Похідну за однаковими змінним записують у вигляді:

$$- \frac{\partial^3 f}{\partial x_j \partial x_i^2} \text{ або } f''_{x_i x_i x_j} \text{ при } x_k = x_i;$$

$$-\frac{\partial^3 f}{\partial x_j^3} \text{ або } f''_{x_j x_j x_j} \text{ при } x_k = x_i = x_j.$$

Твердження. Значення змішаної похідної не залежить від порядку диференціювання:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Для функції двох змінних $z = z(x, y)$ повний диференціал має вигляд

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

Диференціал 2-го порядку як диференціал диференціала можна записати так:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2.$$

Диференціал 3-го порядку

$$d^3 z = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3.$$

Диференціал k -го порядку

$$d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(x, y).$$

Диференціал функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ має вигляд

$$du = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i,$$

Диференціал 2-го порядку-

$$d^2 u = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i,$$

Диференціал k -го порядку-

$$d^k u = \sum_{i_1=1}^m \sum_{i_2=1}^m \dots \sum_{i_k=1}^m \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2} \dots \partial x_{i_k}} dx_{i_1} dx_{i_2} \dots dx_{i_k}.$$

Формула Тейлора для функції m змінних із залишковим елементом у формі Пеано:

$$f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{df^i(x^{(0)})}{i!} + o(\rho^k),$$

$$\text{де } d^0 f(x^{(0)}) = f(x^{(0)}).$$

Перерва

Приходить Чебурашка до крокодила Гени і каже: «Гена, нам посилка прийшла, десять апельсинів, по вісім кожному». Гена дивується: «Чебурашка, як же так? Адже десять апельсинів - це по п'ять кожному!» Чебурашка відповідає: «Ну не знаю, що ти там нарахував, ми тут університетів не закінчували. Загалом, ти як хочеш, а я свої вісім уже з'їв».

Одного разу у просторі функцій з'явилася злісна похідна і як пішла всіх диференціювати. Всі функції розбігаються хто куди, нікому не хочеться перетворюватися! І тільки одна функція нікуди не тікає. Підходить до неї похідна і питає:

- А чому це ти від мене нікуди не тікаєш?

- Ха. А мені все одно, адже я «є піднесена до степені ікс», і ти зі мною нічого не зробиш!

На що злісна похідна з підступною усмішкою відповідає:

- Ось тут ти помиляєшся, я тебе здиференціюю по «ігрек», так що бути тобі нулем.

Твій мозок -фантастичний за своєю складністю біологічний суперкомп'ютер. Твоє тіло складається з речовин, які були народжені в ядрах вмираючих зірок. Ти стоїш на шматку каменю з розпеченим центром, який летить з шаленою швидкістю в незвіданий простір Всесвіту, що нескінченно розширюється. Як ти можеш чогось боятися?

1.14. Питання для перевірки знань

1. Метричний простір - це множина R , для двох будь-яких елементів якого можна поставити у відповідність дійсну функцію, яка:

а) невід'ємна, симетрична, характеризується нерівністю трикутника; б) невід'ємна, симетрична, характеризується лінійними властивостями; в) неперервна, симетрична, характеризується нерівністю трикутника.

2. Функція, яка визначає метричний простір, називається:

а) елементарної функцією; б) визначальною функцією; в) метрикою.

3. Сукупність m чисел називається впорядкованою, якщо:

а) визначено кількість цих чисел; б) числа розташовані по зростанню; в) визначено місце числа в сукупності цих чисел.

4. Метрика в метричному евклідовому просторі можна представити у вигляді:

$$\text{а) } \rho(x, y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |x_i - y_i|; \text{ б) } \rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2}; \text{ в) } \rho(x, y) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (x_i - y_i)^2.$$

5. Метричний евклідовий простір позначається так:

а) E ; б) R^m ; в) МЕР.

6. Точкою в m вимірному евклідовому просторі називають:

а) елемент множини; б) вектор евклідового простору; в) впорядковану сукупність m чисел.

7. Відстанню між точками в m вимірному евклідовому просторі називають:

а) метрику; б) різниця координат; в) суму квадратів різниці координат.

8. Координатами точки в m вимірному евклідовому просторі називають:

а) проекції точки на координатні осі; б) впорядковану сукупність m чисел, які називаються точками; в) відстані від точки до площини проекцій.

9. Під ε -окілком точки x_0 розуміють:

а) сферу малим радіусом ε з центром в точці x_0 ; б) сукупність усіх точок x , для яких виконується умова $\rho(x_0, x) < \varepsilon$; в) точки x , для яких виконується умова $|x - x_0| < \varepsilon$.

10. ε -окілок точки x_0 позначається:

а) $U_{x_0}(\varepsilon)$; б) $\varepsilon U(x_0)$; в) $U\varepsilon(x_0)$.

11. Функція m змінних - це таке відображення, коли:

а) кожному числу евклідового простору поставлена у відповідність деяка m -мірна точка; б) m змінним евклідового простору ставиться у відповідність функція; в) кожній точці m мірного евклідового простору поставлено у відповідність деяке число.

12. Виберіть неправильний запис функції трьох змінних:

а) $u = u(x, y, z)$; б) $u = M(x_M, y_M, z_M)$; в) $u = f(x_1, x_2, x_3)$.

13. У записі $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ величина u називається:

а) незалежною змінною; б) залежною змінною; в) головною змінною.

14. У записі $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ величини $x_1, x_2, \dots, x_m$ називаються:

а) незалежними змінними; б) залежними змінними; в) головними змінними.

15. Виберіть правильний запис границі функції кількох змінних:

а) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (\rho(x, x_0) < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$

б) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0): (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon;$

в) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow (\forall \delta > 0)(\exists \varepsilon > 0): (\rho(x, x_0) < \delta) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

16. Функція, для якої $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 0$, називається:

а) н. м. в. ; б) н. в. в. ; в) визначеною.

17. Функція, для якої $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \infty$, називається:

а) н. м. в. ; б) н. в. в. ; в) визначеною.

18. Для функції декількох змінних вводять поняття:

а) незалежних границь; б) умовних границь; в) повторних границь.

19. Функція $u = f(M)$ називається неперервною в точці M_0 , Якщо:

а) $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 0$; б) $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = \infty$; в) $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = f(M_0)$.

20. Повним приростом функції $u = f(M)$ в точці M_0 називається вираз виду:

а) $\Delta u = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$;

б) $\Delta u = f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}) - f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_m^{(0)} + \Delta x_m)$;

в) $\Delta u = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_m^{(0)} + \Delta x_m) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$.

21. Функція $u = f(M)$ називається неперервною в точці M_0 , якщо:

а) $\lim_{M \rightarrow M_0} f(M) = 0$; б) $\lim_{M \rightarrow M_0} \Delta u = 0$; в) $\lim_{M \rightarrow M_0} \Delta u = f(M_0)$.

22. Точка, в якій функція не є неперервною, називається:

а) особливою точкою; б) стаціонарної точкою; в) точкою розриву.

23. Величини $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_m$ функції багатьох змінних називають:

а) збільшенням аргументу; б) сукупністю змінних; в) частинними приростами аргументу.

24. Сума або різниця неперервних функцій є:

а) неперервна функція у всіх точках, де знаменник не дорівнює нулю;
б) функція, яка містить розрив; в) неперервна функція.

25. Добуток неперервних функцій є:

а) неперервна функція; б) неперервна функція у всіх точках, де знаменник не дорівнює нулю; в) функція, яка містить розрив.

26. Відношення двох неперервних функцій є:

а) неперервна функція; б) функція, яка містить розрив; в) неперервна функція у всіх точках, де знаменник не дорівнює нулю.

27. Неперервна функція від неперервної функції є:

а) функція, яка містить розрив; б) неперервна функція; в) невизначена функція.

28. Чи залежить неперервність функції від розмірності простору:

а) не залежить; б) залежить; в) залежить тільки в області визначення функції?

29. Чи може функція бути неперервною в заданій області, якщо вона неперервна в кожній точці цієї області:

а) можливо; б) не може; в) може у всіх точках, де знаменник не дорівнює нулю?

30. Неперервна функція в замкнутій області:

а) не досягає своїх найбільшого і найменшого значень; б) досягає своїх найбільшого і найменшого значень; в) є необмеженою.

31. Неперервна функція в замкнутій області:

а) є необмеженою; б) не досягає своїх найбільшого і найменшого значень; в) є обмеженою.

32. Якщо приріст функції Δu буде забезпечуватися тільки в результаті часткового приросту Δx_k , то такий приріст функції називають:

а) приростом функції щодо змінної x_k ; б) зміною функції щодо змінної x_k ; в) частковим приростом функції щодо змінної x_k .

33. Вираз $\Delta_{x_k} u$ для функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_m)$ називається:

а) збільшенням функції щодо змінної x_k ; б) приростом функції щодо змінної x_k ; в) частковим приростом функції щодо змінної x_k .

34. Частковою похідною функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ щодо переміщень x_k в точці $x^{(0)}$ називають кінцеву границю відношення:

а) приросту функції до частинного приросту змінної x_k за умови, що $\Delta x_k \rightarrow 0$; б) часткового приросту змінної x_k до приросту функції за умови, що $\Delta x_k \rightarrow 0$; в) часткового приросту функції до приросту змінної x_k за умови, що $\Delta x_k \rightarrow 0$.

35. Виберіть неправильний запис часткової похідної:

а) $\frac{\partial z}{\partial x}$; б) $\frac{dz}{dx}$; в) z'_x .

36. При знаходженні часткової похідної по вибраній змінній за $const$ приймають:

а) обрану змінну; б) всі змінні, крім обраної; в) значення функції.

37. Диференціалом функції багатьох змінних називають:

а) головну лінійну частину приросту функції; б) приріст функції; в) лінійну запис частинних похідних функції.

38. Виберіть неправильний запис диференціала для $u = f(x, y, z)$:

а) $df(x, y, z) = f'_x dx + f'_y dy + f'_z dz$; б) $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$;

в) $du = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$.

39. Чому дорівнює диференціал незалежної змінної x :

а) $dx = (x)'$; б) $dx = 1$; в) $dx = \Delta x$?

40. Запис $\sum_{i=1}^m f'_{x_i} dx_i$ для функції $f = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ називається:

а) лінійною функцією; б) диференціалом функції; в) середнім значенням функції.

41. Знайдіть неправильно записану часткову похідної 2-го порядку:

а) $f''_{x_i x_k}$; б) $\frac{d^2 f}{dx_i dx_k}$; в) $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}$.

42. Якщо похідна береться за різними змінним, то її називають:

а) змішаною; б) частковою; в) рівнозмінною.

43. Якщо похідна береться за однаковими змінним, то це записують у вигляді:

а) $f^{(2)}$; б) f''_{xx} ; в) f''_{xx} .

44. Чи залежить значення змішаної похідної від порядку диференціювання:

а) залежить; б) не залежить; в) тільки для функцій, що мають розрив?

45. Чи має місце рівність $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$:

а) так; б) немає; в) тільки для функцій, що мають розрив?

46. Чи можна стверджувати, що для диференціала функції двох незалежних змінних $dx = \text{const}$ і $dy = \text{const}$:

а) ні; б) так; в) тільки для неперервних функцій?

47. Знайдіть неправильно записаний вираз для функції двох змінних:

а) $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$; б) $d^2 z = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx dy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} dy^2$;
в) $d^3 z = 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial y^3} dy^3$.

48. Диференціал k -го порядку для функції двох змінних можна записати у вигляді:

а) $d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^k f(x, y)$; б) $d^k z = \left(\frac{\partial^k}{\partial x^k} dx + \frac{\partial^k}{\partial y^k} dy \right) f(x, y)$;
в) $d^k z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f^{(k)}(x, y)$.

49. Для функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ диференціал можна записати у вигляді:

а) $du = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$; б) $du = \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} + \Delta x_i \right)$; в) $du = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i}$.

50. Запис диференціала 2-го порядку для функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$:

а) $d^2 u = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j$; б) $d^2 u = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j dx_i$;

$$в) d^2 u = \sum_{i=1}^m dx_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} dx_j.$$

51. Запис формули Тейлора для функції багатьох змінних:

$$а) f(x) = f(x^{(0)}) + f^{(1)}(x^{(0)}) + \frac{f^{(2)}(x^{(0)})}{2!} + \frac{f^{(3)}(x^{(0)})}{3!} + \dots + \frac{f^{(k)}(x^{(0)})}{k!} + o(\rho^k);$$

$$б) f(x) = f(x^{(0)}) + df(x^{(0)}) + \frac{df^2(x^{(0)})}{2!} + \frac{df^3(x^{(0)})}{3!} + \dots + \frac{df^k(x^{(0)})}{k!} + o(\rho^k);$$

$$в) f(x) = f(x^{(0)}) + df(dx^{(0)}) + \frac{df^2(dx^{(0)})}{2!} + \frac{df^3(dx^{(0)})}{3!} + \dots + \frac{df^k(dx^{(0)})}{k!} + o(\rho^k).$$

52. Запис формули Тейлора для функції m змінних в загальному вигляді:

$$а) f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{f^{(i)}(x^{(0)})}{i!} + o(\rho^k); \quad б) f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{df^i(x^{(0)})}{i!} + o(\rho^k);$$

$$в) f(x) = \sum_{i=0}^k \frac{df^i(dx^{(0)})}{i!} + o(\rho^k).$$

1.15. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Знайти область визначення функції двох змінних.

$$1.1. z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}. \quad 1.2. z = \sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}. \quad 1.3. z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

$$1.4. z = \frac{1}{\sqrt{36 - 9x^2 - 4y^2}}. \quad 1.5. z = \frac{3x - 2}{x^2 - y^2}. \quad 1.6. z = \frac{1}{9x^2 - 4y^2}.$$

2. Знайти частинні похідні функцій.

$$2.1. z = \ln(x + y). \quad 2.2. z = \ln(2x - y). \quad 2.3. z = \arcsin(x + 2y).$$

$$2.4. z = \arcsin(2x - y). \quad 2.5. z = \arccos \frac{x}{y^2}. \quad 2.6. z = \arccos \frac{-x}{y^2}.$$

$$2.7. z = \operatorname{tg} \frac{x}{y^2}. \quad 2.8. z = \operatorname{ctg}(xy^2).$$

3. Знайти диференціал функції.

$$3.1. z = \left(\frac{x}{x+y} \right)^3. \quad 3.2. z = \left(\frac{x}{x^2+y} \right)^2. \quad 3.3. z = \ln \sqrt{x+y^2}.$$

$$3.4. z = \ln \left(x + y \sqrt{x+y^2} \right). \quad 3.5. z = \operatorname{arctg} \frac{x}{x+y}. \quad 3.6. z = \operatorname{arth} \frac{y}{x+1}.$$

4. Знайти часткову похідну 2-го порядку.

$$4.1. z = x^3 \sin(y). \quad 4.2. z = y^2 \cos(x). \quad 4.3. z = e^{x+y^2} x.$$

$$4.4. z = e^{x^2-y} x. \quad 4.5. z = e^{xy} x. \quad 4.6. z = e^{\frac{x}{y}} y.$$

$$4.7. z = \operatorname{tg}(x+y). \quad 4.8. z = \operatorname{tg}(xy).$$

5. Знайти диференціал 2-го порядку.

$$5.1. z = x^3 + 2x^2y - 4y^3. \quad 5.2. z = 2x^4 - x^2y + 3y^2x. \quad 5.3. z = x^2y^3.$$

$$5.4. z = x^5y^6. \quad 5.5. z = \frac{x^2}{y}. \quad 5.6. z = \frac{x}{y^2}. \quad 5.7. z = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}.$$

$$5.8. z = \frac{4x}{y} + \frac{y}{4x}. \quad 5.9. z = \frac{x}{\sqrt{y}} - \frac{y}{\sqrt{x}} \quad 5.10. z = \frac{x^2}{\sqrt{y}} + \frac{y^2}{\sqrt{x}}$$

.

6. Розкласти функції по формулах Тейлора та Маклорена.

6.1. Функцію $z = x^3 + 2x^2y - 4y^3$ розкласти по формулі Тейлора в околиці точки $(1, 1)$.

6.2. Функцію $z = 2x^4 - x^2y + 3y^2x$ розкласти по формулі Тейлора в околиці точки $(-1, 1)$.

6.3. Розкласти функцію за формулою Маклорена до членів 3-го порядку включно.

$$6.3.1. z = e^y \cos x. \quad 6.3.2. z = e^x \sin y. \quad 6.3.3. z = (x+y) \sin(x-y).$$

$$6.3.4. z = (x + y)\cos(x - y). \quad 6.3.5. z = \ln(1 + x + y). \quad 6.3.6. z = \ln(1 + 2x + 3y).$$

1.16. Самостійна робота

1. Знайти область визначення функції двох змінних.

$$1.1. z = \sqrt{4 - x^2 + y^2}. \quad 1.2. z = \sqrt{36 - 9x^2 + 4y^2}. \quad 1.3. z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 + y^2}}.$$

$$1.4. z = \frac{1}{\sqrt{36 - 9x^2 + 4y^2}}. \quad 1.5. z = \frac{3x - 2}{x - y}. \quad 1.6. z = \frac{2x - 3y}{9x - 4y}.$$

$$1.7. z = \frac{3x - 2}{x + y}. \quad 1.8. z = \frac{2x - 3y}{9x + 4y}. \quad 1.9. z = \frac{3x - 2}{x^2 - y}. \quad 1.10. z = \frac{2x - 3y}{9x - 4y^2}.$$

$$1.11. z = \frac{3x - 2}{x^2 + y}. \quad 1.12. z = \frac{2x - 3y}{9x + 4y^2}. \quad 1.13. z = \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 - y^2}}. \quad 1.14. z = \frac{1}{\sqrt{9x^2 - 4y^2}}.$$

2. Знайти часткові похідні функцій.

$$2.1. z = \ln(-x - y). \quad 2.2. z = \ln(-x + 2y). \quad 2.3. z = \arcsin(-x + 2y).$$

$$2.4. z = \arcsin(-2x - y). \quad 2.5. z = \arccos \frac{x^2}{y}. \quad 2.6. z = \arccos \frac{-x^2}{y}.$$

$$2.7. z = \operatorname{ctg} \frac{x}{y^2}. \quad 2.8. z = \operatorname{tg}(x^2 y).$$

3. Знайти диференціал функції.

$$3.1. z = \left(\frac{x^3}{x + y} \right)^2. \quad 3.2. z = \left(\frac{x^2 + y}{x + y} \right)^4. \quad 3.3. z = \ln(x + y^2).$$

$$3.4. z = \ln\left(y + \sqrt{x^2 + y}\right). \quad 3.5. z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}. \quad 3.6. z = \operatorname{arth}\left(\frac{y^2}{x + y}\right).$$

4. Знайти часткові похідні 2-го порядку.

$$4.1. z = x^2 \operatorname{sh}(y). \quad 4.2. z = y^3 \operatorname{ch}(x). \quad 4.3. z = e^{x^2 + y} x.$$

$$4.4. z = e^{x - y^2} x. \quad 4.5. z = e^{xy} y. \quad 4.6. z = e^{\frac{y}{x}} y.$$

$$4.7. z = \operatorname{ctg}(x - y). \quad 4.8. z = \operatorname{ctg}(xy).$$

5. Знайти диференціал 2-го порядку.

$$5.1. z = 2y^2 + 3x^2 y + 2y^2 x. \quad 5.2. z = 2y^4 - y^2 x + 3x^2 y. \quad 5.3. z = x^3 y^2.$$

$$5.4. z = x^3 y^2.$$

$$5.5. z = \frac{y^2}{x}.$$

$$5.6. z = \frac{y}{x^2}.$$

$$5.7. z = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}.$$

$$5.8. z = \frac{x}{2y} - \frac{2y}{x}.$$

$$5.9. z = \frac{\sqrt{x}}{y} + \frac{\sqrt{y}}{x}.$$

$$5.10. z = \frac{\sqrt{x}}{y^2} - \frac{\sqrt{y}}{x^2}.$$

6. Розкласти функції по формулах Тейлора та Маклорена.

6.1. Функцію $z = 2y^2 + 3x^2y + 2y^2x$ розкласти по формулі Тейлора в околиці точки $(1, -1)$.

6.2. Функцію $z = 2y^4 - y^2x + 3x^2y$ розкласти по формулі Тейлора в околиці точки $(1, 1)$.

6.3. Розкласти функцію за формулою Маклорена до членів 3-го порядку включно.

$$6.3.1. z = e^y \sin x.$$

$$6.3.2. z = e^x \cos y.$$

$$6.3.3. z = (x - y) \sin(x - y).$$

$$6.3.4. z = (x - y) \cos(x + y).$$

$$6.3.5. z = \ln(1 - x - y).$$

$$6.3.6. z = \ln(5 - x + 2y).$$

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

Собака зошит з'їла.

Що кажуть про математику

«У математичних роботах ... головне - зміст, ідеї, поняття, а потім для їх вираження у математиків існує своя мова - це формули» (Софія Ковалевська).

Функція багатьох змінних. Похідна зложеної (складної) функції. Інваріантність форми диференціала 1-го порядку складної функції. Диференціювання неявно заданої функції. Визначення частинних похідних неявно заданої функції шляхом побудови диференціала. Геометричний додаток функцій багатьох змінних. Дотична до поверхні площина. Площина, яка дотична до поверхні, заданої в явному вигляді. Площина, яка дотична до поверхні, заданої в неявному вигляді. Нормаль до поверхні. Похідна за напрямком

2. ФУНКЦІЯ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

2.1. Похідна зложеної (складної) функції

1. Нехай $u = f(x, y, z)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Вираз

$$\Delta u = f'_x \Delta x + f'_y \Delta y + f'_z \Delta z + o(\rho)$$

розділимо на Δt :

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = f'_x \frac{\Delta x}{\Delta t} + f'_y \frac{\Delta y}{\Delta t} + f'_z \frac{\Delta z}{\Delta t} + \frac{o(\rho)}{\Delta t}.$$

Якщо перейти до границі при $\Delta t \rightarrow 0$ і врахувати, що $o(\rho)$ - н. м. в. більш високого порядку, ніж Δt , то отримаємо рівність

$$\frac{du}{dt} = f'_x \frac{dx}{dt} + f'_y \frac{dy}{dt} + f'_z \frac{dz}{dt}.$$

Це можна записати і в такій формі:

$$\frac{du}{dt} = f'_x x'_t + f'_y y'_t + f'_z z'_t.$$

2. Нехай $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де

$$x_1 = x_1(t_1, t_2, \dots, t_m),$$

$$x_2 = x_2(t_1, t_2, \dots, t_m),$$

... ..

$$x_n = x_n(t_1, t_2, \dots, t_m).$$

Тоді можна побудувати частинні похідні 1-го порядку:

$$\frac{\partial u}{\partial t_1}, \frac{\partial u}{\partial t_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial t_m}.$$

Вони мають такий вигляд:

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_2},$$

...

$$\frac{\partial u}{\partial t_m} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_m}.$$

Це можна записати в загальному вигляді щодо k -ї змінної:

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_k}.$$

ПРИКЛАД. Побудувати похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції

$$z = xy \sin y \cos x (x \sin y - y \cos x).$$

Рішення. Введемо допоміжні функції

$$u = x \sin y, \quad v = y \cos x.$$

Напишемо задану функцію у вигляді

$$z = uv(u - v) = u^2v - uv^2,$$

де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Будуємо похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = (2uv - v^2) \sin y + (u^2 - 2uv)(-y \sin x);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = (2uv - v^2)x \cos y + (u^2 - 2uv) \cos x.$$

2.2. Інваріантність форми диференціала 1-го порядку складної функції

Нехай задано $z = z(u(x, y), v(x, y))$.

1. Розглянемо z як $z(x, y)$:

$$\begin{aligned} dz &= z'_x dx + z'_y dy = (z'_u u'_x + z'_v v'_x) dx + (z'_u u'_y + z'_v v'_y) dy = \\ &= z'_u u'_x dx + z'_v v'_x dx + z'_u u'_y dy + z'_v v'_y dy = z'_u (u'_x dx + u'_y dy) + z'_v (v'_x dx + v'_y dy) = \\ &= z'_u du + z'_v dv. \end{aligned}$$

2. Розглянемо z як $z(u, v)$:

$$dz = z'_u du + z'_v dv.$$

Висновок. Форма диференціала 1-го порядку не залежить від того, яка функція - проста або складна.

Незалежність форми від складності функції називається інваріантністю.

Для диференціала 2-го порядку, якщо функція складна, інваріантність видсутня.

2.3. Диференціювання неявно заданої функції

Def. Задання функції

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

через рівняння

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0,$$

яке нерозв'язне відносно y , називається неявним заданням функції, а сама функція називається неявно заданою.

Приклад неявно заданої функції: $x^2yz - \ln(xyz) = 0$.

Нехай функція $z = z(x, y)$ задається рівнянням $F(x, y, z) = 0$. Це можна записати у вигляді $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Про диференціюємо функцію по x :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

З цього виразу випливає, що

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Це можна записати і у вигляді

$$F'_x + F'_z z'_x = 0 \Rightarrow z'_x = - \frac{F'_x}{F'_z}.$$

Про диференціюємо функцію по y :

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Це можна записати і у вигляді

$$F'_y + F'_z z'_y = 0 \Rightarrow z'_y = - \frac{F'_y}{F'_z}.$$

Для існування цих похідних необхідно, щоб $F'_z \neq 0$.

Загальний випадок. Нехай $F(x_1, x_2, \dots, x_m, z) = 0$. тоді

$$z'_{x_i} = - \frac{F'_{x_i}}{F'_z}.$$

Th. (Теорема про існування функції двох змінних). Якщо функція $F(x, y, z)$ і її похідні F'_x, F'_y, F'_z визначені і неперервні в деякому окілку точки $M(x_0, y_0, z_0)$ і при цьому

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \text{ а } F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

то в окілку точки M існує неявно задана функція $F(x, y, z) = 0$, яка визначає єдину функцію $z = z(x, y)$, неперервну і диференційовану в окілку точки M , і при цьому $z(x_0, y_0) = z_0$.

ПРИКЛАД. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$ якщо $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$.

Рішення

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= - \frac{F'_x}{F'_z} = - \frac{-4z}{3z^2 - 4x} = \frac{4z}{3z^2 - 4x}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= - \frac{F'_y}{F'_z} = - \frac{2y}{3z^2 - 4x}. \end{aligned}$$

2.4. Визначення частинних похідних неявно заданої функції шляхом побудови диференціала

Існує другий варіант визначення частинних похідних неявно заданої функції - шляхом побудови диференціала цієї функції.

Побудуємо диференціал функції $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$:

$$3z^2 dz - 4z dx - 4x dz + 2y dy = 0.$$

Виконаємо перетворення:

$$3z^2 dz - 4x dz = 4z dx - 2y dy \Rightarrow (3z^2 - 4x) dz = 4z dx - 2y dy;$$

$$dz = \frac{4z dx - 2y dy}{3z^2 - 4x} = \frac{4z}{3z^2 - 4x} dx - \frac{2y}{3z^2 - 4x} dy.$$

З врахуванням того, що

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy,$$

отримуємо

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4z}{3z^2 - 4x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2y}{3z^2 - 4x}.$$

Зауваження. Для отримання похідних 2-го і більш високих порядків необхідно про диференціювати попередню похідну, враховуючи, що $z = z(x, y)$.

Наприклад, для функції $z^3 - 4xz + y^2 - 4 = 0$ отримали $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{4z}{3z^2 - 4x}$.

В цьому випадку

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{4z}{3z^2 - 4x} \right) = \frac{(4z)'_x (3z^2 - 4x) - (3z^2 - 4x)'_x 4z}{(3z^2 - 4x)^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{4z'_x (3z^2 - 4x) - (6z \cdot z'_x - 4) \cdot 4z}{(3z^2 - 4x)^2}. \end{aligned}$$

але $z'_x = \frac{4z}{3z^2 - 4x}$. Отже,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{4 \cdot \frac{4z}{3z^2 - 4x} (3z^2 - 4x) - \left(6z \cdot \frac{4z}{3z^2 - 4x} - 4 \right) \cdot 4z}{(3z^2 - 4x)^2}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{16z(3z^2 - 4x) - \left(24z^2 - 4(3z^2 - 4x) \right) \cdot 4z}{(3z^2 - 4x)^3}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{16z(3z^2 - 4x) - (6z^2 - (3z^2 - 4x)) \cdot 16z}{(3z^2 - 4x)^3}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{16z}{(3z^2 - 4x)^3} (3z^2 - 4x - 6z^2 + 3z^2 - 4x) = -\frac{128zx}{(3z^2 - 4x)^3}. \end{aligned}$$

2.5. Геометричний додаток функцій багатьох змінних

2.5.1. Дотична до поверхні площина

Поверхня може бути задана в явному

$$z = z(x, y),$$

і неявному

$$F(x, y, z) = 0$$

вигляді.

2.5.1.1. Площина, яка дотична до поверхні, заданої в явному вигляді

Будь-яку поверхню в заданій точці M можна розглядати як неперервну множину ліній, що проходять через цю точку (рисунок 2.1).

Неперервна множина прямих, дотичних до ліній поверхні, що проходять через одну точку M , утворює площину, дотичну до поверхні в цій точці.

Існування цієї дотичної площини пов'язано з диференціюванням функції поверхні.

Нехай на поверхні, заданої в явному вигляді

$$z = z(x, y),$$

задана точка $M_0(x_0, y_0)$. Проведемо дві пересічні в точці $M_0(x_0, y_0)$ лінії поверхні (рисунок 2.2):

$$z = z(x_0, y), \quad z = z(x, y_0).$$

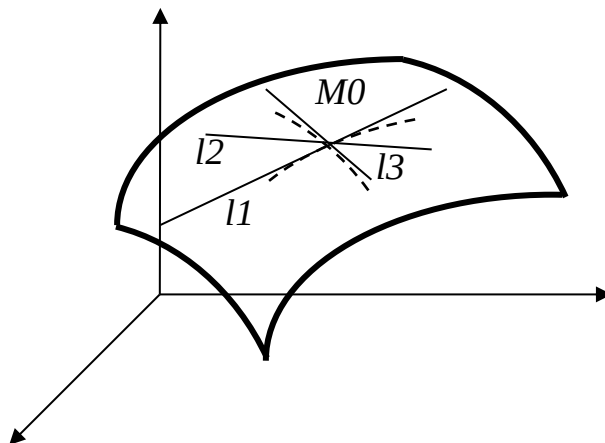


Рисунок. 2.1

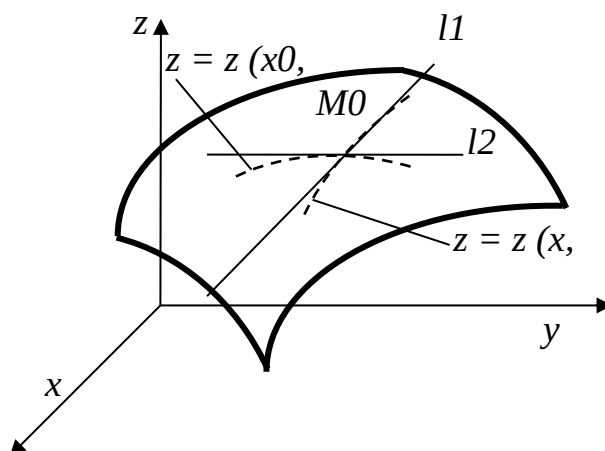


Рисунок 2.2

Побудуємо дотичні до цих ліній:

$$z - z_0 = z'_y (y - y_0), \quad x = x_0;$$

$$z - z_0 = z'_x (x - x_0), \quad y = y_0.$$

Рівняння площини, що проходить через точку M_0 , напишемо в загальному вигляді:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Це рівняння можна записати і так:

$$\frac{A}{C}(x - x_0) + \frac{B}{C}(y - y_0) + (z - z_0) = 0.$$

Рівняння площини в загальному вигляді при $x = x_0$:

$$B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow B(y - y_0) + C(z'_y (y - y_0)) = 0 \Rightarrow B + Cz'_y = 0.$$

$$\text{отже, } \frac{B}{C} = -z'_y.$$

Рівняння площини в загальному вигляді при $y = y_0$:

$$A(x - x_0) + C(z - z_0) = 0 \Rightarrow A(x - x_0) + C(z'_x (x - x_0)) = 0 \Rightarrow A + Cz'_x = 0.$$

$$\text{отже, } \frac{A}{C} = -z'_x.$$

Використовуючи отримані співвідношення, напишемо рівняння площини, дотичної до поверхні, заданої в явному вигляді:

$$\begin{aligned} (-z'_x)(x - x_0) + (-z'_y)(y - y_0) + (z - z_0) &= 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow z'_x(x - x_0) + z'_y(y - y_0) - (z - z_0) &= 0. \end{aligned}$$

Це рівняння дотичної площини в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні, заданої в явному вигляді $z = z(x, y)$.

2.5.1.2. Площина, яка дотична до поверхні, заданої в неявному вигляді

Нехай задана поверхня в неявному вигляді $F(x, y, z) = 0$. Для цієї функції

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}, \quad z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Отже, можна записати

$$\begin{aligned} z'_x(x - x_0) + z'_y(y - y_0) - (z - z_0) &= 0 \Rightarrow -\frac{F'_x}{F'_z}(x - x_0) - \frac{F'_y}{F'_z}(y - y_0) - (z - z_0) = 0, \\ \text{або } F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) &= 0. \end{aligned}$$

Це рівняння дотичної площини в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні, заданої в неявному вигляді $F(x, y, z) = 0$.

2.5.2. Нормаль до поверхні

Def. Під нормаллю до заданої поверхні розуміють пряму, що проходить через задану точку цієї поверхні перпендикулярно площині, дотичній до заданої поверхні в заданій точці (рисунок 2.3).

Якщо рівняння площини, дотичної в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні, заданої явно $z = z(x, y)$, має вигляд

$$z'_x(x - x_0) + z'_y(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

то нормаль до цієї площини можна записати як $\vec{N}(z'_x, z'_y, -1)$. В цьому випадку канонічне рівняння нормалі, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, має вигляд

$$\frac{x - x_0}{z'_x} = \frac{y - y_0}{z'_y} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Якщо рівняння площини, дотичної в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$, має вигляд

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0,$$

то нормаль до цієї площини можна записати як $\vec{N}(F'_x, F'_y, F'_z)$. В цьому випадку канонічне рівняння нормалі, що проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, має вигляд

$$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}.$$

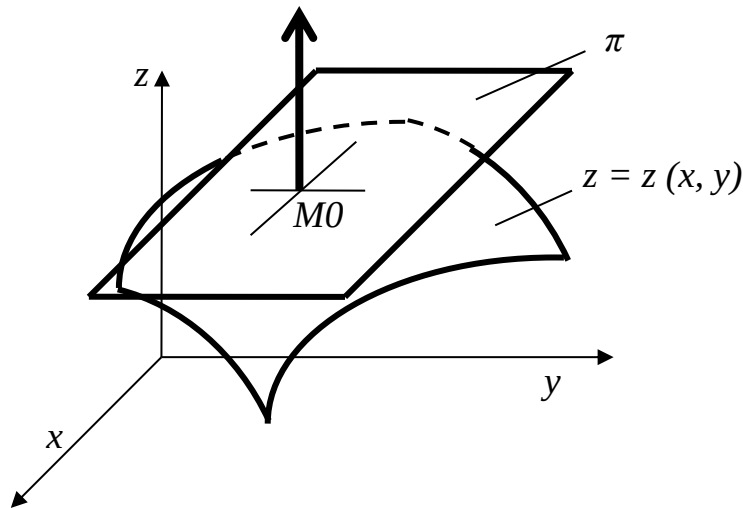


Рисунок 2.3

2.5.3. Похідна за напрямком

Нехай в просторі R^3 задана функція трьох змінних $u = u(x, y, z)$, яка визначена в кожній точці M цього простору: $u = u(M)$.

Задамо в точці M_1 вектор $\vec{a}$, який назвемо вектором напрямку. Уздовж цього вектора виберемо точку M_2 . Позначимо через ρ відстань M_1M_2 :

$$\rho = |M_1M_2|.$$

Def. Під похідною функції $u(x, y, z)$ в точці M_1 за напрямком $\vec{a}$ розуміють границю виду

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(M_2) - u(M_1)}{\rho},$$

де ρ - відстань між точками M_1 і M_2 вздовж вектора $\vec{a}$.

Нехай координати точок: $M_1(x, y, z)$ і $M_2(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$. В цьому випадку

$$u(M_2) - u(M_1) = \Delta u \approx \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z.$$

Використовуючи направляючі косинуси вектора $\vec{a}$, можна записати

$$\Delta x = \rho \cos \alpha, \Delta y = \rho \cos \beta, \Delta z = \rho \cos \gamma,$$

де α, β, γ - направляючі кути вектора $\vec{a}$.

Тоді

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial u}{\partial x} \rho \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \rho \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \rho \cos \gamma}{\rho} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Тут направляючі косинуси - це координати орта $\vec{a}^0$:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Def. Градієнтом функції $u = u(x, y, z)$ будемо називати вектор, координати якого є частинними похідними цієї функції:

$$\text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Це ще записують у вигляді:

$$\text{grad}(u) = \nabla u$$

де Δ - називають оператором Набла. Тобто кажуть: набла функції u .

Тоді похідну за напрямком можна записати у вигляді

$$\frac{\partial u}{\partial a} = (\text{grad}(u), \vec{a}^0).$$

Висновок. Похідна за напрямом заданої функції дорівнює скалярному добутку градієнта функції в заданій точці і орта заданого вектора напрямку.

Зауваження. Геометричний сенс градієнта - вектор градієнта в даній точці вказує напрямок найбільшого зростання функції в цій точці. Абсолютна величина градієнта - це швидкість зростання функції уздовж цього напрямку.

ПРИКЛАД. Обчислити похідну функції $u = x^2 + y^2$ в точці $M(1, -1)$ вздовж вектора $\vec{a}(1, 2)$.

Рішення

$$\text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} = 2x\vec{i} + 2y\vec{j} \Big|_M = 2\vec{i} - 2\vec{j};$$

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \frac{(1,2)}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}} \right) = \frac{1}{\sqrt{5}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{j};$$

$$\frac{\partial u}{\partial a} = (\text{grad}(u), \vec{a}^0) = \left((2\vec{i} - 2\vec{j}) \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}} \vec{j} \right) \right) = \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{4}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

Відповідь: $\frac{\partial u}{\partial a} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$

2.6. Висновки

Функція виду $u = f(x, y, z)$, де $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, Називається складною функцією, і її похідна визначається формулою

$$\frac{du}{dt} = f'_x \frac{dx}{dt} + f'_y \frac{dy}{dt} + f'_z \frac{dz}{dt}.$$

Це можна записати і в такій формі:

$$\frac{du}{dt} = f'_x x'_t + f'_y y'_t + f'_z z'_t.$$

Якщо функція має вигляд $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де

$$x_1 = x_1(t_1, t_2, \dots, t_m),$$

$$x_2 = x_2(t_1, t_2, \dots, t_m),$$

... ..

$$x_n = x_n(t_1, t_2, \dots, t_m),$$

то приватні похідні 1-го порядку цієї функції визначаються так:

$$\frac{\partial u}{\partial t_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_1} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_1},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t_2} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_2} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_2},$$

...,

$$\frac{\partial u}{\partial t_m} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial t_m} + \frac{\partial f}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial t_m} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial t_m}.$$

Це можна записати в загальному вигляді щодо k -ї змінної:

$$\frac{\partial u}{\partial t_k} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial t_k}.$$

Диференціал 1-го порядку має властивість інваріантності.
 Інваріантність - незалежність форми від складності функції.
 Отже, для $z = z(u(x,y), v(x,y))$ можна записати

$$dz = z'_x dx + z'_y dy = z'_u du + z'_v dv.$$

Для диференціала 2-го порядку, якщо функція складна, інваріантність порушується.

Def. Спосіб завдання функції

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

через допоміжне вираз

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0,$$

нерозв'язний щодо y , називається неявним завданням функції, а сама функція називається неявно заданою.

Якщо функція $z = z(x, y)$ задається рівнянням $F(x, y, z) = 0$, то її похідна має вигляд

$$\frac{\partial z}{\partial x} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \text{ або } z'_x = - \frac{F'_x}{F'_z}.$$

Для загального випадку, коли $F(x_1, x_2, \dots, x_m, z) = 0$, похідні мають вигляд

$$z'_{x_i} = - \frac{F'_{x_i}}{F'_z}.$$

Рівняння площини, що дотична в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні, заданої явно $z = z(x, y)$, має вигляд

$$z'_x(x - x_0) + z'_y(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

Рівняння площини, що дотична в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$, має вигляд

$$F'_x(x - x_0) + F'_y(y - y_0) + F'_z(z - z_0) = 0.$$

Def. Під нормаллю до заданої поверхні розуміють пряму, що проходить через задану точку цієї поверхні перпендикулярно площині, дотичній до цієї поверхні в заданій точці.

Рівняння нормалі в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні, заданої явно $z = z(x, y)$, має вигляд

$$\frac{x - x_0}{z'_x} = \frac{y - y_0}{z'_y} = \frac{z - z_0}{-1}.$$

Рівняння нормалі в точці $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до поверхні, заданої неявно $F(x, y, z) = 0$, має вигляд

$$\frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z}.$$

Def. Під похідною функції $u(x, y, z)$ в точці M_1 за напрямком $\vec{a}$ розуміють границю виду

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(M_2) - u(M_1)}{\rho},$$

де ρ - відстань між точками M_1 і M_2 вздовж вектора $\vec{a}$.

Похідна функції $u(x, y, z)$ в точці M_1 за напрямком $\vec{a}$ позначається так:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(M_2) - u(M_1)}{\rho}.$$

Похідна функції $u(x, y, z)$ в точці M_1 за напрямком $\vec{a}$ має вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial a} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

Координати орта $\vec{a}^0$ направляючого вектора записують через направляючі косинуси:

$$\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Def. градієнтом функції $u = u(x, y, z)$ будемо називати вектор, координати якого є частинними похідними цієї функції:

$$\text{grad}(u) = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k},$$

або $\text{grad}(u) = \nabla u$, де ∇ - називають оператором Набла.

Висновок. Похідна за напрямком заданої функції дорівнює скалярному добутку градієнта функції в заданій точці і орта заданого вектора напрямку:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = (\text{grad}(u), \vec{a}^0).$$

Зауваження. Геометричний сенс градієнта - вектор градієнта в даній точці вказує напрямок найбільшого зростання функції в цій точці. Абсолютна величина градієнта - це швидкість зростання функції уздовж цього напрямку.

Перерва

- А тобі вища математика в житті знадобилась?
- Так, пам'ятаю, капелюх злетів та опинився в калюжі, так я з дроту інтеграл зробив і дістав його.

2.7. Питання для перевірки знань

1. Визначення складної функції:

а) трансцендентна функція; б) функція, яка містить більше трьох операцій;
в) функція функції.

2. Запис похідною функції $u = u(x(t), y(t), z(t))$:

а) $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$; б) $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt}$;

в) $\frac{du}{dt} = \frac{dx}{dt} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{dy}{dt} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{dz}{dt} \frac{\partial u}{\partial z}$.

3. Запис похідною функції $f = f(x_1(t_1, t_2, \dots, t_m), x_2(t_1, t_2, \dots, t_m), \dots, x_n(t_1, t_2, \dots, t_m))$:

а) $\frac{\partial f}{\partial t_i} = \frac{\partial x_k}{\partial t_i} \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k}$; б) $\frac{\partial f}{\partial t_i} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t_i}$; в) $\frac{\partial f}{\partial t_i} = \frac{\partial f}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial t_i}$.

4. Диференціал 1-го порядку функції $z = z(u(x, y), v(x, y))$ можна записати у вигляді:

а) $dz = z'_x dx + z'_y dy$; б) $dz = z'_x dx + z'_y dy$; в) $dz = z'_x dy + z'_y dy$.

5. Диференціал 1-го порядку функції $z = z(u(x, y), v(x, y))$ можна записати у вигляді:

а) $dz = z'_u du + z'_v dv$; б) $dz = z'_u dv + z'_v dv$; в) $dz = z'_u du + z'_v dv$.

6. Незалежність форми від складності функції називається:

а) індукцією; в) ізоморфізмом; в) інваріантністю.

7. Властивість інваріантності диференціала:

а) форма диференціала не залежить від того, складна ця функція або проста;
б) форма диференціала 1-го порядку залежить від того, складна ця функція або проста;
в) форма диференціала 1-го порядку не залежить від того, складна ця функція або проста.

8. Для диференціала 2-го порядку, якщо функція складна, інваріантність:

а) посилюється; б) відсутня; в) зберігається.

9. Спосіб завдання функції $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ через допоміжний вираз $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$, нерозв'язний відносно y , називається:

а) нерозв'язним завданням функції; б) неявним завданням функції; в) допоміжним завданням функції.

10. Функція $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, яка задається через допоміжний вираз $F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) = 0$, нерозв'язаний відносно y , називається:

а) заданою нерозв'язно; б) неявно заданою; в) заданою допоміжним виразом.

11. Якщо $F(x, y, z) = 0$, то:

а) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_x}{F'_z}$; б) $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F'_z}{F'_x}$; в) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_z}{F'_x}$.

12. Виберіть правильну запис похідної функції $f(x)$, заданої неявно виразом $F(x, y) = 0$:

$$\text{а) } f'(x) = -\frac{F'_y(x, y)}{F'_x(x, y)}; \text{ б) } f'(x) = \frac{F'_y(x, y)}{F'_x(x, y)}; \text{ в) } f'(x) = -\frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}.$$

13. Рівняння площини, дотичної до поверхні $z(x, y)$ в заданій точці (x_0, y_0, z_0) :

$$\text{а) } \frac{\partial z(x, y)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z(x, y)}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0;$$

$$\text{б) } \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}x_0 + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}y_0 - (z - z_0) = 0;$$

$$\text{в) } \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) - (z - z_0) = 0.$$

14. Рівняння площини, яка дотичної до поверхні $F(x, y, z) = 0$ в заданій точці (x_0, y_0, z_0) :

$$\text{а) } dFdx(x - x_0) + dFdy(y - y_0) + dFdz(z - z_0) = 0; \text{ б) } \frac{x - x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}};$$

$$\text{в) } \frac{\partial F}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}(z - z_0) = 0.$$

15. Рівняння нормалі до поверхні $z(x, y)$ в заданій точці (x_0, y_0, z_0) :

$$\text{а) } \frac{(x - x_0)}{\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{(y - y_0)}{\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{(z - z_0)}{-1}; \text{ б) } \frac{(x - x_0)}{\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}} = \frac{(y - y_0)}{\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}} = -(z - z_0);$$

$$\text{в) } \frac{(x - x_0)}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{(y - y_0)}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{(z - z_0)}{-1}.$$

16. Рівняння нормалі до поверхні $z(x, y)$ в заданій точці (x_0, y_0, z_0) :

$$\text{а) } \frac{(x - x_0)}{\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x}} = \frac{(y - y_0)}{\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y}} = \frac{(z - z_0)}{-1}; \text{ б) } \frac{x - x_0}{F'_x} = \frac{y - y_0}{F'_y} = \frac{z - z_0}{F'_z};$$

$$\text{в) } \frac{(x - x_0)}{\frac{\partial z}{\partial x}} = \frac{(y - y_0)}{\frac{\partial z}{\partial y}} = \frac{(z - z_0)}{-1}.$$

17. Якщо ρ - відстань між точками M_1 і M_2 вздовж вектора $\vec{a}$, то під похідною функції $u(x, y, z)$ в точці M_1 за напрямком $\vec{a}$ розуміють границю виду:

$$\text{а) } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(M_1) - u(M_2)}{\rho}; \text{ б) } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(M_2) - u(M_1)}{\rho}; \text{ в) } \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{u(M_2) - u(M_1)}{|\vec{a}|}.$$

18. Градієнт функції - це:

а) функція, яка дорівнює сумі частинних похідних заданої функції; б) вектор, координатами якого є частинні похідні заданої функції; в) набір частинних похідних заданої функції.

19. Градієнт функції f записують у вигляді:

а) $\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}$; б) $\text{grad}(f) = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma$;

в) $\text{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$.

20. Похідна функції $u(x, y, z)$ за напрямком вектора $\vec{e}_\lambda^0$ дорівнює:

а) $\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$; б) $\vec{i} \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \vec{j} \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \vec{k} \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$;

в) $\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$.

21. Похідна функції f за напрямком вектора $\vec{e}_\lambda^0$ дорівнює:

а) $\text{grad}(f)$; б) $\frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}$; в) $(\text{grad}(f), \vec{e}_\lambda^0)$.

22. Математичний зміст похідної за напрямком:

а) швидкість зміни функції в даному напрямку; б) тангенс кута нахилу до кривої; в) зміна приросту функції.

2.8. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Обчислити частинні похідні і диференціали 1-го порядку функцій:

а) $z = x^2 \sin^2 y$; б) $z = x^{y^2}$; в) $u = y^{x^2+y^2+z^2}$; г) $z = \arctg(x^2 y)$;

д) $z = \arctg \sqrt{\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$; е) $u = e^{\frac{x}{y}} + e^{\frac{z}{y}} + e^{\frac{y}{z}}$; ж) $u = \text{arccctg}(x^2 + y^3 + z)$.

2. Обчислити частинні похідні і диференціали 2-го порядку функцій:

а) $z = x^2 + xy^2 + \sin(xy)$; б) $z = e^{x^2+y^2}$; в) $z = e^x \ln y + \sin y \ln x$.

3. Записати формулу Маклорена для функції $u = \sqrt{\frac{1+x}{(1+y)(1+z)}}$ з точністю

до нескінченно малих величин першого порядку малості.

4. знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, Якщо:

а) $z = u + v^2$, $u = x^2 + \sin y$, $v = \ln(x + y)$; б) $z = e^{u-2v}$, $u = \sin x$, $v = x^2 + y^2$.

5. Знайти повні похідні функцій:

а) $z = \arcsin(u + v)$, $u = \sin x \cos \alpha$, $v = \cos x \sin \alpha$; б) $z = \ln(1 - x^4 - y^3)$, $x = \operatorname{tg}(u^2 v^5)$,
 $y = \sqrt{u^2 + v^2}$.

6. Довести, що функція $u = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ задовольняє рівняння Лапласа

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0.$$

7. Довести, що функція $z = \frac{x^2 + y^2}{x + y}$ задовольняє рівняння $xz''_{xx} + yz''_{xy} = 2z'_x$.

8. Довести, що якщо функція $u(x, y)$ задовольняє рівняння Лапласа $u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, то і функція $\varphi(x, y) = u\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right)$ задовольняє це ж рівняння.

9. Обчислити диференціали 1-го і 2-го порядків функцій, заданих неявно:

а) $\sin(xy) - e^{xy} - x^2 y = 0$, $y = y(x)$; б) $y^x = x^y$, $y = y(x)$;

в) $e^z + 2z + x^3 - y^2 = 0$, $z = z(x, y)$.

10. Обчислити $\frac{\partial z}{\partial s}$ і $\frac{\partial z}{\partial t}$, якщо $z = x^3 + xy^2 + x^2 y$, $x + \ln x = s - t$;

$$e^x + y = \frac{s^2}{s + t}.$$

11. Обчислити $\frac{dz}{ds}$, якщо $z = e^z + \operatorname{ctg}(x^2 + y^2)$; $x = t^3 + \frac{1}{t}$; $y = \sin t + \cos t$.

12. Обчислити похідну від функції $z = 3x^4 - xy + y^3$ в точці $M(1; 2)$ за напрямком, що становить з віссю Ox кут 60° .

13. Обчислити похідну функції $z = 5x^2 - 3xy + 4y$ в точці $M(2; 1)$ за напрямком від цієї точки до точки $N(5; 5)$.

14. Обчислити похідну функції $u = xyz + 4y^3 + z^3$ в точці $M(1; 2; 1)$ за напрямком вектора $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$.

15. Обчислити похідну функції $z^3 + 3z^4 + x^3 y - zy^2 = 0$, $z = z(x, y)$ в точці $M(1; 1; 1)$ за напрямком вектора $\vec{l} = -\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$.

16. Написати рівняння дотичної площини і нормалі прямої до поверхні $z = x^2 + 2xy + y^2 + 2x + y$ в точці $M(1; -1; 1)$.

17. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$ в точці $M(1; 1; 4)$.

2.9. Самостійна робота

2.9.1. неявно задана система функцій

Def. Спосіб задання системи функцій

$$\begin{aligned}y_1 &= y_1(x_1, x_2, \dots, x_m); \\y_2 &= y_2(x_1, x_2, \dots, x_m); \\&\dots \\y_n &= y_n(x_1, x_2, \dots, x_m)\end{aligned}$$

через допоміжні вирази

$$\begin{aligned}F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0; \\F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0; \\&\dots \\F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0\end{aligned}$$

називають неявним завданням системи функцій.

Наприклад, параметричну запис лінії $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ може бути задана системою неявних функцій

$$\begin{aligned}F_1(t, x, y, z) &= 0; \\F_2(t, x, y, z) &= 0; \\F_3(t, x, y, z) &= 0.\end{aligned}$$

2.9.2. Диференціювання неявно заданої системи функцій

Приватні похідні неявних функцій, заданих системою, отримують диференціюванням системи з подальшим вирішенням отриманої системи щодо похідних.

ПРИКЛАД. Функції $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ задані системою рівнянь

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 - 2t &= 1; \\x + xy + y + t &= 1.\end{aligned}$$

Визначити похідні функцій.

Рішення

Диференціюючи задані рівняння:

$$\begin{aligned}2xx' + 2yy' - 2 &= 0; \\x' + x'y + xy' + y' + 1 &= 0.\end{aligned}$$

Напишемо цю систему щодо невідомих x' і y' :

$$\begin{aligned}x'2x + y'2y &= 2; \\x'(1 + y) + y'(x + 1) &= -1.\end{aligned}$$

Використовуючи теорему Крамера, визначимо похідні функцій:

$$x' = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2y \\ -1 & x+1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1+y & x+1 \end{vmatrix}} = \frac{2x+2+2y}{2x^2+2x-2y-2y^2} = \frac{1+x+y}{x^2-y^2+x-y} =$$

$$= \frac{1+x+y}{(x-y)(x+y)+x-y} = \frac{1+x+y}{(x-y)(x+y+1)} = \frac{1}{x-y};$$

$$y' = \frac{\begin{vmatrix} 2x & 2 \\ 1+y & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1+y & x+1 \end{vmatrix}} = \frac{-2x-2-2y}{2x^2+2x-2y-2y^2} = \frac{-1-x-y}{x^2-y^2+x-y} =$$

$$= -\frac{1+x+y}{(x-y)(x+y)+x-y} = -\frac{1+x+y}{(x-y)(x+y+1)} = -\frac{1}{x-y} = \frac{1}{y-x}.$$

Відповідь: $x' = \frac{1}{x-y}$, $y' = \frac{1}{y-x}$.

2.9.3. Існування неявних функцій, заданих системою

Задано систему рівнянь:

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0;$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0;$$

...

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

Th. (Теорема про існування неявних функцій, заданих системою). Якщо частинні похідні функцій $F_1, F_2, \dots, F_n$, що диференціюються за $y_1, y_2, \dots, y_n$, в окілці точки M_0 неперервні, а визначник виду:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

не дорівнює нулю, і при цьому

$$y_1(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) = y_{10};$$

$$y_2(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) = y_{20};$$

...

$$y_n(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) = y_{n0}.$$

то існує окіл точки M_0 , в якій система функцій $F_1, F_2, \dots, F_n$ визначає єдиним чином систему функцій

$$y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_m);$$

$$y_2 = y_2(x_1, x_2, \dots, x_m);$$

...

$$y_n = y_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

Наведений визначник називається Якобіаном. Його позначення:

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \text{ або } J(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

2.9.4. Висновки

Th. (Теорема про існування функції двох змінних). якщо функція $F(x, y, z)$ і її похідні F'_x, F'_y, F'_z визначені і неперервні в деякій околиці точки $M(x_0, y_0, z_0)$ і при цьому

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \text{ а } F'_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0,$$

то в околиці точки M існує неявно задана функція $F(x, y, z) = 0$, яка визначає єдину функцію $z = z(x, y)$, безперервну і диференційовану в околиці точки M , і при цьому $z(x_0, y_0) = z_0$.

Приватні похідні 1-го порядку неявно заданої функції можна отримати шляхом побудови диференціала функції.

Зауваження. Для отримання похідних 2-го і більш високих порядків необхідно продиференціювати попередню похідну, враховуючи, що $z = z(x, y)$.

Def. Спосіб завдання системи функцій

$$y_1 = y_1(x_1, x_2, \dots, x_m);$$

$$y_2 = y_2(x_1, x_2, \dots, x_m);$$

...

$$y_n = y_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$$

через допоміжні вирази

$$F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0;$$

$$F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0;$$

...

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0$$

називають неявним завданням системи функцій.

Приватні похідні неявних функцій, заданих системою, отримують диференціюванням системи з подальшим вирішенням отриманої системи щодо похідних.

Th. (Теорема про існування неявних функцій, заданих системою). Якщо частинні похідні функцій $F_1, F_2, \dots, F_n$, Що диференціюються за $y_1, y_2, \dots, y_n$, В околиці точки M_0 безперервні, а визначник не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_n}{\partial y_1} & \frac{\partial F_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то існує околиця точки M_0 , В якій система функцій $F_1, F_2, \dots, F_n$ визначає єдиним чином функції $y_1, y_2, \dots, y_n$, і при цьому

$$\begin{aligned} y_1(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) &= y_{10}; \\ y_2(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) &= y_{20}; \\ &\dots \\ y_n(x_{10}, x_{20}, \dots, x_{m0}) &= y_{n0}. \end{aligned}$$

Наведений визначник називається якобіаном. Його позначення:

$$\frac{D(F_1, F_2, \dots, F_n)}{D(y_1, y_2, \dots, y_n)} \text{ або } J(y_1, y_2, \dots, y_n).$$

2.9.5. Питання для перевірки знань

1. Спосіб задання системи функцій

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1(x_1, x_2, \dots, x_m); \\ y_2 &= y_2(x_1, x_2, \dots, x_m); \\ &\dots \\ y_n &= y_n(x_1, x_2, \dots, x_m) \end{aligned}$$

через допоміжні вирази

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0; \\ F_2(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0; \\ &\dots \\ F_n(x_1, x_2, \dots, x_m, y_1, y_2, \dots, y_n) &= 0 \end{aligned}$$

називають:

а) нерозв'язним завданням системи функцій; б) неявним завданням системи функцій; в) допоміжним завданням системи функцій.

2. Якобіан функції трьох змінних $F_1(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$,

$F_2(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$, $F_3(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = 0$ записують у вигляді:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial x_1} & \frac{\partial F_3}{\partial x_2} & \frac{\partial F_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} & \frac{\partial y_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} & \frac{\partial y_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial y_3}{\partial x_1} & \frac{\partial y_3}{\partial x_2} & \frac{\partial y_3}{\partial x_3} \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} & \frac{\partial F_1}{\partial y_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} & \frac{\partial F_2}{\partial y_3} \\ \frac{\partial F_3}{\partial y_1} & \frac{\partial F_3}{\partial y_2} & \frac{\partial F_3}{\partial y_3} \end{vmatrix}.$$

3. Якобіан функції трьох змінних позначають так:

$$\text{а) } \frac{D(F_1, F_2, F_3)}{D(y_1, y_2, y_3)}; \text{ б) } \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(F_1, F_2, F_3)}; \text{ в) } \frac{D(y_1, y_2, y_3)}{D(x_1, x_2, x_3)}.$$

4. Якобіан функцій двох змінних $F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$, $F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ записують так:

$$\text{а) } \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}; \text{ б) } \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{vmatrix}; \text{ в) } \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}.$$

2.10. Самостійна практична робота

1. Обчислити частинні похідні і диференціали 1-го порядку функцій:

$$\text{а) } z = x^3 \cos^2 y; \text{ б) } z = y^{x^4}; \text{ в) } u = z^{2x^2 + 3y^2 + 4z^2}; \text{ г) } z = \operatorname{arccctg}(x^2 / y);$$

$$\text{д) } z = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}; \text{ е) } u = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2); \text{ ж) } u = y \ln(1 + x^2 + y^2 + z^2).$$

2. Обчислити частинні похідні і диференціали 2-го порядку функцій:

$$\text{а) } z = x^3 - 4xy^2 + 5y^2; \text{ б) } z = \ln(xy)^2; \text{ в) } z = \arcsin(x / y).$$

3. Записати формулу Маклорена з точністю до нескінченно малих величин

$$\text{першого порядку малості для функції } u = \sqrt{\frac{1+x}{1+y+z}}.$$

4. Знайти $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, якщо:

$$\text{а) } z = \sqrt{\frac{1+u}{1+v}}, u = -\cos x, v = \sin(xy); \text{ б) } z = \operatorname{tg}(u + 2v^2), u = \ln x, v = e^{2x+5y}.$$

5. Знайти повні похідні функцій:

а) $u = \frac{e^{ax}(y-z)}{a^2+1}$, $z = a \cos x$, $y = \sin x$; б) $z = \ln(1-x^4-y^3)$, $x = \sin(u^4+v^2)$,
 $y = \arccos \sqrt{u^2v}$.

6. Довести, що функція $z = \ln(x^2 + y^2)$ задовольняє рівняння Лапласа

$$z''_{xx} + z''_{yy} = 0.$$

7. Довести, що якщо $z = \varphi(y+ax) + \psi(y-ax)$, то $a^2 z''_{yy} - z''_{xx} = 0$ при будь-яких двічі диференційованих функціях φ і ψ .

8. Довести, що функція $u = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + t^2}$ задовольняє рівняння

$$u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} + u''_{tt} = 0.$$

9. Обчислити диференціали 1-го і 2-го порядків функцій, заданих неявно:

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$, $z = z(x, y)$; б) $x^2 + y^2 + z^2 + z^4 = 2$, $z = z(x, y)$;

в) $z^4 + z + y^2x = 4$, $z = z(x, y)$.

10. Обчислити $\frac{\partial z}{\partial s}$ і $\frac{\partial z}{\partial t}$, якщо $z = x^3 + y^4$; $x + xy + y^3 = s^2 + t^2$;

$$e^{x+y} + x + 2y = st.$$

11. Обчислити $\frac{dx}{ds}$ і $\frac{dy}{ds}$, якщо $\begin{cases} x^3 + xy + t^3 = 0; \\ x^2 + e^{x+y} + y + t^5 = 0. \end{cases}$

12. Обчислити похідну функції $z = x^4 - 3x^2y^2 + y^3$ в точці $M(2; 1)$ за напрямком вектора $\vec{l} = \vec{i} + 2\vec{j}$.

13. Обчислити похідну функції $z = 3x^4 + 4xy^2 + 4x$ в точці $M(1; 1)$ за напрямком, що йде від цієї точки до точки $N(3; 4)$.

14. Обчислити похідну функції $u = 4z^4x + y^2z + 2xz^3$ в точці $M(1; 1; 2)$ за напрямком вектора $\vec{l} = 4\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$.

15. Обчислити похідну функції $zx^3 + 2yz^5 + zx^3y^2 - zy^4 = 0$, $z = z(x, y)$ в точці $M(1; 1; 1)$ за напрямком вектора $\vec{l} = 2\vec{i} - 5\vec{j} + 4\vec{k}$.

16. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $z = e^{-x^2-xy-2y^2}$ в точці $M(1; 1; e^{-11})$.

17. Написати рівняння дотичної площини і нормалі до поверхні $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 1$ в точці $M(1; 1; 2)$.

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

А хіба щось було задано?

Що кажуть про математику

«Математик при пошуку рішення математичних задач завжди дотримується якоїсь простої ідеї - геометричній, фізичній, аналітичній або, можливо, іншій, які і дають йому можливість передбачити і результат, і метод доведення» (А. Н. Колмогоров).

Максимум функції багатьох змінних. Визначення екстремуму функції. Необхідна умова екстремуму. Достатня умова екстремуму. Критерій Сильвестра. Умовний екстремум функції багатьох змінних. Постановка задачі. Умовний екстремум. Рішення задачі на умовний екстремум

3. ЕКСТРЕМУМ ФУНКЦІЇ БАГАТЬОХ ЗМІННИХ

3.1. Визначення екстремуму функції

Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ визначена в окілці точки $x^{(0)}$. Приріст для будь-якої точки цього окілку можна записати так:

$$\Delta u = f(x_1^{(0)} + \Delta x_1, x_2^{(0)} + \Delta x_2, \dots, x_m^{(0)} + \Delta x_m) - f(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}).$$

Def. Якщо в окілці будь-якої точки $x^{(0)}$ приріст Δu має один і той же знак, то кажуть, що в точці $x^{(0)}$ функція має екстремум, причому:

- якщо $\Delta u > 0$, то $x^{(0)}$ - точка мінімуму;
- якщо $\Delta u < 0$, то $x^{(0)}$ - точка максимуму.

Точки мінімуму і максимуму називають точками екстремуму.

3.2. Необхідна умова екстремуму

Th. (Необхідна умова екстремуму функції багатьох змінних). Якщо диференційована функція багатьох змінних має в точці $x^{(0)}$ екстремум, то всі її частинні похідні в цій точці дорівнюють нулю.

◀ За умовою функція є диференційованою в точці $x^{(0)}$. нехай функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ має екстремум в точці $x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$. Тоді щодо будь-якої точки $x^{(0)}$ функція як функція однієї змінної x_i має екстремум при $x_i = x_i^{(0)}$, а отже, її частинна похідна як похідна функції однієї змінної дорівнює нулю:

$$x_i = x^{(0)} \Rightarrow \frac{\partial f(x_i^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \text{ де } i = 1, \dots, m. \blacktriangleright$$

Def. Точка $x^{(0)}$, в якій всі частинні похідні дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial f(x_i^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \text{ де } i = 1, \dots, m,$$

називається стаціонарною.

Def. Точка $x^{(0)}$, в якій всі частинні похідні або дорівнюють нулю, або хоча б одна похідна не існує, називається критичною.

Зауваження. Стаціонарні та критичні точки називаються також точками можливого екстремуму.

3.3. Достатня умова екстремуму

Th. (Достатня умова екстремуму). Нехай функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ є така, що її двічі можна про диференціювати в точці $x^{(0)}$. Нехай всі частинні похідні 1-го порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$f'_{xi} = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

тоді функція $u = f(x)$ має екстремум в точці $x^{(0)}$, причому:

- якщо $d^2 u > 0$, то $x^{(0)}$ - точка мінімуму;

- якщо $d^2 u < 0$, то $x^{(0)}$ - точка максимуму.

◀ Напишемо для заданої функції формулу Тейлора з урахуванням доданків другого порядку:

$$f(x) = df(x^{(0)}) + \frac{d^2 f(x^{(0)})}{2!} + o(\rho^2).$$

оскільки $f'_{xi}(x^{(0)}) = 0 \Rightarrow df(x^{(0)}) = 0$, нагадаємо, що $df(x^{(0)}) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \Delta x_i$.

Отже,

$$f(x) = df(x^{(0)}) + \frac{d^2 f(x^{(0)})}{2!} + o(\rho^2),$$

$$f(x) - df(x^{(0)}) = \frac{d^2 f(x^{(0)})}{2!} + o(\rho^2).$$

Таким чином, знак приросту функції визначається знаком диференціала 2-го порядку:

$$d^2 f(x) > 0 \Rightarrow \Delta f(x^{(0)}) > 0 \Rightarrow \text{точка мінімуму};$$

$$d^2 f(x) < 0 \Rightarrow \Delta f(x^{(0)}) < 0 \Rightarrow \text{точка максимуму.} \blacktriangleright$$

3.4. Критерій Сильвестра

Розглянемо диференціал 2-го порядку заданої функції $f(x)$:

$$d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Delta x_j \Delta x_i.$$

Розглянемо окремі випадки.

1. При $m = 2$. запис

$$d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^2 \sum_{i=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Delta x_j \Delta x_i = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (\Delta x_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (\Delta x_2)^2$$

являє собою квадратичну форму щодо приросту Δx_1 і Δx_2 і характеризується квадратною матрицею (матрицею Гесса)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

2. При $m = 3$. запис

$$\begin{aligned} d^2 f(x^{(0)}) = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \Delta x_j \Delta x_i = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (\Delta x_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (\Delta x_2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} (\Delta x_3)^2 + \\ + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \Delta x_1 \Delta x_3 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \Delta x_2 \Delta x_3 \end{aligned}$$

характеризується квадратною матрицею (матрицею Гесса)

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}.$$

3. При $m = m$. Квадратну матрицю (матрицю Гесса) можна записати по аналогії з попередніми записами у вигляді

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}.$$

Відповідно до критерію Сильвестра можна стверджувати:

а) якщо всі головні мінори матриці квадратичної форми більше нуля, то відповідна квадратична форма строго додатна і, отже, функція в точці $x^{(0)}$ має мінімум;

б) якщо головні мінори матриці квадратичної форми знакозмінні, починаючи зі знаку «мінус», то відповідна квадратична форма строго від'ємна і, отже, функція в точці $x^{(0)}$ має максимум;

в) якщо випадок б) є нестрогим, то відповідна квадратична форма є не строго знакозмінною і потрібні додаткові дослідження;

г) в усіх інших випадках квадратична форма є знакозмінною і, отже, функція багатьох змінних не має екстремуму.

Зауваження. Під головними мінорами розуміють мінори, що визначаються головною діагоналлю. Наприклад, для заданої матриці

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

головні мінори мають вигляд

$$M_1 = |a_{11}|, \quad M_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

ПРИКЛАД. Дослідити функцію $f(x, y) = x^3 + y^3 - 9xy + 1$ на екстремум.

Рішення

1. Знаходимо точки можливого екстремуму:

$$f'_x = 0, \quad f'_y = 0;$$

$$\begin{cases} f'_x = 3x^2 - 9y = 0, & \begin{cases} x^2 - 3y = 0, \\ f'_y = 3y^2 - 9x = 0; \end{cases} \\ \end{cases} \quad \begin{cases} y^2 - 3x = 0; \end{cases}$$

$$y = \frac{x^2}{3}; \quad \frac{x^4}{9} - 3x = 0; \quad x^4 - 27x = 0; \quad x(x^3 - 27) = 0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 3.$$

Отже, $y_1 = 0$; $y_2 = 3$. Точки можливого екстремуму $A_1(0, 0)$, $A_2(3, 3)$.

2. Будуємо матрицю квадратичної форми диференціала 2-го порядку:

$$f''_{xx} = 6x, \quad f''_{xy} = -9, \quad f''_{yy} = 6y;$$

$$H = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{pmatrix}.$$

3. Для точки $A_1(0, 0)$ матриця Гесса $H = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}$.

Для цієї матриці головні мінори $M_1 = 0$, $M_2 = -81$.

У точці $A_1(0, 0)$ функція не має екстремуму (випадок «г»).

4. Для точки $A_2(3, 3)$ матриця Гесса $H = \begin{pmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{pmatrix}$.

Для цієї матриці головні мінори $M_1 = 18 > 0$, $M_2 = 18^2 - 9^2 > 0$.

У точці $A_2(3, 3)$ функція має локальний мінімум (випадок «а»).

5. Значення локального мінімуму:

$$f_{lok.min} = f(3,3) = 3^3 + 3^3 - 9 \cdot 3 \cdot 3 + 1 = 27 + 27 - 81 + 1 = 54 - 80 = 26.$$

3.5. Умовний екстремум функції багатьох змінних

Умовний екстремум потрібно розглядати як екстремум функції при додаткових умовах, накладених на функцію.

3.5.1. Постановка задачі

В деякій області $D \subset R^n$ визначені функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $i = 1, 2, \dots, m$, $m < n$.

Нехай в підмножині $E \subset D$ виконується рівність

$$\phi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

тобто виконується умова

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ \phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Визначити екстремум функції в області E при виконанні умови (*).

3.5.2. умовний екстремум

Def. Точка $x^{(0)}$ підмножини E , де виконується умова (*), називається умовним екстремумом функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо для всіх точок E приріст функції

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x) - f(x^{(0)})$$

зберігає знак. При цьому:

- якщо $\Delta f(x^{(0)}) > 0$, то точка $x^{(0)}$ називається умовним мінімумом;
- якщо $\Delta f(x^{(0)}) < 0$, то точка $x^{(0)}$ називається умовним максимумом.

Іншими словами, розглядається екстремум для пов'язаних точок.

Def. Система рівнянь (*) називається умовою зв'язку.

3.5.3. Рішення завдання на умовний екстремум

Існує два варіанти вирішення завдання на умовний екстремум:

1. Дослідження на екстремум з урахуванням рівнянь зв'язку.
2. Метод множників Лагранжа.

1. Дослідження на екстремум з урахуванням рівнянь зв'язку. Умова зв'язку

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

...

$$\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

являє собою систему m рівнянь з n невідомими. У деяких випадках деякі m змінних

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

можна виразити через $n - m$ змінних

$$x_i = \mu_i(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \text{ де } i = 1, \dots, m.$$

Підставивши ці значення в початкову функцію

$$u = f(\mu_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \mu_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, x_n),$$

отримують функцію $n - m$ незалежних змінних, яку досліджують на екстремум.

Зауваження. На підставі теорії неявної функції система $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ може бути вирішена, якщо в точці $x^{(0)}$ визначник не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_{x_1} & (\varphi_1)'_{x_2} & \dots & (\varphi_1)'_{x_m} \\ (\varphi_2)'_{x_1} & (\varphi_2)'_{x_2} & \dots & (\varphi_2)'_{x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_m)'_{x_1} & (\varphi_m)'_{x_2} & \dots & (\varphi_m)'_{x_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рекомендація. Метод використовується, якщо функції зв'язку лінійні щодо своїх змінних.

ПРИКЛАД. Визначити умовний екстремум $z = xy$ за умови $x + y = 1$.

Рішення

З заданої умови одержуємо $y = 1 - x$. Отже, $z = x(1 - x) = x - x^2$,

$$z'_x = 1 - 2x = 0, \quad x = \frac{1}{2}, \quad y = 1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad z''_{xx} = -2 < 0. \text{ Таким чином, } \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

- точка максимуму. значить,

$$z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Відповідь: умовний максимум функції $z = xy$ за умови $x + y = 1$ досягається в точці $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ і дорівнює $\frac{1}{4}$.

2. Метод множників Лагранжа. Алгоритм рішення:

а) функції зв'язку приводять до вигляду

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

б) будують допоміжну функцію

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

яка називається функцією Лагранжа і розглядається як функція змінних $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ в просторі R^{n+m} ;

в) знаходять точки, підозрілі на екстремум, з умовою

$$F'_{x_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$F'_{\lambda_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, m),$$

де λ_i - це числа, і тому функція F перетвориться в функцію змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$;

г) досліджують точки, підозрілі на екстремум, для чого застосовують критерій Сильвестра і досліджують диференціал 2-го порядку функції F .

ПРИКЛАД. Дослідити на екстремум функцію $z = xy$ за умови $x^2 + y^2 = 1$.

Рішення

Функції зв'язку напишемо у вигляді

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Будуємо допоміжну функцію Лагранжа:

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Знаходимо точки, підозрілі на екстремум, з умовою

$$F'_x = y + 2\lambda x = 0, \quad F'_y = x + 2\lambda y = 0, \quad F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0:$$

$$y = -2\lambda x, \quad x = -2\lambda y, \quad \frac{y}{x} = \frac{x}{y}, \quad y^2 = x^2;$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad x^2 + x^2 - 1 = 0, \quad 2x^2 = 1, \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \lambda = -\frac{y}{2x} = \pm \frac{1}{2}.$$

Визначаємо точки, підозрілі на екстремум:

$$T_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), \quad T_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \quad T_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), \quad T_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right).$$

Досліджуємо ці точки.

$$\text{Для точки } T_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right): \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow F\left(x, y, -\frac{1}{2}\right) = xy - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2};$$

$$F'_x = y - x, \quad F'_y = x - y, \quad F''_{xx} = -1, \quad F''_{yy} = -1, \quad F''_{xy} = 1.$$

Матриця квадратичної форми (матриця Гесса):

$$H = \begin{pmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори:

$$M_1 = |-1| = -1 < 0 \quad (\text{Це визначник}), \quad M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 0.$$

Це випадок *в* для критерія Сильвестра, і потрібні додаткові дослідження. Напишемо диференціал 2-го порядку:

$$d^2 F = F''_{xx} dx^2 + 2F''_{xy} dx dy + F''_{yy} dy^2 = -dx^2 + 2dx dy - dy^2 = -(dx - dy)^2$$

(при $dx = dy$ отримаємо $d^2 F = 0$, і ситуація не ясна).

Визначимо диференціали змінних у потрібній точці.

Напишемо диференціал умови $x^2 + y^2 - 1 = 0$:

$$2x \cdot dx + 2y \cdot dy = 0 \Rightarrow x \cdot dx + y \cdot dy = 0.$$

У точці $T_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{2}} dx + \frac{1}{\sqrt{2}} dy = 0 \Rightarrow dx = -dy.$$

Тоді

$$d^2 F = -(dx - dy)^2 = -(dx + dx)^2 = -4dx^2 < 0.$$

Отже, в точці T_1 - умовний максимум.

Точка, крапка $T_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$. Четверта точка має те ж значення $\lambda = -\frac{1}{2}$,

що і перша точка, тобто ту ж функцію Лагранжа:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{2}\right) = xy - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Тут точно так же по аналогії отримаємо $dx = -dy$, тобто в точці T_4 - умовний максимум.

Для точки $T_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$: $\lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow F\left(x, y, \frac{1}{2}\right) = xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}$;

$$F'_x = y + x, F'_y = x + y, F''_{xx} = 1, F''_{yy} = 1, F''_{xy} = 1.$$

Матриця квадратичної форми (матриця Гесса):

$$H = \begin{pmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори:

$$M_1 = 1 > 0 \text{ (це визначник)}, M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Критерій Сильвестра не працює, і потрібні додаткові дослідження.

Напишемо диференціал 2-го порядку:

$$d^2 F = F''_{xx} dx^2 + 2F''_{xy} dx dy + F''_{yy} dy^2 = dx^2 + 2dx dy + dy^2 = (dx + dy)^2.$$

З умови $x^2 + y^2 - 1 = 0$ маємо

$$2x dx + 2y dy = 0 \Rightarrow x dx + y dy = 0.$$

У точці $T_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$ отримуємо

$$\frac{1}{\sqrt{2}}dx - \frac{1}{\sqrt{2}}dy = 0 \Rightarrow dx = dy.$$

Тоді

$$d^2F = (dx + dy)^2 = 4dx^2 > 0.$$

Отже, в точці T_2 - умовний мінімум.

Точка $T_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right)$. Третя точка має те ж значення $\lambda = \frac{1}{2}$, що і друга точка, тобто ту ж функцію Лагранжа:

$$F\left(x, y, \frac{1}{2}\right) = xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Тут точно так же по аналогії отримаємо $dx = dy$, тобто в точці T_4 - умовний мінімум.

Значення функції $z = xy$ в цих точках:

$$z(T_1) = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \text{ (умовний максимум);}$$

$$z(T_2) = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} \text{ (умовний мінімум);}$$

$$z(T_3) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} \text{ (умовний мінімум);}$$

$$z(T_4) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \text{ (умовний максимум).}$$

3.6. Висновки

Def. Якщо для будь-якої точки в околі точок $x^{(0)}$ приріст Δu має один і той же знак, то кажуть, що в точці $x^{(0)}$ функція має екстремум, причому:

- якщо $d^2u > 0$, то $x^{(0)}$ - точка мінімуму;

- якщо $d^2u < 0$, то $x^{(0)}$ - точка максимуму.

Точки мінімуму і максимуму називають точками екстремуму.

Th. (Необхідна умова екстремуму функції багатьох змінних). Якщо диференційована функція багатьох змінних має в точці $x^{(0)}$ екстремум, то всі її приватні похідні в цій точці дорівнюють нулю.

Def. Крапка $x^{(0)}$, в якій всі приватні похідні дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial f(x^{(0)})}{\partial x_i} = 0, \text{ де } i = 1, \dots, m,$$

називається стаціонарною.

Def. Крапка $x^{(0)}$, в якій всі приватні похідні або дорівнюють нулю, або хоча б одна похідна не існує, називається критичною.

Зауваження. Стаціонарні та критичні точки називаються також точками можливого екстремуму.

Th. (Достатня умова екстремуму). нехай функція $u = f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ є двічі безперервно диференційовною в точці $x^{(0)}$. Нехай всі приватні похідні 1-го порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$f'_{xi} = 0, \quad i = 1, \dots, m,$$

тоді функція $u = f(x)$ має екстремум в точці $x^{(0)}$, Причому:

- якщо $d^2 u > 0$, то $x^{(0)}$ - точка мінімуму;

- якщо $d^2 u < 0$, то $x^{(0)}$ - точка максимуму.

Під матрицею Гесса будемо розуміти квадратну матрицю, складену з приватних похідних диференціала 2-го порядку, що представляє собою квадратичну форму відносно простоту незалежних змінних.

Для функції двох змінних диференціал 2-го порядку має вигляд

$$d^2 f(x^{(0)}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (\Delta x_1)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (\Delta x_2)^2.$$

Відповідна матриця Гесса має вигляд

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Для функції трьох змінних диференціал 2-го порядку має вигляд

$$\begin{aligned} d^2 f(x^{(0)}) = & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} (\Delta x_1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} (\Delta x_2)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} (\Delta x_3)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \Delta x_1 \Delta x_2 + \\ & + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \Delta x_1 \Delta x_3 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \Delta x_2 \Delta x_3. \end{aligned}$$

Матриця Гесса має вигляд

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}.$$

Для загального випадку $m = n$ матриця Гесса має вигляд

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{pmatrix}.$$

Відповідно до критерію Сильвестра можна стверджувати:

а) якщо всі головні мінори матриці квадратичної форми більше нуля, то відповідна квадратична форма строго позитивна і, отже, функція в точці $x^{(0)}$ має мінімум;

б) якщо головні мінори матриці квадратичної форми знакозмінні, починаючи зі знака «мінус», то відповідна квадратична форма строго негативно визначена і, отже, функція в точці $x^{(0)}$ має максимум;

в) якщо випадок б є нестрогим, то відповідна квадратична форма є нестрого знакозмінною і потрібні додаткові дослідження;

г) в усіх інших випадках квадратична форма є знакозмінною і, отже, функція багатьох змінних не має екстремуму.

Зауваження. Під головними мінорами розуміють мінори, що визначаються головною діагоналлю.

Умовний екстремум можна розглядати як екстремум функції при додаткових умовах, потрібно розглядати як екстремум функції при додаткових умовах, накладених на функцію.

Постановка задачі. В деякій області $D \subset \mathbb{R}^n$ визначені функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $i = 1, 2, \dots, m$, $m < n$.

Нехай в підмножині $E \subset D$ виконується рівність

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \quad (*)$$

Визначити екстремум функції у області E при виконанні умови (*).

Def. Точка $x^{(0)}$ підмножини E , де виконується умова (*), називається умовним екстремумом функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо для всіх точок E приріст функції

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x) - f(x^{(0)})$$

Зберігає знак. При цьому:

– якщо $\Delta f(x^{(0)}) > 0$, то точка $x^{(0)}$ називається умовним мінімумом;

– якщо $\Delta f(x^{(0)}) < 0$, то точка $x^{(0)}$ називається умовним максимумом.

Іншими словами, розглядається екстремум для пов'язаних точок..

Def. Система рівнянь (*) називається умовою зв'язку.

При рішенні задачі на умовний екстремум методом множників Лагранжа алгоритм наступний:

а) функції зв'язку приводять до виду

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

б) будують допоміжну функцію

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

яка називається функцією Лагранжа і розглядають її як функцію змінних $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ у просторі R^{n+m} ;

в) знаходять точки, підозрілі на екстремум, з умовою

$$F'_{x_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$F'_{\lambda_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, m),$$

де λ_i – це числа, і тому функція F перетворюється у функцію змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$;

г) досліджують точки, підозрілі на екстремум, для чого використовують критерій Сильвестра, досліджують диференціал 2-го порядку функції F .

Перерва

В садку нам кажуть, що не можна з 3 відняти 5, в школі виявляється, що можна, в школі нам кажуть, що не можна поділити нуль на нуль, в інституті виявляється, що можна. Боюся йти в аспірантуру, раптом мені там ТАКЕ розкажуть

3.7. Питання для перевірки знань

1. Точка екстремуму функції кількох змінних - це така точка, в околиці якої приріст функції:

а) зберігає знак; б) змінює знак; в) дорівнює нулю.

2. Функція декількох змінних в точці x_0 має локальний максимум, якщо приріст функції відносно будь-якої точки окілку точки x_0 :

а) від'ємний; б) додатній; в) дорівнює нулю.

3. Функція декількох змінних в точці x_0 має локальний мінімум, якщо приріст функції відносно будь-якої точки окілку точки x_0 :

а) від'ємний; б) додатній; в) дорівнює нулю.

4. Точки мінімуму і максимуму називають:

а) точками екстремуму; б) точками мінімакса; в) особливими.

5. Стаціонарної точкою називається точка, в якій:

а) похідна відсутня; б) похідна дорівнює нулю; в) перша і друга похідні одного знака.

6. Необхідні умови екстремуму функції кількох змінних:

а) частинні похідні функції додатні; б) частинні похідні функції від'ємні; в) частинні похідні функції дорівнюють нулю.

7. Достатньою умовою екстремуму функції кількох змінних є те, що диференціал 2-го порядку функції в околі точки:

а) має постійний знак; б) дорівнює нулю; в) змінює знак.

8. Точка, в якій частинні похідні 1-го порядку дорівнюють нулю і диференціал 2-го порядку додатний, називається:

а) точкою мінімуму; б) точкою максимуму; в) стаціонарною.

9. Точка, в якій частинні похідні 1-го порядку дорівнюють нулю і диференціал 2-го порядку від'ємний, називається:

а) точкою мінімуму; б) точкою максимуму; в) стаціонарною.

10. Диференціал 2-го порядку в околиці точки локального максимуму:

а) має додатний знак; б) має від'ємний знак; в) дорівнює нулю.

11. Виберіть правильний запис матриці квадратичної форми для функції трьох змінних:

а)
$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & 1 & 1 \\ 1 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & 1 \\ 1 & 1 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}; \text{ б) } \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}; \text{ в) } \begin{pmatrix} 1 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & 1 & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} & 1 \end{pmatrix}.$$

12. Виберіть правильне твердження критерія Сильвестра функції декількох змінних для додаткових досліджень локального екстремуму на мінімум. Всі головні мінори квадратичної форми для обраної точки:

а) не строго знакозмінні, починаючи зі знаку «мінус»; б) строго знакозмінними, починаючи зі знаку «мінус»; в) строго додатні.

13. Функція декількох змінних в точці має локальний мінімум, якщо головні мінори матриці Сильвестра в цій точці:

а) строго від'ємні; б) не строго від'ємні; в) строго додатні.

14. Функція декількох змінних в точці має локальний максимум, якщо головні мінори матриці Сильвестра в цій точці:

а) починаючи з першого додатного, всі строго додатні; б) починаючи з першого додатного, всі не строго додатні; в) починаючи з першого від'ємного, строго знакозмінні.

3.8. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Дослідити на екстремум функції двох змінних:

а) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$; б) $z = x^2 y^3 (6 - x - y)$; в) $z = (x^2 + y^2) e^{-(x^2 + y^2)}$;

г) $z = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2$; д) $z = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y} \quad (x > 0, y > 0)$;

е) $z = e^{2x+3y} (8x^2 - 6xy + 3y^2)$; ж) $z = x^2 + xy + y^2 - 4 \ln x - 10 \ln y$.

2. Дослідити на екстремум функції трьох змінних:

а) $u = x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 4y - 6z$; б) $u = x + \frac{y^2}{4x} + \frac{z^2}{y} + \frac{2}{z}$.

3. Дослідити на екстремум функції $z = z(x, y)$, заданих неявно:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 10 = 0$; б) $x^2 + y^2 + z^2 - xz - yz + 2x + 2y - 2 = 0$;

в) $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 4(x^2 + y^2 - z^2)$.

3.9. Самостійна робота

3.9.1. Умовний екстремум функції багатьох змінних

Умовний екстремум потрібно розглядати як екстремум функції при додаткових умовах, накладених на функцію.

3.9.2. Постановка задачі

В деякій області $D \subset R^n$ визначені функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $i = 1, 2, \dots, m$, $m < n$.

Нехай в підмножині $E \subset D$ виконується рівність

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

т. е. виконується умова

$$\begin{cases} \phi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \phi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \\ \dots \\ \phi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. \end{cases} \quad (*)$$

Визначити екстремум функції в області E при виконанні умови (*).

3.9.3. Умовний екстремум

Def. Точка $x^{(0)}$ підмножини E , Т. Е. Де виконується умова (*), називається умовною екстремумів функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, Якщо для всіх точок E приріст функції

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x) - f(x^{(0)})$$

зберігає знак. При цьому:

- якщо $\Delta f(x^{(0)}) > 0$, То точка $x^{(0)}$ називається умовним мінімумом;
- якщо $\Delta f(x^{(0)}) < 0$, То точка $x^{(0)}$ називається умовним максимумом.

Іншими словами, розглядається екстремум для пов'язаних точок.

Def. Система рівнянь (*) називається умовою зв'язку.

3.9.4. Рішення завдання на умовний екстремум

Існує два варіанти вирішення завдання на умовний екстремум:

1. Дослідження на екстремум з урахуванням рівнянь зв'язку.
2. Метод множників Лагранжа.

1. Дослідження на екстремум з урахуванням рівнянь зв'язку. Умова зв'язку

$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0,$$

...

$$\varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

являє собою систему m рівнянь з n невідомими. У деяких випадках якісь m змінних

$$x_1, x_2, \dots, x_m$$

можна виразити через $n - m$ змінних

$$x_i = \mu_i(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \text{ де } i = 1, \dots, m.$$

Підставивши ці значення в початкову функцію

$$u = f(\mu_1(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \mu_2(x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n), \dots, x_{m+1}, x_{m+2}, x_n),$$

отримують функцію $n - m$ незалежних змінних, яку досліджують на екстремум.

Зауваження. На підставі теорії неявної функції система $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$ може бути вирішена, якщо в точці $x^{(0)}$ визначник не дорівнює нулю:

$$\begin{vmatrix} (\varphi_1)'_{x_1} & (\varphi_1)'_{x_2} & \dots & (\varphi_1)'_{x_m} \\ (\varphi_2)'_{x_1} & (\varphi_2)'_{x_2} & \dots & (\varphi_2)'_{x_m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_m)'_{x_1} & (\varphi_m)'_{x_2} & \dots & (\varphi_m)'_{x_m} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рекомендація. Метод використовується, якщо функції зв'язку лінійні щодо своїх змінних.

ПРИКЛАД. Визначити умовний екстремум $z = xy$ за умови $x + y = 1$.

Рішення

З заданої умови $y = 1 - x$. отже, $z = x(1 - x) = x - x^2$,

$z'_x = 1 - 2x = 0$, $x = \frac{1}{2}$, $y = 1 - x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $z''_{xx} = -2 < 0$. Таким чином, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ - то-

чка максимуму. значить,

$$z\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Відповідь: умовний максимум функції $z = xy$ за умови $x + y = 1$ досягається в точці $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ і дорівнює $\frac{1}{4}$.

2. Метод множників Лагранжа. Алгоритм рішення:

а) функції зв'язку приводять до вигляду

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

б) будують допоміжну функцію

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

яка називається функцією Лагранжа і розглядається як функція змінних $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ в просторі R^{n+m} ;

в) знаходять точки, підозрілі на екстремум, з умовою

$$F'_{x_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$F'_{\lambda_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, m),$$

де λ_i - це числа, і тому функція F перетворюється в функцію змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$;

г) досліджують точки, підозрілі на екстремум, для чого застосовують критерій Сильвестра і досліджують диференціал 2-го порядку функції F .

ПРИКЛАД. Дослідити на екстремум функцію $z = xy$ за умови $x^2 + y^2 = 1$.

Рішення

Функції зв'язку наводимо до виду

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

Будуємо допоміжну функцію Лагранжа:

$$F(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1).$$

Знаходимо точки, підозрілі на екстремум, з умовою

$$F'_x = y + 2\lambda x = 0, F'_y = x + 2\lambda y = 0, F'_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0:$$

$$y = -2\lambda x, x = -2\lambda y, \frac{y}{x} = \frac{x}{y}, y^2 = x^2;$$

$$x^2 + y^2 - 1 = 0, x^2 + x^2 - 1 = 0, 2x^2 = 1, x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \lambda = -\frac{y}{2x} = \pm \frac{1}{2}.$$

Визначаємо точки, підозрілі на екстремум:

$$T_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right), T_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), T_3\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right), T_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right).$$

Досліджуємо їх.

для точки $T_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right): \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow F\left(x, y, -\frac{1}{2}\right) = xy - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2};$

$$F'_x = y - x, F'_y = x - y, F''_{xx} = -1, F''_{yy} = -1, F''_{xy} = 1.$$

Матриця квадратичної форми (матриця Гесса):

$$H = \begin{pmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори:

$$M_1 = |-1| = -1 < 0 \text{ (Це визначник)}, M_2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1) - 1 \cdot 1 = 0.$$

Це випадок в для критерію Сильвестра, і потрібні додаткові дослідження.

Напишемо диференціал 2-го порядку:

$$d^2F = F''_{xx}dx^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}dy^2 = -dx^2 + 2dxdy - dy^2 = -(dx - dy)^2$$

(при $dx = dy$ отримаємо $d^2F = 0$, і ситуація не ясна).

Визначимо диференціали змінних на потрібній точці.

Продиференціюємо умову $x^2 + y^2 - 1 = 0$:

$$2x \cdot dx + 2y \cdot dy = 0 \Rightarrow x \cdot dx + y \cdot dy = 0.$$

У точці $T_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$ отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{2}}dx + \frac{1}{\sqrt{2}}dy = 0 \Rightarrow dx = -dy.$$

тоді

$$d^2F = -(dx - dy)^2 = -(dx + dx)^2 = -4dx^2 < 0.$$

Отже, в точці T_1 - умовний максимум.

Крапка $T_4\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{2}\right)$. Четверта точка має те ж значення $\lambda = -\frac{1}{2}$, Що і

перша точка, т. Е. Ту ж функцію Лагранжа:

$$F\left(x, y, -\frac{1}{2}\right) = xy - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{1}{2}.$$

Тут точно так же по аналогії отримаємо $dx = -dy$, Т. Е. В точці T_4 - умовний максимум.

для точки $T_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\right): \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow F\left(x, y, \frac{1}{2}\right) = xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2};$

$$F'_x = y + x, F'_y = x + y, F''_{xx} = 1, F''_{yy} = 1, F''_{xy} = 1.$$

Матриця квадратичної форми (матриця Гесса):

$$H = \begin{pmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} \\ F''_{yx} & F''_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори:

$$M_1 = 1 > 0 \text{ (Це визначник)}, M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Критерій Сильвестра не працює, і потрібні додаткові дослідження.

Напишемо диференціал 2-го порядку:

$$d^2 F = F''_{xx} dx^2 + 2F''_{xy} dx dy + F''_{yy} dy^2 = dx^2 + 2dx dy + dy^2 = (dx + dy)^2.$$

з $x^2 + y^2 - 1 = 0$ отримаємо

$$2x dx + 2y dy = 0 \Rightarrow x dx + y dy = 0.$$

У точці $T_2 \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$ отримаємо

$$\frac{1}{\sqrt{2}} dx - \frac{1}{\sqrt{2}} dy = 0 \Rightarrow dx = dy.$$

тоді

$$d^2 F = (dx + dy)^2 = 4dx^2 > 0.$$

Отже, в точці T_2 - умовний мінімум.

Крапка $T_3 \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2} \right)$. Третя точка має те ж значення $\lambda = \frac{1}{2}$, Що і друга

точка, т. Е. Ту ж функцію Лагранжа:

$$F\left(x, y, \frac{1}{2}\right) = xy + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}.$$

Тут точно так же по аналогії отримаємо $dx = dy$, Т. Е. В точці T_4 - умовний мінімум.

значення функції $z = xy$ в цих точках:

$$z(T_1) = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \text{ (Умовний максимум);}$$

$$z(T_2) = z\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} \text{ (Умовний мінімум);}$$

$$z(T_3) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2} \text{ (Умовний мінімум);}$$

$$z(T_4) = z\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} \text{ (Умовний максимум).}$$

3.9.5. Висновки

Умовний екстремум потрібно розглядати як екстремум функції при додаткових умовах, накладених на функцію.

Постановка задачі для умовного екстремуму. В деякій області $D \subset R^n$ визначені функції $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ і $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, де $i = 1, 2, \dots, m$, $m < n$.

Нехай в підмножині $E \subset D$ виконується рівність

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0. (*)$$

Визначити екстремум функції в області E при виконанні умови (*).

Def. Точка $x^{(0)}$ підмножини E , тобто, де виконується умова (*), називається точкою умовного екстремуму функції $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, якщо для всіх точок E приріст функції

$$\Delta f(x^{(0)}) = f(x) - f(x^{(0)})$$

зберігає знак. При цьому:

- якщо $\Delta f(x^{(0)}) > 0$, то точка $x^{(0)}$ називається умовним мінімумом;
- якщо $\Delta f(x^{(0)}) < 0$, то точка $x^{(0)}$ називається умовним максимумом.

Іншими словами, розглядається екстремум для пов'язаних точок.

Def. Система рівнянь (*) називається умовою зв'язку.

При вирішенні задачі на умовний екстремум методом множників Лагранжа алгоритм наступний:

а) функції зв'язку приводять до вигляду

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0;$$

б) будують допоміжну функцію

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i \varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

яка називається функцією Лагранжа і розглядається як функція змінних $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ в просторі R^{n+m} ;

в) знаходять точки, підозрілі на екстремум, з умовою

$$F'_{x_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, n),$$

$$F'_{\lambda_j} = 0 \quad (j = 1, \dots, m),$$

де λ_i - це числа, і тому функція F перетвориться в функцію змінних $x_1, x_2, \dots, x_n$;

г) досліджують точки, підозрілі на екстремум, для чого застосовують критерій Сильвестра, досліджують диференціал 2-го порядку функції F .

3.9.6. Питання для перевірки знань

1. Умовний екстремум - це:

а) екстремум функції при виконанні додаткових заданих умов; б) екстремум функції, що забезпечує виконання певної умови; в) екстремум функції, який відповідає якійсь умові.

2. Задані умовності в задачі на умовний екстремум називають:

а) умовою екстремуму; б) умовою зв'язку; в) додатковими умовами.

3.9.7. Практичні задачі

1. Знайти умовний екстремум функцій:

- а) $z = x^2 + y^2$, якщо $x + y = 1$; б) $z = x^2 + 12xy + 2y^2$, якщо $4x^2 + y^2 = 25$;
в) $u = x - 2y + 2z$, якщо $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. г) $z = e^{x+2y}$, якщо $2x^2 + 2xy + y^2 = 5$;
д) $z = x^2 + 3y^2$, якщо $x^2 + xy + 2y^2 = 14$; є) $u = xy^2z^3$, якщо $x + 2y + 3z = 1, x > 0, y > 0, z > 0$.

3.10. Самостійна практична робота

1. Дослідити на екстремум функції двох змінних:

- а) $z = x^2 + xy + y^2 + y^3 + x - 22y$; б) $z = x^3 + y^3 - 3xy$; в) $z = xy \ln(x^2 + y^2)$;
г) $z = (5 - 2x + y)e^{-x^2 - y}$; д) $z = x^3 + xy + 2x - y$;
е) $z = e^{-(x^2 + xy + y^2)}(5x^2 + 7y - 25)$; ж) $z = x - 2y + \ln \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \arctg \frac{x}{y}$.

2. Дослідити на екстремум функції трьох змінних:

- а) $u = x^2 + y^2 + z^2 - xy + x - 2z$; б) $u = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$.

3. Дослідити на екстремум функції $z = z(x, y)$, заданих неявно:

- а) $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0$; б) $x^2 + 2xy + 4y^2 + 2xz + 6z^2 = 90$;
в) $5x^2 + 5y^2 + 5z^2 - 2xy - 2xz - 2yz - 72 = 0$.

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

У мене не працював Інтернет.

Що кажуть про математику

«Там де можна застосувати математичний підхід до проблем, наука змушена користуватися особливою мовою, свого роду стенографією абстрактної думки, формули якої, коли вони правильно записані, не залишають місця ні для якої невизначеності, ні для якого неточного тлумачення» (Луї де Бройль).

Прості диференціальні рівняння. Загальні визначення. Диференціальні рівняння 1-го порядку. Рівняння з відокремлюваними змінними. Однорідні рівняння. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку. Основні визначення. Метод варіації довільної сталої. Рівняння Бернуллі. Рівняння в повних диференціалах

4. ПРОСТІ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

4.1. Загальні визначення

Def. Під простим диференціальним рівнянням будемо розуміти рівняння, яке містить невідому функцію однієї змінної та її похідні.

Такі рівняння можуть позначатися у вигляді

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Def. Під порядком диференціального рівняння розуміють найбільший порядок похідної, що міститься в рівнянні.

Наприклад, рівняння $y'' + 5y'x - y^3 + x = 0$ називають простим диференціальним рівнянням 2-го порядку.

Def. Під рішенням диференціального рівняння розуміють таку функцію, при підстановці якої у це рівняння воно перетворюється в тотожність.

Зауваження. Рівняння, що містять невідому функцію багатьох змінних і її частинні похідні, розглядаються в розділі «Рівняння математичної фізики».

4.2. Диференціальні рівняння 1-го порядку

Def. Диференціальне рівняння, що містить тільки похідну 1-го порядку, називається диференціальним рівнянням 1-го порядку.

Загальна запис рівняння 1-го порядку має вигляд

$$f(x, y, y') = 0.$$

Диференціальне рівняння може бути представлене і як рівняння, визначене відносно похідної:

$$y' = f(x, y).$$

В цьому випадку геометричний сенс диференціального рівняння 1-го порядку можна представити як завдання в кожній точці декартової системи координат значення похідної (рис. 4.1) (геометричний зміст похідної - це тангенс кута нахилу дотичної до кривої в заданій точці). Отже, в кожній точці декартової системи координат задано тангенс кута нахилу дотичної до деяких невідомим кривих. Рішення диференціального рівняння в цьому випадку полягає в тому, щоб за заданими кутами дотичних в точках побудувати криві (рис. 4.2). Ці криві представляються функціями, які є рішенням диференціального рівняння.

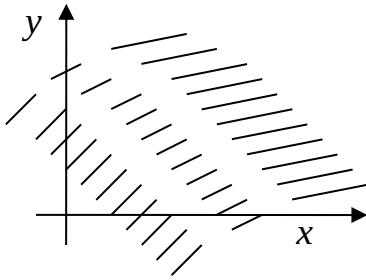


Рисунок 4.1

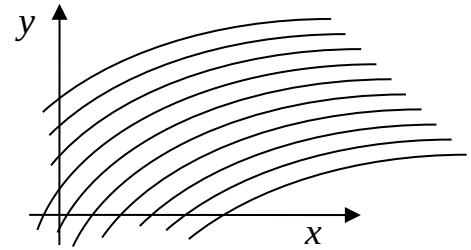


Рисунок 4.2

Диференціальне рівняння 1-го порядку, визначене відносно похідної

$$y' = f(x, y),$$

можна уявити і в диференціальній формі:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow dy = f(x, y)dx.$$

Інтегрування такого рівняння в загальному випадку призводить до нескінченної безлічі рішень.

ПРИКЛАД. Рішенням рівняння $y' = \cos x$ є функція $y = \sin x + C$, де C - будь-яка константа.

Щоб отримати конкретне рішення з загальної множини, необхідно ввести додаткову умову. Для цього, наприклад, задають умову, що при $x = x_0$ рішення має вигляд $y = y_0$. Це записують у вигляді

$$y(x_0) = y_0 \text{ або } y \Big|_{x=x_0} = y_0.$$

Така умова називається початковою.

Def. Спільним рішенням диференціального рівняння 1-го порядку будемо називати функцію $y = y(x, C)$, що містить довільну константу і задовольняє умовам:

1) функція $y(x, C)$ є рішенням диференціального рівняння при будь-якому фіксованому C ;

2) яким би не було початкова умова $y(x_0) = y_0$, можна знайти таке значення константи $C = C_0$, що функція $y = y(x, C_0)$ буде задовольняти заданій початковій умові.

Def. Частинним рішенням диференціального рівняння 1-го порядку будемо називати функцію $y = y(x, C_0)$, отриману із загального рішення $y = y(x, C)$ для конкретного значення C_0 .

З геометричної точки зору, загальне рішення - це сукупність всіх інтегральних кривих, частинне рішення - це одна крива з сукупності всіх кривих загального рішення.

Задання диференціального рівняння спільно з початковими умовами називається задачею Коші:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y), \\ y(x_0) &= y_0. \end{aligned}$$

У теоремі про існування та єдиний розв'язок задачі Коші стверджується, що якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ і її похідна по y в заданій точці неперервні, то задача Коші має рішення, причому єдине.

При вирішенні диференціального рівняння 1-го порядку можна виділити такі випадки:

- рівняння з відокремленими змінними;
- однорідні рівняння k -го порядку;
- лінійні рівняння;
- рівняння в повних диференціалах.

4.3. Рівняння з відокремленими змінними

Def. Рівнянням з відокремленими змінними називається рівняння, яке можна представити у вигляді

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0.$$

Тут змінні x та y розділені. До такого виду можуть бути приведені рівняння:

а) $y' = f(x)g(y)$;

б) $n_1(x)m_1(y)dx + n_2(x)m_2(y)dy = 0$.

Рішення рівняння отримують інтегруванням його частин.

ПРИКЛАД. Розв'язати диференціальне рівняння $yy' = \frac{1-2x}{y}$.

Розв'язання

$$y^2 y' = 1 - 2x; \quad y^2 dy = (1 - 2x)dx; \quad \int y^2 dy = \int (1 - 2x)dx;$$

$$\frac{y^3}{3} = x - x^2 + C.$$

Відповідь: $\frac{y^3}{3} = x - x^2 + C$.

Зауваження 1. Якщо навіть один з інтегралів, що одержали при рішенні не береться, все-таки вважається, що рішення отримано. Рішення, записане разом з інтегралом, називається рішенням в квадратурі.

ПРИКЛАД. Розв'язати диференціальне рівняння $e^{x^2} y' + \ln y = 0$.

Рішення

$$e^{-x^2} dx + \frac{dy}{\ln y} = 0; \int e^{-x^2} dx + \int \frac{dy}{\ln y} = C.$$

Ця запис і вважається рішенням рівняння.

Зауваження 2. Перетворення рівняння, коли обидві його частини ділять на вираз, що містить невідомі x та y , може приводити до втрати рішення. Це потребує перевірки цих виразів на рішення.

ПРИКЛАД. Розв'язати диференціальне рівняння $x^2 y^2 y' + 1 = y$.

Рішення

$$x^2 y^2 y' + 1 = y \Rightarrow x^2 y^2 \frac{dy}{dx} = y - 1 \Rightarrow \frac{y^2}{y - 1} dy = \frac{dx}{x^2} \Rightarrow y - 1 \neq 0 \text{ і } x \neq 0;$$

$$\int \frac{y^2}{y - 1} dy = \int \frac{dx}{x^2}; \int \left(y + 1 + \frac{1}{y - 1} \right) dy = -\frac{1}{x} + C; \frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| = -\frac{1}{x} + C.$$

Необхідно перевірити, чи є рішеннями рівняння $x^2 y^2 y' + 1 = y$ прямі $y = 1$ та $x = 0$.

Перевірка:

а) $x = 0$: $0 + 1 \neq y$, Т. Е. Пряма $x = 0$ не є рішенням вихідного рівняння;

б) $y = 1$: $y' = 0$, $x^2 \cdot 1 \cdot 0 + 1 = 1$, Т. Е. Пряма $y = 1$ є рішенням рівняння.

Відповідь:
$$\begin{cases} \frac{y^2}{2} + y + \ln|y - 1| = -\frac{1}{x} + C; \\ y = 1. \end{cases}$$

Зауваження 3. Рівняння виду $y' = f(ax + by)$ перетворюється до рівняння з відокремленими змінними заміною $z = ax + by$ або $z = ax + by + c$. В цьому випадку $z' = a + by'$.

ПРИКЛАД. Розв'язати диференціальне рівняння $y' = \sqrt{4x + 2y - 1}$.

Рішення

$$z = 4x + 2y - 1; z' = 4 + 2y'; y' = \sqrt{z}; z' = 4 + 2\sqrt{z}; \frac{dz}{4 + 2\sqrt{z}} = dx; \int \frac{dz}{4 + 2\sqrt{z}} = \int dx;$$

$$\int \frac{dz}{4 + 2\sqrt{z}} = \left| \begin{matrix} z = t^2 \\ dz = 2tdt \end{matrix} \right| = \int \frac{2tdt}{4 + 2t} = \int \frac{tdt}{2 + t} = \int \frac{2 + t - 2}{2 + t} dt = \int \left(1 - \frac{2}{2 + t} \right) dt =$$
$$= t - 2 \ln|2 + t| = \left| t = \sqrt{z} \right| = \sqrt{z} - 2 \ln|2 + \sqrt{z}|;$$

$$\sqrt{z} - 2 \ln|2 + \sqrt{z}| = x + C \Rightarrow \sqrt{4x + 2y - 1} - 2 \ln|2 + \sqrt{4x + 2y - 1}| = x + C.$$

Відповідь:
$$\sqrt{4x + 2y - 1} - 2 \ln|2 + \sqrt{4x + 2y - 1}| = x + C$$

4.4. Однорідні рівняння

Є декілька визначень відносно однорідності. У нашому випадку ми користуємося наступним визначенням.

Def. Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією k -го порядку, якщо виконується умова

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Наприклад, визначаємо однорідність функції $f(x, y) = x^3 + 2x^2y$:

$$f(tx, ty) = x^3 t^3 + 2x^2 t^2 y t = t^3 (x^3 + 2x^2 y).$$

Отже, запропонована функція - однорідна функція 3-го порядку.

Def. Однорідним диференціальним рівнянням називається диференціальне рівняння виду

$$M(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

де $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – однорідні функції своїх аргументів одного і того ж порядку.

Однорідні рівняння можна представити у вигляді

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

При розв'язку однорідного рівняння виконують наступну заміну змінної:

$$y = tx, \text{ де } y = y(t, x), t = t(x).$$

Тоді $dy = xdt + tdx$ або $y' = xt' + t$.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $(x + y)dx + (x - y)dy = 0$.

Рішення

Маємо рівняння

$$(tx + ty)dx + (tx - ty)dy = 0; t((x + y)dx + (x - y)dy) = 0,$$

яке є однорідним. Тому $y = tx$, де $y = y(t, x)$, $t = t(x)$, $dy = xdt + tdx$. Провівши заміну змінних, отримуємо:

$$(x + tx)dx + (x - tx)(xdt + tdx) = 0; xdx + txdx + x^2dt + xtdx - tx^2dt - t^2xdx = 0;$$

$$dx + tdx + xdt + tdx - txdt - t^2dx = 0; (1 + 2t - t^2)dx + x(1 - t)dt = 0;$$

$$\frac{dx}{x} = -\frac{t-1}{t^2-2t-1}dt; \int \frac{dx}{x} = -\frac{1}{2} \int \frac{d(t^2-2t-1)}{t^2-2t-1};$$

$$\ln|Cx| = -\frac{1}{2} \ln|t^2-2t-1|; Cx = \frac{1}{\sqrt{t^2-2t-1}}; Cx = \frac{x}{\sqrt{y^2-2yx-x^2}};$$

$$C\sqrt{y^2-2yx-x^2} = 1.$$

Відповідь: $C\sqrt{y^2-2yx-x^2} = 1$

Зауваження 4. Рівняння виду

$$y' = f\left(\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{A_2 x + B_2 y + C_2}\right)$$

також можна привести до однорідного.

Якщо уявити чисельник і знаменник як дві прямі на площині

$$\sigma_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 ; \sigma_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 ,$$

то можливі два варіанти:

а) прямі перетинаються, т. е. $\sigma_1 \cap \sigma_2 = M$; в цьому випадку приведення до однорідного рівняння відбувається при переході до нової системи координат XMY , Центр якої розташований в точці M – точці перетину прямих σ_1 і σ_2 :

$$x = a + X ;$$

$$y = b + Y ,$$

де (a, b) – координати точки M ;

б) прямі паралельні, т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda ,$$

тоді рівняння можна представити у вигляді

$$y' = f\left(\frac{\lambda(A_2 x + B_2 y) + C_1}{A_2 x + B_2 y + C_2}\right) = \varphi(A x + B y)$$

і розв'язати його як рівняння з роздільними щодо змінної $z = A x + B y$ або $z = A x + B y + C$.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння виду $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

Рішення

Визначимо координати точки M – центру нової системи координат XMY - і проведемо заміну змінних:

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0; \\ x + y - 3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1; \\ y = 2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + X; \\ y = 2 + Y; \end{cases} \Rightarrow dx = dX, dy = dY;$$

$$(2(1 + X) - 4(2 + Y) + 6)dX + (1 + X + 2 + Y - 3)dY = 0;$$

$$(2X - 4Y)dX + (X + Y)dY = 0.$$

Це однорідне рівняння. Введемо нові змінні: $Y = tX$, $dY = Xdt + t dX$. далі:

$$(2X - 4Xt)dX + (X + Xt)(Xdt + t dX) = 0; (2 - 4t)dX + (1 + t)(Xdt + t dX) = 0;$$

$$(t^2 - 3t + 2)dX + X(1 + t)dt = 0; \frac{1 + t}{t^2 - 3t + 2}dt = -\frac{dX}{X};$$

$$-\int \frac{dX}{X} = \int \frac{1 + t}{t^2 - 3t + 2}dt; -\ln|x| = \int \frac{1 + t}{t^2 - 3t + 2}dt = \int \left(\frac{3}{t - 2} - \frac{2}{t - 1}\right)dt =$$

$$= 3\ln|t - 2| - 2\ln|t - 1| - \ln C = \ln \left| \frac{(t - 2)^3}{C(t - 1)^2} \right|;$$

$$\frac{(t-2)^3}{(t-1)^2} = \frac{C}{x}; \quad t = \frac{Y}{X} = \left(\frac{y-2}{x-1}\right); \quad \frac{\left(\frac{y-2}{x-1}-2\right)^3}{\left(\frac{y-2}{x-1}-1\right)^2} = \frac{C}{x}; \quad \frac{(y-2x)^3}{(y-x-1)^2} = C \frac{x-1}{x}.$$

Відповідь: Розв'язок рівняння $\frac{(y-2x)^3}{(y-x-1)^2} = C \frac{x-1}{x}$

4.5. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку

4.5.1. Основні визначення

Def. Диференціальним лінійним рівнянням 1-го порядку називається диференціальне рівняння яке лінійне щодо y і y' .

Диференціальне лінійне рівняння 1-го порядку має вигляд

$$y' + P(x)y = f(x).$$

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння називається однорідним лінійним рівнянням 1-го порядку.

Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння називається неоднорідним лінійним рівнянням 1-го порядку.

Зауваження 1. Рівняння може бути представлено і у вигляді

$$N(x)y' + Q(x)y + M(x) = 0.$$

Так, як це рівняння може бути перетворене до вигляду

$$y' + \frac{Q(x)}{N(x)}y + \frac{M(x)}{N(x)} = 0 \Rightarrow y' + \frac{Q(x)}{N(x)}y = -\frac{M(x)}{N(x)},$$

тобто до рівняння, яке було представлено спочатку.

Одним з методів вирішення лінійного диференціального рівняння є метод варіації довільної сталої.

4.5.2. Метод варіації довільної сталої

Задано лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку

$$y' + P(x)y = f(x).$$

1. Шукаємо рішення відповідного однорідного диференціального рівняння

$$y' + P(x)y = 0.$$

Це диференціальне рівняння з відокремленими змінними, і його рішення знаходимо наступним чином:

$$\begin{aligned} y' = -P(x)y &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -P(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C| \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx \Rightarrow \frac{y}{C} = e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}. \end{aligned}$$

2. Вважаючи C функцією від x , тобто $C = C(x)$, підберемо C у такому вигляді, щоб отримане рішення $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ задовольняло неоднорідне рівняння

$$y' + P(x)y = f(x).$$

Для цього продиференціюємо рішення однорідного рівняння і результат підставимо в неоднорідне рівняння:

$$\begin{aligned} y &= Ce^{-\int P(x)dx} \Rightarrow y' = C'e^{-\int P(x)dx} + Ce^{-\int P(x)dx}(-P(x)); \\ y' + P(x)y &= f(x) \Rightarrow C'e^{-\int P(x)dx} + Ce^{-\int P(x)dx}(-P(x)) + P(x)Ce^{-\int P(x)dx} = f(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow C'e^{-\int P(x)dx} = f(x) \Rightarrow C' = f(x)e^{\int P(x)dx} \Rightarrow \frac{dC}{dx} = f(x)e^{\int P(x)dx} \Rightarrow \\ dC &= f(x)e^{\int P(x)dx} dx \Rightarrow C = \int f(x)e^{\int P(x)dx} dx + \bar{C}. \end{aligned}$$

3. Підставляємо отримане значення C у рішення однорідного рівняння:

$$\begin{aligned} y &= Ce^{-\int P(x)dx}; \\ y &= \left(\int f(x)e^{\int P(x)dx} dx + \bar{C} \right) e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int P(x)dx} \int f(x)e^{\int P(x)dx} dx + \bar{C} e^{-\int P(x)dx}. \end{aligned}$$

Якщо розглядати запис рішення, то побачимо, що це рішення можна представити як два рішення:

$$y = y_o + y_u,$$

де $y_o = \bar{C} e^{-\int P(x)dx}$ – рішення відповідного однорідного рівняння;

$y_u = e^{-\int P(x)dx} \int f(x)e^{\int P(x)dx} dx$ – частинне рішення неоднорідного рівняння.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $y' + tgxy = \frac{1}{\cos x}$.

Рішення

Вирішуємо відповідне однорідне рівняння:

$$\begin{aligned} y' + tgxy &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -tgxy \Rightarrow \frac{dy}{y} = -tgx dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = - \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln|y| = \ln|\cos x| + \ln|C| \Rightarrow \frac{y}{C} = \cos x \Rightarrow y = C \cos x. \end{aligned}$$

Приймаємо, що $C = C(x)$. знаходимо похідну $y' = C' \cos x - C \sin x$.

Підставляємо знайдене рішення і похідну в заданий диференціальне неоднорідне рівняння:

$$\begin{aligned} y' + tgxy &= \frac{1}{\cos x} \Rightarrow C' \cos x - C \sin x + tgxC \cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow C' \cos x - C \sin x + \frac{\sin x}{\cos x} C \cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow C' \cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \frac{dC}{dx} \cos x = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow \\ &\Rightarrow dC = \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow \int dC = \int \frac{dx}{\cos^2 x} \Rightarrow C = tgx + \bar{C}. \end{aligned}$$

Отже, $y = C \cos x = (tgx + \bar{C}) \cos x = \sin x + \bar{C} \cos x$.

Відповідь: Знайдене рішення $y = \bar{C} \cos x + \sin x$.

Зауваження 2. Деякі рівняння стають лінійними, якщо поміняти місцями шукану функцію і незалежну змінну. Такі рівняння називають ще *рівняннями в симетричній формі*.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $(x + y^2)y' = y$.

Рішення

Дане рівняння не є лінійним відносно y і y' , так як $y' - \frac{1}{x + y^2}y = 0$. Проведемо такі перетворення:

$$(x + y^2)\frac{dy}{dx} = y; \quad x + y^2 = y\frac{dx}{dy}; \quad y\frac{dx}{dy} - x = y^2; \quad \frac{dx}{dy} - \frac{1}{y}x = y.$$

Отримано лінійне рівняння відносно x і x' . Для зручності перетворень формально поміняємо місцями x і y . Отримаємо $y' - \frac{1}{x}y = x$. Рівняння вирішуємо методом варіації довільної сталої:

$$y' - \frac{1}{x}y = 0; \quad \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}; \quad \ln|y| = \ln|x| + \ln C; \quad y = Cx;$$

$$y = C(x)x; \quad y' = C'(x)x + C(x); \quad C'(x)x + C(x) - \frac{1}{x}C(x)x = x; \quad C'(x)x = x;$$

$$C'(x) = 1; \quad C(x) = x + \bar{C}; \quad y = (x + \bar{C})x = x^2 + \bar{C}x.$$

Переставивши місцями x і y в зворотному порядку, отримуємо $x = y^2 + \bar{C}y$. При інтегруванні рівняння було проведено скорочення на $y \neq 0$. Перевіримо, чи не сталася втрата рішення $y = 0$:

$$y = 0; \quad y' = 0; \quad (x + y^2)y' = y; \quad (x + y^2) \cdot 0 = 0; \quad 0 \equiv 0.$$

Таким чином, $y = 0$ також є рішенням.

Відповідь: $y = 0$, $x = y^2 + \bar{C}y$.

4.5.3. Рівняння Бернуллі

Def. рівняння виду

$$y' + P(x)y = f(x)y^n, \text{ де } n \neq 0 \text{ і } n \neq 1,$$

називається рівнянням Бернуллі.

Якщо $n = 0$ або $n = 1$, то наведене рівняння буде або лінійним рівнянням, або рівнянням з відокремленими змінними відповідно.

Розділимо рівняння $y' + P(x)y = f(x)y^n$ на y^n :

$$\frac{y'}{y^n} + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = f(x).$$

Рівняння Бернуллі підстановкою $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ приводиться до лінійного диференціального рівняння 1-го порядку. Дійсно,

$$z = \frac{1}{y^{n-1}} \Rightarrow z' = \left(\frac{1}{y^{n-1}} \right)' = (y^{1-n})' = (1-n)y^{-n}y' = (1-n)\frac{y'}{y^n} \Rightarrow \frac{y'}{y^n} = \frac{z'}{1-n};$$

$$\frac{y'}{y^n} + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = f(x) \Rightarrow \frac{z'}{1-n} + P(x)z = f(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' + P(x)z(1-n) = f(x)(1-n).$$

Отже, рівняння можна представити у вигляді

$$z' + F(x)z = g(x).$$

Отримано лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x$.

Рішення

Рівняння напишемо у вигляді $y' - y \operatorname{tg} x = y^4 \cos x$. Це рівняння Бернуллі з параметром $n = 4$. Приведемо дане рівняння до лінійного рівняння:

$$y' - y \operatorname{tg} x = y^4 \cos x \Rightarrow \frac{y'}{y^4} - \frac{1}{3} \operatorname{tg} x = \cos x;$$

$$z = \frac{1}{y^3}, \quad z' = -3 \frac{y'}{y^4}, \quad \frac{y'}{y^4} = -\frac{z'}{3};$$

$$\frac{y'}{y^4} - \frac{1}{3} \operatorname{tg} x = \cos x \Rightarrow -\frac{z'}{3} - \frac{1}{3} \operatorname{tg} x = \cos x \Rightarrow z' + 3z \operatorname{tg} x = -3 \cos x.$$

Рівняння вирішуємо методом варіації довільної сталої:

$$z' + 3z \operatorname{tg} x = 0 \Rightarrow \frac{dz}{dx} = -3z \operatorname{tg} x \Rightarrow \frac{dz}{z} = -3 \operatorname{tg} x dx \Rightarrow \ln|z| = 3 \ln|\cos x| + \ln C; \quad z = C \cos^3 x$$

. Приймаємо $z = C(x) \cos^3 x$. В цьому випадку

$$z' = C'(x) \cos^3 x - 3C(x) \cos^2 x \sin x;$$

$$z' + 3z \operatorname{tg} x = -3 \cos x \Rightarrow C'(x) \cos^3 x - 3C(x) \cos^2 x \sin x + 3C \cos^3 x \operatorname{tg} x = -3 \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow C'(x) \cos^3 x = -3 \cos x \Rightarrow C'(x) = -\frac{3}{\cos^2 x} \Rightarrow \frac{dC}{dx} = -\frac{3}{\cos^2 x} \Rightarrow C = -3 \operatorname{tg} x + \bar{C}.$$

Підставляємо в початкове рішення:

$$z = C \cos^3 x \Rightarrow z = (-3 \operatorname{tg} x + \bar{C}) \cos^3 x \Rightarrow z = \bar{C} \cos^3 x - 3 \operatorname{tg} x \cos^3 x;$$

$$z = \bar{C} \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x \quad \text{або} \quad \frac{1}{y^3} = \bar{C} \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x.$$

Відповідь: $\frac{1}{y^3} = \bar{C} \cos^3 x - 3 \sin x \cos^2 x$.

4.5.4. Рівняння в повних диференціалах

Def. рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ називається рівнянням в повних диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $F(x, y)$, Що має місце при виконанні рівності

$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Для вирішення рівняння необхідно знайти таку функцію $F(x, y)$, щоб $dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy$, де $\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y)$, $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y)$. Тоді з умови $dF(x, y) = 0$ спільне рішення можна записати у вигляді $F(x, y) = C$.

Можна виділити два способи вирішення диференціальних рівнянь в повних диференціалах:

1) Інтегрування по контуру:

$$F(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y_0} P(x, y_0) dx + \int_{x, y_0}^{x, y} P(x, y) dy;$$

2) Метод варіації довільної сталої:

а) шукаємо $F(x, y)$ у вигляді $F(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y)$;

б) функцію $\varphi(y)$ визначаємо з умови $\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx + \varphi(y) \right) = Q(x, y)$.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $(2xy - x + 3)dx + (x^2 - 2y^2 + 5)dy = 0$.

Рішення

Перевіримо, що дане рівняння є рівнянням в повних диференціалах:

$$P(x, y) = 2xy - x + 3; \quad Q(x, y) = x^2 - 2y^2 + 5;$$
$$\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = 2x; \quad \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}.$$

Перший спосіб рішення:

$$F(x, y) = \int_{0,0}^{x,0} P(x, 0) dx + \int_{x,0}^{x,y} P(x, y) dy = \int_0^x (-x + 3) dx + \int_0^y (x^2 - 2y^2 + 5) dy =$$
$$= \left(-\frac{x^2}{2} + 3x \right) \Big|_0^x + \left(x^2 y - \frac{2}{3} y^3 + 5y \right) \Big|_0^y = -\frac{x^2}{2} + 3x + x^2 y - \frac{2}{3} y^3 + 5y = C.$$

Таким чином, інтегральною кривою для розглянутого диференціального рівняння буде крива $-\frac{x^2}{2} + 3x + x^2 y - \frac{2}{3} y^3 + 5y = C$.

Відповідь: $-\frac{x^2}{2} + 3x + x^2 y - \frac{2}{3} y^3 + 5y = C$.

Другий спосіб рішення:

$$F(x, y) = \int (2xy - x + 3) dx + \varphi(y) = x^2 y - \frac{x^2}{2} + 3x + \varphi(y);$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(x^2 y - \frac{x^2}{2} + 3x + \varphi(y) \right) = x^2 + \varphi'(y); \quad \frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y);$$

$$x^2 + \varphi'(y) = x^2 - 2y^2 + 5; \quad \varphi'(y) = -2y^2 + 5; \quad \varphi(y) = \int (-2y^2 + 5) dy = -\frac{2}{3} y^3 + 5y + C;$$

$$F(x, y) = x^2 y - \frac{x^2}{2} + 3x + \varphi(y) = x^2 y - \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{2}{3} y^3 + 5y + C.$$

Рішенням диференціального рівняння є інтегральна крива

$$x^2 y - \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{2}{3} y^3 + 5y + C = 0.$$

Відповідь: $x^2 y - \frac{x^2}{2} + 3x - \frac{2}{3} y^3 + 5y + C = 0.$

Зауваження. Існують диференціальні рівняння, які можуть бути приведені до рівнянь в повних диференціалах.

Def. Інтегруючим множником диференціального рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ називається така функція $m(x, y) \neq 0$, після множення на яку рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ перетвориться в рівняння в повних диференціалах.

Таким чином, інтегруючий множник повинен задовольняти диференціальним рівнянням в частинних похідних

$$\frac{\partial}{\partial y} (m(x, y)P(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} (m(x, y)Q(x, y)).$$

Якщо функції $P(x, y)$ та $Q(x, y)$ мають неперервні частинні похідні і не дорівнюють нулю одночасно, то інтегруючий множник існує. На жаль, не існує загального методу для знаходження інтегруючого множника.

4.6. Висновки

Def. Під простим диференціальним рівнянням будемо розуміти рівняння, яке містить невідому функцію однієї змінної та її похідні.

Такі рівняння можуть записуватись у вигляді

$$f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Def. Під порядком диференціального рівняння розуміють найбільший порядок похідної рівняння.

Def. Під рішенням диференціального рівняння розуміють таку функцію, при підстановці якої у це рівняння воно перетворюється в тотожність.

Def. Диференціальне рівняння, що містить тільки похідну 1-го порядку, називається диференціальним рівнянням 1-го порядку.

Загальна запис рівняння 1-го порядку має вигляд

$$f(x, y, y') = 0.$$

Диференціальне рівняння може бути представлене і як рівняння, розв'язане стосовно похідної:

$$y' = f(x, y).$$

В цьому випадку геометричний сенс диференціального рівняння 1-го порядку можна представити як задання в кожній точці декартової системи координат значення похідної. Отже, в кожній точці декартової системи координат задано тангенс кута нахилу дотичної до деяких невідомим кривим. Рішення диференціального рівняння в цьому випадку полягає в тому, щоб за заданими кутами дотичних в точках побудувати криві, які і є рішенням диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння 1-го порядку, розв'язане відносно похідної

$$y' = f(x, y),$$

можна уявити і в диференціальній формі:

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \Rightarrow dy = f(x, y)dx.$$

Інтегрування такого рівняння в загальному випадку приводить до одержання нескінченної безлічі рішень.

Щоб отримати конкретне рішення з загальної множини, вводять додаткову умову

$$y(x_0) = y_0 \text{ або } y \Big|_{x=x_0} = y_0.$$

Така умова називається початковим.

Def. Спільним рішенням диференціального рівняння 1-го порядку будемо називати функцію $y = y(x, C)$, що містить довільну константу і задовольняє умовам:

1) функція $y(x, C)$ є рішенням диференціального рівняння при будь-якому фіксованому C ;

2) яким би не було початкова умова $y(x_0) = y_0$, можна знайти таке значення константи $C = C_0$, що функція $y = y(x, C_0)$ буде задовольняти заданій початковій умові.

Def. Частинним рішенням диференціального рівняння 1-го порядку будемо називати функцію $y = y(x, C_0)$, отриману із загального рішення $y = y(x, C)$ для конкретного значення C_0 .

З геометричної точки зору, загальне рішення - це сукупність всіх інтегральних кривих, частинне рішення - це одна крива з сукупності всіх кривих загального рішення.

Задання диференціального рівняння спільно з початковими умовами називається задачею Коші:

$$y' = f(x, y);$$

$$y(x_0) = y_0.$$

Теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші: якщо в рівнянні $y' = f(x, y)$ функція $f(x, y)$ і її похідна по y в заданій точці неперервні, то задача Коші має рішення, причому єдине.

Def. Рівнянням з відокремленими змінними називається рівняння, яке можна представити у вигляді

$$P(x)dx + Q(y)dy = 0.$$

У такому рівнянні змінні x і y розділені. До такого виду можуть бути приведені рівняння:

$$a) y' = f(x)g(y);$$

$$б) n_1(x)m_1(y)dx + n_2(x)m_2(y)dy = 0.$$

Рішення рівняння отримують інтегруванням його частин.

Зауваження 1. Якщо навіть один з інтегралів не береться, все-таки вважається, що рішення отримано. Рішення, записане разом з інтегралом, називається рішенням в квадратурі.

Зауваження 2. При перетворенні рівняння, коли обидві його частини ділять на вираження, що містять невідомі x і y , Може відбутися втрата рішення, що вимагає перевірки цих виразів на рішення.

Зауваження 3. Рівняння виду $y' = f(ax + by)$ перетвориться до рівняння з відокремленими змінними заміною $z = ax + by$ або $z = ax + by + c$. В цьому випадку $z' = a + by'$.

Def. Функція $f(x, y)$ називається однорідною функцією k -го порядку, якщо виконується умова

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y).$$

Def. Однорідним диференціальним рівнянням називається диференціальне рівняння виду

$$M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0,$$

де $M(x, y)$ і $N(x, y)$ – однорідні функції своїх аргументів однієї і тієї ж ступеня.

Однорідні рівняння можна представити як

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Однорідні рівняння вирішують заміною змінної $y = tx$, де

$$y = y(t, x), t = t(x). \text{ тоді } dy = xdt + tdx \text{ або } y' = xt' + t.$$

Зауваження 4. Рівняння виду

$$y' = f\left(\frac{A_1 x + B_1 y + C_1}{A_2 x + B_2 y + C_2}\right)$$

приводиться до однорідного.

Якщо уявити чисельник і знаменник як дві прямі на площині

$$\sigma_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 = 0; \sigma_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 = 0,$$

то можливі два варіанти:

а) прямі перетинаються, тобто $\sigma_1 \cap \sigma_2 = M$; в цьому випадку приведення до однорідного рівняння відбувається при переході до нової системи координат XMY , центр якої розташований в точці M – точці перетину прямих σ_1 і σ_2 :

$$x = a + X;$$

$$y = b + Y,$$

де (a, b) – координати точки M ;

б) прямі паралельні, тобто

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \lambda,$$

тоді рівняння можна представити у вигляді

$$y' = f\left(\frac{\lambda(A_2 x + B_2 y) + C_1}{A_2 x + B_2 y + C_2}\right) = \varphi(Ax + By)$$

і розв'язати його як рівняння з відокремленими змінними щодо $z = Ax + By$ або $z = Ax + By + C$.

Def. Диференціальним лінійним рівнянням 1-го порядку називається диференціальне рівняння, лінійне щодо y та y' .

Диференціальне лінійне рівняння 1-го порядку має вигляд

$$y' + P(x)y = f(x).$$

Якщо $f(x) = 0$, то рівняння називається однорідним рівнянням 1-го порядку.

Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння називається неоднорідним рівнянням 1-го порядку.

Зауваження 1. Рівняння може бути представлено і в вигляді

$$N(x)y' + Q(x)y + M(x) = 0.$$

Але це рівняння можна переписати до виду

$$y' + \frac{Q(x)}{N(x)}y + \frac{M(x)}{N(x)} = 0 \Rightarrow y' + \frac{Q(x)}{N(x)}y = -\frac{M(x)}{N(x)}.$$

Одним з методів рішення лінійного диференціального рівняння є метод варіації довільної сталої.

Задано лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку

$$y' + P(x)y = f(x).$$

1. Шукаємо рішення відповідного однорідного диференціального рівняння

$$y' + P(x)y = 0.$$

Це диференціальне рівняння з відокремленими змінними, і його рішення знаходимо наступним чином:

$$\begin{aligned} y' = -P(x)y &\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -P(x)y \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -\int P(x)dx \Rightarrow \\ &\Rightarrow \ln|y| = -\int P(x)dx + \ln|C| \Rightarrow \ln\left|\frac{y}{C}\right| = -\int P(x)dx \Rightarrow \frac{y}{C} = e^{-\int P(x)dx} \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}. \end{aligned}$$

2. Вважаючи C функцією від x , тобто $C = C(x)$, підберемо C в такому вигляді, щоб отримане рішення $y = Ce^{-\int P(x)dx}$ задовольняло неоднорідного рівняння

$$y' + P(x)y = f(x).$$

Для цього продиференціюємо рішення однорідного рівняння і результат підставимо в неоднорідне рівняння:

$$\begin{aligned} y = Ce^{-\int P(x)dx} &\Rightarrow y' = C'e^{-\int P(x)dx} + Ce^{-\int P(x)dx}(-P(x)); \\ y' + P(x)y = f(x) &\Rightarrow C'e^{-\int P(x)dx} + Ce^{-\int P(x)dx}(-P(x)) + P(x)Ce^{-\int P(x)dx} = f(x) \Rightarrow \\ &\Rightarrow C'e^{-\int P(x)dx} = f(x) \Rightarrow C' = f(x)e^{\int P(x)dx} \Rightarrow \frac{dC}{dx} = f(x)e^{\int P(x)dx} \Rightarrow \\ dC &= f(x)e^{\int P(x)dx} dx \Rightarrow C = \int f(x)e^{\int P(x)dx} dx + \bar{C}. \end{aligned}$$

3. Підставляємо отримане значення C в рішення однорідного рівняння:

$$\begin{aligned} y &= Ce^{-\int P(x)dx}; \\ y &= \left(\int f(x)e^{\int P(x)dx} dx + \bar{C} \right) e^{-\int P(x)dx} = e^{-\int P(x)dx} \int f(x)e^{\int P(x)dx} dx + \bar{C} e^{-\int P(x)dx}. \end{aligned}$$

Це рішення можна представити як два рішення:

$$y = y_o + y_{\text{ч}},$$

де $y_o = \bar{C} e^{-\int P(x)dx}$ – рішення відповідного однорідного рівняння;

$y_{\text{ч}} = e^{-\int P(x)dx} \int f(x)e^{\int P(x)dx} dx$ – частинне рішення неоднорідного рівняння.

Зауваження 2. Деякі рівняння стають лінійними, якщо поміняти місцями шукану функцію і незалежну змінну.

Def. Рівняння виду

$$y' + P(x)y = f(x)y^n, \text{ де } n \neq 0 \text{ і } n \neq 1,$$

називається рівнянням Бернуллі.

Якщо $n = 0$ або $n = 1$, то наведене рівняння буде або лінійним рівнянням, або рівнянням з відокремленими змінними відповідно.

Розділимо рівняння $y' + P(x)y = f(x)y^n$ на y^n :

$$\frac{y'}{y^n} + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = f(x).$$

Рівняння Бернуллі підстановкою $z = \frac{1}{y^{n-1}}$ приводиться до лінійного диференціального рівняння 1-го порядку.

Def. Рівняння виду $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ **називається рівнянням в диференціалах, якщо його ліва частина є повним диференціалом деякої функції $F(x,y)$, що має місце при виконанні рівності**

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}.$$

Для вирішення рівняння необхідно знайти таку функцію $F(x, y)$, щоб

$$dF(x, y) = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} dy, \text{ де } \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = Q(x, y). \text{ Тоді з}$$

умови $dF(x, y) = 0$ загальне рішення можна записати у вигляді $F(x, y) = C$.

Розрізняють два способи вирішення диференціальних рівнянь в повних диференціалах:

1) Інтегрування по контуру:

$$F(x, y) = \int_{x_0, y_0}^{x, y_0} P(x, y_0) dx + \int_{x, y_0}^{x, y} P(x, y) dy;$$

2) Метод варіації довільної сталої:

а) шукаємо $F(x, y)$ у вигляді $F(x, y) = \int P(x, y) dx + \varphi(y)$;

б) функцію $\varphi(y)$ визначаємо з умови $\frac{\partial}{\partial y} \left(\int P(x, y) dx + \varphi(y) \right) = Q(x, y)$.

Зауваження. Існують диференціальні рівняння, які можуть бути приведені до рівнянь в повних диференціалах.

Def. Інтегруючим множником диференціального рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ називається така функція $m(x, y) \neq 0$, після множення на яку рівняння $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ перетвориться у рівняння в повних диференціалах.

Таким чином, інтегруючий множник повинен задовольняти диференціальне рівняння в частинних похідних

$$\frac{\partial}{\partial y} (m(x, y)P(x, y)) = \frac{\partial}{\partial x} (m(x, y)Q(x, y)).$$

Якщо функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ мають неперервні частинні похідні і не дорівнюють нулю одночасно, то інтегруючий множник існує. На жаль, не існує загального методу для знаходження інтегруючого множника.

Перерва

Ось уже понад 20 років я чекаю Сінуса, Косінуса, Тангенса і Котангенса, які мені повинні були здорово стати в нагоді у житті і через які так засмутилася моя дитяча психіка ...

4.7. Питання для перевірки знань

1. Диференціальними називають рівняння, що містить:

а) похідну; б) диференціал; в) похідну і диференціал.

2. Рішенням диференціального рівняння називають:

а) функцію, що перетворює задане диференціальне рівняння у тотожність;

б) число, яке при підстановці перетворює задану функцію в тотожність; в) корінь цього рівняння.

3. Диференціальними рівняннями функції однієї змінної називають:

а) диференціальні рівняння з однією змінною; б) найпростіші диференціальні рівняння; в) диференціальні рівняння 1-го порядку однієї змінної.

4. Загальним рішенням диференціального рівняння називають:

а) функцію, яка перетворює задане рівняння в тотожність; б) сукупність усіх рішень цього рівняння; в) рішення, записане в загальному вигляді.

5. Задача Коші – це:

а) задача, коли для диференціального рівняння знаходять частинне рішення; б) задача визначення значень постійних рішення диференціального рівняння; в) задача, коли задано диференціальне рівняння спільно з початковими умовами.

6. Частинне рішення диференціального рівняння – це:

а) рішення, яке задовольняє початковим умовам; б) рішення, отримане із загального рішення заданням значень довільних постійних; в) рішення без постійних величин.

7. Порядок диференціального рівняння – це:

а) коли похідні записані в упорядкованому вигляді; б) коли воно має рішення; в) найбільший порядок похідної в заданому рівнянні.

8. Геометричний сенс диференціального рівняння 1-го порядку – це:

а) тангенс кута нахилу дотичної до інтегральної кривої; б) поле тангенсів кутів нахилу дотичних до інтегральним кривим; в) площа, обмежена інтегральної кривої.

9. Диференціальне рівняння з відокремленими змінними – це рівняння, яке можна представити у вигляді:

а) $n_1(x, y)dx = n_2(x, y)dy$; б) $n_1(x)m_1(x, y)dx = n_2(x, y)m_2(y)dy$;

в) $n_1(x)m_1(y)dx = n_2(x)m_2(y)dy$.

10. Диференціальне рівняння з відокремленими змінними – це:

а) рівняння, в якому змінні можна розділити на деяке значення; б) рівняння, яке можна представити у вигляді $y' = f(x, y)g(x, y)$; в) рівняння, яке можна представити у вигляді $y' = f(x)g(y)$.

11. Рішення диференціального рівняння, записане разом з інтегралами, називається:

а) інтегральним рішенням; б) рішенням в квадратурі; в) неприведеним рішенням.

12. Що може статися, коли обидві частини диференціального рівняння ділять на вираз, що містить невідомі x і y :

а) диференціальне рівняння отримає нове рішення; б) нічого не зміниться; в) відбудеться втрата рішення.

13. Рівняння виду $y' = f(ax + by)$ вирішують підстановкою:

а) $z = ax + by$; б) $y = xt$; в) $y = xt$.

14. Однорідною функцією k-го порядку називається функція, для якої виконується умова:

а) $F(xt, yt) = F(x, y)$; б) $F(xt, yt) = t^k F(x, y)$; в) $F(xt, yt) = F(xt^k, yt^k)$.

15. Однорідним диференціальним рівнянням 1-го порядку називається:

- а) диференціальне рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – многочлени одного порядку; б) диференціальне рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ – однорідні функції одного порядку; в) диференціальне рівняння виду $y' + P(x)y = 0$.

16. Однорідне диференціальне рівняння 1-го порядку вирішують:

- а) підстановкою Ейлера; б) методом варіації довільної сталої; в) підстановкою $y = xt$.

17. Виберіть правильну запис похідною від функції при підстановці $y = tx$ для однорідного рівняння:

а) $y' = t' + t$; б) $y' = t'x + t$; в) $y' = t' + tx$.

18. Виберіть правильну запис диференціала від функції при підстановці $y = tx$ для однорідного рівняння:

а) $dy = tdx$; б) $dy = xdt$; в) $dy = xdt + tdx$.

19. Чи можна диференціальне рівняння $y' = f\left(\frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right)$ привести

до однорідного:

- а) ні; б) так; в) в деяких випадках можна?

20. Якщо $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$, то рівняння $y' = f\left(\frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right)$ вирішують так:

- а) використовують підстановку $z = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}$; б) переходять в нову систему координат з центром в точці перетину прямих $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ і $A_2x + B_2y + C_2 = 0$; в) ділять чисельник на знаменник і переходять до нової змінної.

21. Якщо $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$, то диференціальне рівняння

$y' = f\left(\frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}\right)$ вирішують:

- а) шляхом переходу в нову систему координат з центром в точці перетину прямих; б) заміною змінних $z = \frac{A_1x + B_1y + C_1}{A_2x + B_2y + C_2}$; в) шляхом ділення чисельника на знаменник з подальшим введенням нової змінної $z = A_2x + B_2y + C_2$.

22. Лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку називається:

а) диференціальне рівняння, лінійне щодо y' ; б) диференціальне рівняння, лінійне щодо незалежної змінної; в) диференціальне рівняння, лінійне щодо y і y' .

23. Лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку має вигляд:

а) $N(x)y' + Q(x)y + M(x) = 0$; б) $N(x)y' + Q(x, y) = M(x)$; в) $N(x)y' + Q(x)y + M(y) = 0$.

24. Лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку називається:

а) рівняння, лінійне відносно похідної цього рівняння; б) диференціальне рівняння виду $y' P(x) y = f(x)$; в) диференціальне рівняння виду $y' + P(x)y = f(x)$.

25. Неоднорідне лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку має вигляд:

а) $y' + P(x)y = f(x)$; б) $y' P(x) y = f(x)$; в) $y' + P(x)y = 0$.

26. Однорідним лінійним диференціальним рівнянням 1-го порядку називають:

а) диференціальне рівняння виду $y' + P(x)y = 0$; б) диференціальне рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, де $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ - однорідні функції одного порядку; в) диференціальне рівняння виду $y' + P(x)y = f(x)$.

27. Назвіть метод вирішення неоднорідного лінійного диференціального рівняння 1-го порядку:

а) підстановка Ейлера; б) метод варіації довільної сталої; в) метод поділу змінних.

28. Рішення лінійного неоднорідного диференціального рівняння 1-го порядку можна уявити:

а) як суму загального рішення відповідного однорідного рівняння і приватного рішення відповідного неоднорідного рівняння; б) як суму лінійно незалежних рішень; в) як твір спільного рішення і приватного на константи.

29. Чи можна отримати лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 1-го порядку, якщо поміняти місцями x і y :

а) так; б) в деяких випадках так; в) немає?

30. Рівняння Бернуллі має вигляд:

а) $y' P(x) y = y^n f(x)$; б) $y' + P(x) y = y^n f(x)$; в) $y' + P(x)y = y^n + f(x)$.

31. Рівняння Бернуллі, права частина якого представлена у вигляді $f(x)y^n$, Вирішується підстановкою:

а) $z = \frac{1}{y^{n-1}}$; б) $z = \frac{1}{y^n}$; в) $z = \frac{1}{y^{n+1}}$.

32. Рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ називається рівнянням в повних диференціалах, якщо:

а) являє собою диференціал деякої функції; б) кожне з доданків є диференціал; в) його рішенням є диференціал.

33. Щоб рівняння виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$ називалося рівнянням в повних диференціалах, має виконуватися рівність:

а) $\frac{\partial P(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x}$; б) $\frac{\partial P(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y}$; в) $\frac{\partial^2 P(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 Q(x, y)}{\partial y \partial x}$.

34. Методи рішення диференціального рівняння в повних диференціалах:

а) відновлення функції по її диференціалу; б) метод Ейлера; в) інтегрування по шляху і метод варіації постійної.

4.8. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Вирішити диференціальне рівняння.

1.1. $y' = x$.

1.2. $y' = x^3$.

1.3. $y' = \frac{x+1}{y}$.

2. Вирішити рівняння із перемінними.

2.1. $y'y(1+x^2)=1$.

2.2. $y'y(1-x^2)=1$.

2.3. $y' = y \operatorname{tg}(x)$.

2.4. $y' = y \operatorname{ctg}(x)$.

2.5. $y'y(1+x^2)=1$.

2.6. $y'y(1-x^2)=1$.

2.7. $xydx + (1+x)dy = 0$.

2.8. $(y-5)dx - x^2 y dy = 0$.

2.9. $\sqrt{1+y^2} dx = xy dy$.

2.10. $(1-y^2)dx - \sqrt{x} y dy = 0$.

2.11. $e^{-x}(1+y')=1$.

2.12. $\frac{4+y'}{3+e^x}=1$.

2.13. $e^{x-y} dx - dy = 0$.

2.14. $\frac{dx}{1+e^{-x}} - \frac{dy}{1+e^{-y}} = 0$.

2.15. $y' = \frac{x}{y+2}$.

2.16. $\frac{x+1}{dx} = \frac{y}{dy}$.

2.17. $\frac{x+2}{dx} = \frac{y}{dy}$.

3. Отримати рішення рівняння в квадратурі.

3.1. $y' \cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right) - \frac{y}{e^{x^2}} = 0$.

3.2. $\frac{\sin(x)}{y'} - \frac{x}{e^{y^2}} = 0$.

3.3. $\frac{x}{e^x} y' - \ln y = 0$.

3.4. $(1+x^3)\cos^2 yy'^2 - 4 = 0$.

4. Вирішити рівняння із перемінними, що містить лінійну частину.

4.1. $y' - y = 2x - 3$.

4.2. $y' + 2y + 3 = x$.

4.3. $(x+2y)y' - 1 = 0$.

4.4. $xy' + yy' = \frac{1}{2}$.

4.5. $y' - \sqrt{4x+2y-1} = 0$.

4.6. $2y' + \sqrt{x+y+1} = 0$.

5. Вирішити однорідне диференціальне рівняння.

5.1. $x+2y = xy'$.

5.2. $x-y = (x+y)y'$.

5.3. $\frac{2x^3}{y} dy - (2x^2 - y^2) dx = 0$.

5.4. $y^2 + x^2 y' - xy y' = 0$.

5.5. $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$.

5.6. $xy' - y = -xe^{\frac{y}{x}}$.

5.7. $xy' - y \cos\left(\ln \frac{y}{x}\right)$.

5.8. $xy' - y - \sqrt{xy} = 0$.

5.9. $(2x-4y+6)dx + (x+y-3)dy = 0$.

5.10. $(2x+y+1)dx - (4x+2y-3)dy = 0$.

5.11. $(x+4y)dy = (3y+2x-5)dx$.

5.12. $(y+2)dx = (y+2x-4)dy$.

$$5.13. (y' + 1) \ln \frac{y+x}{x+3} = \frac{y+x}{x+3}.$$

$$5.14. y' = \frac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg} \frac{y-2x}{x+1}.$$

$$5.15. 2x^2 y' - y^3 = xy.$$

$$5.16. 2x dy + (x^2 y^4 + 1) y dx = 0.$$

$$5.17. 2y' + x = 4\sqrt{y}.$$

6. Вирішити лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку.

$$6.1. y' + 2y = 4x.$$

$$6.2. xy' - 2y = 2x^4.$$

$$6.3. (2x+1)y' = 4x + 2y.$$

$$6.4. y' + 2xy = xe^{-x^2}.$$

$$6.5. y = x(y' - x \cos x).$$

$$6.6. y' = 2x(x^2 + y).$$

$$6.7. xy' + (x+1)y = 3x^2 e^{-x}.$$

$$6.8. x(y' - y) = (1+x^2) e^x.$$

7. Вирішити рівняння, перетворюючи рівняння в лінійне, міняючи місцями шукану функцію і незалежну змінну.

$$7.1. (x+y^2) dy = y dx.$$

$$7.2. (2e^y - x) y' = 1.$$

$$7.3. (\sin^2 y + x \operatorname{ctg} y) y' = 1.$$

$$7.4. (2x+y) dy = y dx + 4 \ln y dy.$$

8. Вирішити рівняння Бернуллі.

$$8.1. y' + 2y = y^2 e^x.$$

$$8.2. y' + 2xy = 2x^3 y^3.$$

$$8.3. xy' + y = y^2 \ln x.$$

$$8.4. (x+1)(y' + y^2) = -y.$$

$$8.5. y' + \frac{2y}{x} = \frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}.$$

$$8.6. y' = y^4 \cos x + y \operatorname{tg} x.$$

$$8.7. xy^2 y' = x^2 + y^3.$$

$$8.8. xy' - 2x^2 \sqrt{y} = 4y.$$

9. Перевірити, що задане рівняння є рівнянням в повних диференціалах, і вирішити його.

$$9.1. 2xy dx + (x^2 - y^2) dy = 0.$$

$$9.2. (2x+y) dx + (x+2y) dy = 0.$$

$$9.3. 2y^2 - 3x^2 - 6xy = (3x^2 - 4xy - 3y^2) y'.$$

$$9.4. \frac{y}{x} dx + (y^3 + \ln x) dy = 0.$$

4.9. Самостійна робота

1. Вирішити диференціальне рівняння.

$$1.1. y' = 5.$$

$$1.2. y' = x^2.$$

$$1.3. y' = \frac{x-1}{y}.$$

$$1.4. y' = \frac{2x}{y-1}.$$

$$1.5. \frac{x}{2dx} = \frac{y-5}{dy}.$$

$$1.6. \frac{\sqrt{x}}{dx} = \frac{\sqrt{y}}{dy}.$$

2. вирішити рівняння із перемінними.

$$2.1. y' \operatorname{tg}(x) = y.$$

$$2.2. y' = y \operatorname{th}(x).$$

$$2.3. y' = y \operatorname{ctg}(x).$$

$$2.4. y' = y \operatorname{th}(x).$$

$$2.5. y' y \sqrt{1-x^2} = 1.$$

$$2.6. y' y \sqrt{x^2-1} = 1.$$

$$2.7. (x+2)\sqrt{y} dx + (1+x) dy = 0.$$

$$2.8. (y+4) dx - xy^2 dy = 0.$$

$$2.9. \sqrt{1-y^2} dx = \sqrt{x} y dy.$$

$$2.10. (1 - y^3)dx - \frac{y^2}{\sqrt{x}} dy = 0. \quad 2.11. e^x(1 - y') = 1. \quad 2.12. \frac{1}{1 + e^x} + \frac{y'}{1 + e^x} = 1.$$

$$2.13. dx - e^{y-x} dy = 0. \quad 2.14. (1 + e^y)dx - e^y(1 + e^{-x})dy = 0.$$

3. Отримати Рішення рівняння в квадратурі.

$$3.1. \frac{y'}{y} \sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) - e^{-x^2} = 0. \quad 3.2. e^{y^2} - \frac{xy'}{\cos(x)} = 0. \quad 3.3. y' - \frac{y^3}{\ln x} = 0.$$

$$3.4. (1 - 2 \sin^2 y) y'^2 - \frac{4}{\cos^4 x} = 0.$$

4. вирішити рівняння із перемінними, що містить лінійну частину.

$$4.1. 2y' + y = x + 4. \quad 4.2. y' + y + x + 2 = 0. \quad 4.3. 2x - y = \frac{1}{y'}.$$

$$4.4. y' = \frac{1}{2x - 3y}. \quad 4.5. y' + \sqrt{x + y + 11} = 0. \quad 4.6. y' = \sqrt{2x + 2y + 1}.$$

5. вирішити однорідне диференціальне рівняння.

$$5.1. y^2 - 2xy + x^2 y' = 0. \quad 5.2. (x^2 + y^2) y' = 2xy.$$

$$5.3. xy' - y = (x + y) \ln \frac{x + y}{x}. \quad 5.4. xy' - y = \sqrt{x^2 - y^2}.$$

$$5.5. (x - y - 16)dx + (y - x + 2)dy = 0. \quad 5.6. y' = 2 \left(\frac{y + 2}{x + y - 1} \right)^2.$$

$$5.7. (y' - x)x^3 - y^2 = 0. \quad 5.8. ydx + x(2xy + 1)dy = 0.$$

$$5.9. 2xy' + y = y^2 \sqrt{x - x^2 y^2}. \quad 5.10. y' = y^2 - \frac{2}{x^2}.$$

$$5.11. \frac{2}{3} xy y' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2. \quad 5.12. 2y + (x^2 y + 1)xy' = 0.$$

6. вирішити лінійне диференціальне рівняння 1-го порядку.

$$6.1. y' + y = \cos x. \quad 6.2. y' + y \tan x = \frac{1}{\cos x}. \quad 6.3. x(y' - y) = e^x.$$

$$6.4. y' + \frac{1 - 2x}{x^2} y = 1. \quad 6.5. x^2 y' + xy + 1 = 0. \quad 6.6. (xy' - 1) \ln x = 2y.$$

$$6.7. (1 + x^2) y' - 2xy = (1 + x^2)^2.$$

7. вирішити рівняння, перетворюючи його в лінійне і міняючи місцями шукану функцію і незалежну змінну.

$$7.1. y' = \frac{y}{3x - y^2}. \quad 7.2. (1 - 2xy) y' = y(y - 1).$$

8. вирішити рівняння Бернуллі.

$$8.1. y' + \frac{y}{x + 1} + y^2 = 0. \quad 8.2. y^6(2y' + y) = x. \quad 8.3. y' - y \tan x + y^2 \cos x = 0.$$

$$8.4. xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0. \quad 8.5. xydy = (y^2 + x)dx. \quad 8.6. 2y' - \frac{x}{y} = \frac{xy}{x^2 - 1}.$$

$$8.7. xy' + 2y + x^5y^3e^x = 0.$$

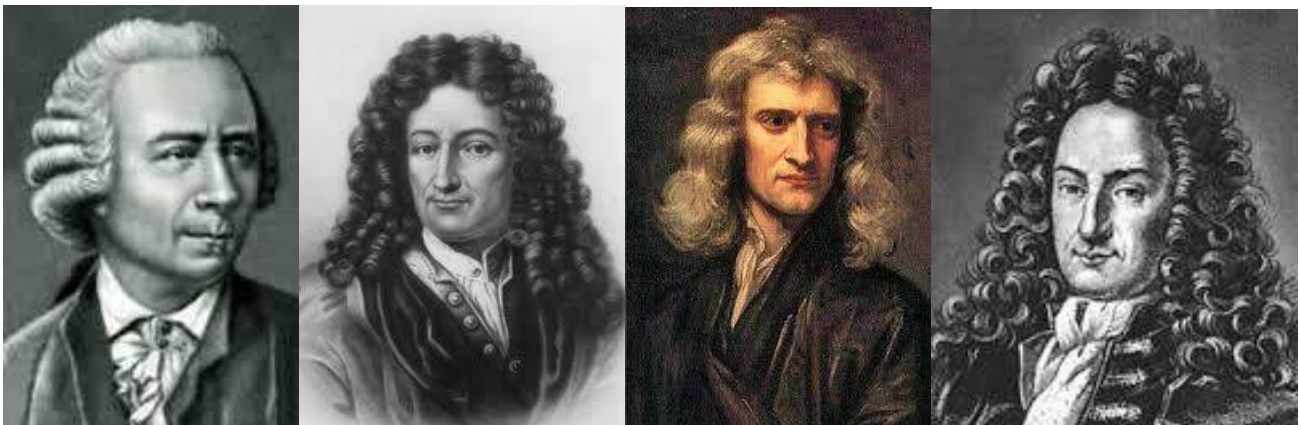
9. Перевірити, що задане рівняння є рівнянням в повних диференціалах, і вирішити його.

$$9.1. (2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0. \quad 9.1. (2 - 9xy^2)xdx + (4y^2 - 6x^3)ydy = 0.$$

$$9.2. 10xy - 8y + 1 + (5x^2 - 8x + 3)y' = 0. \quad 9.3. e^{-y}dx = (2y + xe^{-y})dy.$$

ІСТОРИЧНА ДОВІДКА

Теорія диференціальних рівнянь виникла в XVII столітті під впливом потреб механіки та інших природничих дисциплін практично одночасно з диференціальним і інтегральним обчисленням. Найпростіші диференціальні рівняння зустрічалися вже в роботах І. Ньютона і Г. Лейбніца. Термін «диференціальне рівняння» належить Г. Лейбніца (1676, опубліковано в 1684). На рис. 4.3 показані портрети вчених: а - Л. Ейлер; б - Д. Бернуллі; в - І. Ньютон; г - Г. Лейбніц.



а

б

в

г

Рисунок 4.3

Теорія диференціальних рівнянь виділилася в самостійну, детально розроблену наукову дисципліну в XVIII столітті в працях Д. Бернуллі, Ж. Даламбера і особливо Л. Ейлера. Власне, Л. Ейлер створив як самостійну дисципліну теорію звичайних диференціальних рівнянь і заклав основи теорії рівнянь з приватними похідними. Він систематично розвивав нові прийоми інтегрування диференціальних рівнянь і ввів ряд основних понять у цій галузі. Л. Ейлера належить величезна кількість відкриттів: класичний загальний спосіб вирішення лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами, метод варіації довільних сталих, з'ясування основних властивостей рівняння Риккати, інтегрування лінійних рівнянь зі змінними коефіцієнтами (зокрема, так зване рівняння Бесселя) за допомогою нескінченних рядів, критерії особливих рішень,

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

Я хотів зробити. Пошукав зошит. Не знайшов. Зрозумів - не судилося.

Що кажуть про математику

«Математична символіка не тільки не залишає місця для неточності вираження думки і розпливчастого тлумачення написаного, але дозволяє додатково автоматизувати проведення тих дій, які необхідні для отримання результату» (Б. В. Гнеденко).

Диференціальні рівняння вищих порядків. Основні визначення. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку. Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку. Основні визначення. Основні відомості про розв'язок лінійного диференціального рівняння n -го порядку. Розв'язок однорідних лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку з постійними коефіцієнтами методом Ейлера. Приклади розв'язання лінійних однорідних рівнянь

5. ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ВИЩИХ ПОРЯДКІВ

5.1. Основні визначення

Def. Диференціальним рівнянням n -го порядку називається диференціальне рівняння виду $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n -го порядку називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, залежна від n довільних постійних $C_1, C_2, \dots, C_n$ і така, що:

а) задовольняє задане диференціальне рівняння при будь-яких значеннях постійних $C_1, C_2, \dots, C_n$;

б) при заданих початкових умовах (задача Коші)

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0; y''(x_0) = y''_0; \dots; y^{(n)}(x_0) = y^{(n)}_0; y(x_0) = y_0$$

постійні $C_1, C_2, \dots, C_n$ визначаються однозначно.

Співвідношення виду $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, що неявно задає загальний розв'язок, називається загальним інтегралом диференціального рівняння. Будь-яка функція, яку можна одержати із загального розв'язку при конкретних значеннях постійних $C_1, C_2, \dots, C_n$, називається *інтегральною кривою* диференціального рівняння.

5.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають пониження порядку

До класу найпростіших диференціальних рівнянь, що допускають пониження порядку рівняння, відносяться наступні рівняння:

$$1) y^{(n)} = f(x);$$

2) $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ (Рівняння не містить y і похідна починається з k -того порядку);

$$3) F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0 \text{ (Рівняння не містить } x \text{);}$$

4) $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, де $F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$, тобто функція F є однорідною функцією відносно змінної y та її похідних;

5) рівняння в інтегрованих комбінаціях.

Розглянемо методи розв'язку перерахованих диференціальних рівнянь.

1. Рівняння $y^{(n)} = f(x)$ розв'язується послідовним інтегруванням правої частини рівняння, а саме:

$$y^{(n)} = f(x);$$

$$\frac{d}{dx} y^{(n-1)} = f(x) \Rightarrow d(y^{(n-1)}) = f(x) dx \Rightarrow \int d(y^{(n-1)}) = \int f(x) dx;$$

$$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1.$$

Аналогічно

$$y^{(n-2)} = \int \int f(x) dx dx + C_1 x + C_2;$$

$$\dots$$

$$y = \underbrace{\int \int \dots \int f(x) dx dx \dots dx}_n + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $y''' = \cos 2x$.

Розв'язок

$$y''' = \frac{\partial}{\partial x} (y'') \Rightarrow \frac{d}{dx} (y'') = \cos 2x \Rightarrow d(y'') = \cos 2x \cdot dx \Rightarrow$$

$$\int d(y'') = \int \cos 2x \cdot dx \Rightarrow y'' = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1;$$

$$y'' = \frac{\partial}{\partial x} (y') \Rightarrow \frac{d}{dx} (y') = \frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \Rightarrow d(y') = \left(\frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \right) \cdot dx \Rightarrow$$

$$\int d(y') = \int \left(\frac{1}{2} \sin 2x + C_1 \right) \cdot dx \Rightarrow y' = -\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2;$$

$$dy = \left(-\frac{1}{4} \cos 2x + C_1 x + C_2 \right) dx \Rightarrow y = -\frac{1}{8} \sin 2x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3.$$

Відповідь. $y = -\frac{1}{8} \sin 2x + C_1 \frac{x^2}{2} + C_2 x + C_3$

2. Рівняння виду $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, куди входять похідні від k -го до n -го порядків, вирішують підстановкою $y^{(k)} = z(x)$, яка знижує порядок рівняння на k одиниць:

$$y^{(k)} = z(x); y^{(k+1)} = z'(x); \dots; y^{(n)} = z^{(n-k)}(x).$$

Отримаємо $F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0$.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $y^{(5)} - \frac{1}{x} y^{(4)} = 0$.

Розв'язок

$$y^{(4)} = z, y^{(5)} = z'; \Rightarrow y^{(5)} - \frac{1}{x} y^{(4)} = 0 \Rightarrow z' - \frac{1}{x} z = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} z \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = \ln|x| + \ln C_1;$$

$$z = C_1 x;$$

$$y^{(4)} = C_1 x \Rightarrow y^{(3)} = C_1 \frac{x^2}{2} + C_2;$$

$$y^{(2)} = C_1 \frac{x^3}{2 \cdot 3} + C_2 x + C_3;$$

$$y' = C_1 \frac{x^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + C_2 \frac{x^2}{2} + C_3 x + C_4;$$

$$y = C_1 \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + C_2 \frac{x^3}{2 \cdot 3} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5.$$

Відповідь. $y = C_1 \frac{x^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + C_2 \frac{x^3}{2 \cdot 3} + C_3 \frac{x^2}{2} + C_4 x + C_5.$

3. Рівняння $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, **яке не залежить в явному вигляді від змінної** x , **вирішують за допомогою підстановки** $y' = z(y)$. В цьому випадку похідна від y' береться як від складної функції, спочатку по y а потім по x :

$$y'' = z'_y y'_x = z'_y z;$$

$$y''' = z''_{yy} y'_x z + z'_y z'_y y'_x;$$

$$y''' = z''_{yy} z z + z'_y z'_y z \Rightarrow y''' = z''_{yy} z^2 + (z'_y)^2 z, \dots,$$

тобто отримують $F(y, z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) = 0$, де порядок рівняння знижений.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $yy'' - (y')^2 = 0$.

Розв'язок

Рівняння в явній формі не залежить від змінної x . Вирішуємо рівняння відповідно до рекомендацій п. 3:

$$y' = z(y); \Rightarrow y'' = z'_y y'_x = z'_y z;$$

$$yy'' - (y')^2 = 0 \Rightarrow yz'_y z - z^2 = 0 \Rightarrow y \frac{dz}{dy} z - z^2 = 0 \Rightarrow y \frac{dz}{dy} - z = 0;$$

$$\frac{dz}{z} = \frac{dy}{y} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow \ln|z| = \ln|y| + \ln C_1 \quad \ln|z| = \ln|C_1 y| \Rightarrow z = C_1 y$$

$$\Rightarrow y' = C_1 y \Rightarrow \frac{dy}{dx} = C_1 y; \Rightarrow \frac{dy}{y} = C_1 dx \Rightarrow \ln|y| = C_1 x + \ln C_2 \Rightarrow$$

$$\ln \left| \frac{y}{C_2} \right| = C_1 x \Rightarrow \frac{y}{C_2} = e^{C_1 x} \Rightarrow y = C_2 e^{C_1 x}.$$

При інтегруванні рівняння було проведено скорочення на $z \neq 0$. Перевіримо, чи не загубили ми розв'язок $z = 0$:

$$z = 0, y' = 0, y'' = 0, y = C,$$

$$yy'' - (y')^2 = 0 \Rightarrow C \cdot 0 - (0)^2 = 0, 0 \equiv 0.$$

Таким чином, $y = C$ також є розв'язком. Цей розв'язок міститься у спільному рішенні і може бути отриманий, якщо прийняти, що $C_1 = 0$.

Відповідь. $y = C_2 e^{C_1 x}, y = C$.

4. Рівняння виду $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, **де функція** F **є однорідною функцією відносно змінної** y **і її похідних, вирішують підстановкою** $\frac{y'}{y} = z(x)$ **або**

$y' = yz(x)$. Тоді похідні з

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'; \quad y''' = y'z^2 + 2yzz' + y'z' + yz'' = yz^3 + 2yzz' + yzz' + yz'',$$

і порядок рівняння зменшується на одиницю. Отримують $F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) = 0$.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $xyu'' - x(y')^2 = uu'$.

Розв'язок

Перевіримо однорідність рівняння: $F(x, y, y', y'') = xyu'' - x(y')^2 - uu'$;

$$F(x, ty, t y', t y'') = xtyt y'' - x(t y')^2 - tyt y' = t^2(xy u'' - x(y')^2 - uu') = t^2 F(x, y, y', y'').$$

Таким чином, наведене рівняння однорідне. Понижаємо порядок рівняння підстановкою $y' = yz(x)$ і розв'язуємо його відповідно до рекомендацій, викладених вище:

$$y'' = yz^2 + yz'; \quad xy(yz^2 + yz') - x(yz)^2 = y^2z; \quad xy^2z^2 + xy^2z' - xy^2z^2 = y^2z;$$

$$xy^2z' = y^2z; \quad xz' = z; \quad \frac{dz}{z} = \frac{dx}{x}; \quad z = C_1x; \quad \frac{y'}{y} = C_1x; \quad \frac{dy}{y} = C_1x dx;$$

$$\ln|y| = C_1 \frac{x^2}{2} + \ln C_2; \quad \ln \left| \frac{y}{C_2} \right| = C_1 \frac{x^2}{2}; \quad y = C_2 e^{C_1 \frac{x^2}{2}}.$$

При інтегруванні рівняння було проведено скорочення на $y \neq 0$. Перевіримо, чи не загубили ми розв'язок $y = 0$:

$$y = 0; \quad y' = 0; \quad y'' = 0; \quad 0 = 0.$$

Таким чином, $y = 0$ також є розв'язком. Воно міститься в спільному рішенні і може бути отримано, якщо покласти, що $C_2 = 0$.

Відповідь. $y = C_2 e^{C_1 \frac{x^2}{2}}, y = 0$.

5. Про рівняння виду $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, де функція $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ є похідною деякої іншої функції $\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, кажуть, що рівняння є рівнянням в інтегрованих комбінаціях.

В цьому випадку $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ і $\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C$. При цьому кажуть, що отримано перший інтеграл шуканого рівняння.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $yy'' + (y')^2 = x$.

Розв'язок

Неважко помітити, що $yy'' + (y')^2 = \frac{d}{dx}(yy')$. Тому

$$\frac{d}{dx}(yy') = x; \quad yy' = \frac{x^2}{2} + C_1; \quad \frac{1}{2} \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{x^2}{2} + C_1; \quad \frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2.$$

Відповідь. $\frac{y^2}{2} = \frac{x^3}{6} + C_1x + C_2$

Класифікація диференціальних рівнянь n-го порядку і способи пониження порядку цих рівнянь наведені в табл. 5.1.

Рекомендації щодо пониження порядку рівнянь

№ п / п	Вид рівняння	Методи пониження порядку
1	$y^{(n)} = f(x)$	$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$
2	$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$	$y^{(k)} = z(x); \dots; y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$
3	$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$	$y' = z(y); \quad y'' = z'_y(y)z$
4	$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, де $F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$	$\frac{y'}{y} = z(x)$ або $y' = yz(x)$ $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$
5	$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, де $F = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$	$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C$

5.3. Лінійні диференціальні рівняння n-го порядку

5.3.1. Основні визначення

Def. Рівняння, лінійне щодо $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку.

Загальний вигляд лінійного диференціального рівняння n-го порядку наступний:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

де $a_i = a_i(x)$, $i = \overline{0, n}$ – функції від x .

Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння називається неоднорідним, а якщо $f(x) = 0$, – однорідним.

Введемо математичне уявлення, яке називається оператором, і яке відображає зміст диференціального рівняння:

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dx} + a_n.$$

Оператор дозволяє записати лінійне диференціальне рівняння n-го порядку у вигляді $L(y) = f(x)$, якщо рівняння неоднорідне, і у вигляді $L(y) = 0$, якщо – однорідне.

Властивості оператора L :

а) $L(y + z) = L(y) + L(z)$;

б) $L(cy) = cL(y)$.

5.3.2. Основні відомості про розв'язок лінійного диференціального рівняння n -го порядку

1. Якщо y_1 і y_2 – розв'язок рівняння $L(y) = 0$, то $y_1 + y_2$ – також розв'язок цього рівняння.

2. Якщо y_1 – розв'язок рівняння $L(y) = 0$, то $C \cdot y_1$ – також розв'язок цього рівняння.

Наслідки. Якщо $y_1, y_2, \dots, y_n$ – розв'язок рівняння $L(y) = 0$, то їх лінійна комбінація $c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n$ – також розв'язок цього рівняння.

3. Якщо $y_1 = u(x) + iv(x)$ – комплексне число, яке є розв'язком рівняння $L(y) = 0$, то дійсна $u(x)$ і уявна $v(x)$ частини також є розв'язками рівняння.

Def. Сукупність рішень диференціального рівняння $y_1, y_2, \dots, y_n$ називається лінійно незалежною, якщо лінійна комбінація

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n$$

дорівнює нулю тільки за умови, що всі коефіцієнти $\alpha_i, i = \overline{1, n}$ одночасно дорівнюють нулю.

Приклади складових функцій для побудови лінійно незалежних комбінацій:

1) $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x};$

2) $e^{\alpha x}, x e^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^n e^{\alpha x};$

3) $e^{\alpha x}(\cos \beta x + \sin \beta x), x e^{\alpha x}(\cos \beta x + \sin \beta x), x^2 e^{\alpha x}(\cos \beta x + \sin \beta x), \dots$

Засобом визначення лінійної залежності системи функцій є визначник Вронського. Для n функцій визначник Вронського будується з використанням похідних до $n-1$ порядку.

Нехай $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ – розв'язки диференціального рівняння. Тоді визначник Вронського записується у вигляді

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Твердження 1. Для лінійно залежних функцій визначник Вронського дорівнює нулю.

Твердження 2. Умовою лінійної незалежності частинних рішень $y_1, y_2, \dots, y_n$ є те, що визначник Вронського ні при яких значеннях x не дорівнює нулю, тобто $W(x) \neq 0$.

Зауваження. Про лінійно незалежні розв'язки лінійного диференціального рівняння кажуть, що вони утворюють фундаментальну систему рішень.

Def. Фундаментальною системою рішень однорідного лінійного диференціального рівняння називається упорядкований набір з n лінійно незалежних рішень рівняння:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

Твердження. Такий розв'язок є єдиним розв'язком однорідного лінійного диференціального рівняння

◀ Напишемо лінійну комбінацію частинних рішень лінійного диференціального рівняння n -го порядку і похідні цієї лінійної комбінації до $(n-1)$ -го порядку включно:

$$\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n; \\ y' &= c_1 y_1' + c_2 y_2' + \dots + c_n y_n'; \\ y'' &= c_1 y_1'' + c_2 y_2'' + \dots + c_n y_n''; \\ &\dots \dots \dots; \\ y^{(n-1)} &= c_1 y_1^{(n-1)} + c_2 y_2^{(n-1)} + \dots + c_n y_n^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Напишемо задачу Коші для точки з координатами (x_0, y_0) :

$$\begin{aligned} c_1 y_{10} + c_2 y_{20} + \dots + c_n y_{n0} &= y_0; \\ c_1 y_{10}' + c_2 y_{20}' + \dots + c_n y_{n0}' &= y_0'; \\ c_1 y_{10}'' + c_2 y_{20}'' + \dots + c_n y_{n0}'' &= y_0''; \\ &\dots \dots \dots; \\ c_1 y_{10}^{(n-1)} + c_2 y_{20}^{(n-1)} + \dots + c_n y_{n0}^{(n-1)} &= y_0^{(n-1)}. \end{aligned}$$

Для того щоб система лінійних неоднорідних рівнянь мала єдиний розв'язок, необхідно, щоб її головний визначник системи був відмінний від нуля. Головним визначником такої системи якраз і є визначник Вронського, тобто $w \neq 0$. ►

5.3.3. Розв'язок однорідних лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку з постійними коефіцієнтами методом Ейлера

Йдеться про рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0,$$

де $a_i = \text{const}$, $i = \overline{0, n}$.

Ідея аналітичного методу Ейлера полягає в тому, що частинний розв'язок рівняння шукають у вигляді $y = e^{\lambda x}$, тоді $y' = \lambda e^{\lambda x}$, $y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$, ..., $y^{(n)} = \lambda^n e^{\lambda x}$. Після підстановки отриманих співвідношень в диференціальне рівняння отримують алгебраїчне рівняння

$$\lambda^n e^{\lambda x} + a_1 \lambda^{n-1} e^{\lambda x} + a_2 \lambda^{n-2} e^{\lambda x} + \dots + a_{n-1} \lambda e^{\lambda x} + a_n e^{\lambda x} = 0,$$

яке після скорочення на $e^{\lambda x} \neq 0$ набуває вигляду

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

Def. Алгебраїчне рівняння виду

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

отримане з лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

підстановкою $y = e^{\lambda x}$, називається характеристичним рівнянням заданого диференціального рівняння.

Характеристичне рівняння визначає можливі розв'язки рівняння. При цьому при вирішенні характеристичного рівняння можливі такі його корені:

- різні дійсні числа;
- різні комплексні числа;
- дійсні кратні числа;
- комплексні кратні числа;
- комбінація розглянутих випадків.

Розглянемо ці випадки.

5.3.4. Приклади розв'язання лінійних однорідних рівнянь

1. Корені характеристичного рівняння – різні дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. У цьому випадку кожному дійсному кореню λ_k відповідає частинний розв'язок рівняння $y_k = e^{\lambda_k x}$ і тоді загальне розв'язок однорідного рівняння набирає вигляду

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $y'' - y' - 6y = 0$.

Розв'язок

Будуємо характеристичне рівняння:

$$y = e^{\lambda x}, y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, \lambda^2 e^{\lambda x} - \lambda e^{\lambda x} - 6e^{\lambda x} = 0, \\ \lambda^2 - \lambda - 6 = 0$$

Знаходимо корені характеристичного рівняння.

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}; \\ \lambda_1 = 3, \lambda_2 = -2 \Rightarrow$$

Частинні розв'язки диференціального рівняння:

$$y_1 = e^{3x}, y_2 = e^{-2x}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння як лінійна комбінація частинних розв'язків має вигляд

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}.$$

Відповідь. $y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{-2x} +$

Зауваження. Для запису рішень диференціальних рівнянь можна використувати формулу Ейлера

$$e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi.$$

2. Корені характеристичного рівняння – різні комплексні числа $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$. У цьому випадку кожній парі комплексно-сполучених коренів $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ відповідають частинні розв'язки

$$y_k = e^{\alpha_k x} (\cos \beta_k x \pm i \sin \beta_k x).$$

Але ми вже відзначали, що якщо комплексна функція є розв'язком диференціального рівняння, то дійсна і уявна частини цього розв'язку також є розв'язками цього рівняння і тому можна записати

$$y_k = e^{\alpha_k x} (C_{1k} \cos \beta_k x + C_{2k} \sin \beta_k x).$$

Загальне Розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = e^{\alpha_1 x} (C_{11} \cos \beta_1 x + C_{12} \sin \beta_1 x) + \\ + e^{\alpha_2 x} (C_{21} \cos \beta_2 x + C_{22} \sin \beta_2 x) + \dots + e^{\alpha_n x} (C_{n1} \cos \beta_n x + C_{n2} \sin \beta_n x).$$

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $y'' - 4y' + 5y = 0$.

Розв'язок

Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0; \\ \lambda_{1,2} = 2 \pm \sqrt{4 - 5} = 2 \pm i; \\ \alpha = 2, \beta = 1.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння як лінійна комбінація частинних рішень має вигляд

$$y = e^{2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x).$$

Відповідь. $y = e^{2x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x)$.

3. Коріння характеристичного рівняння - дійсні кратні числа. У цьому випадку кожному k -кратному дійсному кореню характеристичного рівняння відповідає k частинних рішень виду

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, x^2 e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x},$$

тобто, щоб розв'язки були лінійно незалежними, їх послідовно множать на x в зростаючій степені.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $y^{(5)} + 3y^{(4)} + 3y^{(3)} + y'' = 0$.

Розв'язок

Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^5 + 3\lambda^4 + 3\lambda^3 + \lambda^2 = 0, \lambda^2(\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1) = 0, \lambda^2(\lambda + 1)^3 = 0, \\ \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = -1;$$

Частинні розв'язки диференціального рівняння:

$$y_1 = 1, y_2 = x, y_3 = e^{-x}, y_4 = x e^{-x}, y_5 = x^2 e^{-x}.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + C_4 y_4 + C_5 y_5, \\ y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 x e^{-x} + C_5 x^2 e^{-x}.$$

4. Коріння характеристичного рівняння - комплексні кратні числа. У цьому випадку за аналогією з п. 3 будують лінійно незалежні частинні розв'язки у вигляді

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x, \dots$$

Таких пар повинно бути k (k – кратність комплексно-сполученого кореня $\alpha \pm i\beta$)

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $y^{(4)} + 4y^{(3)} + 8y'' + 8y' + 4y = 0$.

Розв'язок

Знаходимо корені характеристичного рівняння:

$$\lambda^4 + 4\lambda^3 + 8\lambda^2 + 8\lambda + 4 = 0, (\lambda^2 + 2\lambda + 2)^2 = 0, \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda_{1,2} = -1 + \sqrt{1-2} = -1 + \sqrt{-1} = -1 \pm i = \alpha \pm \beta, \alpha = -1, \beta = 1, k = 2,$$

Частинні розв'язки диференціального рівняння

$$y_1 = e^{-x} \cos x, y_2 = e^{-x} \sin x, y_3 = xe^{-x} \cos x, y_4 = xe^{-x} \sin x.$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + xe^{-x} (c_3 \cos x + c_4 \sin x).$$

Відповідь. $y = e^{-x} (c_1 \cos x + c_2 \sin x) + xe^{-x} (c_3 \cos x + c_4 \sin x)$.

5. Якщо корені характеристичного рівняння - комбінація розглянутих випадків, то при побудові частинних розв'язків керуються рекомендаціями, викладеними в пп. 1–4.

5.4. Висновки

Def. Диференціальним рівнянням n -го порядку називається диференціальне рівняння виду $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$.

Загальним розв'язком диференціального рівняння n -го порядку називається функція $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, залежна від n довільних постійних $C_1, C_2, \dots, C_n$ і така, що:

а) задовольняє рівняння при будь-яких значеннях постійних $C_1, C_2, \dots, C_n$;

б) при заданих початкових умовах (задача Коші)

$$y(x_0) = y_0; y'(x_0) = y'_0; y''(x_0) = y''_0; \dots; y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

постійні $C_1, C_2, \dots, C_n$ визначаються однозначно.

Співвідношення виду $\Phi(x, y, C_1, C_2, \dots, C_n) = 0$, що неявно задає загальний розв'язок, називається загальним інтегралом диференціального рівняння. Будь-яка функція, яку можна одержати із загального розв'язку при конкретних значеннях постійних $C_1, C_2, \dots, C_n$, називається інтегральною кривою диференціального рівняння.

До класу найпростіших диференціальних рівнянь, що допускають пониження порядку рівняння, відносяться наступні рівняння:

1) $y^{(n)} = f(x)$;

2) $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ (Рівняння не містить y і похідна починається з k -того порядку);

3) $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ (Рівняння не містить x);

4) $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, де $F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$,

тобто функція F є однорідною функцією відносно змінної y і її похідних;

5) рівняння в інтегрованих комбінаціях.

До методів розв'язку перерахованих диференціальних рівнянь можна віднести:

1. Рівняння $y^{(n)} = f(x)$ вирішують послідовним інтегруванням правої частини рівняння

$$y^{(n)} = f(x).$$

Розв'язок має вигляд

$$y = \underbrace{\int \int \dots \int f(x) dx dx \dots dx}_n + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \dots + C_{n-1} x + C_n.$$

2. Рівняння виду $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$, куди входять похідні від k -го до n -го порядків, вирішують підстановкою $y^{(k)} = z(x)$, яка знижує порядок рівняння на k одиниць:

$$y^{(k)} = z(x); y^{(k+1)} = z'(x); \dots; y^{(n)} = z^{(n-k)}(x);$$

$$F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-k)}) = 0.$$

3. Рівняння $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, яке не містить змінної x , рішення за допомогою підстановки $y' = z(y)$. Тоді

$$y'' = z'_y y'_x = z'_y z;$$

$$y''' = z''_{yy} y'_x z + z'_y z'_y y'_x;$$

$$y''' = z''_{yy} z z + z'_y z'_y z \Rightarrow y''' = z''_{yy} z^2 + (z'_y)^2 z, \dots,$$

тобто отримують $F(y, z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) = 0$, і порядок рівняння понижений.

4. Рівняння виду $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, де функція F є однорідною функцією відносно змінної y і її похідних, вирішують підстановкою $\frac{y'}{y} = z(x)$ або $y' = yz(x)$. тоді

$$y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'; y''' = y'z^2 + 2yzz' + y'z' + yz'' = yz^3 + 2yzz' + yzz' + yz'',$$

і порядок рівняння знижується на одиницю. Отримують $F(x, z, z', z'', \dots, z^{(n-1)}) = 0$.

5. Про рівнянні $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, де функція $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$ є похідною деякої іншої функції $\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, кажуть, що рівняння є

рівнянням в інтегрованих комбінаціях. В цьому випадку $\frac{d\Phi}{dx} = 0$ і

$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C$. Кажуть, що отримано перший інтеграл шуканого рівняння.

Наведені рівняння і методи пониження їх порядку представлені в наступній таблиці:

№ п / п	Вид рівняння	Методи пониження порядку
1	$y^{(n)} = f(x)$	$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$
2	$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$	$y^{(k)} = z(x); \dots; y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$
3	$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$	$y' = z(y); \quad y'' = z'_y(y)z$
4	$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, де $F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$	$\frac{y'}{y} = z(x)$ або $y' = yz(x)$ $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$
5	$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, де $F = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$	$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C$
№ n/n	Вид рівняння	Методи пониження порядку
1	$y^{(n)} = f(x)$	$y^{(n-1)} = \int f(x) dx + C_1$
2	$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$	$y^{(k)} = z(x); \dots; y^{(n)} = z^{(n-k)}(x)$
3	$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$	$y' = z(y); \quad y'' = z'_y(y)z$
4	$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, де $F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$	$\frac{y'}{y} = z(x)$ або $y' = yz(x);$ $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$
5	$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, де $F = \frac{d}{dx} \Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0$	$\Phi(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = C$

Def. Рівняння, лінійне щодо $y, y', y'', \dots, y^{(n)}$, називається лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку.

Загальний вигляд такого рівняння:

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + a_2(x)y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = f(x),$$

де $a_i = a_i(x)$, $i = \overline{0, n}$ – функції від x .

Якщо $f(x) \neq 0$, то рівняння називається неоднорідним, а якщо $f(x) = 0$ – однорідним.

Запис виду

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dx} + a_n$$

називається оператором диференціального рівняння. Оператор дозволяє записати диференціальне рівняння у вигляді $L(y) = f(x)$, якщо рівняння неоднорідне, і $L(y) = 0$, якщо – однорідне.

Властивості оператора L :

а) $L(y + z) = L(y) + L(z)$;

б) $L(cy) = cL(y)$.

1. Якщо y_1 і y_2 – розв'язок рівняння $L(y) = 0$, то $y_1 + y_2$ – також розв'язок цього рівняння.

2. Якщо y_1 – розв'язок рівняння $L(y) = 0$, то Cy_1 – також розв'язок цього рівняння.

Наслідок. Якщо $y_1, y_2, \dots, y_n$ – розв'язок рівняння $L(y) = 0$, то їх лінійна комбінація $c_1y_1 + c_2y_2 + \dots + c_ny_n$ – також розв'язок цього рівняння.

3. Якщо $y_1 = u(x) + iv(x)$ – комплексне число, яке є розв'язком рівняння $L(y) = 0$, то дійсна $u(x)$ і уявна $v(x)$ частини також є розв'язками рівняння.

Def. Сукупність рішень диференціального рівняння $y_1, y_2, \dots, y_n$ називається лінійно незалежною, якщо лінійна комбінація

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \dots + \alpha_n y_n$$

дорівнює нулю тільки за умови, що всі коефіцієнти $\alpha_i, i = \overline{1, n}$ одночасно дорівнюють нулю.

Приклади складових функцій для побудови лінійно незалежних комбінацій:

1) $e^{\alpha_1 x}, e^{\alpha_2 x}, \dots, e^{\alpha_n x}$;

2) $e^{\alpha x}, xe^{\alpha x}, x^2 e^{\alpha x}, \dots, x^n e^{\alpha x}$;

3) $e^{ax}(\cos \beta x + \sin \beta x), xe^{ax}(\cos \beta x + \sin \beta x), x^2 e^{ax}(\cos \beta x + \sin \beta x), \dots$

Def. Визначником Вронського називають визначник, побудований з рішень диференціального рівняння $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$ у вигляді:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}.$$

Твердження. Умовою лінійної незалежності частинних рішень $y_1, y_2, \dots, y_n$ є те, що визначник Вронського ні при яких значеннях x не повинен дорівнювати нулю, т. е. $W(x) \neq 0$.

Def. Фундаментальною системою рішень однорідного лінійного диференціального рівняння називається упорядкований набір з n лінійно незалежних рішень рівняння:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \dots + c_n y_n.$$

Def. Алгебраїчне рівняння виду

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0,$$

отримане з лінійного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

підстановкою $y = e^{\lambda x}$, називається характеристичним рівнянням заданого диференціального рівняння.

При цьому при рішенні характеристичного рівняння виникають такі ситуації:

1. Коріння характеристичного рівняння – різні дійсні числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. У цьому випадку кожному дійсному кореню λ_k відповідає частинний розв'язок рівняння $y_k = e^{\lambda_k x}$. Тоді загальний розв'язок однорідного рівняння набирає вигляду

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + C_n e^{\lambda_n x}.$$

2. Коріння характеристичного рівняння – різні комплексні числа $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$. В цьому випадку можна використовувати формулу Ейлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Кожній парі комплексно-сполучених коренів $\lambda_k = \alpha_k \pm i\beta_k$ відповідає частинний розв'язок

$$y_k = e^{\alpha_k x} (\cos \beta_k x \pm i \sin \beta_k x).$$

Якщо комплексна функція є розв'язком диференціального рівняння, то дійсна і уявна частини цього розв'язку також є розв'язками цього рівняння і тому рішення записують у вигляді

$$y_k = e^{\alpha_k x} (C_{1k} \cos \beta_k x + C_{2k} \sin \beta_k x).$$

Загальний розв'язок диференціального рівняння має вигляд

$$y = e^{\alpha_1 x} (C_{11} \cos \beta_1 x + C_{12} \sin \beta_1 x) + e^{\alpha_2 x} (C_{21} \cos \beta_2 x + C_{22} \sin \beta_2 x) + \dots + e^{\alpha_n x} (C_{n1} \cos \beta_n x + C_{n2} \sin \beta_n x).$$

3. Коріння характеристичного рівняння - дійсні кратні числа. У цьому випадку кожному k -кратному дійсному кореню характеристичного рівняння відповідає k частинних рішень виду

$$e^{\lambda x}, x e^{\lambda x}, \dots, x^{k-1} e^{\lambda x},$$

тобто щоб розв'язки були лінійно незалежними, їх послідовно множимо на x в зростаючій степені.

4. Коріння характеристичного рівняння - комплексні кратні числа. У цьому випадку за аналогією з п. 3 будують лінійно незалежні частинні розв'язки у вигляді

$e^{\alpha x} \cos \beta x, e^{\alpha x} \sin \beta x, x e^{\alpha x} \cos \beta x, x e^{\alpha x} \sin \beta x, x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x, x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x$ і т.д.

Таких пар повинно бути k (k – кратність комплексно-сполученого кореня $\alpha \pm i\beta$).

5. Якщо корені характеристичного рівняння - комбінація розглянутих випадків, то при побудові частинних рішень керуються рекомендаціями, викладеними в пп. 1 – 4.

Перерва

- Вовочка, у тебе в кишені сто рублів, ти попросив у батька ще сто, скільки у тебе буде грошей?

- У мене буде сто рублів, Марія Іванівна.

- Ти погано знаєш математику!

- А ви погано знаєте мого тата!

5.5. Питання для перевірки знань

1. Диференціальне рівняння виду $y^{(n)} = f(x)$ вирішують:

а) підстановкою $z = y'$; б) методом Ейлера; в) послідовним інтегруванням.

2. Диференціальне рівняння $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \dots, y^{(n)}) = 0$ вирішують заміною змінної:

а) $z = y^{(k)}$, де $z = z(x)$; б) $z' = y^{(k)}$, де $z = z(x)$; в) $z = y^{(k)}$, де $z = z(y)$.

3. Диференціальне рівняння виду $F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ вирішують заміною змінної:

а) $z = y'$, де $z = z(y)$; б) $z = y'$, де $z = z(x)$; в) $y' = ux$.

4. Якщо виконується умова $F(x, ty, ty', ty'', \dots, ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})$, то диференціальне рівняння виду $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ вирішують заміною змінної:

а) $z = \frac{y'}{y}$, де $z = z(x)$; б) $z = y'$, де $z = z(x)$; в) $z = \frac{y'}{y}$, де $z = z(y)$.

5. Якщо має місце диференціальне рівняння виду $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, ліва частина якого представляє собою похідну деякої функції, то:

а) його вирішують послідовним інтегруванням; б) ця функція дорівнює інтегралу від правої частини; в) його вирішують методом Ейлера.

6. Запис лінійного диференціального рівняння n -го порядку з постійними коефіцієнтами:

а) $y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_n y = f(x)$, де $a_i = \text{const}$;

б) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x)$, де $a_i = \text{const}$;

в) $y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \dots + a_n y = 0$, де $a_i = \text{const}$.

7. Лінійне диференціальне рівняння n-го порядку – це рівняння виду:

а) $y^{(n)} + y^{(n-1)} + y^{(n-2)} + \dots + y = f(x)$;

б) $y^{(n)} + a_1(x) y^{(n-1)} + a_2(x) y^{(n-2)} + \dots + a_n(x) y = f(x)$;

в) $y^n + a_1(x) y^{n-1} + a_2(x) y^{n-2} + \dots + a_n(x) y = f(x)$.

8. Запис оператора лінійного диференціального рівняння n-го порядку:

а) $L = \frac{d^n}{dx^n} + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + 1$; б) $L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1 + \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_2 + \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + a_n$;

в) $L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_2(x) \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + a_n(x)$.

9. Запис лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами:

а) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = 0$;

б) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x)$;

в) $y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_n y = f(x) y$.

10. Запис лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку через оператор:

а) $Ly = f(x)$; б) $L(y) = f(x)$; в) $Ly = f(x)$.

11. Властивості оператора лінійного диференціального рівняння n-го порядку.

а) $L(yz) = L(y)L(z)$; б) $L(y+z) = L(y) + L(z)$; в) $L\left(\frac{z}{y}\right) = \frac{L(z)}{L(y)}$.

12. Властивості оператора лінійного диференціального рівняння n-го порядку щодо константи:

а) $L(C+y) = C + L(y)$; б) $L(Cy) = CL(y)$; в) $L(C+y) = L(C) + L(y)$.

13. Якщо y_1 і y_2 – розв'язок рівняння $L(y) = 0$, то розв'язком також є:

а) $y_1 y_2$; б) $y_1 + y_2$; в) $\frac{y_1}{y_2}$.

14. Якщо y – розв'язок рівняння $L(y) = 0$, то розв'язком також є:

а) Cy ; б) $C + y$; в) $\frac{C}{y}$.

15. Якщо комплексне число $y = u(x) + iv(x)$ є розв'язком рівняння $L(y) = 0$, то розв'язком також є:

а) $u(x)v(x)$; б) $u(x)$ і $v(x)$; в) $u(x) + v(x)$.

16. Сукупність рішень $y_1(x), y_2(x), \dots, y_k(x)$ диференціального рівняння називається лінійно незалежною, якщо:

а) їх лінійна комбінація $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_k y_k(x)$ не дорівнює нулю при будь-яких значеннях α_i ;

б) їх лінійна комбінація $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_k y_k(x)$ дорівнює нулю тільки в тому випадку, коли всі α_i дорівнюють нулю;

в) знайдеться хоча б одне значення α_i , не рівне нулю, при якому лінійна комбінація $\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \dots + \alpha_k y_k(x)$ буде дорівнює нулю.

17. Якщо $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ є загальним розв'язком лінійного однорідного диференціального рівняння n-го порядку, то оператор Вронського має вигляд:

$$\text{а)} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}; \text{б)} \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}; \text{в)} \begin{vmatrix} y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ y_1''' & y_2''' & \dots & y_n''' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n+1)} & y_2^{(n+1)} & \dots & y_n^{(n+1)} \end{vmatrix}.$$

18. Фундаментальна система розв'язків лінійного диференціального однорідного рівняння— це:

а) загальний розв'язок лінійного диференціального однорідного рівняння;
б) лінійно незалежна комбінація рішень диференціального рівняння; в) розв'язок диференціального рівняння, який дозволяє побудувати частинні розв'язки цього рівняння.

19. Щоб розв'язок утворювали фундаментальну систему рішень лінійного диференціального однорідного рівняння:

а) визначник Вронського повинен дорівнювати нулю; б) визначник Вронського не повинен дорівнювати нулю; в) визначник Вронського повинен бути позитивним.

20. Для одержання розв'язку однорідного лінійного диференціального рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами використовують:

а) метод Ейлера; б) метод невизначених коефіцієнтів; в) метод варіації довільної сталої.

21. Частинний розв'язок диференціального рівняння при методі Ейлера шукають у вигляді:

$$\text{а)} y = e^{\lambda x}; \text{б)} y = \lambda e^{\lambda x}; \text{в)} y = e^{\lambda x}.$$

22. Характеристичне рівняння заданого диференціального рівняння— це:

а) алгебраїчне рівняння, яке одержують з диференціального рівняння підстановкою Ейлера; б) диференціальне рівняння, яке одержують із заданого рівняння підстановкою Ейлера; в) рівняння, розв'язок якого збігається з розв'язком заданого диференціального рівняння.

23. Якщо λ_1 і λ_2 — прості дійсні корені характеристичного рівняння, то розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння має вид:

$$\text{а)} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 x e^{\lambda_2 x}; \text{б)} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}; \text{в)} C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 \cos \lambda_2 x.$$

24. Якщо розв'язком характеристичного рівняння є спряжені комплексні некрратні числа $\lambda = \alpha \pm i\beta$, то розв'язок відповідного однорідного диференціального рівняння має вигляд:

- а) $e^{\beta x} (C_1 \cos(\alpha x) + C_2 \sin(\alpha x))$;
 б) $e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x))$;
 в) $e^{\alpha x} (C_1 \cos(\beta x) + C_2 x \sin(\beta x))$.

25. Якщо $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$ – кратний дійсний корінь характеристичного рівняння, то розв’язок відповідного однорідного диференціального рівняння має вигляд:

- а) $C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x} + C_3 e^{\lambda x^3}$;
 б) $C_1 e^{\lambda x} + x C_2 e^{\lambda x} + x^2 C_3 e^{\lambda x}$;
 в) $C_1 e^{\lambda x} + C_2 e^{\lambda x} + C_3 e^{\lambda x}$.

26. Якщо розв’язком характеристичного рівняння є кратні спряжені комплексні числа $\lambda_{1,2} = \lambda_{3,4} = \alpha \pm i\beta$, то розв’язок відповідного однорідного диференціального рівняння має вигляд:

- а) $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + x C_2 \sin \beta x + x^2 C_3 \cos \beta x + x^3 C_4 \sin \beta x)$;
 б) $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + x C_3 \cos \beta x + x C_4 \sin \beta x)$;
 в) $e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x + C_3 \cos^2 \beta x + C_4 \sin^2 \beta x)$.

5.6. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

Завдання для роботи в аудиторії:

- $y''' = -\frac{8}{x^3}$.
- $y'' + y' \operatorname{tg} x = \sin 3x$.
- $y'' \operatorname{tg} y = 2(y')^2$.
- $y'' + y' - 20y = 0$.
- $y'' - 4y' + 5y = 0$.
- $y'' - 14y' + 49y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1$
- $y''' - 64y = 0$.
- $y^V + 3y''' - 4y' = 0$.
- $y''' + 6y'' + 12y' + 8y = 0$.

Домашнє завдання:

- $y'' = x e^{2x}, y(0) = 1, y'(0) = 0$.
- $y'' = \frac{y'}{x} \ln \frac{y'}{x}$.
- $(1+y)y'' - 5(y')^2 = 0$.
- $y'' + 12y' + 36y = 0$.
- $y'' - 10y' = 0$.
- $y'' + \pi^2 y = 0$.
- $y'' + 2y' + 10y = 0$.
- $y^{IV} - 4y = 0$.
- $y^V - 26y''' + 25y' = 0$.
- $y''' - 9y'' + 27y' - 27y = 0$.

5.7. Самостійна робота

1. $y''' = x \cos x$, $y''(0) = 0$, $y'(0) = -1$, $y(0) = 0$.
2. $y''(e^x + 1) + y' = 0$. 3. $2yy'' + (y')^2 + (y')^4 = 0$.
4. $y'' + 3y' = 0$. 5. $y'' + 7y = 0$. 6. $y'' - 2y' + 5y = 0$.
7. $y'' + 4y' - 12y = 0$. 8. $y^V + 10y^{IV} + 25y''' = 0$.
9. $y^{IV} + 8y'' + 16y = 0$. 10. $y'' - 16y = 0$.

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

Я зробив на чорновому аркуші, хотів переписати, але випадково загубив його ...

Що кажуть про математику

«У наш час важко вказати будь-яку гілку математики, яка не знаходила б застосування у величезній різноманітності проблем практики» (Б. В. Гнеденко).

Розв'язок лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку з постійними коефіцієнтами. Розв'язок неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку з постійними коефіцієнтами. Властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку. Про структуру розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку. Розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь n-го порядку з постійними коефіцієнтами методом варіації довільних сталих. Розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь n-го порядку з постійними коефіцієнтами і зі спеціальною правою частиною

6. РОЗВ'ЯЗОК ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ n-ГО ПОРЯДКУ З ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

6.1. Розв'язок неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку з постійними коефіцієнтами

Рівняння виду $L(y) = f(x)$ де

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dx} + a_n,$$

називається лінійним диференціальним рівнянням n-го порядку.

6.2. Властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку

1. Якщо $y_{одн}$ і $y_{неодн}$ – будь-які розв'язки однорідного і неоднорідного рівнянь, то $y = y_{одн} + y_{неодн}$ – також розв'язок неоднорідного рівняння.

◀ Нехай $L(y_{одн}) = 0$, $L(y_{неодн}) = f(x)$ і $y = y_{одн} + y_{неодн}$.

Тоді в рівняння $L(y) = f(x)$ підставляємо ці значення:

$$L(y_{одн} + y_{неодн}) = f(x) \Rightarrow L(y_{одн}) + L(y_{неодн}) = 0 + f(x) \Rightarrow \Rightarrow L(y) = f(x). \blacktriangleright$$

2. Властивість суперпозиції. Якщо існують частинні розв'язки y_{q_i} рівнянь $L(y_{q_i}) = f_i(x)$, $i = \overline{1, k}$, то сума цих розв'язків $y_q = \sum_{i=1}^k y_{q_i}$ є розв'язком рівняння $L(y) = \sum_{i=1}^k f_i(x)$.

$$\blacktriangleleft \quad \text{Оскільки } y_q = \sum_{i=1}^k y_{q_i}, L(y_q) = L\left(\sum_{i=1}^k y_{q_i}\right) = \sum_{i=1}^k L(y_{q_i}). \quad \text{але } L(y_{q_i}) = f_i(x).$$

$$\text{отже, } L(y_{q_i}) = L\left(\sum_{i=1}^k y_{q_i}\right) = \sum_{i=1}^k L(y_{q_i}). \quad \text{тоді } L(y_q) = \sum_{i=1}^k f_i(x). \blacktriangleright$$

3. Якщо $y = \alpha(x) + i\beta(x)$ – комплексний розв'язок рівняння $L(y) =$

$= u(x) + iv(x)$, то $y = \alpha(x)$ буде розв'язком рівняння $L(y) = u(x)$, а $y = \beta(x)$ – розв'язком рівняння $L(y) = v(x)$.

$$\blacktriangleleft L(\alpha(x) + i\beta(x)) = L(\alpha(x)) + iL(\beta(x)) = u(x) + iv(x) \Rightarrow \\ L(\alpha(x)) = u(x), L(\beta(x)) = v(x). \blacktriangleright$$

6.3. Про структуру розв'язка лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку

Th. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і будь-якого частинного розв'язку даного неоднорідного рівняння: $y = y_{одн} + y_{ч. неодн}$, де $y_{одн}$ – спільний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $y_{ч. неодн}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Таким чином, загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n-го порядку можна представити у вигляді

$$y = \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i y_i}_{\text{Загальний розв'язок однорідного рівняння}} + \underbrace{\phi(x)}_{\text{Частинний розв'язок неоднорідного рівняння}}$$

6.4. Розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь n-го порядку з постійними коефіцієнтами методом варіації довільних сталих

Розглянемо диференціальне рівняння $L(y) = f(x)$. Розв'язок відповідного однорідного рівняння $L(y) = 0$ відомий і має вигляд $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$.

Будемо шукати розв'язок неоднорідного рівняння $L(y) = f(x)$ в такому ж вигляді, як і однорідного, тільки приймемо, що $c_i = c_i(x)$, $i = \overline{1, n}$. Тобто, вважаємо, що довільна стала – це якась функція змінної x . Розглянемо, як можна підібрати у цьому разі $c_i(x)$ таке, щоб воно було розв'язком заданого неоднорідного диференційного рівняння.

Проведемо наступні побудови:

$$y' = \sum_{i=1}^n C'_i y_i + \sum_{i=1}^n C_i y'_i, \text{ приймемо, що } \sum_{i=1}^n C'_i y_i = 0, \text{ тоді } y' = \sum_{i=1}^n C_i y'_i;$$

$$y'' = \sum_{i=1}^n C'_i y'_i + \sum_{i=1}^n C_i y''_i, \text{ приймемо, що } \sum_{i=1}^n C'_i y'_i = 0, \text{ тоді } y'' = \sum_{i=1}^n C_i y''_i, \text{ і т.д.}$$

Для n-й похідної

$$y^{(n)} = \sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n)}.$$

Підставимо одержані похідні в диференціальне рівняння $L(y) = f(x)$:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y &= 0, \\ \sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-1)} + \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n)} + a_1 \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n-1)} + a_2 \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n-2)} + \dots \\ \dots + a_{n-1} \sum_{i=1}^n C_i y'_i + a_n \sum_{i=1}^n C_i y_i &= f(x). \end{aligned}$$

Але так як

$$\sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n)} + a_1 \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n-1)} + a_2 \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n-2)} + \dots + a_{n-1} \sum_{i=1}^n C_i y'_i + a_n \sum_{i=1}^n C_i y_i = 0,$$

одержимо

$$\sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-1)} = f(x).$$

Таким чином, у разі застосування методу варіації довільних сталих для визначення невідомих функцій $c'_i = c'_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, а саме:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n C'_i y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n C'_i y'_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n C'_i y''_i = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0 \\ C'_1 y''_1 + C'_2 y''_2 + \dots + C'_n y''_n = 0 \\ \dots \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи єдиний, так як її головний визначник - це визначник Вронського:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

І він в силу лінійної незалежності частинних розв'язків лінійного однорідного рівняння не дорівнює нулю.

Після знаходження похідних $C'_i = C'_i(x)$, де $i = 1, 2, \dots, n$, функції $C_i = C_i(x)$ визначають простим інтегруванням.

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $y'' + y = \frac{1}{\cos x}$.

Розв'язок

Знаходимо корені характеристичного рівняння і загальний розв'язок однорідного диференціального рівняння:

$$\lambda^2 + 1 = 0; \lambda_{1,2} = \pm i; \lambda_1 = \cos x; \lambda_2 = \sin x; y = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x.$$

Складемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь щодо $C'_i = C'_i(x)$:

$$\begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 = 0; \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C'_1 \cos x + C'_2 \sin x = 0; \\ -C'_1 \sin x + C'_2 \cos x = \frac{1}{\cos x}. \end{cases}$$

Помножимо перше рівняння системи на $\sin x$, А друге - на $\cos x$:

$$\begin{cases} C'_1 \cos x \sin x + C'_2 \sin^2 x = 0; \\ -C'_1 \sin x \cos x + C'_2 \cos^2 x = 1. \end{cases}$$

Звідси знаходимо похідні

$$\begin{cases} C'_1 = -\tan x; \\ C'_2 = 1. \end{cases}$$

Інтегруючи отримані похідні, маємо

$$C_1(x) = \ln|\cos x| + \bar{C}_1, \quad C_2(x) = x + \bar{C}_2.$$

Таким чином,

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x = (\ln|\cos x| + \bar{C}_1) \cos x + (x + \bar{C}_2) \sin x,$$

$$y = \bar{C}_1 \cos x + \bar{C}_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$$

Відповідь. $y = \bar{C}_1 \cos x + \bar{C}_2 \sin x + \cos x \ln|\cos x| + x \sin x.$

6.5. Розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь n -го порядку з постійними коефіцієнтами і зі спеціальною правою частиною

Метод досить часто називають методом невизначених коефіцієнтів. Він застосовується лише для рівнянь у яких права частина має наступний вигляд:

$$1) f(x) = R_m(x) e^{\alpha x};$$

$$2) f(x) = e^{\alpha x} (R_m(x) \cos(\beta x) + Q_n \sin(\beta x)).$$

При цьому вводиться число σ , яке називають контрольним числом.

Для 1-го випадку, коли $f(x) = R_m(x) e^{\alpha x}$, контрольне число $\sigma = \alpha$. Для другого випадку $\sigma = \alpha + i\beta$

Суть методу полягає в тому, що з вигляду правої частини, тобто $f(x)$, записують очікувану форму частинного розв'язку з невизначеними коефіцієнтами. Підставивши побудований розв'язок в задане диференціальне рівняння, з отриманої тотожності знаходять значення невизначених коефіцієнтів.

Розглянемо, як записують очікувану форму частинного розв'язку.

1-й випадок. $f(x) = R_m(x) e^{\alpha x}$, де $R_m(x)$ – многочлен степені m ; α – дійсне число ($\alpha \in \mathbf{R}$). Диференціальне рівняння має вигляд

$$L(y) = R_m(x)e^{\alpha x}.$$

В цьому випадку частинний розв'язок можна записати у вигляді:

$$y_u = x^r P_m(x)e^{\alpha x}.$$

тут r дорівнює нулю, якщо контрольне число $\sigma = \alpha$ – не корінь характеристичного рівняння; якщо ж контрольне число $\sigma = \alpha$ дорівнює кореню характеристичного рівняння ($\alpha_i = \lambda_i$), то r кратність цього кореня.

Зауваження 1. Якщо $r \neq 0$, то кажуть, що має місце резонансний випадок, якщо $r = 0$, то резонансу немає.

Зауваження 2. Існує формула Ейлера, яка зв'язує показову і тригонометричну форми запису комплексного числа:

$$e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x} (\cos(\beta x) \pm i \sin(\beta x)).$$

2-й випадок. $f(x) = e^{\alpha x} (R_m(x) \cos(\beta x) + Q_n(x) \sin(\beta x))$, де $R_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени степеня m і n ; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ – дійсна і уявна частини контрольного числа $\sigma = \alpha + i\beta$. Диференціальне рівняння має вигляд

$$L(y) = e^{\alpha x} (R_m(x) \cos(\beta x) + Q_n(x) \sin(\beta x)).$$

В цьому випадку частинний розв'язок шукають у вигляді:

$$y_u = x^r e^{\alpha x} (P_l(x) \cos(\beta x) + S_l(x) \sin(\beta x)),$$

де r дорівнює нулю, якщо контрольне число $\sigma = \alpha + i\beta$ – не корінний характеристичного рівняння; якщо ж контрольне число $\sigma = \alpha + i\beta$ – корінь характеристичного рівняння ($\alpha_i = \lambda_i$), то r кратність цього кореня; $P_l(x)$, S_l – записані в загальному вигляді многочлени степеню $l = \max\{m, n\}$,.

Наведемо приклади визначення контрольного числа σ і частинних розв'язків неоднорідних рівнянь для наступних правих частин $f(x)$.

а) Вигляд правої частини неоднорідного рівняння: $f(x) = 2$.

Для цього запису контрольне число: $\sigma = 0$, степінь многочлена: $l = 0$.

Якщо $\sigma = \lambda_i$, то частинний розв'язок запишеться у вигляді $y_u = x^r A$, де r кратність характеристичного числа λ_i однорідного рівняння відносно заданого.

Якщо $\sigma \neq \lambda_i$, то частинний розв'язок запишеться у вигляді $y_u = A$,

б) Вигляд правої частини неоднорідного рівняння: $f(x) = 2x^2 - 2x + 4$.

Для цього запису контрольне число: $\sigma = 0$, степінь многочлена: $l = 2$,

Якщо $\sigma = \lambda_i$, то частинний розв'язок запишеться у вигляді:

$$y_u = x^r (Ax^2 + Bx + C).$$

Якщо $\sigma \neq \lambda_i$, то частинний розв'язок запишеться у вигляді:

$$y_u = Ax^2 + Bx + C$$

в) Вигляд правої частини неоднорідного рівняння: $f(x) = 2e^{-3x}$.

Для цього запису контрольне число: $\sigma = -3$, степінь многочлена: $l = 0$.

Якщо $\sigma = \lambda_i$, то частинний розв'язок запишеться у вигляді $y_u = x^r e^{-3x} A$.

Якщо $\sigma \neq \lambda_i$, то частинний розв'язок запишеться у вигляді $y_u = e^{-3x} A$.

г) Вигляд правої частини неоднорідного рівняння:

$$f(x) = (4x^2 + 2x - 1)e^{-3x}.$$

Для цього запису контрольне число: $\sigma = -3$, степінь многочлена: $l = 2$.

Якщо $\sigma = \lambda_i$, то частинний розв'язок запишеться у вигляді:

$$y_u = x^r e^{-3x} (Ax^2 + Bx + C).$$

Якщо $\sigma \neq \lambda_i$, то частинний розв'язок запишеться у вигляді

$$y_u = e^{-3x} (Ax^2 + Bx + C).$$

д) Вигляд правої частини неоднорідного рівняння:

$$f(x) = 3e^{2x} (\cos 3x - \sin 3x).$$

Для цього запису контрольне число: $\sigma = 2 - 3i$, степінь многочлена: $l = 0$.

Якщо $\sigma = \lambda_i$, то частинний розв'язок запишеться у вигляді:

$$y_u = x^r e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x).$$

Якщо $\sigma \neq \lambda_i$, то частинний розв'язок запишеться у вигляді:

$$y_u = e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x).$$

е) Вигляд правої частини неоднорідного рівняння:

$$f(x) = 3e^{2x} (x \cos 3x + (x^2 + 2) \sin 3x).$$

Для цього запису контрольне число: $\sigma = 2 + 3i$, степінь многочлена: $l = 2$.

Якщо $\sigma = \lambda_i$, то частинний розв'язок запишеться у вигляді:

$$y_u = x^r e^{2x} ((A_1 x^2 + B_1 x + C_1) \cos 3x + (A_2 x^2 + B_2 x + C_2) \sin 3x).$$

Якщо $\sigma \neq \lambda_i$, то частинний розв'язок запишеться у вигляді

$$y_u = e^{2x} ((A_1 x^2 + B_1 x + C_1) \cos 3x + (A_2 x^2 + B_2 x + C_2) \sin 3x).$$

Наведені приклади представлені в таблиці.

а)	$f(x) = 2$	
	$\sigma = \lambda_i$	$y_u = x^r A$
	$\sigma \neq \lambda_i$	$y_u = A$
б)	$f(x) = 2x^2 - 2x + 4$	
	$\sigma = \lambda_i$	$y_u = x^r (Ax^2 + Bx + C)$
	$\sigma \neq \lambda_i$	$y_u = Ax^2 + Bx + C$
в)	$f(x) = 2e^{-3x}$	
	$\sigma = \lambda_i$	$y_u = x^r e^{-3x} A$
	$\sigma \neq \lambda_i$	$y_u = e^{-3x} A$
г)	$f(x) = (4x^2 + 2x - 1)2e^{-3x}$	
	$\sigma = \lambda_i$	$y_u = x^r e^{-3x} (Ax^2 + Bx + C)$
	$\sigma \neq \lambda_i$	$y_u = e^{-3x} (Ax^2 + Bx + C)$
д)	$f(x) = 3e^{2x} (\cos 3x - \sin 3x)$	
	$\sigma = \lambda_i$	$y_u = x^r e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$
	$\sigma \neq \lambda_i$	$y_u = e^{2x} (A \cos 3x + B \sin 3x)$
е)	$f(x) = 3e^{2x} (x \cos 3x + (x^2 + 2) \sin 3x)$	
	$\sigma = \lambda_i$	$y_u = x^r e^{2x} ((A_1 x^2 + B_1 x + C_1) \cos 3x + (A_2 x^2 + B_2 x + C_2) \sin 3x)$
	$\sigma \neq \lambda_i$	$y_u = e^{2x} ((A_1 x^2 + B_1 x + C_1) \cos 3x + (A_2 x^2 + B_2 x + C_2) \sin 3x)$

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $y''' - y'' = 2x^2 - 2x + 4$.

Розв'язок

Характеристичне рівняння однорідного диференціального рівняння:

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0.$$

Розв'язок характеристичного рівняння:

$$\lambda^3 - \lambda^2 = 0; \lambda^2(\lambda - 1) = 0; \lambda_1 = \lambda_2 = 0, \lambda_3 = 1.$$

Розв'язок однорідного рівняння:

$$y_1 = e^{0x} = 1, y_2 = xe^{0x} = x, y_3 = e^x;$$

$$y_{одн} = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C_1 + C_2 x + C_3 e^x.$$

Права частина:

$$f(x) = 2x^2 - 2x + 4, \sigma = 0, \sigma = \lambda_1 = \lambda_3; r = 2, l = 2;$$

$$y_{\eta} = x^2(Ax^2 + Bx + C) \text{ або } y_{\eta} = Ax^4 + Bx^3 + Cx^2.$$

Підставимо частинний розв'язок у задане рівняння і визначимо невідомі коефіцієнти:

$$y'_{\eta} = 4Ax^3 + 3Bx^2 + 2Cx, y''_{\eta} = 12Ax^2 + 6Bx + 2C, y'''_{\eta} = 24Ax + 6B;$$

$$y''' - y'' = 2x^2 - 2x + 4, 24Ax + 6B - 12Ax^2 - 6Bx - 2C = 2x^2 - 2x + 4;$$

$$x^2(-12A) + x(24A - 6B) + x^0(6B - 2C) = x^2 \cdot 2 + x(-2) + x^0 \cdot 4;$$

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} -12A \\ 24A - 6B \\ 6B - 2C \end{array} = \begin{array}{l} 2 \\ -2 \\ 4 \end{array};$$

$$\begin{cases} A = -\frac{1}{6}; \\ B = -\frac{1}{6}(-2 - 24A) = -\frac{1}{6}(-2 + 4) = -\frac{1}{3}; \\ C = -\frac{1}{2}(4 - 6B) = -\frac{1}{2}\left(4 - 6\left(-\frac{1}{3}\right)\right) = -3; \end{cases}$$
$$y_{\eta} = -\frac{x^4}{6} - \frac{x^3}{3} - 3x^2 = -\frac{x^2}{6}(x^2 + 2x + 18).$$

Таким чином, розв'язок неоднорідного рівняння напишемо у вигляді.

$$\text{Відповідь: } y = y_{одн} + y_{\eta} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x - \frac{x^2}{6}(x^2 + 2x + 18).$$

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $y''' - y'' = 3 \sin 2x$.

Розв'язок

Однорідне рівняння має розв'язок $y_{одн} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$.

Права частина:

$$f(x) = 3 \sin 2x; \sigma = 2i, \sigma \neq \lambda_i; r = 0, l = 0; y_u = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Підставами частинний розв'язок у задане рівняння і визначимо невідомі коефіцієнти:

$$y'_u = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x, \quad y''_u = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x,$$

$$y'''_u = 8A \sin 2x - 8B \cos 2x;$$

$$y''' - y'' = 3 \sin 2x; 8A \sin 2x - 8B \cos 2x + 4A \cos 2x + 4B \sin 2x = 3 \sin 2x;$$

$$\sin 2x \cdot (8A + 4B) + \cos 2x(-8B + 4A) = \sin 2x(3) + \cos 2x(0);$$

$$\begin{aligned} \sin 2x \Big| 8A + 4B = 3; & \begin{cases} 16A + 8B = 6; \\ 4A - 8B = 0; \end{cases} \begin{cases} 20A = 6 \Rightarrow A = \frac{3}{10}; \\ B = \frac{1}{2}A = \frac{3}{20}; \end{cases} \\ \cos 2x \Big| 4A - 8B = 0; & \end{aligned}$$

$$y_u = \frac{3}{10} \cos 2x + \frac{3}{20} \sin 2x.$$

Таким чином, розв'язок неоднорідного рівняння напишемо у вигляді

$$y = y_{одн} + y_u = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + \frac{3}{10} \cos 2x + \frac{3}{20} \sin 2x.$$

$$\text{Відповідь: } y = y_{одн} + y_u = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + \frac{3}{10} \cos 2x + \frac{3}{20} \sin 2x.$$

ПРИКЛАД. Розв'язати рівняння $y''' - y'' = 3 \sin 2x + 5x \cos 2x$.

Розв'язок

Однорідне рівняння має розв'язок $y_{одн} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x$.

Напишемо частинний розв'язок неоднорідного рівняння. Так як $f(x) = 3 \sin 2x + 5x \cos 2x$, контрольне число $\sigma = 2i$. Коріння характеристичного рівняння λ_i не збігаються з контрольним числом $\sigma = 2i$, отже, $r = 0$. Частинний розв'язок напишемо у вигляді $y_u = (ax + b) \cos 2x + (cx + d) \sin 2x$. Підставами частинний розв'язок у задане рівняння і визначимо невідомі коефіцієнти:

$$y'_u = a \cos 2x + c \sin 2x - 2(ax + b) \sin 2x + 2(cx + d) \cos 2x;$$

$$\begin{aligned} y''_u &= -2a \sin 2x + 2c \cos 2x - 4(ax + b) \cos 2x - 4(cx + d) \sin 2x - 2a \sin 2x + 2c \cos 2x = \\ &= -4a \sin 2x + 4c \cos 2x - 4(ax + b) \cos 2x - 4(cx + d) \sin 2x; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y'''_u &= -8a \cos 2x - 8c \sin 2x + 8(ax + b) \sin 2x - 8(cx + d) \cos 2x - 4a \cos 2x - 4c \sin 2x = \\ &= -12a \cos 2x - 12c \sin 2x + 8(ax + b) \sin 2x - 8(cx + d) \cos 2x. \end{aligned}$$

Підставляємо отримані значення в рівняння $y''' - y'' = 3 \sin 2x + 5x \cos 2x$:

$$\begin{aligned} -12a \cos 2x - 12c \sin 2x + 8(ax + b) \sin 2x - 8(cx + d) \cos 2x + 4a \sin 2x - 4c \cos 2x + \\ + 4(ax + b) \cos 2x + 4(cx + d) \sin 2x = 3 \sin 2x + 5x \cos 2x; \end{aligned}$$

Використаємо метод невизначених коефіцієнтів:

$$\begin{aligned} \cos 2x(-12a - 8d - 4c + 4b) + x \cos x(-8c + 4a) + \sin 2x(-12c + 8b + 4a + 4d) + \\ + x \sin 2x(8a + 4c) = \cos 2x(0) + x \cos x(5) + \sin 2x(3) + x \sin 2x(0); \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l|l} \cos 2x & 12a + 4b - 4c - 8d = 0; \\ x \cos 2x & 4a - 8c = 5; \\ \sin 2x & 4a + 8b - 12c + 4d = 3; \\ x \sin 2x & 8a + 4c = 0; \end{array} \Rightarrow \begin{cases} 4a - 8c = 5; \\ 8a + 4c = 0; \\ 4b - 8d = 1; \\ 8b + 4d = -2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{4}; \\ c = -\frac{1}{2}; \\ b = -\frac{7}{20}; \\ d = -\frac{3}{10}; \end{cases}$$

$$y_{\text{ч}} = \left(\frac{1}{4}x - \frac{7}{20} \right) \cos 2x + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{10} \right) \sin 2x.$$

Таким чином, розв'язок неоднорідного рівняння записується у вигляді

$$y = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч}} = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + \left(\frac{1}{4}x - \frac{7}{20} \right) \cos 2x + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{10} \right) \sin 2x.$$

Відповідь: $y = C_1 + C_2 x + C_3 e^x + \left(\frac{1}{4}x - \frac{7}{20} \right) \cos 2x + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{10} \right) \sin 2x$

6.6. Висновки

Рівняння виду $L(y) = f(x)$, де

$$L = \frac{d^n}{dx^n} + a_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + a_2 \frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} + \dots + a_{n-1} \frac{d}{dx} + a_n,$$

називається лінійним диференціальним рівнянням n -го порядку.

Властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку:

1. Якщо $y_{\text{одн}}$ і $y_{\text{неодн}}$ – будь-які розв'язки однорідного і неоднорідного рівнянь, то $y = y_{\text{одн}} + y_{\text{неодн}}$ – також розв'язок неоднорідного рівняння.

2. Властивість суперпозиції. Якщо існують частинні розв'язки $y_{\text{ч}_i}$ рівнянь $L(y_{\text{ч}_i}) = f_i(x)$, $i = \overline{1, k}$, то сума цих розв'язків $y_{\text{ч}} = \sum_{i=1}^k y_{\text{ч}_i}$ є розв'язком рівняння

$$L(y) = \sum_{i=1}^k f_i(x).$$

3. Якщо $y = \alpha(x) + i\beta(x)$ – комплексний розв'язок рівняння $L(y) = u(x) + iv(x)$, то $y = \alpha(x)$ буде розв'язком рівняння $L(y) = u(x)$, а $y = \beta(x)$ – розв'язком рівняння $L(y) = v(x)$.

Тн. Загальний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку є сумою загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і будь-якого частинного розв'язку даного неоднорідного рівняння: $y = y_{\text{одн}} + y_{\text{ч. неодн}}$, де $y_{\text{одн}}$ – загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $y_{\text{ч. неодн}}$ – частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

$$y = \underbrace{\sum_{i=1}^n c_i y_i}_{\text{Загальний розв'язок однорідного рівняння}} + \underbrace{\phi(x)}_{\text{Частинний розв'язок неоднорідного рівняння}}$$

А. Розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь n -го порядку з постійними коефіцієнтами методом варіації довільних сталих.

Якщо для диференціального рівняння $L(y) = f(x)$ розв'язок відповідного однорідного рівняння $L(y) = 0$ відомий і має вигляд $y = \sum_{i=1}^n c_i y_i$, то в разі застосування методу варіації довільних сталих для визначення невідомих функцій $c'_i = c'_i(x)$, $i = \overline{1, n}$ необхідно розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь, а саме:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n C'_i y_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n C'_i y'_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n C'_i y''_i = 0 \\ \dots \\ \sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-1)} = f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 + \dots + C'_n y_n = 0 \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 + \dots + C'_n y'_n = 0 \\ C'_1 y''_1 + C'_2 y''_2 + \dots + C'_n y''_n = 0 \\ \dots \\ C'_1 y_1^{(n-1)} + C'_2 y_2^{(n-1)} + \dots + C'_n y_n^{(n-1)} = f(x) \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи єдиний, так як її головний визначник - це визначник Вронського, який не дорівнює нулю.

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Після знаходження похідних $C'_i = C'_i(x)$, де $i = 1, 2, \dots, n$, функції $C_i = C_i(x)$ визначаються простим інтегруванням.

Б. Розв'язок лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь n -го порядку з постійними коефіцієнтами і зі спеціальною правою частиною.

Цей метод називають ще методом невизначених коефіцієнтів. Він застосовується лише для рівнянь з правою частиною, що має наступний вигляд:

- 1) $f(x) = R_m(x) e^{\alpha x}$;
- 2) $f(x) = e^{\alpha x} (R_m(x) \cos(\beta x) + Q_n \sin(\beta x))$.

При цьому вводиться число $\sigma = \alpha + i \beta$, яке називається контрольним числом. Для 1-го випадку $\sigma = \alpha$.

Метод полягає в тому, що з виду правої частини, тобто $f(x)$, записують очікувану форму приватного розв'язок з невизначеними коефіцієнтами. Підставивши побудований розв'язок в задане диференціальне рівняння, з отриманої тотожності знаходять значення коефіцієнтів.

Очікувана форма частинного розв'язку:

1-й випадок. $f(x) = R_m(x)e^{\alpha x}$, де $R_m(x)$ – многочлен степені m ; α – дійсне число ($\alpha \in \mathbf{R}$). Диференціальне рівняння має вигляд

$$L(y) = R_m(x)e^{\alpha x}.$$

В цьому випадку частинний розв'язок можна записати так:

$$y_{\text{ч}} = x^r P_m(x)e^{\alpha x}$$

тут r дорівнює нулю, якщо контрольне число $\sigma = \alpha$ – не корінний характеристичного рівняння; якщо ж контрольне число $\sigma = \alpha$ – корінь характеристичного рівняння ($\alpha_i = \lambda_i$), то r кратність цього кореня.

Зауваження 1. Якщо $r \neq 0$, то кажуть, що має місце резонансний випадок, якщо $r = 0$, то резонансу немає.

Зауваження 2. Існує формула Ейлера, яка зв'язує показову і тригонометричну форми запису комплексного числа:

$$e^{(\alpha \pm i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos(\beta x) \pm i \sin(\beta x)).$$

2-й випадок. $f(x) = e^{\alpha x}(R_m(x)\cos(\beta x) + Q_n(x)\sin(\beta x))$, де $R_m(x)$ і $Q_n(x)$ – многочлени степенях m і n ; $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ – дійсна і уявна частини контрольного числа $\sigma = \alpha + i\beta$. Диференціальне рівняння має вигляд

$$L(y) = e^{\alpha x}(R_m(x)\cos(\beta x) + Q_n(x)\sin(\beta x)).$$

В цьому випадку частинний розв'язок можна записати у вигляді:

$$y_{\text{ч}} = x^r e^{\alpha x}(P_l(x)\cos(\beta x) + S_l(x)\sin(\beta x)),$$

де r дорівнює нулю, якщо контрольне число $\sigma = \alpha + i\beta$ – не корінний характеристичного рівняння; якщо ж контрольне число $\sigma = \alpha + i\beta$ – корінь характеристичного рівняння ($\alpha_i = \lambda_i$), то r кратність цього кореня; $P_l(x)$, $S_l(x)$ – многочлени степені $l = \max\{m, n\}$, записані в загальному вигляді.

Перерва

- Щоб стати математиком, потрібно скласти чотири аналізи: математичний, функціональний, чисельний і флюорографію!
- З точністю до десятого знаку обчислено уявний нуль! Виявляється, він на уявну одиницю менше уявної одиниці, і на нього теж не можна ділити!
- Будь-яке диференціальне рівняння, яке поважає себе, не вирішується.
- Для справжнього математика границь не існує!
- Коли математики потрапляють в глухий кут, вони починають вигадувати аксіоми ...

6.7. Питання для перевірки знань

1. Розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -го порядку можна представити як:

а) добуток загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння і частинного розв'язку заданого неоднорідного рівняння; б) суму загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння і частинного розв'язку заданого неоднорідного рівняння; в) частка від ділення загального розв'язку відповідного однорідного диференціального рівняння на частинного розв'язку заданого неоднорідного рівняння.

2. Якщо існують частинні розв'язки рівняння $L(y_{ci}) = f_i(x)$, то має місце рівність:

$$\text{а) } L\left(\sum_{i=1}^k y_{ci}\right) = \sum_{i=1}^k f_i(x); \text{ б) } L\left(\sum_{i=1}^k y_{ci}\right) \neq \sum_{i=1}^k f_i(x); \text{ в) } L\left(\sum_{i=1}^k f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^k y_{ci}.$$

3. Виберіть запис правої частини диференціального неоднорідного лінійного рівняння, для якої можна знайти частинний розв'язок:

- а) $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x)tg(\beta x) + Q_n(x)ctg(\beta x))$;
б) $f(x) = e^{\alpha x}P_m(x) \cos(\beta x) \sin(\beta x)$; в) $f(x) = e^{\alpha x}(P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x)$.

4. Якщо права частина диференціального неоднорідного лінійного рівняння записана як: $e^{\alpha x}(P_m(x) \cos \beta x + Q_n(x) \sin \beta x)$, то число $\sigma = \alpha \pm i\beta$ називається:

а) характеристичним числом; б) контрольним числом; в) коренем многочлена.

5. Якщо права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння $f(x) = 5$, то контрольне число дорівнює:

- а) $\sigma = 5$; б) $\sigma = 0$; в) $\sigma = 5i$.

6. Якщо права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння $f(x) = 3x^2$, то контрольне число дорівнює:

- а) $\sigma = 3$; б) $\sigma = 2$; в) $\sigma = 0$.

7. Якщо права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння $f(x) = 4xe^{-x}$, то контрольне число дорівнює:

- а) $\sigma = 4$; б) $\sigma = x$; в) $\sigma = -1$.

8. Якщо права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння $f(x) = 5x \sin 2x$, то контрольне число дорівнює:

- а) $\sigma = i \cdot 2$; б) $\sigma = 2 + i \cdot 2$; в) $\sigma = 2$.

9. Якщо права частина лінійного неоднорідного диференціального рівняння $f(x) = -e^{2x}x \cos x$, то контрольне число дорівнює:

- а) $\sigma = 2 \cdot i$; б) $\sigma = 2 + i$; в) $\sigma = 2$.

10. Частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння, якщо його права частина $f(x) = -8$, а $\sigma \neq \lambda$, має вигляд:

- а) $y_c = e^{\sigma}$; б) $y_c = -8$; в) $y_c = A$.

11. Частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння, якщо його права частина $f(x) = x^2 + 2x$, а $\sigma = \lambda_1$, має вигляд:

а) $y_q = Ax^2 + Bx + C$; б) $y_q = x^2(Ax^2 + Bx + C)$; в) $y_q = x(Ax^2 + Bx + C)$.

12. Частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння, якщо його права частина $f(x) = \sin 2x$, а $\sigma = \lambda_1 = \lambda_2$, має вигляд:

а) $y_q = x^2(A \cos 2x + B \sin 2x)$; б) $y_q = e^{2x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$; в) $y_q = e^{2x} A \sin 2x$.

13. Частинний розв'язок лінійного неоднорідного диференціального рівняння, якщо його права частина $f(x) = 4e^{3x} \sin x$, а $\sigma = \lambda_1 = \lambda_2$, має вигляд:

а) $y_q = e^{3x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$; б) $y_q = xe^{3x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$;

в) $y_q = x^2 e^{3x}(A \cos 2x + B \sin 2x)$.

14. Запис системи рівнянь при методі варіації довільних сталих для лінійного диференціального неоднорідного рівняння n-го порядку, має вигляд:

а) $\sum_{i=1}^n C_i y_i = 0, \sum_{i=1}^n C_i y'_i = 0, \dots, \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n-2)} = 0, \sum_{i=1}^n C_i y_i^{(n-1)} = f(x)$;

б) $\sum_{i=1}^n C'_i y_i = 0, \sum_{i=1}^n C'_i y'_i = 0, \dots, \sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-2)} = 0, \sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-1)} = f(x)$;

в) $\sum_{i=1}^n C'_i y_i = 0, \sum_{i=1}^n C'_i y'_i = 0, \dots, \sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-2)} = 0, \sum_{i=1}^n C'_i y_i^{(n-1)} = 0$.

6.8. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

Завдання для роботи в аудиторії. Розв'язати задані рівняння:

1. $y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}$. 2. $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x} \ln x}{x}$.

3. $y'' + 4y' - 5y = x^2 + 7x + 2$. 4. $y'' - 2y' - 8y = xe^{-2x}$.

5. $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$. 6. $y'' - 2y' + 5y = (x + 2)e^x$.

7. $y'' + 4y' - 12y = 6 \sin 3x, y(0) = y'(0) = 0$. 8. $y'' - 5y' = e^{5x} + 3$.

Домашнє завдання. Розв'язати задані рівняння:

1. $y'' + 9y = \frac{1}{\sin 3x}$. 2. $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x}$. 3. $y'' - 7y' + 12y = e^{5x}$.

4. $y'' + 3y' = (x - 1)e^{-3x}$. 5. $y'' + 10y' + 25y = e^{-5x}$.

6. $y'' + 2y' + 2y = x^2 e^x$.

7. $y'' + 11y' + 30y = 3 \cos 2x + 2 \sin 2x, y(0) = 0, y'(0) = 1$.

8. $y'' - 9y = e^{-3x} + x$.

6.9. Самостійна робота

Розв'язати задані рівняння:

1. $y'' + 4y = \operatorname{tg} x$.

2. $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{e^x + 1}$.

3. $y'' + 5y' - 14y = 5x^2 - x$.

4. $y'' - 2y' - 24y = 3e^{-4x}$.

5. $y'' - 12y' + 36y = xe^{-6x}$.

6. $y'' + 2y' + 5y = (x^2 - 1)e^{-x}$.

7. $y'' + 6y' = 5\cos 6x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$.

8. $y'' - 2y' + 10y = \sin 3x + e^x$.

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

Був упевнений, що завтра субота ...

Що кажуть про математику

«Математика - широке поле ідей» (Д. Я. Стройк).

Системи диференціальних рівнянь. Основні поняття. Побудова рішення нормальної системи методом виключення. Розв'язок лінійних систем диференціальних рівнянь методом Ейлера. Лінійні системи диференціальних рівнянь. метод Ейлера. Матрична форма запису рішення лінійної нормальної системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

7. СИСТЕМИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

7.1. Основні поняття

Системи диференціальних рівнянь зустрічаються в задачах, для опису яких використовуються кілька функцій.

Вводять позначення:

- t - незалежна змінна;
- $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ - невідомі функції;
- $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t)$ - похідні невідомих функцій.

Зауваження 1. Використовують також позначення $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ або $x(t), y(t), z(t)$.

Def. Системою диференціальних рівнянь називається сукупність рівнянь, в кожне з яких входять незалежна змінна, шукані функції і їх похідні.

При цьому число рівнянь дорівнює числу шуканих функцій.

У загальному вигляді систему 1-го порядку записують так:

[illegible]

Def. Рішенням системи диференціальних рівнянь називають сукупність функцій $x_1 = x_1(t)$, $x_2 = x_2(t)$, ..., $x_n = x_n(t)$, які при підстановці в кожне з рівнянь перетворюють їх в тотожності.

Def. Нормальною системою диференціальних рівнянь називають систему диференціальних рівнянь 1-го порядку, визначених відносно похідних шуканих функцій:

[illegible]

Зауваження 2. У багатьох випадках систему будь-якого порядку можна привести до нормальної системи.

Початкові умови для нормальних систем диференціальних рівнянь мають вигляд

$$x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, \dots, x_n(t_0) = x_{n0}.$$

Розв'язок для систем диференціальних рівнянь записують у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, c_1, c_2, ..., c_n); \\ x_2 = \varphi_2(t, c_1, c_2, ..., c_n); \\ \\ x_n = \varphi_n(t, c_1, c_2, ..., c_n) \end{cases}$$

і називають загальним, якщо за заданими початковими умовами можна однозначно визначити постійні $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Розв'язок, отриманий із загального при конкретних значеннях постійних $c_1, c_2, \dots, c_n$, називається частинним розв'язком.

7.2. Побудова розв'язку нормальної системи методом виключення

Одним з методів, що дозволяють знайти розв'язок нормальної системи, є метод зведення системи диференціальних рівнянь до одного диференціального рівняння вищого порядку відносно однієї змінної. Цей метод називається методом виключення.

Метод виключення полягає в тому, що вибравши будь яку одну змінну, обчислюють для неї похідні вищих порядків, а потім всі інші змінні виражають через обрану змінну і її похідні. В цьому випадку ми одержуємо одне диференціальне рівняння вищого порядку відносно обраної однієї змінної, для якого і знаходиться розв'язок.

Нехай задана система нормальних диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, x_3); \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, x_3); \\ \dot{x}_3 = f_3(t, x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Вибираємо змінну x_1 , Проведемо наступні перетворення:

а) обчислимо від змінної x_1 похідну 2-го порядку

$\ddot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \dot{x}_3$ і підставимо в неї значення $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$. Ми одержимо

запис похідної другого порядку через незалежну змінну t та невідомі шукані функції x_1, x_2, x_3 :

$$\ddot{x}_1 = F_1(t, x_1, x_2, x_3);$$

б) використовуючи отриманий вираз, обчислимо від змінної x_1 похідну 3-го порядку $\ddot{x}_1 = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \dot{x}_3$ і підставимо в неї значення $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3$. Одержимо:

$$\ddot{x}_1 = F_2(t, x_1, x_2, x_3);$$

в) з системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, x_3); \\ \ddot{x}_1 = F_1(t, x_1, x_2, x_3); \\ \ddot{x}_1 = F_2(t, x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

виключаємо x_2 і x_3 . Як результат одержимо диференціальне рівняння 3-го порядку щодо функції x_1 і її похідних до 3-го порядку включно

$$\ddot{x}_1 = \varphi(t, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1);$$

г) шукаємо розв'язок цього рівняння. Знаходимо $x_1 = g(t, c_1, c_2, c_3)$.

д) знаючи $x_1 = g(t, c_1, c_2, c_3)$, знаходимо x_2 і x_3 з рівнянь системи.

ПРИКЛАД. Вирішити систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2; \\ \dot{x}_2 = -20x_1 + 6x_2. \end{cases}$$

Розв'язок

Виберемо змінну x_1 і проведемо перетворення методом виключення:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -\dot{3x}_1 + \dot{x}_2 = -3(-3x_1 + x_2) - 20x_1 + 6x_2 = -11x_1 + 3x_2; \\ \begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_1 + x_2; \\ \ddot{x}_1 = -11x_1 + 3x_2; \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 3\dot{x}_1 = -9x_1 + 3x_2; \\ \ddot{x}_1 = -11x_1 + 3x_2; \end{cases} \Rightarrow \end{aligned}$$

Віднімаємо від другого рівняння перше:

$$\ddot{x}_1 - 3\dot{x}_1 = -2x_1; \Rightarrow \ddot{x}_1 - 3\dot{x}_1 + 2x_1 = 0.$$

Шукаємо розв'язок одержаного однорідного диференціального рівняння 2-го порядку:

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0, \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1, \Rightarrow x_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^t.$$

Диференціюючи $x_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^t$, з першого рівняння системи знаходимо x_2 :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2c_1 e^{2t} + c_2 e^t, \\ \dot{x}_1 &= -3x_1 + x_2; \Rightarrow x_2 = \dot{x}_1 + 3x_1; \Rightarrow \\ x_2 &= 2c_1 e^{2t} + c_2 e^t + 3(c_1 e^{2t} + c_2 e^t); \Rightarrow x_2 = 5c_1 e^{2t} + 4c_2 e^t. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^t; \\ x_2 = 5c_1 e^{2t} + 4c_2 e^t. \end{cases}$$

Відповідь.

$$\begin{cases} x_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^t; \\ x_2 = 5c_1 e^{2t} + 4c_2 e^t. \end{cases}$$

ПРИКЛАД. Вирішити систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z; \\ \dot{y} = x - y + z; \\ \dot{z} = x + y + z. \end{cases}$$

Розв'язок

Виберемо змінну x і проведемо перетворення методом виключення:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y + z; \Rightarrow \ddot{x} = -\dot{x} + \dot{y} + \dot{z}; \quad \ddot{x} = -(-x + y + z) + x - y + z + x + y + z; \\ \ddot{x} &= 3x - y + z; \end{aligned}$$

$$\ddot{x} = 3\dot{x} - \dot{y} + \dot{z} = 3(-x + y + z) - (x - y + z) + x + y + z = -3x + 5y + 3z.$$

Отримали:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z; \\ \ddot{x} = 3x - y + z; \\ \ddot{x} = -3x + 5y + 3z. \end{cases}$$

Складаючи перші два рівняння системи, знаходимо $\dot{x} + \ddot{x} = 2x + 2z$, звідки визначаємо $2z = \dot{x} + \ddot{x} - 2x$; складаючи друге рівняння, помножене на 5, з третім рівнянням, отримуємо $\ddot{x} + 5\ddot{x} = 12x + 8z$. В останнє рівняння підставляємо значення виразу для $2z$ і отримуємо диференціальне рівняння 3-го порядку щодо функції x і її похідних:

$$\ddot{x} + \ddot{x} - 4\dot{x} - 4x = 0.$$

Далі вирішуємо отримане однорідне диференціальне рівняння 3-го порядку:

$$\begin{aligned} \lambda^3 + \lambda^2 - 4\lambda - 4 &= 0; \Rightarrow \lambda^2(\lambda + 1) - 4(\lambda + 1) = 0; (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4) = 0; \\ (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) &= 0; \\ \lambda_1 &= -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2; \end{aligned}$$

Отриманий розв'язок:

$$x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}.$$

Далі, з рівнянь системи, маючи на увазі вже одержані перетворення знаходимо z і y .

З запису $2z = \dot{x} + \ddot{x} - 2x$ знаходимо $z = \frac{1}{2}(\ddot{x} + \dot{x} - 2x)$, де

$$\begin{aligned} x &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}; \\ \dot{x} &= -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} - 2c_3 e^{-2t}; \\ \ddot{x} &= c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{2t} + 4c_3 e^{-2t}. \end{aligned}$$

отже,

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2}(\ddot{x} + \dot{x} - 2x) = \frac{1}{2}(c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{2t} + 4c_3 e^{-2t} - c_1 e^{-t} + \\ &\quad + 2c_2 e^{2t} - 2c_3 e^{-2t} - 2c_1 e^{-t} - 2c_2 e^{2t} - 2c_3 e^{-2t}); \\ z &= \frac{1}{2}(4c_2 e^{2t} - 2c_1 e^{-t}) = 2c_2 e^{2t} - c_1 e^{-t}; \\ z &= 2c_2 e^{2t} - c_1 e^{-t}. \end{aligned}$$

З другого рівняння знаходимо y :

$$\begin{aligned} y &= 3x - \ddot{x} + z; \\ y &= 3(c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}) - (c_1 e^{-t} + 4c_2 e^{2t} + 4c_3 e^{-2t}) + 2c_2 e^{2t} - c_1 e^{-t}, \\ y &= c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - c_3 e^{-2t}. \end{aligned}$$

Таким чином, остаточно отримуємо

$$\begin{cases} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}; \\ y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - c_3 e^{-2t}; \\ z = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} \end{cases}$$

$$\text{Відповідь. } \begin{cases} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}; \\ y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - c_3 e^{-2t}; \\ z = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t} \end{cases}$$

7.3. Розв'язок лінійних систем диференціальних рівнянь методом Ейлера

7.3.1. Лінійні системи диференціальних рівнянь

Окремим випадком нормальної системи диференціальних рівнянь є лінійна система диференціальних рівнянь. При цьому найбільш поширений випадок таких рівнянь - це рівняння з постійними коефіцієнтами.

Def. Неоднорідною лінійною системою диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами називається нормалізована система диференціальних рівнянь виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + g_1; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + g_2; \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + g_n. \end{aligned}$$

В цих записах $g_i = g_i(t)$.

Якщо $g_i(t) = 0$, $i = \overline{1, n}$, то система називається однорідною.

7.3.2. Метод Ейлера

Нехай задана система трьох лінійних нормалізованих диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z; \\ \dot{z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases}$$

Метод Ейлера полягає в тому, що розв'язок шукають у вигляді:

$$x = \alpha e^{\lambda t}, \quad y = \beta e^{\lambda t}, \quad z = \gamma e^{\lambda t}.$$

В цьому разі:

$$\dot{x} = \lambda \alpha e^{\lambda t}, \quad \dot{y} = \lambda \beta e^{\lambda t}, \quad \dot{z} = \lambda \gamma e^{\lambda t};$$

І ми одержуємо систему рівнянь у наступному вигляді

$$\begin{cases} \lambda \alpha e^{\lambda t} = a_{11} \alpha e^{\lambda t} + a_{12} \beta e^{\lambda t} + a_{13} \gamma e^{\lambda t}; \\ \lambda \beta e^{\lambda t} = a_{21} \alpha e^{\lambda t} + a_{22} \beta e^{\lambda t} + a_{23} \gamma e^{\lambda t}; \\ \lambda \gamma e^{\lambda t} = a_{31} \alpha e^{\lambda t} + a_{32} \beta e^{\lambda t} + a_{33} \gamma e^{\lambda t}; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda) \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma = 0; \\ a_{21} \alpha + (a_{22} - \lambda) \beta + a_{23} \gamma = 0; \\ a_{31} \alpha + a_{32} \beta + (a_{33} - \lambda) \gamma = 0, \end{cases}$$

де α, β, γ - невідомі.

Для існування ненульових (нетривіальних) рішень системи лінійних алгебраїчних рівнянь потрібно, щоб головний визначник системи дорівнював нулю, тобто:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

де A - матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих системи, а E - одинична матриця.

Для матриці виду $A - \lambda E$ величини λ_i називаються власними значеннями матриці A .

Зауваження. Якщо визначник системи однорідних рівнянь не дорівнює нулю, то система визначена (теорема Крамера) і має лише нульовий розв'язок.

Def. Рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ називають характеристичним рівнянням системи.

Розв'язком характеристичного рівняння є значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, яким відповідають сукупності $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}, \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}, \{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$,

Наприклад, для λ_1 маємо:

$$(a_{11} - \lambda_1)\alpha_1 + a_{12}\beta_1 + a_{13}\gamma_1 = 0;$$

$$a_{21}\alpha_1 + (a_{22} - \lambda_1)\beta_1 + a_{23}\gamma_1 = 0;$$

$$a_{31}\alpha_1 + a_{32}\beta_1 + (a_{33} - \lambda_1)\gamma_1 = 0,$$

В матричній формі це записується як:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda_1 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda_1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ранг такої системи менше трьох. Тобто система не визначена і має множину розв'язків. Шукають його фундаментальне рішення і задаючи константам будь які

значення отримують вектор $\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}$.

Аналогічно, відносно λ_2, λ_3 знаходять:

$$\vec{m}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{m}_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Одержані вектори, відносно $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$,

$$\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{m}_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

називаються власними векторами матриці системи.

Тепер розв'язок системи можна записати у вигляді

$$\lambda = \lambda_1 \Rightarrow x_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, y_1 = \beta_1 e^{\lambda_1 t}, z_1 = \gamma_1 e^{\lambda_1 t};$$

$$\lambda = \lambda_2 \Rightarrow x_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}, y_2 = \beta_2 e^{\lambda_2 t}, z_2 = \gamma_2 e^{\lambda_2 t};$$

$$\lambda = \lambda_3 \Rightarrow x_3 = \alpha_3 e^{\lambda_3 t}, y_3 = \beta_3 e^{\lambda_3 t}, z_3 = \gamma_3 e^{\lambda_3 t}.$$

Так як

$$\begin{cases} x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3; \\ y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3; \\ z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3, \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} x = c_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \alpha_3 e^{\lambda_3 t}; \\ y = c_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \beta_3 e^{\lambda_3 t}; \\ z = c_1 \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \gamma_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \gamma_3 e^{\lambda_3 t}. \end{cases}$$

ПРИКЛАД. Вирішити систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 3y; \\ \dot{y} = 6x + 4y. \end{cases}$$

Розв'язок

Матриця системи $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Напишемо характеристичне рівняння і знайдемо його розв'язок:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 3 \\ 6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)(4 - \lambda) - 18 = 28 - 7\lambda - 4\lambda + \lambda^2 - 18.$$

$$\lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 10.$$

Маємо

$$\begin{cases} (7 - \lambda)\alpha + 3\beta = 0; \\ 6\alpha + (4 - \lambda)\beta = 0 \end{cases}$$

При $\lambda_1 = 1$ система запишеться у вигляді

$$\begin{cases} 6\alpha_1 + 3\beta_1 = 0; \\ 6\alpha_1 + 3\beta_1 = 0; \end{cases}$$

$$6\alpha_1 + 3\beta_1 = 0; 3\beta_1 = -6\alpha_1; \beta_1 = -2\alpha_1; \alpha_1 = C; \beta_1 = -2C.$$

$$\text{Тобто } \vec{m}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ -2C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

За розв'язок приймаємо вектор $\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 10$:

$$\begin{cases} -3\alpha_2 + 3\beta_2 = 0; \\ 6\alpha_2 - 6\beta_2 = 0; \end{cases}$$

$$-3\alpha_2 + 3\beta_2 = 0; \alpha_2 = \beta_2; \beta_2 = C; \alpha_2 = C.$$

$$\text{Тобто } \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

За розв'язок приймаємо вектор $\vec{m}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Будуємо розв'язок:

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1; x_1 &= \alpha_1 e^{\lambda_1 t} = e^t; y_1 = \beta_1 e^{\lambda_1 t} = -2e^t; \\ \lambda_2 = 10; x_2 &= \alpha_2 e^{\lambda_2 t} = e^{10t}; y_2 = \beta_2 e^{\lambda_2 t} = e^{10t}. \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{cases} x = c_1 x_1 + c_2 x_2; \\ y = c_1 y_1 + c_2 y_2; \end{cases} \quad \begin{cases} x = c_1 e^t + c_2 e^{10t}; \\ y = -2c_1 e^t + c_2 e^{10t}. \end{cases}$$

Розв'язок можна записати у вигляді

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{10t}.$$

7.4. Матрична форма запису розв'язок лінійної нормальної системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.

Нехай задана система лінійних нормалізованих диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z; \\ \dot{z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тоді систему диференціальних рівнянь можна записати у вигляді

$$\dot{X} = AX.$$

Розв'язуючи характеристичне рівняння системи $\det(A - \lambda E) = 0$, знаходять власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а за власними значеннями визначають власні вектори, які відповідають власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \vec{m}_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи записують у вигляді

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \vec{m}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{m}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \vec{m}_3 e^{\lambda_3 t}.$$

ПРИКЛАД. Вирішити систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = 7x + 3y; \\ \dot{y} = 6x + 4y. \end{cases}$$

Розв'язок

Матриця системи $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$. Знаходимо розв'язок характеристичного рівняння:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & 3 \\ 6 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (7 - \lambda)(4 - \lambda) - 3 \cdot 6 = \lambda^2 - 11\lambda + 28 - 18 = 0, \\ \lambda^2 - 11\lambda + 10 = 0.$$

Його розв'язок

$$\lambda_{1,2} = \frac{11 \pm \sqrt{121 - 40}}{2} = \frac{11 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{11 \pm 9}{2}, \lambda_1 = 10, \lambda_2 = 1.$$

Нехай $\lambda_1 = 10$. Знайдемо розв'язок системи $\begin{cases} (7 - \lambda_1)\alpha_1 + 3\beta_1 = 0; \\ 6\alpha_1 + (4 - \lambda_1)\beta_1 = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} -3\alpha_1 + 3\beta_1 = 0; -\alpha_1 + \beta_1 = 0; \alpha_1 = \beta_1; \\ 6\alpha_1 - 6\beta_1 = 0. \end{cases} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Приймаємо $\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

нехай $\lambda_2 = 1$. Знайдемо розв'язок системи $\begin{cases} (7 - \lambda_2)\alpha_2 + 3\beta_2 = 0; \\ 6\alpha_2 + (4 - \lambda_2)\beta_2 = 0; \end{cases}$

$$\begin{cases} 6\alpha_2 + 3\beta_2 = 0; 6\alpha_2 + 3\beta_2 = 0; \beta_2 = -2\alpha_2; \\ 6\alpha_2 + 3\beta_2 = 0. \end{cases} \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Приймаємо $\vec{m}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

Розв'язок системи має вигляд

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{10t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^t$$

або

$$\begin{cases} x = c_1 e^{10t} + c_2 e^t; \\ y = c_1 e^{10t} - 2c_2 e^t. \end{cases}$$

ПРИКЛАД. Вирішити систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + z; \\ \dot{y} = x - y + z; \\ \dot{z} = x + y + z. \end{cases}$$

Розв'язок

матриця системи $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Вирішимо характеристичне рівняння:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 + \lambda) \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$+ \begin{vmatrix} 1 & -1 - \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 + \lambda)(\lambda^2 - 2) + \lambda + 2 + \lambda = -\lambda^3 - \lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0;$$

$$\lambda^2(\lambda + 1) - 4(\lambda + 1) = 0; (\lambda + 1)(\lambda^2 - 4) = 0; (\lambda + 1)(\lambda - 2)(\lambda + 2) = 0;$$

$$\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -2.$$

За власним значенням визначимо власні вектори, відповідні власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

При $\lambda_1 = -1$:

$$\begin{cases} \beta_1 + \gamma_1 = 0; \\ \alpha_1 + \gamma_1 = 0; \\ \alpha_1 + \beta_1 + 2\gamma_1 = 0; \end{cases} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{cases} \beta_1 = -\gamma_1; \\ \alpha_1 = -\gamma_1; \end{cases}$$

$$\gamma_1 = -C, \beta_1 = C, \alpha_1 = C.$$

$$\text{отже, } \vec{m}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ -C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} C . \text{ приймаємо } \vec{m}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} .$$

При $\lambda_2 = 2$:

$$\begin{cases} -3\alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = 0; \\ \alpha_2 - 3\beta_2 + \gamma_2 = 0; \\ \alpha_2 + \beta_2 - \gamma_2 = 0; \end{cases} \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \alpha_2 - \beta_2 = 0; \\ \alpha_2 + \beta_2 = \gamma_2; \end{cases} \gamma_2 = 2C, \beta_2 = C, \alpha_1 = C.$$

$$\text{отже, } \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ C \\ 2C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} C . \text{ приймаємо } \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} .$$

При $\lambda_3 = -2$:

$$\begin{cases} \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 0; \\ \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3 = 0; \\ \alpha_3 + \beta_3 + 3\gamma_3 = 0; \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{cases} \beta_3 + \gamma_3 = -\alpha_3; \\ -2\gamma_3 = 0; \end{cases} \gamma_3 = 0, \alpha_3 = C, \beta_3 = -C.$$

$$\text{Отже, } \vec{m}_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C \\ -C \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} C . \text{ Приймаємо } \vec{m}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Розв'язок системи записуємо у вигляді

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \vec{m}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{m}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \vec{m}_3 e^{\lambda_3 t} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-2t}$$

або

$$\begin{cases} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}; \\ y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} - c_3 e^{-2t}; \\ z = -c_1 e^{-t} + 2c_2 e^{2t}. \end{cases}$$

При вирішенні характеристичного рівняння його коріння можуть бути:

- а) дійсними простими;
- б) комплексними простими;
- в) дійсними кратними;
- г) комплексними кратними;

д) комбінацією перерахованих випадків.

У разі комплексних коренів розв'язок системи шукаємо в області дійсних значень. За розв'язок приймаються взяті окремо дійсні та уявні значення комплексних величин.

ПРИКЛАД. Вирішити систему диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = x - 2y; \\ \dot{y} = x - y. \end{cases}$$

Розв'язок

матриця системи $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Вирішуємо характеристичне рівняння:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = -(1 - \lambda)(1 + \lambda) + 2 = \lambda^2 + 1 = 0; \lambda_{1,2} = \pm i.$$

Нехай $\lambda = i$. Знайдемо розв'язок системи $\begin{cases} (1 - \lambda)\alpha - 2\beta = 0; \\ \alpha - (1 + \lambda)\beta = 0 \end{cases}$ наступним чином:

ном:

$$\begin{cases} (1 - i)\alpha - 2\beta = 0; \\ \alpha - (1 + i)\beta = 0; \end{cases} \quad \alpha = (1 + i)\beta; \quad \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 - i \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Частинний розв'язок системи, відносно власного значення $\lambda = i$, має вигляд

$$\begin{cases} x = (-1 - i)e^{it} = (-1 - i)(\cos t + i \sin t) = -\cos t + \sin t + i(-\sin t - \cos t); \\ y = -e^{it} = -\cos t - i \sin t. \end{cases}$$

Побудуємо спільний розв'язок системи, записаний в дійсній формі:

$$\begin{cases} x = c_1 \operatorname{Re} x + c_2 \operatorname{Im} x = c_1(-\cos t + \sin t) + c_2(-\sin t - \cos t); \\ y = c_1 \operatorname{Re} y + c_2 \operatorname{Im} y = -c_1 \cos t - c_2 \sin t. \end{cases}$$

Зауваження. Ми розглянули прості випадки розв'язків систем диференціальних рівнянь, коли корені характеристичних рівнянь λ_i прості. Коли корені кратні, рішення стають більш складними і потребують певного досвіду.

7.5. Висновки

Для систем диференціальних рівнянь вводять позначення:

- t - незалежна змінна;
- $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ - невідомі функції;
- $\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t), \dots, \dot{x}_n(t)$ - похідні невідомих функцій.

Зауваження 1. Використовуються також позначення $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ або $x(t), y(t), z(t)$.

Def. Системою диференціальних рівнянь називається сукупність рівнянь, в кожне з яких входять незалежна змінна, шукані функції і їх похідні.

У загальному вигляді систему 1-го порядку записують так:

[illegible]

Def. Нормальною системою диференціальних рівнянь називають систему диференціальних рівнянь 1-го порядку, визначену відносно похідних:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, x_2, \dots, x_n). \end{cases}$$

Початкові умови для нормальних систем диференціальних рівнянь мають вигляд

$$x_1(t_0) = x_{10}, x_2(t_0) = x_{20}, \dots, x_n(t_0) = x_{n0}.$$

Розв'язок для систем диференціальних рівнянь записують у вигляді

$$\begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, c_1, c_2, \dots, c_n); \\ x_2 = \varphi_2(t, c_1, c_2, \dots, c_n); \\ \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \dots\dots\dots \\ x_n = \varphi_n(t, c_1, c_2, \dots, c_n) \end{cases}$$

Розв'язок, отриманий із загального при конкретних значеннях постійних $c_1, c_2, \dots, c_n$, називається частинним розв'язком.

Основні методи розв'язку нормальної системи:

- 1) метод виключення;
- 2) метод Ейлера.

137

Нехай задана система нормальних диференціальних рівнянь 1-го порядку

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, x_3); \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, x_2, x_3); \\ \dot{x}_3 = f_3(t, x_1, x_2, x_3). \end{cases}$$

Вибравши шукану функцію x_1 , проведемо наступні перетворення:

а) обчислимо від функції x_1 похідну 2-го порядку

$$\ddot{x}_1 = \frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \dot{x}_3 \text{ і підставимо в неї значення } \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3:$$

$$\ddot{x}_1 = F_1(t, x_1, x_2, x_3);$$

б) використовуючи отриманий вираз, обчислимо відносно x_1 похідну 3-го по-

$$\text{ряду } \ddot{\ddot{x}}_1 = \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \dot{x}_2 + \frac{\partial F_1}{\partial x_3} \dot{x}_3 \text{ і підставимо в неї значення } \dot{x}_1, \dot{x}_2, \dot{x}_3:$$

$$\ddot{\ddot{x}}_1 = F_2(t, x_1, x_2, x_3);$$

в) з системи

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, x_2, x_3); \\ \ddot{x}_1 = F_1(t, x_1, x_2, x_3); \\ \ddot{\ddot{x}}_1 = F_2(t, x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

виключаємо x_2 і x_3 , В результаті одержуємо диференціальне рівняння 3-го порядку щодо функції x_1 і її похідних до 3-го порядку включно

$$\ddot{\ddot{x}}_1 = \varphi(t, x_1, \dot{x}_1, \ddot{x}_1);$$

г) вирішуючи останнє рівняння, знаходимо $x_1 = g(t, c_1, c_2, c_3)$, Потім визначаємо x_2 і x_3 з рівнянь системи.

Def. Неоднорідною лінійною системою диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами називається нормалізована система диференціальних рівнянь виду

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + g_1; \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + g_2; \\ &\dots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + g_n. \end{aligned}$$

Де $g_i = g_i(t)$.

Якщо $g_i(t) = 0, i = \overline{1, n}$, то система називається однорідною.

Нехай задана система трьох лінійних нормалізованих диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z; \\ \dot{z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases}$$

Метод Ейлера полягає в тому, що розв'язок шукаємо у вигляді:

$$\begin{aligned}x &= \alpha e^{\lambda t}, \quad y = \beta e^{\lambda t}, \quad z = \gamma e^{\lambda t}, \\ \dot{x} &= \lambda \alpha e^{\lambda t}, \quad \dot{y} = \lambda \beta e^{\lambda t}, \quad \dot{z} = \lambda \gamma e^{\lambda t}; \\ \begin{cases} \lambda \alpha e^{\lambda t} = a_{11} \alpha e^{\lambda t} + a_{12} \beta e^{\lambda t} + a_{13} \gamma e^{\lambda t}; \\ \lambda \beta e^{\lambda t} = a_{21} \alpha e^{\lambda t} + a_{22} \beta e^{\lambda t} + a_{23} \gamma e^{\lambda t}; \\ \lambda \gamma e^{\lambda t} = a_{31} \alpha e^{\lambda t} + a_{32} \beta e^{\lambda t} + a_{33} \gamma e^{\lambda t}; \end{cases} \\ \begin{cases} (a_{11} - \lambda) \alpha + a_{12} \beta + a_{13} \gamma = 0; \\ a_{21} \alpha + (a_{22} - \lambda) \beta + a_{23} \gamma = 0; \\ a_{31} \alpha + a_{32} \beta + (a_{33} - \lambda) \gamma = 0, \end{cases}\end{aligned}$$

де α, β, γ - невідомі.

Для існування нетривіальних (ненульових) рішень системи лінійних алгебраїчних рівнянь потрібно, щоб головний визначник системи дорівнював нулю, тобто:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

або

$$\det(A - \lambda E) = 0,$$

де A - матриця, складена з коефіцієнтів при невідомих системи, а E - одинична матриця.

Def. Рівняння $\det(A - \lambda E) = 0$ називається характеристичним рівнянням системи.

Розв'язком характеристичного рівняння є значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, яким відповідають власні вектори

$$\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{m}_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Тепер розв'язок системи можна записати у вигляді

$$\begin{aligned}\lambda = \lambda_1 &\Rightarrow x_1 = \alpha_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_1 = \beta_1 e^{\lambda_1 t}, \quad z_1 = \gamma_1 e^{\lambda_1 t}; \\ \lambda = \lambda_2 &\Rightarrow x_2 = \alpha_2 e^{\lambda_2 t}, \quad y_2 = \beta_2 e^{\lambda_2 t}, \quad z_2 = \gamma_2 e^{\lambda_2 t}; \\ \lambda = \lambda_3 &\Rightarrow x_3 = \alpha_3 e^{\lambda_3 t}, \quad y_3 = \beta_3 e^{\lambda_3 t}, \quad z_3 = \gamma_3 e^{\lambda_3 t}.\end{aligned}$$

Так як

$$\begin{cases} x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3; \\ y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + c_3 y_3; \\ z = c_1 z_1 + c_2 z_2 + c_3 z_3, \end{cases}$$

то

$$\begin{cases} x = c_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \alpha_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \alpha_3 e^{\lambda_3 t}; \\ y = c_1 \beta_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \beta_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \beta_3 e^{\lambda_3 t}; \\ z = c_1 \gamma_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \gamma_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \gamma_3 e^{\lambda_3 t}. \end{cases}$$

Розв'язок лінійної нормальної системи диференціальних рівнянь можна виконувати і в матричному вигляді.

Нехай задана система лінійних нормалізованих диференціальних рівнянь

$$\begin{cases} \dot{x} = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z; \\ \dot{y} = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z; \\ \dot{z} = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z. \end{cases}$$

Введемо позначення:

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \dot{X} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Тоді систему диференціальних рівнянь можна записати у вигляді

$$\dot{X} = AX.$$

Вирішуючи характеристичне рівняння, знаходять власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, а за власними значеннями визначають власні вектори, відповідні власним значенням $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$:

$$\vec{m}_1 = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{m}_2 = \begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{m}_3 = \begin{pmatrix} \alpha_3 \\ \beta_3 \\ \gamma_3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язок системи записується у вигляді

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 \vec{m}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{m}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \vec{m}_3 e^{\lambda_3 t}.$$

При вирішенні характеристичного рівняння його коріння можуть бути:

- а) дійсними простими;
- б) комплексними простими;
- в) дійсними кратними;
- г) комплексними кратними;
- д) комбінацією перерахованих випадків.

У разі комплексних коренів розв'язок системи шукаємо в області дійсних значень. За розв'язок приймаються взяті окремо дійсні та уявні значення комплексних величин.

Перерва

- - Як позбутися від знаменника цього дробу?
- Потрібно стерти його ганчіркою!

- - У мене математика кульгає!
- А у мене взагалі не ходить. Паралізована на віки вічні.

- Перед початком іспиту. Учитель:
- Ви не хвилюйтеся, позитивну оцінку всі отримають.
- А позитивна - це яка?
- Більше нуля!

7.6. Питання для перевірки знань

1. Система диференціальних рівнянь - це сукупність рівнянь:

а) які мають загальний розв'язок; б) в кожне з яких входять похідні шуканих функцій; в) в кожне з яких входять диференціали шуканих функцій.

2. Розв'язок системи диференціальних рівнянь - це:

а) сукупність функцій, які, будучи підставлені в кожне з рівнянь, перетворюють їх в тотожності; б) функція, яка, будучи підставлена в кожне із заданих рівнянь, перетворює їх в тотожності; в) числа, які, будучи підставлені в кожне з рівнянь, перетворюють їх в тотожності.

3. Нормальна система диференціальних рівнянь - це:

а) система диференціальних рівнянь з похідними 1-го порядку; б) система диференціальних рівнянь 1-го порядку, визначених відносно похідних шуканих функцій; в) система диференціальних рівнянь, лінійна відносно похідних і функцій.

4. Чи можна систему диференціальних рівнянь виду $\begin{cases} \dot{x} = f(t, x, y); \\ \dot{y} = g(t, x, y) \end{cases}$ називати нормальною:

звати нормальною:

а) так; б) неможна; в) можна за умови, що $f(t, x, y), g(t, x, y)$ - лінійні функції щодо змінних?

5. Загальний розв'язок для системи диференціальних рівнянь двох функцій можна записати у вигляді:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 = \varphi_1(t, C_1, C_2); \\ x_2 = \varphi_2(t, C_1, C_2); \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} x_1 = C_1 \varphi_1(t) + C_2; \\ x_2 = C_2 \varphi_2(t) + C_1; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} x_1 = C_1 \varphi_{11}(t) + C_2 \varphi_{12}(t); \\ x_2 = C_1 \varphi_{21}(t) + C_2 \varphi_{22}(t). \end{cases}$$

6. Якщо праві частини нормальної системи диференціальних рівнянь є лінійними функціями щодо шуканих функцій, то система диференціальних рівнянь називається:

а) лінійної; б) нормальної; в) наведеною.

22. Метод приведення нормальної системи n-го порядку диференціальних рівнянь до диференціальних рівнянь n-го порядку щодо однієї шуканої функції називається:

а) методом виключення; б) методом невизначених коефіцієнтів; в) методом заміни змінних.

8. Виберіть правильний запис системи лінійних нормалізованих диференціальних однорідних рівнянь в матричній формі:

а) $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$; б) $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{g}(t)$; в) $\vec{x} = A\dot{\vec{x}}$.

9. Виберіть правильний запис системи лінійних нормалізованих диференціальних неоднорідних рівнянь в матричній формі:

а) $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$; б) $\dot{\vec{x}} = A\vec{x} + \vec{g}(t)$; в) $\vec{x} = A\dot{\vec{x}}$.

10. Виберіть правильний запис системи n лінійних нормалізованих диференціальних однорідних рівнянь:

а) $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j$, де $i = 1, \dots, n$; б) $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + g_i(t)$, де $i = 1, \dots, n$;

в) $\dot{x} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j g_i(t)$, де $i = 1, \dots, n$.

11. Виберіть правильну запис системи n лінійних нормалізованих диференціальних неоднорідних рівнянь:

а) $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j$, де $i = 1, \dots, n$; б) $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + g_i(t)$, де $i = 1, \dots, n$;

в) $\dot{x} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j g_i(t)$, де $i = 1, \dots, n$.

12. Виберіть правильну запис системи n лінійних нормалізованих диференціальних однорідних рівнянь зі сталими коефіцієнтами:

а) $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$, де $i = 1, \dots, n$, $a_{ij} = const$; б) $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + g_i(t)$, де $i = 1, \dots, n$,

$a_{ij} = const$; в) $\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j$, де $i = 1, \dots, n$.

13. Розв'язок системи трьох лінійних нормалізованих диференціальних рівнянь методом Ейлера шукаємо у вигляді:

а) $x = \lambda e^{\alpha t}$, $y = \lambda e^{\beta t}$, $z = \lambda e^{\gamma t}$; б) $x = e^{\alpha t}$, $y = e^{\beta t}$, $z = e^{\gamma t}$; в) $x = \alpha \lambda e^{\lambda t}$, $y = \beta e^{\lambda t}$, $z = \gamma e^{\lambda t}$.

14. Рівняння виду $\det(A - \lambda E) = 0$ називається:

а) визначником матриці; б) рівнянням характеристики матриці; в) характеристичним рівнянням матриці A.

15. Рівняння виду
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
 називається:

а) визначником матриці; б) рівнянням характеристики матриці; в) характеристичним рівнянням матриці A .

16. Величини α , β , γ в запису розв'язка системи трьох лінійних нормалізованих диференціальних рівнянь методом Ейлера - це:

а) постійні, значення яких визначаються з умови задачі Коші;
б) координати власних векторів матриці диференціальних рівнянь; в) частинні розв'язки диференціальних рівнянь.

17. Запис розв'язку системи трьох лінійних нормалізованих однорідних диференціальних рівнянь в матричному вигляді:

а) $\vec{X} = c_1 \vec{m}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \vec{m}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 \vec{m}_3 e^{\lambda_3 t}$; б) $\vec{X} = \vec{m}_1 e^{\lambda_1 t} + \vec{m}_2 e^{\lambda_2 t} + \vec{m}_3 e^{\lambda_3 t}$;
в) $\vec{X} = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 e^{\lambda_3 t}$.

7.7. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

Завдання для роботи в аудиторії:

$$1. \begin{cases} x' = 2x + 4y; \\ y' = -x - 3y. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = 2x + 3y. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x' = 2y - 3x; \\ y' = y - 2x. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x' = x + y; \\ y' = 3y - 2x. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x' = y + e^{4t}; \\ y' = x. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x' = x + 2z; \\ y' = -x + y - z; \\ z' = -x + 4z. \end{cases}$$

Домашнє завдання:

$$1. \begin{cases} x' = 3x - 4y; \\ y' = -2x + y. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x' = x + 2y; \\ y' = 4x + 3y. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = 4y - x. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x' = x - 3y; \\ y' = 3x + y. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x' = y + 2; \\ y' = x + t^2, \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 0. \quad 6. \begin{cases} x' = x + 2y - 2z; \\ y' = x + 3z; \\ z' = x + 3z. \end{cases}$$

7.8. Самостійна робота

$$1. \begin{cases} x' = 2x + y; \\ y' = 3x + 4y. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x' = 3x - 2y; \\ y' = 4x - y. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x' = 3x - y; \\ y' = 4x - y. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} x' + x + 5y = 0; \\ y' - x - y = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} x' = y + 3 \sin 2t; \\ y' = 2x + y. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} x' = -6x + 8y; \\ y' = 10x + y - 11z; \\ z' = -4x + 6y. \end{cases}$$

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

Батьки сказали, щоб сидів дома. Три дні сидів. А потім дивлюсь, ніхто не слідкує за мною. Я взяв та й ліг. Заснув і проспав три дні. І завдання виконати не встиг.

Що кажуть про математику

«У геометрії потрібно таке ж натхнення, як і при написанні віршів» (О. С. Пушкін).

Кратні інтеграли. Подвійний інтеграл. Основні властивості подвійного інтеграла. Обчислення подвійного інтеграла в декартовій системі координат. Геометричний сенс подвійного інтеграла. Заміна змінних в подвійному інтегралі. Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат. Додаток подвійного інтеграла

8. КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

8.1. подвійний інтеграл

Нехай задана функція $z = f(x, y)$, яка визначена скрізь в замкнутій області D . Розіб'ємо область D на n елементарних областей (рис. 8.1).

Введемо позначення:

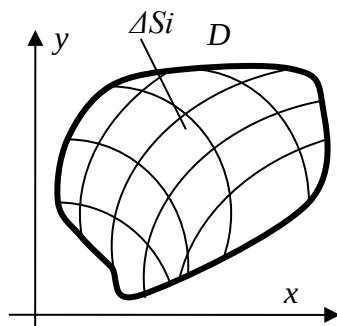


Рисунок 8.1

- ΔS_i - площа елементарної площадки;
- d_i - діаметр майданчика (найбільший розмір площадки);
- (ξ_i, η_i) - довільна точка елементарної площадки.

Складемо суму добутків:

$$S_n = f(\xi_1, \eta_1) \Delta S_1 + f(\xi_2, \eta_2) \Delta S_2 + \dots + f(\xi_n, \eta_n) \Delta S_n.$$

Ця сума називається інтегральною сумою.

Def. Подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D будемо називати границю інтегральних сум при $n \rightarrow \infty$ і $d_i \rightarrow 0$, якщо вона існує і не залежить від способу розбиття області на елементарні ділянки і вибору точок на цих ділянках. Позначається подвійний інтеграл наступним чином

$$\iint_D f(x, y) dS \quad \text{або} \quad \iint_D f(x, y) dx dy.$$

З визначення випливає, що

$$\iint_D f(x, y) dS = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i,$$

де $f(x, y)$ - інтегрована функція;

D - область інтегрування;

x, y - змінні інтегрування;

dS або $dx dy$ - елементарна площа.

Умова існування подвійного інтеграла. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій області D , то вона інтегрована в цій області.

Зауваження. У визначенні подвійного інтеграла сказано про «незалежність інтеграла від способу розбиття області». Тому область можна розбивати на елементарні площадки прямими лініями, паралельними осям координат (рис. 8.2). В цьому випадку $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$, і тому можна записати $dS = dx dy$.

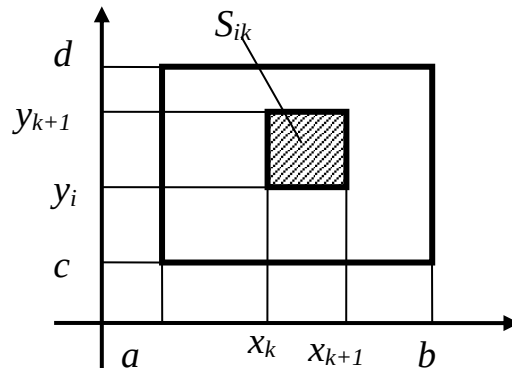


Рисунок. 8.2

8.2. Основні властивості подвійного інтеграла

1. Лінійність:

$$а) \iint_D (f(x, y) + g(x, y)) dS = \iint_D f(x, y) dS + \iint_D g(x, y) dS;$$

$$б) \iint_D C f(x, y) dS = C \iint_D f(x, y) dS.$$

2. Адитивність:

$$\iint_{D_1 + D_2} f(x, y) dS = \iint_{D_1} f(x, y) dS + \iint_{D_2} f(x, y) dS.$$

3. Якщо в області D : $f(x, y) \geq 0$, то і $\iint_D f(x, y) dS \geq 0$.

4. Якщо в області D : $f(x, y) \geq g(x, y)$, то і $\iint_D f(x, y) dS \geq \iint_D g(x, y) dS$.

5. Має місце «нерівність трикутника»:

$$|\iint_D f(x, y) dS| \leq \iint_D |f(x, y)| dS.$$

6. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій області D , площа якої S , то має місце нерівність

$$mS \leq \iint_D f(x, y) dS \leq MS,$$

де m , M - найменше та найбільше значення функції $f(x, y)$ в області D .

7. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій області D , площа якої S , то в цій області знайдеться така точка (x_0, y_0) , що має місце рівність

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dS.$$

При цьому значення $f(x_0, y_0)$ називають середнім значенням функції $f(x, y)$ в області D .

8.3. Обчислення подвійного інтеграла в декартовій системі координат

Основний спосіб обчислення подвійного інтеграла - це зведення його до повторного.

Перша стандартна область

1. Нехай функція $f(x, y)$ визначена в області D :

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d\}.$$

Таку область назовемо першою стандартною областю (рис. 8.3).

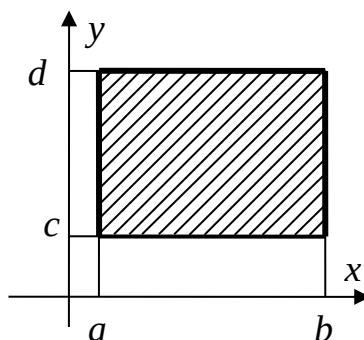


Рисунок. 8.3

Твердження. Нехай існує подвійний інтеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

і для будь-якого $x \in [a, b]$ існує визначений інтеграл

$$I(x) = \int_c^d f(x, y) dy,$$

тоді існує визначений інтеграл виду

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy,$$

який називається повторним. У цьому випадку має місце рівність

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy,$$

тобто подвійний інтеграл дорівнює повторному. В цьому випадку розрізняють

$$\int_c^d f(x, y) dy \text{ - внутрішній інтеграл і}$$

$$\int_a^b dx \text{ ... - зовнішній інтеграл.}$$

Особливість першої стандартної області:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx,$$

тобто інтервали інтегрування рівноцінні.

Друга стандартна область

2. Нехай функція $f(x, y)$ визначена в області D :

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}.$$

Таку область називають другою стандартною областю (рис. 8.4).

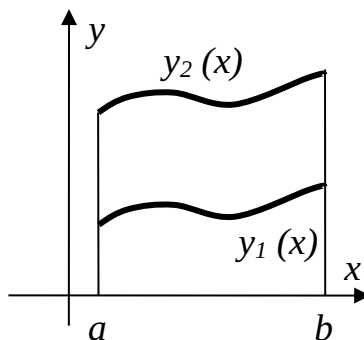


Рисунок. 8.4

Твердження. Нехай існує подвійний інтеграл

$$\iint_D f(x, y) dx dy$$

і для будь-якого $x \in [a, b]$ існує визначений інтеграл

$$I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

тоді існує визначений інтеграл виду

$$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

який теж називається повторним. У цьому випадку також має місце рівність

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

тобто подвійний інтеграл дорівнює повторному. Цей запис являє собою обчислення подвійного інтеграла:

а) обчислюють внутрішній інтеграл, вважаючи x константою і підставляючи в первісну по теоремі Ньютона - Лейбніца на кордонах значення $y_2(x)$ і $y_1(x)$;

б) обчислюють зовнішній інтеграл по x на інтервалі $[a, b]$.

Особливість другий стандартної області: точки входу і виходу лежать на відповідних кривих, описуваних тільки однією функцією.

Третя стандартна область

3. Нехай функція $f(x, y)$ визначена в області D :

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\}.$$

Таку область називають третьою стандартною областю (рис. 8.5).

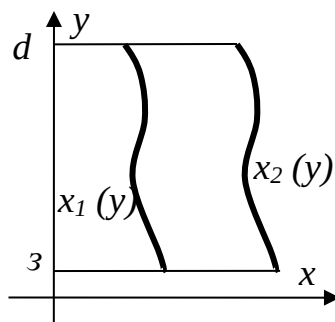


Рисунок. 8.5

У цьому випадку за аналогією можна записати

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Висновок. Для наведених трьох областей подвійний інтеграл може бути зведений до обчислення відповідних повторних інтегралів.

Зауваження:

1. Якщо область D не є стандартною, то для зведення подвійного інтеграла до повторного її слід розбити прямими, паралельними осям координат, на стандартні області.

2. Особливість подвійного інтеграла полягає в тому, що зовнішні межі інтегрування є завжди постійними величинами, а внутрішні - зазвичай залежать від відповідних змінних (крім першої стандартної області).

ПРИКЛАД. обчислити $\iint_D (x + 3y^2) dx dy$. область D обмежена лініями $x = 1, y = x^2, y = 2x, x \leq 1$.

Рішення

1-й спосіб. будуємо область D (рис. 8.6). Цю область розглядаємо як другу стандартну

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}.$$

Для даного прикладу

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 2x\}.$$

Отже, подвійний інтеграл має вигляд

$$\iint_D (x + 3y^2) dx dy = \int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x} (x + 3y^2) dy.$$

Обчислюємо внутрішній інтеграл при

$x = \text{const} :$

$$\int_0^1 dx \int_{x^2}^{2x} (x + 3y^2) dy = \int_0^1 dx (xy + y^3) \Big|_{x^2}^{2x} =$$

$$= \int_0^1 dx (x \cdot 2x + (2x)^3 - xx^2 - (x^2)^3) =$$

$$= \int_0^1 dx (2x^2 + 8x^3 - x^3 - x^6)$$

$$= \int_0^1 (2x^2 + 7x^3 - x^6) dx =$$

$$= \left(2 \frac{x^3}{3} + 7 \frac{x^4}{4} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + \frac{7}{4} - \frac{1}{7} = \frac{56+147-12}{84} = \frac{191}{84}.$$

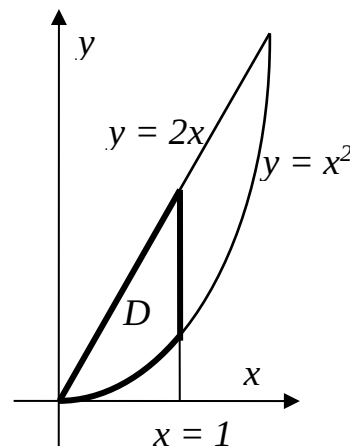


Рисунок. 8.6

2-й спосіб. Розіб'ємо задану область лініями, паралельними Ox , на дві стандартні області D_1 і D_2 (рис. 8.7).

Їх можна записати у вигляді

$$D_1 = \left\{ (x, y) \mid 1 \leq y \leq 2, \frac{y}{2} \leq x \leq 1 \right\},$$

$$D_2 = \left\{ (x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, \frac{y}{2} \leq x \leq \sqrt{y} \right\}.$$

Тоді інтеграл матиме вигляд

$$\iint_D (x + 3y^2) dx dy = \iint_{D_1} (x + 3y^2) dx dy,$$

$$\iint_{D_2} (x + 3y^2) dx dy = \int_1^2 dy \int_{\frac{y}{2}}^1 (x + 3y^2) dx,$$

$$\int_0^1 dy \int_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} (x + 3y^2) dx =$$

$$= \int_1^2 dy \left(\frac{x^2}{2} + 3y^2 x \right) \bigg|_{\frac{y}{2}}^1 + \int_0^1 dy \left(\frac{x^2}{2} + 3y^2 x \right) \bigg|_{\frac{y}{2}}^{\sqrt{y}} =$$

$$= \int_1^2 dy \left(\frac{1}{2} + 3y^2 - \frac{y^2}{8} - \frac{3y^3}{2} \right) + \int_0^1 dy \left(\frac{y}{2} + 3y^{\frac{5}{2}} - \frac{y^2}{8} - \frac{3y^3}{2} \right).$$

Відповідь має бути той же.

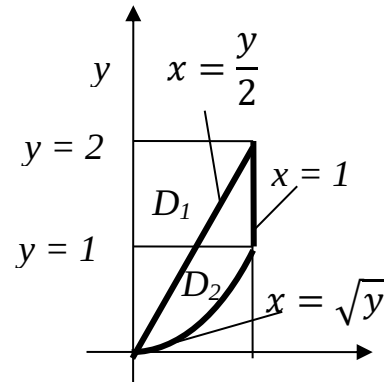


Рисунок. 8.7

8.4. Геометричний сенс подвійного інтеграла

За визначенням $\iint_D f(x, y) dS = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$, де $f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$ можна уя-

вити як $Z(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$, тобто як добуток ΔS_i на висоту $Z(\xi_i, \eta_i)$.

Геометричний сенс подвійного інтеграла: подвійний інтеграл від неперервної невід'ємної функції дорівнює об'єму криволінійного циліндра (рис. 8.8).

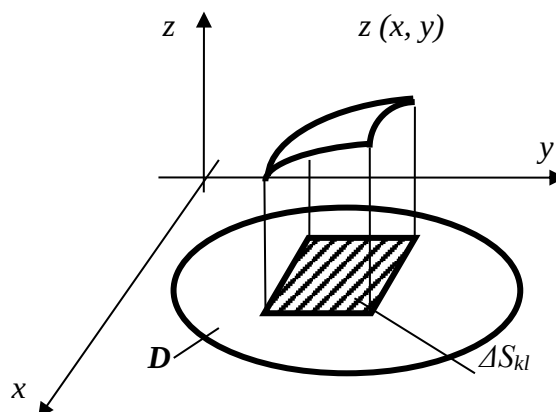


Рисунок. 8.8

Зауваження. якщо покласти $f(\xi_i, \eta_i) = 1$ всюди в області D , то отримаємо $\iint_D 1 dS = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = S_{(D)}$, тобто подвійний інтеграл при $f(x, y) = 1$ дорівнює площі S області D :

$$S = \iint_D dx dy.$$

8.5. Заміна змінних в подвійному інтегралі

Нехай задана область D в системі координат xOy , яка відображається однозначно в область G системи координат uOv . При цьому для відображення визначені функції

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v). \end{aligned}$$

Def. Визначник, елементами якого є частинні похідні $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$, називається функціональним визначником, або **Якобіаном**, який позначається як

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

Def. Величину $|J(u, v)| dv du$ називають елементом площі в криволінійних координатах.

Якщо область D в системі координат xOy відображається однозначно в область G системи координат функціями

$$\begin{aligned} x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v), \end{aligned}$$

то елементу майданчики $dx dy$ області D відповідає елемент майданчики $dv du$ області G і при цьому має місце залежність виду

$$dx dy = |J(u, v)| dv du.$$

Отже, можна записати вираз заміни змінних при обчисленні подвійного інтеграла:

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(G)} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

8.5.1. Обчислення подвійного інтеграла в полярній системі координат

В полярній системі координат

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \phi, \\ y &= \rho \sin \phi. \end{aligned}$$

В цьому випадку

$$dx dy = |J(\rho, \phi)| d\rho d\phi,$$

$$J(\rho, \phi) = \frac{D(x,y)}{D(\rho,\phi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \phi & -\rho \sin \phi \\ \sin \phi & \rho \cos \phi \end{vmatrix} = \rho \cos^2 \phi + \rho \sin^2 \phi = \rho.$$

отже, $dx dy = \rho d\rho d\phi$.

Тоді можна записати

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \iint_G f(x(\rho, \phi), y(\rho, \phi)) \rho d\rho d\phi.$$

ПРИКЛАД. Обчислити площу лемніскати Бернуллі $(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$.

Рішення

В полярній системі координат отримаємо

$$\rho^4 = \rho^2 \cos^2 \phi - \rho^2 \sin^2 \phi \text{ або } \rho^2 = \cos 2\phi \Rightarrow \rho = \sqrt{\cos 2\phi}.$$

Для цієї залежності $\cos 2\phi \geq 0$, Звідки випливає, що

$$-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2\phi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ або } -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq \phi \leq \frac{\pi}{4} + k\pi.$$

Графік лемніскати Бернуллі представлений на рис. 8.9.

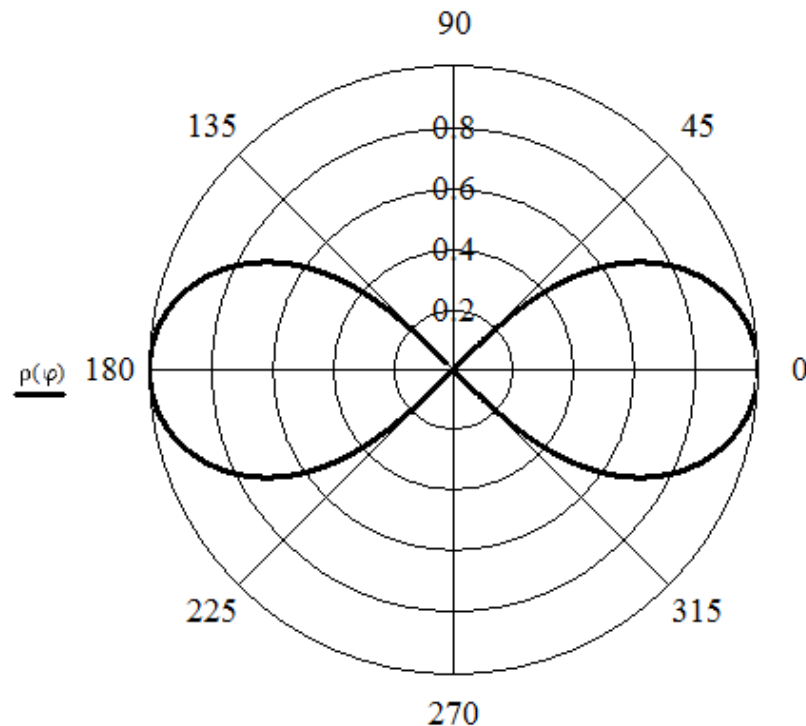


Рисунок. 8.9

Для однієї чверті площі область можна записати так:

$$G = \{(\rho, \phi) \mid 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq \sqrt{\cos 2\phi}\}.$$

$$\begin{aligned} \text{тоді } \frac{S}{4} &= \iint_G \rho d\rho d\phi = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \int_0^{\sqrt{\cos 2\phi}} \rho d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \left. \frac{\rho^2}{2} \right|_0^{\sqrt{\cos 2\phi}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} d\phi \frac{\cos 2\phi}{2} = \\ &= \left. \frac{\sin 2\phi}{4} \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{4}. \text{ отже, } S = 1. \end{aligned}$$

Зауваження. Розрізняють також криволінійну систему координат виду

$$\begin{aligned}x &= a\rho \cos \phi, \\y &= b\rho \sin \phi.\end{aligned}$$

У цьому випадку елемент майданчики

$$dxdy = ab\rho d\rho d\phi.$$

ПРИКЛАД. Обчислити обсяг еліпсоїда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Рішення

тут $z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$. Нехай $x = a\rho \cos \phi$, $y = b\rho \sin \phi$. тоді

$$z = c\sqrt{1 - \frac{a^2\rho^2 \cos^2 \phi}{a^2} - \frac{b^2\rho^2 \sin^2 \phi}{b^2}}, \quad z = c\sqrt{1 - \rho^2}.$$

коли $z = 0$ при підстановці отримаємо:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

При переході в нову систему координат отримуємо рівняння еліпса у вигляді

$$\frac{a^2\rho^2 \cos^2 \phi}{a^2} + \frac{b^2\rho^2 \sin^2 \phi}{b^2} = 1,$$

тобто $\rho^2 = 1 \Rightarrow \rho = 1$.

Тоді для області підстановки однієї восьмої еліпсоїда запишемо

$$G = \left\{(\rho, \phi) \mid 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 1\right\}.$$

Отже, для об'єму можна записати

$$\begin{aligned}\frac{V}{8} &= \iint_G zab\rho d\rho d\phi = ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^1 c\sqrt{1 - \rho^2} \rho d\rho = abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} (1 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \Bigg|_0^1 = \\&= abc\phi \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left((1 - 1^2)^{\frac{3}{2}} - (1 - 0^2)^{\frac{3}{2}}\right) = abc \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}} \left(0 - (1 - 0^2)^{\frac{3}{2}}\right) = \\&= abc \frac{\pi}{6}.\end{aligned}$$

Остаточно маємо $V = \frac{4\pi abc}{3}$.

8.6. Додаток подвійного інтеграла

Подвійний інтеграл застосовується для обчислення:

1) площі області: $S = \iint_D dxdy$;

2) об'єму: $V = \iint_D h(x, y) dxdy$;

3) маси пластини: $M = \iint_D \rho(x, y) dxdy$, де одиницею величини $\rho(x, y) \in 1 \frac{\kappa\epsilon}{\text{м}^2}$;

4) координат центру маси пластини:

$$x_c = \frac{\iint_D x\rho(x, y) dxdy}{\iint_D \rho(x, y) dxdy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y\rho(x, y) dxdy}{\iint_D \rho(x, y) dxdy};$$

5) моментів інерції (статичного, осьового, полярного):

$$\begin{aligned} S_x &= \iint_D y \rho(x, y) dx dy, \quad S_y = \iint_D x \rho(x, y) dx dy, \\ I_x &= \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy, \\ I_p &= \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

8.7. Висновки

Нехай для заданої функції $z = f(x, y)$, визначеної всюди в замкнутій області D , яка розбита на n елементарних областей, складена інтегральна сума виду $S_n = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$.

Def. Подвійним інтегралом від функції $f(x, y)$ по області D будемо називати границю інтегральних сум при $n \rightarrow \infty$ і $d_i \rightarrow 0$, якщо вона існує і не залежить від способу розбиття області на елементарні ділянки і вибору точок на цих ділянках:

$$\iint_D f(x, y) dS = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ d_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i,$$

де

D - область інтегрування;

$f(x, y)$ - інтегрована функція, визначена всюди в замкнутій області D ;

x, y - змінні інтегрування;

dS або $dx dy$ - елемент площадки;

d_i - діаметр елементарної площадки (довжина найбільшої хорди);

(ξ_i, η_i) - довільна точка елементарної площадки;

ΔS_i - площа елементарної площадки.

Умова існування подвійного інтеграла. якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій області D , то вона інтегрована в цій області.

Область можна розбити на площадки прямими лініями, паралельними осям координат. тоді $\Delta S_i = \Delta x_i \Delta y_i$, і тому можна писати $dS = dx dy$.

Основні властивості подвійного інтеграла:

1. Лінійність:

$$a) \iint_D (f(x, y) + g(x, y)) dS = \iint_D f(x, y) dS + \iint_D g(x, y) dS;$$

$$б) \iint_D C f(x, y) dS = C \iint_D f(x, y) dS.$$

2. Адитивність:

$$\iint_{D_1 + D_2} f(x, y) dS = \iint_{D_1} f(x, y) dS + \iint_{D_2} f(x, y) dS.$$

3. Якщо в області D $f(x, y) \geq 0$, то і $\iint_D f(x, y) dS \geq 0$.

4. Якщо в області D $f(x, y) \geq g(x, y)$, то і $\iint_D f(x, y) dS \geq \iint_D g(x, y) dS$.

5. Має місце «нерівність трикутника»:

$$|\iint_D f(x, y) dS| \leq \iint_D |f(x, y)| dS.$$

6. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій області D , площа якої S , то має місце нерівність

$$mS \leq \iint_D f(x, y) dS \leq MS,$$

де m , M - найменше та найбільше значення функції $f(x, y)$ в області D .

7. Якщо функція $f(x, y)$ неперервна в замкненій області D , площа якої S , то в цій області знайдеться така точка (x_0, y_0) , що має місце рівність

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) dS.$$

значення $f(x_0, y_0)$ називають середнім значенням функції $f(x, y)$ в області D .

Основний спосіб обчислення подвійного інтеграла - це зведення його до повторного.

1. Для першої стандартної області

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Особливість першої стандартної області:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

2. Для другої стандартної області

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

Спочатку обчислюють внутрішній інтеграл, вважаючи x константою і підставляючи в первісну по теоремі Ньютона – Лейбніца значення на границях $y_2(x)$ і $y_1(x)$. Потім обчислюють зовнішній інтеграл по x на інтервалі $[a, b]$.

Особливість другої стандартної області: точки входу і виходу лежать на відповідних кривих, описуваних тільки одними неперервними функціями.

3. Для третьої стандартної області

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\},$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

Зауваження:

1. Якщо область D не є стандартною, то для зведення подвійного інтеграла до повторного її слід розбити прямими, паралельними осям координат, на стандартні області.

2. Особливістю подвійного інтеграла є те, що зовнішні границі інтегрування є завжди постійними, а внутрішні - зазвичай залежать від змінних (крім першої стандартної області).

Геометричний сенс подвійного інтеграла: подвійний інтеграл від неперервної невід'ємної функції дорівнює об'єму криволінійного циліндра.

Подвійний інтеграл при $f(x, y) = 1$ дорівнює площі S області D :

$$S = \iint_D dx dy.$$

Def. якщо область D , задана в системі координат xOy , відображається однозначно в область G системи координат uOv функціями

$$x = x(u, v),$$

$$y = y(u, v),$$

то визначник, елементами якого є приватні похідні $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}$, Називається функціональним визначником, або якобіаном, який позначається як

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

В цьому випадку елементу майданчики $dx dy$ області D відповідає елемент майданчики $dv du$ області G , При цьому має місце залежність

$$dx dy = |J(u, v)| dv du.$$

Вираз заміни змінних при обчисленні подвійного інтеграла має вигляд

$$\iint_{(D)} f(x, y) dx dy = \iint_{(G)} f(x(u, v), y(u, v)) |J(u, v)| du dv.$$

В полярній системі координат

$$x = \rho \cos \phi,$$

$$y = \rho \sin \phi,$$

$$dx dy = \rho d\rho d\phi.$$

отже,

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_G f(x(\rho, \phi), y(\rho, \phi)) \rho d\rho d\phi.$$

У криволінійній системі координат

$$x = a\rho \cos \phi,$$

$$y = b\rho \sin \phi,$$

$$dx dy = ab\rho d\rho d\phi.$$

Подвійний інтеграл застосовується для обчислення:

1) площі області: $S = \iint_D dx dy;$

2) обсягу: $V = \iint_D h(x, y) dx dy;$

3) маси пластини: $M = \iint_D \rho(x, y) dx dy$, де одиницею величини $\rho(x, y) \in 1 \frac{кг}{м^2};$

4) координат центру маси пластини:

$$x_c = \frac{\iint_D x\rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy}, y_c = \frac{\iint_D y\rho(x, y) dx dy}{\iint_D \rho(x, y) dx dy};$$

5) моментів інерції (статичного, осьового, полярного):

$$S_x = \iint_D y\rho(x, y) dx dy, S_y = \iint_D x\rho(x, y) dx dy,$$

$$I_x = \iint_D y^2 \rho(x, y) dx dy, I_y = \iint_D x^2 \rho(x, y) dx dy, I_p = \iint_D (x^2 + y^2) \rho(x, y) dx dy.$$

Перерва

Математику пропонують вирішити задачу: «Дана газова плита, кран з водою і чайник. Потрібно закип'ятити воду».

- Це легко, - відповідає він. - Спочатку наливаємо в чайник воду. Потім запалюємо вогонь і ставимо чайник на плиту.

- Добре, тепер нове завдання, - кажуть йому. - Потрібно закип'ятити чайник, в якому вода вже налита.

- Ну, це ще простіше! Виливаємо з чайника воду і зводимо задачу до попередньої.

8.8. Питання для перевірки знань

1. Інтегральна сума функції $f(x, y)$ відповідного даного розбиття прямокутника $[a, b] \times [c, d]$ і довільного вибору точок ξ_k, η_l на приватних прямокутниках розбиття - це:

$$\text{а) } I_D = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(\xi_k, \eta_l) \Delta x_k \Delta y_l; \text{ б) } I_D = \sum_{k=1}^n \Delta x_k \sum_{l=1}^n f(\xi_k, \eta_l) \Delta y_l;$$

$$\text{в) } I_D = \sum_{l=1}^n \Delta y_l \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_l) \Delta x_k.$$

2. Подвійний кратний інтеграл функції $f(x, y)$ на прямокутнику D - це:

а) дворазове інтегрування функції $f(x, y)$ на прямокутнику D ;

б) границя відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що ця границя не залежить від способу розбиття області і вибору точок в отриманих областях;

в) границя відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що діаметр розбиття прагне до нуля і ця границя не залежить від способу розбиття області і вибору точок в отриманих областях.

3. Позначення подвійного інтеграла функції $f(x, y)$ по області D :

$$\text{а) } I = \iint_D f(x, y) dx dy; \text{ б) } I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(y) dy; \text{ в) } I = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x) dx.$$

4. Умова існування подвійного інтеграла:

а) функція додатня в заданій області; б) функція обмежена в заданій області;

в) функція обмежена і неперервна в заданій області, крім, можливо, точок площі нуль.

5. Подвійний кратний інтеграл обчислюється:

а) за допомогою двох визначених інтегралів; б) шляхом подвійного інтегрування; в) шляхом повторного інтегрування.

6. Формула, що виражає лінійність подвійного інтеграла:

$$\text{а) } \iint_D f dS = \iint_{D_1} f dS + \iint_{D_2} f dS, \text{ де } \begin{cases} D = D_1 \cup D_2, \\ D_1 \cap D_2 = \emptyset; \end{cases} \quad \text{б) } \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy;$$

$$\text{в) } \iint_D c_1 f_1 dS + \iint_D c_2 f_2 dS = c_1 \iint_D f_1 dS + c_2 \iint_D f_2 dS.$$

7. Формула, що виражає адитивність подвійного інтеграла:

$$\text{а) } \iint_D f dS = \iint_{D_1} f dS + \iint_{D_2} f dS, \text{ де } \begin{cases} D = D_1 \cup D_2, \\ D_1 \cap D_2 = \emptyset; \end{cases} \quad \text{б) } \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy;$$

$$\text{в) } \iint_D c_1 f_1 dS + \iint_D c_2 f_2 dS = c_1 \iint_D f_1 dS + c_2 \iint_D f_2 dS.$$

8. Виберіть правильну нерівність:

а якщо $f \leq g$, то $\iint_D f dS < \iint_D g dS$; б) якщо $f > g$, то $\iint_D f dS < \iint_D g dS$; в) якщо $f < g$, то $\iint_D f dS < \iint_D g dS$.

9. Виберіть правильну нерівність:

$$\text{а) } \left| \iint_D f dS \right| \leq \iint_D |f| dS; \quad \text{б) } \iint_D |f dS| \leq \left| \iint_D f dS \right|; \quad \text{в) } \left| \iint_D f dS \right| \leq \iint_D |f dS|.$$

10. Теорема про оцінку значення інтеграла функції в області D:

а) якщо функція $f(x, y)$ інтегрується в області D і задовольняє нерівності $m < f(x, y) < M$, то $mS \leq \iint_D f(x, y) ds \leq MS$; б) якщо функція $f(x, y)$ інтегрується в області D і задовольняє нерівності $m \leq f(x, y) \leq M$, то $mS \leq \iint_D f(x, y) ds \leq MS$; в) якщо функція $f(x, y)$ інтегрується в області D і задовольняє нерівності $m \leq f(x, y) \leq M$, то $mS < \iint_D f(x, y) ds < MS$.

11. Середнє значення функції двох змінних $f(x, y)$:

а) в області D знайдеться така точка (ξ, η) , що $f(\xi, \eta) = \iint_D f(x, y) ds$; б) в області D знайдеться така точка (ξ, η) , що $f(\xi, \eta) = S \iint_D f(x, y) ds$; в) в області D знайдеться така точка (ξ, η) , що $f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) ds$.

12. Область $D = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ називається:

а) другою стандартною; б) першою стандартною; в) третьою стандартною.

13. Область $D = \{(x, y): a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ називається:

а) другою стандартною; б) першою стандартною; в) третьою стандартною.

14. Область $D = \{(x, y): x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$ називається:

а) другою стандартною; б) першою стандартною; в) третьою стандартною.

15. Якщо задана нестандартна область інтегрування для подвійного інтеграла, то:

а) задану область замінюють на стандартну і виконують повторне інтегрування; б) задану область розбивають на підобласті і використовують лінійні властивості інтегралів; в) задану область розбивають на стандартні подобласти і використовують властивість адитивності.

16. Твердження про зведення подвійного інтеграла до повторного, в якому внутрішній інтеграл є визначеним інтегралом:

а) нехай існує подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ і для будь-якого $x \in [a, b]$ існує визначений інтеграл $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, тоді існує визначений інтеграл $\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$; б) нехай для будь-якого $x \in [a, b]$ існує визначений інтеграл $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, тоді існують подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ і визначений інтеграл $\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$; в) нехай для будь-якого $x \in [a, b]$ існує визначений інтеграл $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, тоді подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ можна замінити певним інтегралом $\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.

17. Нехай існує подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ і для будь-якого $x \in [a, b]$

існує певний інтеграл $I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, тоді повторним називають інтеграл:

а) $\int_a^b I(x) dy$; б) $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$; в) $\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$.

18. У записі $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ внутрішнім є інтеграл:

а) $\int_a^b I(x) dy$; б) $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$; в) $\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$.

19. Якщо $I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, то в запису $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ зовнішнім є інтеграл:

а) $I(x)$; б) $\int_a^b I(x) dy$; в) $\int_a^b I(x) dx$.

20. Особливість подвійного інтеграла при інтегруванні по першій стандартній області:

а) інтервали щодо порядку інтегрування $[a, b]$ і $[c, d]$ рівноцінні; б) точки входу і виходу внутрішнього інтеграла лежать на кривих, кожна з яких представляє собою одну функцію; в) подвійний інтеграл можна представити як два визначених інтеграла.

21. Особливість подвійного інтеграла при інтегруванні по другій стандартній області:

а) точки входу і виходу внутрішнього інтеграла лежать на кривих, кожна з яких представляє собою одну функцію; б) інтервали щодо порядку інтегрування $[a, b]$ і $[y_1(x), y_2(x)]$ рівноцінні; в) подвійний інтеграл можна представити як два визначених інтеграла.

22. Геометричний сенс подвійного інтеграла. Подвійний інтеграл:

а) від неперервної невід'ємної функції дорівнює площі області інтегрування; б) від неперервної невід'ємної функції дорівнює довжині кривої; в) від функції $f(x, y) = 1$ дорівнює площі області інтегрування.

23. Виберіть співвідношення, відповідне заміні змінних в подвійному інтегралі:

а) $dxdy = |J(u, v)|dudv$; б) $dxdy = |J(u, v)dudv|$; в) $dxdy = J(u, v)|dudv|$.

24. Виберіть умови, які повинні відповідати відображенню при переході до нових змінних:

а) відображення взаємно однозначне, неперервне і має частні похідні, Якобіан дорівнює нулю; б) відображення взаємно однозначне, неперервне і має неперервні частні похідні, Якобіан не дорівнює нулю; в) відображення однозначне, неперервне, має частні похідні, Якобіан не дорівнює нулю.

25. Елемент площини в прямокутних координатах:

а) $J(u, v)dudv$; б) $dxdy$; в) $dudv$.

26. Елемент площини в криволінійних координатах, відповідний елементу площини в декартовій системі координат:

а) $dxdy$; б) $J(u, v)dudv$; в) $dudv$.

27. Для підрахунку площини області за допомогою подвійного інтеграла потрібно:

а) в якості підінтегральної функції вибрати функцію $f(x, y) = 1$; б) визначити значення подвійного інтеграла по заданій області; в) визначити модуль значення подвійного інтеграла по заданій області.

28. Щоб обчислити об'єм криволінійного циліндра, слід:

а) визначити модуль значення подвійного інтеграла по заданій області; б) в якості підінтегральної функції подвійного інтеграла вибрати функцію $f(x, y) = 1$; в) визначити подвійний інтеграл від неперервної невід'ємної функції.

29. Виберіть співвідношення, відповідне заміні змінних в подвійному інтегралі при переході до полярної системи координат:

а) $dxdy = \rho \sin \varphi d\rho d\varphi$; б) $dxdy = \rho^2 d\rho d\varphi$; в) $dxdy = \rho d\rho d\varphi$.

30. Виберіть співвідношення, відповідне заміні змінних в подвійному інтегралі при переході до криволінійній системі координат виду $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$:

а) $dxdy = ab\rho^2 d\rho d\varphi$; б) $dxdy = ab\rho d\rho d\varphi$; в) $dxdy = ab\rho \sin \varphi d\rho d\varphi$.

31. Маса пластини, якщо одиницею величини $\rho_M(x,y) \in 1^{кг}/м^2$:

а) $m = \iint_D dxdy$; б) $m = \iint_D \rho_M(x,y) dxdy$; в) $m = \iint_D \rho_M^2(x,y) dxdy$.

32. Координати центра ваги пластини, якщо одиницею величини $\rho_M(x,y) \in 1^{кг}/м^2$:

а) $x_c = \frac{\iint_D x\rho_M(x,y) dxdy}{\iint_D \rho_M(x,y) dxdy}$, $y_c = \frac{\iint_D y\rho_M(x,y) dxdy}{\iint_D \rho_M(x,y) dxdy}$; б) $x_c = \frac{\iint_D x\rho_M^2(x,y) dxdy}{\iint_D \rho_M^2(x,y) dxdy}$,
 $y_c = \frac{\iint_D y\rho_M^2(x,y) dxdy}{\iint_D \rho_M^2(x,y) dxdy}$; в) $x_c = \frac{\iint_D x\rho_M(x,y) dxdy}{\iint_D dxdy}$, $y_c = \frac{\iint_D y\rho_M(x,y) dxdy}{\iint_D dxdy}$.

33. Визначення статичних моментів плоскої пластини, якщо одиницею величини $\rho_M(x,y) \in 1^{кг}/м^2$:

а) $S_x = \iint_D y\rho_M(x,y) dxdy$, $S_y = \iint_D x\rho_M(x,y) dxdy$;
 б) $S_x = \iint_D y^2\rho_M(x,y) dxdy$, $S_y = \iint_D x^2\rho_M(x,y) dxdy$;
 в) $S = \iint_D (x^2 + y^2)\rho_M(x,y) dxdy$.

34. Визначення осевих моментів інерції плоскої пластини, якщо одиницею величини $\rho_M(x,y) \in 1^{кг}/м^2$:

а) $I_x = \iint_D y\rho_M(x,y) dxdy$, $I_y = \iint_D x\rho_M(x,y) dxdy$; б) $I_x = \iint_D y^2\rho_M(x,y) dxdy$,
 $I_y = \iint_D x^2\rho_M(x,y) dxdy$; в) $I = \iint_D (x^2 + y^2)\rho_M(x,y) dxdy$.

35. Визначення полярних моментів інерції плоскої пластини, якщо одиницею величини $\rho_M(x,y) \in 1^{кг}/м^2$:

а) $I_p = \iint_D yx\rho_M(x,y) dxdy$; б) $I_p = \iint_D (x^2 + y^2)\rho_M(x,y) dxdy$;

$$в) I_p = \iint_D y^2 x^2 \rho_M(x, y) dx dy.$$

8.9. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Обчислити повторні інтеграли.

$$1.1. \int_0^1 dx \int_0^2 (x^2 + y) dy. \quad 1.2. \int_0^2 dx \int_x^{x\sqrt{3}} \frac{xdy}{x^2 + y^2}. \quad 1.3. \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_{a \cos \varphi}^{a(1+\cos \varphi)} r dr. \quad 1.4. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2 \cos \varphi} r^3 dr.$$

2. Змінити порядок інтегрування в повторних інтегралах.

$$2.1. \int_{-2}^6 dx \int_{-3-\sqrt{12+4x-x^2}}^{-3+\sqrt{12+4x-x^2}} f(x, y) dy. \quad 2.2. \int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{\sqrt{16-x^2}} f(x, y) dy. \quad 2.3. \int_{-2}^2 dx \int_0^{\frac{x+2}{2}} f(x, y) dy + \int_2^{\frac{10}{3}} dx \int_{\sqrt{x^2-4}}^{\frac{x+2}{2}} f(x, y) dy. \quad 2.4. \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dy \int_{y^2-1}^{\frac{y^2}{2}} f(x, y) dx.$$

3. Обчислити інтеграли.

$$3.1. \iint_G (x^2 + y^2) dx dy, \text{ де область } G \text{ обмежена кривими } y = x, x + y = 2a, x = 0.$$

$$3.2. \iint_G \sqrt{xy - y^2} dx dy, \text{ де область } G \text{ - трапеція з вершинами } A(1, 1), B(5, 1), C(10, 2), D(2, 2).$$

$$3.3. \iint_G (x + 2y) dx dy, \text{ де область } G \text{ обмежена кривими } y = x^2 \text{ і } y = \sqrt{x}.$$

$$3.4. \iint_G \frac{xdxdy}{x^2 + y^2}, \text{ де область } G \text{ обмежена кривими } y = x \tan x, y = x, x = \frac{\pi}{8} \left(x \geq \frac{\pi}{8} \right).$$

$$3.5. \iint_G e^{x+y} dx dy, \text{ де область } G \text{ обмежена кривими } y = e^x, x = 0, y = 2.$$

4. Перейти до полярних координат і розставити границі інтегрування по новим змінним в інтегралах.

$$4.1. \int_0^{\frac{3a}{4}} dx \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2} - \sqrt{\frac{3a^2}{4} - x^2}}^{\sqrt{ax - x^2}} f(\sqrt{x^2 + y^2}) dy. \quad 4.2. \iint_G f(x^2 + y^2) dx dy, \text{ де область } G \text{ обмежена лініями}$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt{6}x, (x^2 + y^2)^2 = 9(x^2 - y^2), y = 0 (y \geq 0, x \leq \sqrt{6}).$$

5. Перейшовши до полярних координат, обчислити інтеграли.

$$5.1. \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} e^{x^2 + y^2} dy.$$

$$5.2. \iint_G \sqrt{x^2 + y^2 - 9} dx dy, \text{ де область } G \text{ - кільце між двома колами } x^2 + y^2 = 9 \text{ і } x^2 + y^2 = 25$$

.

$$5.3. \iint_G (x^2 + y^2) dx dy, \text{ де область } G \text{ обмежена кривими}$$

$$x^2 + y^2 = ax, x^2 + y^2 = 2ax, y = 0 (y > 0).$$

$$5.4. \iint_G x \sqrt{(x^2 + y^2)} dx dy, \text{ де область } G \text{ обмежена петлюшкою лемніскати}$$

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) (x \geq 0).$$

6. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y^2 = 4ax + 4a^2$ і $x + y = 2a (a > 0)$.

7. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $y = \frac{8a^3}{x^2 + 4a^2}, x = 2y, x = 0 (a > 0)$.

8. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $r = a(1 - \cos \varphi)$ і $r = a$ (зовні кардіоїди).

9. Знайти об'єм тіл, обмежених поверхнями.

$$9.1. \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0).$$

$$9.2. x^2 - y^2 = 2az, x^2 + y^2 = a^2, z = 0 \text{ (Всередині циліндра; } a > 0 \text{)}.$$

$$9.3. x^2 + y^2 - 2z^2 = -a^2, 2(x^2 + y^2) - z^2 = a^2 (a > 0).$$

$$9.4. \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2} \text{ (Всередині конуса; } a > 0, b > 0, c > 0 \text{)}.$$

8.10. Самостійна робота

8.10.1. Практика

1. Обчислити повторні інтеграли.

$$1.1. \int_1^3 dy \int_2^5 \frac{dx}{(x+2y)^2}; \quad 1.2. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 dr.$$

2. Змінити порядок інтегрування в повторних інтегралах.

$$2.1. \int_{-1}^1 dy \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x,y) dx. \quad 2.2. \int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^y f(x,y) dx + \int_1^3 dy \int_{\frac{y^2}{9}}^1 f(x,y) dx. \quad 2.3. \int_0^a dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y) dy.$$

$$2.4. \int_3^7 dx \int_{\frac{9}{x}}^3 f(x,y) dy + \int_7^9 dx \int_{\frac{9}{x}}^{10-x} f(x,y) dy.$$

3. Обчислити інтеграли.

$$3.1. \iint_G xy dx dy, \text{ де область } G \text{ обмежена кривими } x+y=2, x^2+y^2=2y (x>0).$$

$$3.2. \iint_G y dx dy, \text{ де область } G \text{ - трикутник з вершинами } O(0, 0), A(1, 1), B(0, 1).$$

$$3.3. \iiint_G (4-y) dx dy, \text{ де область } G \text{ обмежена кривими } x=4y^2, y=1, x=0 (x>0).$$

$$3.4. \iint_G \sqrt{(a^2+x^2)} dx dy, \text{ де область } G \text{ обмежена кривими } y^2-x^2=a^2, x=a, x=0, y=0 (y>0, a>0).$$

4. Перейти до полярних координат і розставити границі інтегрування по новим змінним в інтегралах.

$$4.1. \int_0^a dx \int_{\sqrt{ax}}^{a+\sqrt{a^2-x^2}} f(x,y) dy. \quad 4.2. \int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx.$$

5. Перейшовши до полярних координат, обчислити інтеграли.

$$5.1. \int_0^a dy \int_{\sqrt{ay-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \sqrt{a^2-x^2-y^2} dx.$$

5.2. $\iint_G \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} dx dy$, де область G - частина кола радіусом a з центром в точці $O(0, 0)$, що лежить в першій чверті.

5.3. $\iint_G dx dy$, де область G обмежена кривими $x^2 = ay, x^2 + y^2 = 2a^2, y = 0 (x > 0, a > 0)$.

6. Знайти площу фігури, обмеженої кривими $xy = 4$ і $x + y = 5$.

7. Знайти об'єм тіл, обмежених поверхнями.

7.1. $y = x^2, z = y, z + y = 2$.

7.2. $x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 - 2z^2 = -a^2 (a > 0)$.

7.3. $z^2 - x^2 = a^2, z^2 - y^2 = a^2, z = a\sqrt{2} (a > 0)$.

8.10.2. Теорія

Відображення областей

Розглянемо дві декартові системи координат: $хоу$ і $иов$. Нехай в цих системах виділені дві замкнуті обмежені області D і G . Нехай в G визначені дві функції

$$x = x(u, v);$$

$$y = y(u, v)$$

так, що коли точка (u, v) пробігає всю область G , відповідна точка (x, y) пробігає всю область D . У цьому випадку функції

$$x = x(u, v);$$

$$y = y(u, v)$$

визначають відображення області G на область D . Нехай це відображення задовольняє таким умовам:

1. Відображення взаємно однозначне (Припущення про існування зворотного відображення):

$$u = u(x, y),$$

$$v = v(x, y).$$

2. Функції

$$x = x(u, v),$$

$$y = y(u, v)$$

неперервні і мають неперервні частні похідні

$$\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}.$$

3. Визначник, складений з частних похідних

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

не дорівнює нулю в області G (тобто зберігає знак).

Def. Визначник, побудований з частних похідних представленого виду, називається функціональним визначником, або якобіаном, який позначається так:

$$J(u, v) = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

При виконанні зазначених трьох умов має місце наступне твердження.

Для будь-якої гладкої або кусочно-гладкою кривою в області G

$$\begin{cases} u = u(t); \\ v = v(t), \end{cases} \quad t_1 \leq t \leq t_2$$

відображення

$$\begin{aligned} x &= x(u, v); \\ y &= y(u, v) \end{aligned}$$

переводить її в гладку або кусочно-гладку криву

$$\begin{aligned} x &= x(u(t), v(t)); \\ y &= y(u(t), v(t)) \end{aligned}$$

в області D , так як якщо існують похідні

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial v}{\partial t},$$

то існують і похідні

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t}, \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial t} \end{aligned}$$

і при цьому вони не обертаються в нуль одночасно, оскільки

$$\frac{D(x, y)}{D(u, v)} \neq 0.$$

Тут мова йде про те, що гладка крива λ_G відображається в криву λ_D , причому гладку.

Зауваження. Якобіан зворотного відображення

$$J(x, y) = \frac{D(u, v)}{D(x, y)},$$

пов'язаний з якобіаном $J(u, v)$ співвідношенням

$$J(u, v) J(x, y) = 1.$$

Криволінійні координати

Нехай задана область D в системі координат xOy , яка відображається однозначно в область G системи координат uOv . При цьому для відображення визначені функції

$$\begin{aligned}x &= x(u, v), \\ y &= y(u, v).\end{aligned}$$

Розглянемо в області G пряму $u = u_0 = \text{const}$.

В області D їй відповідають криві $\begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u_0, v). \end{cases}$

Аналогічно прямий $v = v_0 = \text{const}$ області G буде відповідати крива $\begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u, v_0) \end{cases}$ області D .

Отже, будь-якій точці (x_0, y_0) області D відповідає перетин єдиних ліній u_0 і v_0 , отже, лінії u і v можна розглядати як координати точок області D , що відрізняються від декартових координат точок області D .

Def. Крива області D $\begin{cases} x = x(u_0, v); \\ y = y(u_0, v) \end{cases}$ або $\begin{cases} x = x(u, v_0); \\ y = y(u, v_0), \end{cases}$ один з параметрів якої

зберігає постійне значення, називається координатною лінією.

Def. Числа u_0 і v_0 , що характеризують положення точки (x_0, y_0) на площині D , і є перетином координатних ліній які є кривими, називаються криволінійними координатами точок.

Отже, u і v мають подвійний сенс: з одного боку, це декартові координати точок в області G , з іншого - це криволінійні координати точок в області D .

У разі, якщо співвідношення $\Phi(u, v) = 0$ є рівнянням в декартовій системі координат кривої λ області G , то це співвідношення також є рівнянням в криволінійній системі координат кривої l області D , що є відображенням $\begin{cases} x(u, v), \\ y(u, v) \end{cases}$ кривої λ .

Постановка задачі

Нехай D - замкнута область, обмежена кусочно-гладкою кривою.

Нехай $f(x, y)$ - обмежена неперервна функція, що задана в області D .

Нехай $\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v) \end{cases}$ визначають відображення на області D деякої області G ,

і це відображення задовольняє умовам 1-3.

Задача полягає в тому, щоб інтеграл $\iint_D f(x,y) dx dy$ по області D записати через змінні u і v у вигляді інтеграла по області G .

Площа в криволінійних координатах

Розглянемо площину u, v утворених координатними лініями $u = \text{const}$, $v = \text{const}$. Виділимо в області G прямокутник зі сторонами Δu і Δv (рис. 8.10). Позначимо координати вершин M_1, M_2, M_3, M_4 . Кожна лінія $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ відображається через $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ в область D з вершинами P_1, P_2, P_3, P_4 (рис. 8.11). Напишемо їх координати:

$$\begin{aligned} M_1(u,v) &\Rightarrow P_1(x(u,v), y(u,v)); \\ M_2(u, v + \Delta v) &\Rightarrow P_2(x(u, v + \Delta v), y(u, v + \Delta v)); \\ M_3(u + \Delta u, v + \Delta v) &\Rightarrow P_3(x(u + \Delta u, v + \Delta v), y(u + \Delta u, v + \Delta v)); \\ M_4(u + \Delta u, v) &\Rightarrow P_4(x(u + \Delta u, v), y(u + \Delta u, v)). \end{aligned}$$

При таких Δu і Δv отриманий чотирикутник можна вважати паралелограмом, для якого $\Delta S = \left| \overrightarrow{P_1 P_2} \times \overrightarrow{P_1 P_4} \right|$ (рис. 8.12).

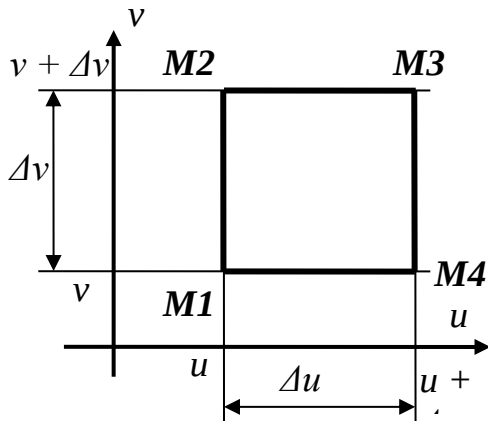


Рисунок. 8.10

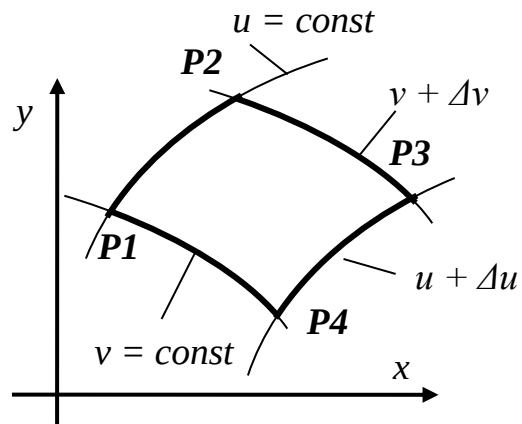


Рисунок. 8.11

Координати цих векторів:

$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{i} \cdot (x(u, v + \Delta v) - x(u, v)) + \vec{j} \cdot (y(u, v + \Delta v) - y(u, v)) + \vec{k} \cdot 0;$$

$$\overrightarrow{P_1 P_4} = \vec{i} \cdot (x(u + \Delta u, v) - x(u, v)) + \vec{j} \cdot (y(u + \Delta u, v) - y(u, v)) + \vec{k} \cdot 0.$$

при $\Delta u \rightarrow 0$ і $\Delta v \rightarrow 0$ можна записати

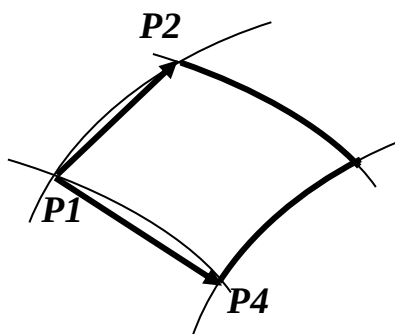
$$\overrightarrow{P_1 P_2} = \vec{i} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} dv + \vec{j} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} dv + \vec{k} \cdot 0;$$

$$\overrightarrow{P_1P_4} = \vec{i} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} du + \vec{j} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} du + \vec{k} \cdot 0.$$

тоді

$$\Delta S = dS = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv & 0 \\ \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du & 0 \end{vmatrix} = \left| \vec{k} \right| \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} dv & \frac{\partial y}{\partial v} dv \\ \frac{\partial x}{\partial u} du & \frac{\partial y}{\partial u} du \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \end{vmatrix} dv du.$$

отже, $dS = |J(u,v)| dv du$.



Мал. 8.12

Def. Величину $|J(u,v)| dv \cdot du$ називають елементом площі в криволінійних координатах.

Зауваження. Знак Якобіана визначає збіг (при $J(u,v) > 0$) або розбіжність (при $J(u,v) < 0$) напрямку обходу контуру.

З отриманих міркувань випливає, що $|J(u,v)| = \frac{S_{P_1P_2P_3P_4}}{S_{M_1M_2M_3M_4}} = \frac{\Delta S_D}{\Delta S_G}$.

Висновок. Абсолютна величина Якобіана грає роль коефіцієнта розтягання або стиснення площини uOv області G при перетворенні її в площину xOy області D , тобто $dx dy = |J(u,v)| dv du$. Отже, можна записати вираз заміни змінних при обчисленні подвійного інтеграла:

$$\iint_{(D)} f(x,y) dx dy = \iint_{(G)} f(x(u,v), y(u,v)) |J(u,v)| du dv.$$

8.10.3. Історичний нарис

Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Вперше криволінійний інтеграл зустрічаються в роботі А. Клеро (1743); там же приведена умова незалежності криволінійного інтеграла від контуру інтегрування. Криволінійні інтеграли в загальному вигляді ввів О. Коші в своїх роботах по функціям комплексної змінної (1825). Вираз «шлях інтегрування» стосовно криволінійному інтегралу увійшло в математичну мову завдяки французькому математику В. Пуїзе (1850).

Поверхневий інтеграл вперше з'явився в «Аналітичній механіці» Ж.-Л. Лагранжа (1788), правда, в такій нечіткій формі, що не завжди можна було зрозуміти де подвійний а де поверхневий інтеграли. У своїх ранніх роботах Ж.-Л. Лагранж, а потім і П.-С. Лаплас вирішували тільки ті задачі, які зводилися до подвійних інтегралів з постійними межами інтегрування. Подвійний інтеграл вперше зустрічається в листі Ж.-Л. Лагранжа Л. Ейлера (1756). В ньому Лагранж з їх допомогою записав об'єм циліндричних тіл і площі криволінійних поверхонь. Перше викладення теорії подвійних інтегралів опублікував, однак, Л. Ейлер в 1770 р, слідом за ним в 1772 р Ж.-Л. Лагранж ввів потрійні інтеграли. К. Ф. Гаусс в своїх статтях (1813) обчислював поверхневі інтеграли безпосереднім підсумовуванням і так докладно, що зміст поняття чітко пояснювався, причому він враховував і сторони поверхні. Після робіт К. Ф. Гаусса запис формули переходу від поверхневого інтеграла до потрійного у загальному виді вже не уявляла праці.

Співвідношення між потрійним і поверхневим інтегралами було відомо С. Пуассону в 1828 р Він вдавався до нього багаторазово, проводячи викладки кожен раз заново і не користуючись ним як формулою. У загальному вигляді для інтеграла, поширеного на n -мірну область, формула виведена М. В. Остроградським в 1826 р (опублікована в 1831 р). Формула була пере відкрита Л. Кронекером (1869), а потім шотландським фізиком П. Г. Тетом (1831 - 1901), який записав її у векторній формі за допомогою оператора Гамільтона ∇ в «елементарному трактаті з теорії кватерніонів» (1867). Сам оператор і його позначення ∇ були введені У. Гамільтоном в 1856 р Термін «оператор Гамільтона» і назва «Набла» придумав Р. Сміт, один Д. Максвелла і П. Тета, спочатку як жартівливе (так називався остов асирійської арфи, за формою схожий на ∇). Д. Максвелл в листах (1870) до П. Тету обговорював це і інші назви. Однак за життя Д. Максвелла ця назва не стало науковим терміном. П. Тет вжив його в науковій статті лише в 1890 р

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

Я про домашнє завдання забув

Що кажуть про математику

«Математику немає необхідності утримувати в пам'яті всі докази теореми. Необхідно лише пам'ятати початковий та кінцевий пункт і ідею доказу» Д. Д. Мордухай-Болтовской.

Потрійний інтеграл. Визначення потрійного інтеграла. Основні властивості потрійного інтеграла. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах. Заміна змінних при обчисленні потрійного інтеграла. Циліндрична система координат. Сферична система координат. Застосування потрійного інтеграла

9. ПОТРІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ

Для потрійного інтеграла використовується поняття обсягу області.

Обсяг області - це невід'ємна функція, що володіє властивостями:

- монотонності: $P \subset Q \Rightarrow V(P) < V(Q)$;
- адитивності (сумативна): $V(P + Q) = V(P) + V(Q)$;
- інваріантності: $V(P) = V(Q)$ (якщо P конгруентне Q).

Дві фігури називаються конгруентними, або рівними, якщо існує **взаємно однозначне відображення** між ними, яке переводить одну фігуру в іншу з збереженням відстані між точками фігур.

9.1. Визначення потрійного інтеграла

Потрійний інтеграл подібний подвійному інтегралу. Між ними існує аналогія.

Для потрійного інтеграла використовується поняття обсягу тіла.

Нехай в системі координат $Oxyz$ задана функція $u = f(x, y, z)$ в замкнутій області V .

розіб'ємо область V на елементарні обсяги V_i так, щоб виконувалася система

$$\text{рівності} \begin{cases} V = \bigcup_{i=1}^n V_i; \\ V_i \cap V_j = 0. \end{cases}$$

Виберемо в кожному елементарному обсязі V_i точку $(\xi_i, \eta_i, \varepsilon_i)$. Складемо суму:

$$I = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varepsilon_i) \Delta V_i .$$

Def. Під потрійним інтегралом функції $f(x, y, z)$ в області V будемо розуміти межа інтегральної суми виду $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varepsilon_i) \Delta V_i$ за умови, що число розбиття прагне до ∞ і не залежить від способу розбиття області V і вибору точки в елементарному обсязі:

$$\iiint_V f(x,y,z)dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(\xi_i, \eta_i, \varepsilon_i) \Delta V_i ,$$

де під dV мається на увазі $dx dy dz$.

Властивості потрійного інтеграла аналогічні властивостям подвійного інтеграла.

9.2. Основні властивості потрійного інтеграла

1. Лінійність:

$$\iiint_V (C_1 f_1(x,y,z) + C_2 f_2(x,y,z))dV = C_1 \iiint_V f_1(x,y,z)dV + C_2 \iiint_V f_2(x,y,z)dV .$$

2. Адитивність:

$$\iiint_{V_1+V_2} f(x,y,z)dV = \iiint_{V_1} f(x,y,z)dV + \iiint_{V_2} f(x,y,z)dV .$$

3. Якщо в області D $f(x,y,z) \geq 0$, То і $\iiint_V f(x,y,z)dV \geq 0$.

4. Якщо в області D $f(x,y,z) \geq g(x,y,z)$, То і

$$\iiint_V f(x,y,z)dV \geq \iiint_V g(x,y,z)dV .$$

5. Має місце «нерівність трикутника»:

$$\left| \iiint_V f(x,y,z)dV \right| \leq \iiint_V |f(x,y,z)|dV .$$

6. Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в замкненій області об'ємом V , То має місце запис

$$mV \leq \iiint_V f(x,y,z)dV \leq MV ,$$

де m , M - найменше та найбільше значення функції $f(x,y,z)$ в області V .

7. Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна в замкненій області об'ємом V , То в цій області знайдеться така точка (x_0, y_0, z_0) , що

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V} \iiint_V f(x,y,z)dV .$$

При цьому значення $f(x_0, y_0, z_0)$ називають середнім значенням функції $f(x,y,z)$ в області V .

Метод обчислення зведений до повторного інтегрування.

9.3. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах

нехай функція $u = u(x, y, z)$, Інтегрована в області $V \in R^3$, Обмежена поверхнями $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, Проекція яких в площині xOy являє собою область D (Рис. 9.1).

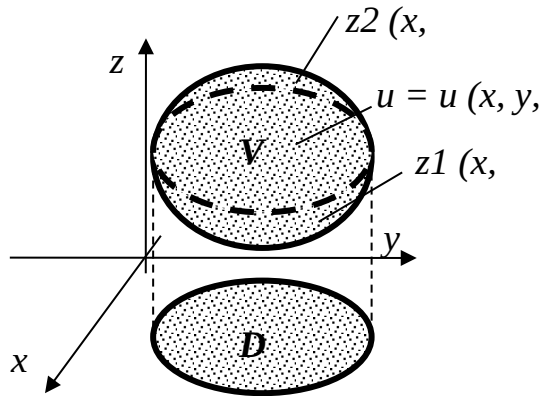


Рисунок 9.1

Тоді для будь-якої точки (x, y) області D має місце формула

$$\iiint_V u(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} u(x, y, z) dz \right) dS.$$

Тут для внутрішнього інтеграла по z вважаємо, що $x, y = \text{const}$, Потім обчислюємо подвійний інтеграл.

якщо область D - 1-я стандартна, то, переходячи до подвійного інтеграла, можна записати вираз

$$\iiint_V u(x, y, z) dV = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} u(x, y, z) dz \right) dy \right) dx.$$

Тут область можна записати в такому вигляді (рис. 9.2):

$$V = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}.$$

Інтеграл має вигляд

$$\iiint_V u(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} u(x, y, z) dz.$$

Якщо проекція тіла на xOy - це 2-я стандартна область, то можна записати

$$V = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, \quad y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \quad z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}.$$

Повторний інтеграл має вигляд

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} u(x, y, z) dz.$$

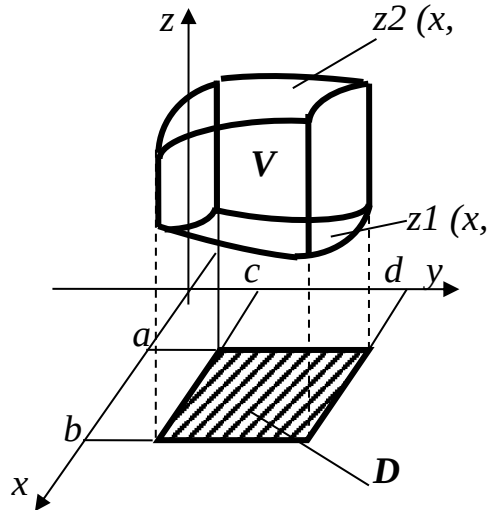


Рисунок 9.2

Зауваження. площині xOy , yOz , xOz рівномірні, тому в деяких випадках доцільно їх поміняти місцями. Все залежить від того, в який з них проекція області інтегрування D має найбільш простий вигляд.

Зауваження. Якщо проекція області D при проектуванні не представляє собою розглянуті стандартні області, то цю область D паралельними проектується площинами розбивають на складові так, щоб вони вже ставилися до розглянутих випадкам.

ПРИКЛАД. Обчислити потрійний інтеграл $I = \iiint_V (x + y + z) dx dy dz$. область D

обмежена координатними площинами $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ і площиною $x + y + z = 1$ (Рис. 9.3).

Рішення

При проектуванні області на площину $0xy$, коли $z = 0$, область D буде являти собою безліч точок:

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 - x\}.$$

Область інтегрування:

$$V = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x - y\}.$$

Інтеграл має вигляд

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x+y+z) dz = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \frac{(x+y+z)^2}{2} \Big|_0^{1-x-y} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \left((x+y+1-x-y)^2 - (x+y+0)^2 \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (1 - (x+y)^2) = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left(y - \frac{(x+y)^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left(1-x - \frac{(x+1-x)^3}{3} - 0 + \frac{(x+0)^3}{3} \right) \Big|_0^{1-x} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left(1-x - \frac{1}{3} + \frac{x^3}{3} \right) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx \left(\frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{8-6+1}{12} \right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{12} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

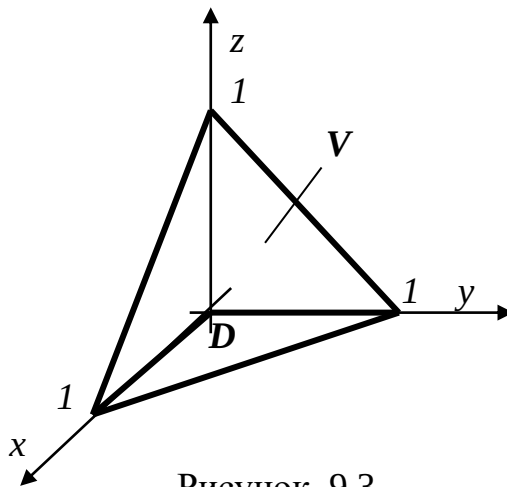


Рисунок 9.3

9.4. Заміна змінних при обчисленні потрійного інтеграла

нехай функції $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ встановлюють взаємно однозначна відповідність між областями G і V в просторі R^3 .

Як і в разі простору R^2 , Для взаємно однозначної відповідності вводиться якобіан.

Def. Визначник, побудований з приватних похідних виду $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial w}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial w}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial w}$, Називається функціональним визначником, або якобіаном. Він позначається так:

$$J(u, v, w) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

Def. величину $|J(u, v, w)| dv du dw$ **називають елементом обсягу в криволінійних координатах.**

Отже, якщо область V в системі координат $Oxyz$ відображається однозначно в область G системи координат функціями

$$\begin{aligned} x &= x(u, v, w), \\ y &= y(u, v, w), \\ z &= z(u, v, w), \end{aligned}$$

то елементу обсягу $dx dy dz$ області V відповідає елемент обсягу $dv du dw$ області G і при цьому має місце залежність виду

$$dx dy dz = |J(u, v, w)| dv du dw.$$

Таким чином, можна записати вираз заміни змінних при обчисленні потрібного інтеграла:

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(G)} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) dx dy dz |J(u, v, w)| du dv dw.$$

9.4.1. Циліндрична система координат

Система координат - це спосіб представлення інформації.

Def. Циліндрична система координат - це система координат, для якої положення точки в тривимірному просторі визначається:

- її відстанню від фіксованій площині (z);
- полярними координатами цієї точки в заданій площині (φ, ρ).

Якщо поєднати циліндричну і декартову системи координат (рис. 9.4), то для точки M з її координатами в циліндричній системі координат $M(\varphi, \rho, z)$ можна записати координати в декартовій системі:

$$x_M = \rho \cos \varphi, \quad y_M = \rho \sin \varphi, \quad z_M = z.$$

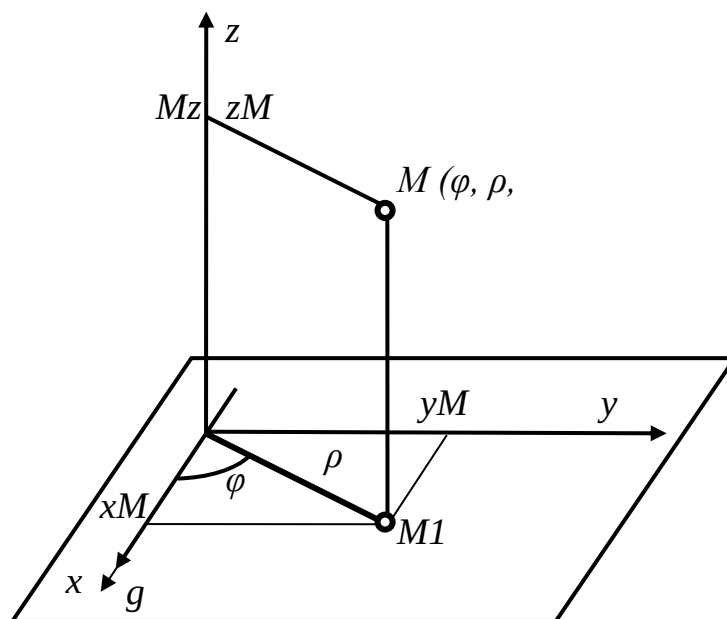


Рисунок 9.4

При цьому діють значення

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq +\infty, \quad -\infty \leq z \leq +\infty.$$

Якобіан такої системи має вигляд

$$J(\varphi, \rho, z) = \frac{D(x, y, z)}{D(\varphi, \rho, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -\rho \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \rho \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\rho \sin^2 \varphi - \rho \cos^2 \varphi = -\rho,$$

т. е. $J(\varphi, \rho, z) = -\rho$.

Тоді розрахункова вираз для циліндричної системи координат набуває вигляду

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_G f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

Зауваження. Переходити до циліндричної системі координат рекомендується, якщо проекція області тіла V на площину в полярній системі координат має простий вигляд.

ПРИКЛАД. Обчислити обсяг тіла, обмеженого поверхнями:

$$V : \{x^2 + y^2 = y, \quad z^2 = x^2 + y^2\}.$$

нагадування:

- $x^2 + y^2 = y$ - циліндр;

- $z^2 = x^2 + y^2$ - конус.

Рішення

Розглянемо поверхню циліндра

$$x^2 + y^2 = y, \quad x^2 + y^2 - y = 0, \quad x^2 + y^2 - 2 \cdot \frac{1}{2}y + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0, \quad x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

Отже, це циліндр з направляючої окружністю радіусом $\frac{1}{2}$, Центр якої зміщений вздовж осі Oy на величину $\frac{1}{2}$.

Цей циліндр перетинає конус $z^2 = x^2 + y^2$ (Рис. 9.5).

Конус і циліндр - це поверхні, нескінченно віддаються вгору і вниз від горизонтальної площини проєкцій.

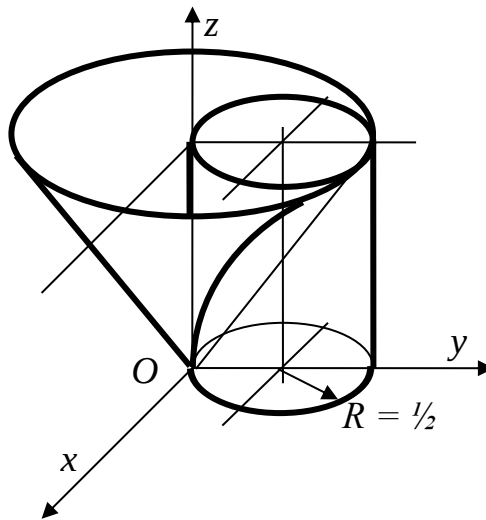


Рисунок 9.5

З огляду на симетричність поверхонь, можна розглядати четверту частину обсягу:

- для циліндричної поверхні

$$x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \quad \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} - x^2, \quad y - \frac{1}{2} = \pm \sqrt{\frac{1}{4} - x^2}, \quad y = \pm \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} + \frac{1}{2}$$

;

- для конічної поверхні

$$z = \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

У декартовій системі координат четверту частину обсягу $\frac{V}{4}$ можна записати у вигляді

$$\frac{V}{4} : \left\{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{1}{4} - x^2} + \frac{1}{2} \leq y \leq \sqrt{\frac{1}{4} - x^2} + \frac{1}{2}, 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2} \right\}.$$

Якщо перейти до циліндричної системи координат, де

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad z = z,$$

то поверхні можна записати так:

$$\text{- конус: } z^2 = x^2 + y^2, \quad z^2 = \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi, \quad z^2 = \rho^2, \quad z = \rho;$$

$$\text{- циліндр: } x^2 + y^2 = y, \quad \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi = \rho \sin \varphi, \quad \rho^2 = \rho \sin \varphi, \quad \rho = \sin \varphi.$$

При цьому для $\frac{V}{4}$ повинна виконуватися умова $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Отже, в циліндричній системі координат задану область G можна записати у вигляді

$$G : \left\{ (\varphi, \rho, z) \mid 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \rho \leq \sin \varphi, \quad 0 \leq z \leq \rho \right\}.$$

Отже, для обсягу можна записати:

$$\begin{aligned} \frac{V}{4} &= \iiint_G \rho d\rho d\varphi dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho d\rho \int_0^{\rho} dz; \\ \frac{V}{4} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho d\rho \int_0^{\rho} dz = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho d\rho z \Big|_0^{\rho} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{\sin \varphi} \rho^2 d\rho = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{\sin \varphi} = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi (1 - \sin^2 \varphi) d\varphi = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi \cos^2 \varphi d\varphi = \\ &= -\frac{\cos \varphi}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\cos^3 \varphi}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}(0 - 1) + \frac{1}{9}(0 - 1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{3 - 1}{9} = \frac{2}{9}. \end{aligned}$$

9.4.2. Сферична система координат

Def. Сферична система координат - це система координат, для якої положення точки в тривимірному просторі визначається (рис. 9.6):

- її відстанню r від деякої фіксованої точки цього простору, званої початком відліку;
- кутом θ між деякої фіксованої віссю і радіусом-вектором точки, що збігається з відстанню r ;
- кутом φ полярної системи координат, визначення підсумкових місць проекції радіуса-вектора точки на площину, перпендикулярну до фіксованої осі.

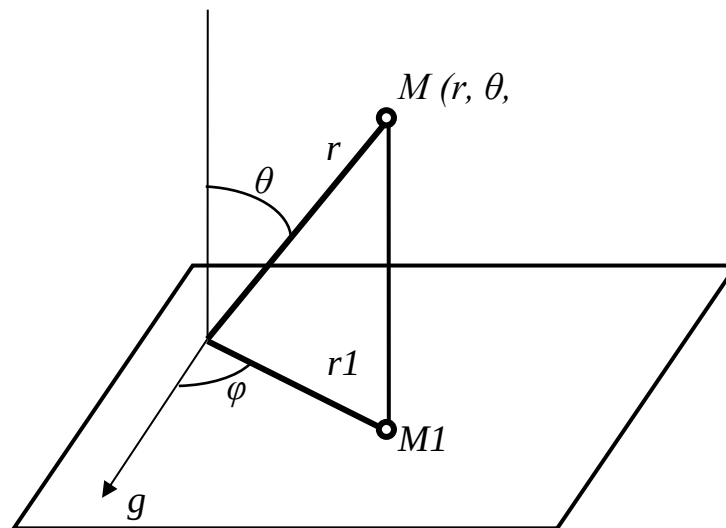


Рисунок 9.6

Координати точки записуються як $M(r, \theta, \varphi)$. Допустимі значення координат

$$0 \leq r \leq +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Координатні поверхні сферичної системи координат:

- $r = \text{const}$ - сфера з центром в точці O ;
- $\theta = \text{const}$ - конічна поверхня;
- $\varphi = \text{const}$ - на півплощина, що проходить через вісь.

Сумісний циліндричну систему координат з декартовою (рис. 9.7) і отримаємо

$$z = r \cos \theta,$$

$$x = r_1 \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r_1 \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi.$$

Обчислимо якобіан:

$$\begin{aligned}
J(r, \theta, \varphi) &= \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial r}{\partial r} & \frac{\partial \theta}{\partial r} & \frac{\partial \varphi}{\partial r} \\ \frac{\partial r}{\partial \theta} & \frac{\partial \theta}{\partial \theta} & \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial r}{\partial \varphi} & \frac{\partial \theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}} = \\
&= \cos \theta \begin{vmatrix} r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} + r \sin \theta \begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \end{vmatrix} = \\
&= r^2 \cos^2 \theta \sin \theta \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} + r^2 \sin^3 \theta \begin{vmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{vmatrix} = \\
&= r^2 \cos^2 \theta \sin \theta + r^2 \sin^3 \theta = r^2 \theta \sin \theta.
\end{aligned}$$

отже,

$$J(r, \theta, \varphi) = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = r^2 \theta \sin \theta.$$

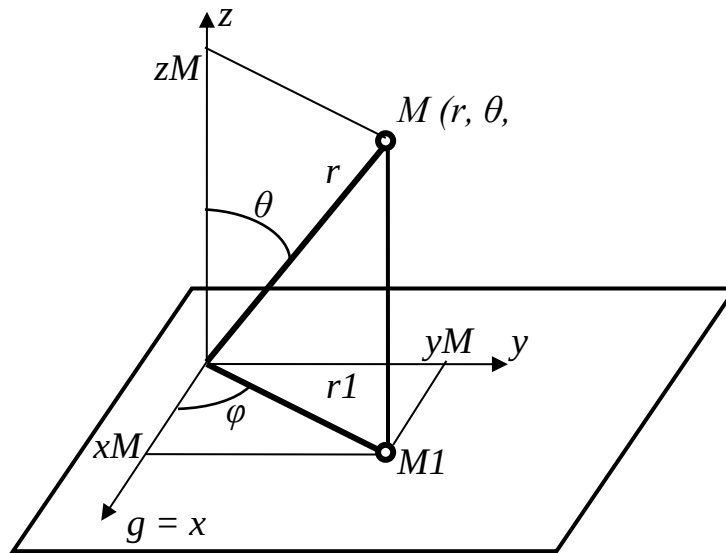


Рисунок 9.7

Потрійний інтеграл має вигляд

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(G)} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \theta \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Зауваження. Можна побудувати і узагальнену сферичну систему координат, в якій

$$x = ar \sin \theta \cos \varphi, y = br \sin \theta \sin \varphi, z = cr \cos \theta,$$

$$|J(r, \theta, \varphi)| = abc r^2 \sin \theta.$$

ПРИКЛАД. Обчислити обсяг еліпсоїда $V : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Рішення

Перейдемо від декартової системи координат до узагальненої сферичної системи:

$$x = ar \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = br \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = cr \cos \theta;$$

$$V : \frac{(ar \sin \theta \cos \varphi)^2}{a^2} + \frac{(br \sin \theta \sin \varphi)^2}{b^2} + \frac{(cr \cos \theta)^2}{c^2} = 1;$$

$$r^2 \sin^2 \theta \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \theta \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \theta = 1;$$

$$r^2 \sin^2 \theta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + r^2 \cos^2 \theta = 1, \quad r^2 \sin^2 \theta + r^2 \cos^2 \theta = 1, \quad r^2 = 1.$$

Отже, еліпсоїд в узагальненій сферичній системі координат має вигляд

$$r^2 = 1.$$

Область еліпсоїда буде являти собою безліч точок:

$$V : \{(r, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq r \leq 1\}.$$

Отже, обсяг еліпсоїда

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{(G)} abc r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = abc \iiint_{(G)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = abc \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^1 r^2 dr = \\ &= abc \left(\varphi \Big|_0^{2\pi} \right) \left(-\cos \theta \Big|_0^{\pi} \right) \left(\frac{r^3}{3} \Big|_0^1 \right) = abc (2\pi - 0) (-(-1 - 1)) \left(\frac{1}{3} (1 - 0) \right) = \\ &= abc \cdot 2\pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

Відповідь: $\frac{4}{3} \pi abc$.

9.5. Застосування потрійного інтеграла

1. Визначення маси тіла:

$$M = \iiint_D \rho_M(x, y, z) dx dy dz, \quad \text{Де одиницею величини } \rho_M(x, y, z) \in 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

2. У разі $\rho_m = 1$ визначення обсягу:

$$V = \iiint_D dx dy dz .$$

3. Визначення центру маси тіла:

$$x_c = \frac{\iiint_D x \rho_m(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D \rho_m(x, y, z) dx dy dz}, \quad y_c = \frac{\iiint_D y \rho_m(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D \rho_m(x, y, z) dx dy dz},$$

$$z_c = \frac{\iiint_D z \rho_m(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D \rho_m(x, y, z) dx dy dz} .$$

4. Визначення моменту інерції тіла відносно координатних осей:

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \rho_m(x, y, z) dx dy dz ;$$

$$I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \rho_m(x, y, z) dx dy dz ;$$

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \rho_m(x, y, z) dx dy dz .$$

5. Визначення полярного моменту інерції:

$$I_p = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \rho_m(x, y, z) dx dy dz .$$

9.6. Висновки

Потрійний інтеграл подібний подвійному інтегралу. Між ними існує аналогія.

Для потрійного інтеграла використовується поняття обсягу тіла.

Нехай в системі координат $Oxyz$ задана функція $u = f(x, y, z)$ в замкнутій області V , яку розіб'ємо на елементарні непересічні обсяги V_i . Виберемо в кожному елементарному обсязі V_i точку $(\xi_i, \eta_i, \varepsilon_i)$. Складемо інтегральну суму:

$$I = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varepsilon_i) \Delta V_i .$$

Def. Під потрійним інтегралом функції $f(x, y, z)$ в області V будемо розуміти межа інтегральних сум виду $\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \lambda \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \varepsilon_i) \Delta V_i$ за умови, що число розбиття прагне до ∞ і не залежить від способу розбиття області V і вибору точки в елементарному обсязі:

$$\iiint_V f(x, y, z) dV = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum f(\xi_i, \eta_i, \varepsilon_i) \Delta V_i,$$

де під dV мається на увазі $dx dy dz$.

Основні властивості потрійного інтеграла:

1. Лінійність:

$$\iiint_V (C_1 f_1(x, y, z) + C_2 f_2(x, y, z)) dV = C_1 \iiint_V f_1(x, y, z) dV + C_2 \iiint_V f_2(x, y, z) dV.$$

2. Адитивність:

$$\iiint_{V_1+V_2} f(x, y, z) dV = \iiint_{V_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{V_2} f(x, y, z) dV.$$

3. Якщо в області D $f(x, y, z) \geq 0$, То і $\iiint_V f(x, y, z) dV \geq 0$.

4. Якщо в області D $f(x, y, z) \geq g(x, y, z)$, То і

$$\iiint_V f(x, y, z) dV \geq \iiint_V g(x, y, z) dV.$$

5. Має місце «нерівність трикутника»

$$\left| \iiint_V f(x, y, z) dV \right| \leq \iiint_V |f(x, y, z)| dV.$$

6. Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в замкненій області об'ємом V , То має місце запис

$$mV \leq \iiint_V f(x, y, z) dV \leq MV,$$

де m , M - найменше та найбільше значення функції $f(x, y, z)$ в області V .

7. Якщо функція $f(x, y, z)$ неперервна в замкненій області об'ємом V , То в цій області знайдеться така точка (x_0, y_0, z_0) , що

$$f(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{V} \iiint_V f(x, y, z) dV.$$

При цьому значення $f(x_0, y_0, z_0)$ називають середнім значенням функції $f(x, y, z)$ в області V .

Метод обчислення потрібного інтеграла зведений до повторного інтегрування.

нехай функція $u = u(x, y, z)$, Інтегрована в області $V \in R^3$, Обмежена поверхнями $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, Проекції яких в площині xOy являють собою область D .

Тоді для будь-якої точки (x, y) області D має місце формула

$$\iiint_V u(x, y, z) dV = \iint_D \left(\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} u(x, y, z) dz \right) dS.$$

Тут для внутрішнього інтеграла по z вважаємо, що $x, y = \text{const}$, Потім обчислюємо подвійний інтеграл.

якщо область D - 1-я стандартна, то область можна записати у вигляді

$$V = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}.$$

Інтеграл має вигляд

$$\iiint_V u(x, y, z) dV = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} u(x, y, z) dz.$$

Якщо проекція тіла на xOy - 2-я стандартна область, то можна записати

$$V = \{(x, y, z) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}.$$

Повторний інтеграл має вигляд

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} u(x, y, z) dz.$$

Зауваження. площині xOy , yOz , xOz рівномірні, тому в деяких випадках доцільно їх поміняти місцями. Все залежить від того, в який з них проекція області інтегрування D має найбільш простий вигляд.

Якщо проекція області D при проектуванні не представляє собою розглянуті стандартні області, то цю область D паралельними проектується площинами розбивають на складові так, щоб вони вже ставилися до розглянутих випадкам.

Екщо область V в системі координат $Oxyz$ відображається однозначно в область G системи координат функціями

$$x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w),$$

то для елемента обсягу $dx dy dz$ області V має місце залежність виду

$$dx dy dz = |J(u, v, w)| dv du dw.$$

Def. величину $|J(u,v,w)|dudvdw$ називають елементом обсягу в криволінійних координатах, а величина

$$J(u,v,w) = \frac{D(x,y,z)}{D(u,v,w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

називається функціональним визначником, або якобіаном.

Вираз заміни змінних при обчисленні потрійного інтеграла має вигляд

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dx dy dz = \iiint_{(G)} f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))dx dy dz |J(u,v,w)|dudvdw.$$

Def. Циліндрична система координат - це система координат, для якої положення точки в тривимірному просторі визначається:

- її відстанню від фіксованій площині (z) ;
- полярними координатами цієї точки в заданій площині (φ, ρ) .

для точки M з її координатами в циліндричній системі координат $M(\varphi, \rho, z)$ можна записати координати в декартовій системі координат:

$$x_M = \rho \cos \varphi, \quad y_M = \rho \sin \varphi, \quad z_M = z.$$

При цьому виконуються нерівності

$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq +\infty, \quad -\infty \leq z \leq +\infty.$$

Якобіан такої системи має вигляд

$$J(\varphi, \rho, z) = \frac{D(x,y,z)}{D(\varphi, \rho, z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \varphi} & \frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial \varphi} & \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial \varphi} & \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = -\rho.$$

Розрахункова формула для циліндричної системи координат:

$$\iiint_V f(x,y,z)dx dy dz = \iiint_G f(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi, z) \rho d\rho d\varphi dz.$$

Зауваження. Переходити до циліндричної системи координат рекомендується, якщо проекція області тіла V на площину в полярній системі координат має простий вигляд.

Def. Сферична система координат - це система координат, для якої положення точки в тривимірному просторі визначається:

– її відстанню r від деякої фіксованої точки цього простору, званої початком відліку;

– кутом θ між деякої фіксованої віссю і радіусом-вектором точки, що збігається з відстанню r ;

– кутом φ полярної системи координат, визначення підсумкових місць проекції радіуса-вектора точки на площину, перпендикулярну фіксованою осі.

Координати точки записуються як $M(r, \theta, \varphi)$. Для системи координат

$$0 \leq r \leq +\infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi.$$

Координатні поверхні сферичної системи координат:

- $r = \text{const}$ - сфера з центром в точці O ;
- $\theta = \text{const}$ - конічна поверхня;
- $\varphi = \text{const}$ - на півплощина, що проходить через вісь.

для точки M з її координатами в сферичній системі координат $M(r, \theta, \varphi)$ в декартовій системі координат можна записати

$$z = r \cos \theta, \quad x = r_1 \cos \varphi = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r_1 \sin \varphi = r \sin \theta \sin \varphi.$$

Якобіан має вигляд

$$J(r, \theta, \varphi) = \frac{D(x, y, z)}{D(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = r^2 \sin \theta.$$

Потрійного інтеграл має вигляд

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(G)} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

Зауваження. Можна побудувати і узагальнену сферичну систему координат, в якій

$$x = ar \sin \theta \cos \varphi, \quad y = br \sin \theta \sin \varphi, \quad z = cr \cos \theta, \quad |J(r, \theta, \varphi)| = abcr^2 \sin \theta.$$

Застосування потрійного інтеграла:

1. Визначення маси тіла:

$$M = \iiint_D \rho_M(x, y, z) dx dy dz, \quad \text{Де одиницею величини } \rho_M(x, y, z) \in 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}.$$

2. Визначення обсягу: $V = \iiint_D dx dy dz$.

3. Визначення центру маси тіла:

$$x_c = \frac{\iiint_D x \rho_m(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_D \rho_m(x, y, z) dx dy dz}.$$

4. Визначення моменту інерції тіла відносно координатних осей:

$$I_x = \iiint_D (y^2 + z^2) \rho_m(x, y, z) dx dy dz, \quad I_y = \iiint_D (x^2 + z^2) \rho_m(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_D (x^2 + y^2) \rho_m(x, y, z) dx dy dz.$$

5. Визначення полярного моменту інерції:

$$I_\rho = \iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) \rho_m(x, y, z) dx dy dz.$$

Перерва

- Мехмат-пірсинг. Недорого і якісно проколю вашу околицю.
- Границя групи студентів при кількості студентів на парі, яка прагне до нуля, дорівнює старості.
- Раціональні числа розмножуються поділом!

9.7. Питання для перевірки знань

1. Потрійний кратний інтеграл функції $f(x, y, z)$ в області V - це:

а) певний інтеграл від подвійного інтеграла заданої функції по заданій обла-

сті: $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} I(x, y, z) dz$; б) кінцевий межа відповідних інтег-

ральних сум функції $f(x, y, z)$ за умови, що число розбиття області V прямує до нескінченності, і ця межа не залежить від способу розбиття області V і вибору точки в елементарних обсягах; в) послідовне потрійне інтегрування заданої функції

за всіма її змінним: $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} I(x, y, z) dz$.

2. Позначення потрійного інтеграла, якщо $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b,$

$y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, $V = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$:

$$\text{а) } I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} I(x,y,z) dz ; \text{ б) } I = \iiint_V f(x,y,z) dV ; \text{ в) } I = \iiint_{(D)} f(x,y,z) dx dy dz .$$

3. Потрійний кратний інтеграл обчислюється:

- а) через заміну змінних; б) за допомогою повторного інтегрування;
в) триразовим інтеграцією заданої функції.

4. Виберіть правильне твердження про зведення потрійного інтеграла до повторного, в якому внутрішній інтеграл є певним інтегралом:

а) нехай функція $f(x,y,z)$ обмежена поверхнями $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$, Проекції яких на площину xOy представляють собою область D , Для якої існує певний інтеграл $I(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$, Тоді існує подвійний інтеграл виду

$$\iint_D I(x,y) dx dy = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \text{ (Він називається повторним) і справедливо}$$

рівність $\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$; б) нехай функція $f(x,y,z)$

обмежена поверхнями $z = z_1(x,y)$ і $z = z_2(x,y)$, Проекції яких на площину xOy представляють собою область D , Тоді для $\forall(x,y) \in D$ існує певний інтеграл

$$I(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz \quad \text{і} \quad \text{справедливо} \quad \text{рівність} \quad \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz =$$

$$= \iint_D dx dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} I(x,y,z) dz ; \text{ в) нехай існує потрійний інтеграл } \iiint_V f(x,y,z) dx dy dz \text{ і}$$

для $\forall(x,y) \in D$ існує певний інтеграл $I(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$, Тоді існує подвій-

ний інтеграл $\iint_D I(x,y) dx dy = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z) dz$ (Він називається

повторним) і справедливо рівність $\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} I(x,y,z) dz$.

5. Елементарний об'єм в декартовій системі координат:

$$\text{a) } dV = |dxdydz|; \text{ б) } dV = dx^3 dy^3 dz^3; \text{ в) } dV = dxdydz.$$

6. Нехай функції $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ встановлюють взаємно однозначна відповідність між областями G і D в просторі R^3 , Тоді якобіан $J(u, v, w)$ має вид:

$$\text{a) } J(u, v, w) = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}; \text{ б) } J(u, v, w) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}; \text{ в) } J(u, v, w) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}.$$

7. Формули переходу від декартової системи координат до циліндричної мають вигляд:

$$\text{a) } x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z; \text{ б) } x = \rho \sin \varphi, y = \rho \cos \varphi, z = z;$$

$$\text{в) } x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta.$$

8. Допустимі значення координат в циліндричній системі координат:

$$\text{a) } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, -\infty \leq \rho \leq +\infty, 0 < z < +\infty; \text{ б) } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq +\infty, -\infty < z < +\infty; \text{ в) } -\pi \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \rho \leq +\infty, -\infty < z < +\infty.$$

9. Виберіть співвідношення, відповідне заміні змінних в потрібному інтегралі для циліндричної системи координат:

$$\text{a) } dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz; \text{ б) } dxdydz = \rho^2 d\rho d\varphi dz; \text{ в) } dxdydz = \rho \sin \varphi d\rho d\varphi dz.$$

10. Виберіть формули переходу від декартової системи координат до сферичної:

$$\text{a) } x = \rho \cos \varphi, y = \rho \sin \varphi, z = z; \text{ б) } x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \cos \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta;$$

$$\text{в) } x = \rho \sin \theta \cos \varphi, y = \rho \sin \theta \sin \varphi, z = \rho \cos \theta.$$

11. Допустимі значення координат сферичної системи координат:

$$\text{a) } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \rho \leq +\infty; \text{ б) } 0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \rho \leq +\infty;$$

$$\text{в) } -\pi \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta < \pi, 0 \leq \rho \leq +\infty.$$

12. Виберіть співвідношення, відповідне заміні змінних в потрібному інтегралі для сферичної системи координат:

$$\text{a) } dxdydz = \rho \sin \theta d\rho d\varphi dz; \text{ б) } dxdydz = \rho d\rho d\varphi dz; \text{ в) } dxdydz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi dz.$$

13. Виберіть співвідношення, відповідне заміні змінних в криволінійній системі координат виду $x = a\rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = c\rho \cos \theta$:

$$\text{a) } dxdydz = abc\rho^2 \sin \theta d\rho d\varphi dz; \text{ б) } dxdydz = abc\rho \sin \theta d\rho d\varphi dz;$$

$$\text{в) } dxdydz = abc\rho d\rho d\varphi dz.$$

14. Визначення обсягу за допомогою потрібного інтеграла:

$$\text{a) } V = \iiint_V dV; \text{ б) } V = \iiint_V f(x, y, z) dxdydz; \text{ в) } V = \pi \iiint_V dxdydz.$$

15. Визначення маси тіла, якщо одиницею величини $\rho(x, y, z) \in 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$:

$$\text{а) } m = \iiint_V \rho^2(x, y, z) dx dy dz ; \text{ б) } m = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz ; \text{ в) } m = \iiint_V d\rho(x, y, z) .$$

16. Визначення координат центру ваги тіла, якщо одиницею величини $\rho(x, y, z) \in 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$:

$$\begin{aligned} \text{а) } x_c &= \frac{\iiint_V x dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz}, \quad y_c = \frac{\iiint_V y dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz}, \quad z_c = \frac{\iiint_V z dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz}; \quad \text{б) } x_c = \frac{\iiint_V x \rho dx dy dz}{\iiint_V dx dy dz}, \\ y_c &= \frac{\iiint_V y \rho dx dy dz}{\iiint_V dx dy dz}, \quad z_c = \frac{\iiint_V z \rho dx dy dz}{\iiint_V dx dy dz}; \quad \text{в) } x_c = \frac{\iiint_V x \rho dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz}, \quad y_c = \frac{\iiint_V y \rho dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz}, \\ z_c &= \frac{\iiint_V z \rho dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz}. \end{aligned}$$

17. Визначення статичних моментів тіла щодо координатних площин, якщо одиницею величини $\rho_M(x, y, z) \in 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$:

$$\begin{aligned} \text{а) } S_{xy} &= \iiint_V z^2 \rho_M dx dy dz, \quad S_{yz} = \iiint_V x^2 \rho_M dx dy dz, \quad S_{zx} = \iiint_V y^2 \rho_M dx dy dz; \\ \text{б) } S_{xy} &= \iiint_V z \rho_M dx dy dz, \quad S_{yz} = \iiint_V x \rho_M dx dy dz, \quad S_{zx} = \iiint_V y \rho_M dx dy dz; \\ \text{в) } S_{yz} &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho_M dx dy dz, \quad S_{xz} = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho_M dx dy dz, \quad S_{xy} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho_M dx dy dz. \end{aligned}$$

18. Визначення моментів інерції тіла щодо координатних площин, якщо одиницею величини $\rho_M(x, y, z) \in 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$:

$$\begin{aligned} \text{а) } I_{xy} &= \iiint_V z^2 \rho_M dx dy dz, \quad I_{yz} = \iiint_V x^2 \rho_M dx dy dz, \quad I_{zx} = \iiint_V y^2 \rho_M dx dy dz; \\ \text{б) } I_{xy} &= \iiint_V z \rho_M dx dy dz, \quad I_{yz} = \iiint_V x \rho_M dx dy dz, \quad I_{zx} = \iiint_V y \rho_M dx dy dz; \\ \text{в) } I_{yz} &= \iiint_V (y^2 + z^2) \rho_M dx dy dz, \quad I_{xz} = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho_M dx dy dz, \quad I_{xy} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho_M dx dy dz. \end{aligned}$$

9.8. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Обчислити інтеграли.

$$1.1. \int_0^1 dx \int_0^x dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz . \quad 1.2. \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{ax}} y dy \int_{a-x}^{2(a-x)} dz .$$

$$1.3. \iiint_T (x+y+z) dx dy dz , \text{ Де область } T - \text{тетраedr, обмежений площинами}$$

$$x+y+z=a, x=0, y=0, z=0 .$$

$$1.4. \iiint_T (x^2+y^2) dx dy dz , \text{ Де область } T \text{ обмежена поверхнями } z=y^2-x^2, z=0, y=1$$

2. Обчислити інтеграли, перейшовши до циліндричних координат.

$$2.1. \iiint_T y dx dy dz , \text{ Де область } T \text{ обмежена поверхнями } x^2+y^2=a^2, z=0, z=h .$$

$$2.2. \int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} dy \int_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dz . \quad 2.3. \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{\frac{h}{a^2}(x^2+y^2)}^h \sqrt{x^2+y^2} dz .$$

3. Обчислити інтеграли, перейшовши до сферичних координат.

$$3.1. \int_0^{\frac{R}{\sqrt{2}}} dx \int_0^{\sqrt{\frac{R^2}{2}-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dz . \quad 3.2. \int_{-R}^R dx \int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{\sqrt{R^2-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \sqrt{z} dz .$$

$$3.3. \iiint_T (x^2+y^2) dx dy dz , \text{ де } T - \text{область, яка визначається нерівностями}$$

$$z \geq 0, r^2 \leq x^2+y^2+z^2 \leq R^2 .$$

$$3.4. \iiint_T \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2+y^2+(z-2)^2}} , \text{ Де область } T - \text{куля } x^2+y^2+z^2 \leq 1 .$$

4. Обчислити потрійним інтеграцією обсяги тіл, обмежених заданими поверхнями:

$$1) \text{ циліндрами } z=4-y^2 \text{ і } z=y^2+2 \text{ і площинами } x=-1 \text{ і } x=2 ;$$

$$2) \text{ параболоїда } z=x^2+y^2 \text{ і } z=2x^2+2y^2, \text{ циліндром } y=x^2 \text{ і площиною } y=x ;$$

$$3) \text{ сферою } x^2+y^2+z^2=R^2 \text{ і параболоїдом } x^2+y^2=R(R-2z)(z \geq 0) .$$

9.9. Самостійна робота

1. Обчислити інтеграли.

$$1.1. \int_0^3 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{\sqrt{xy}} z dz .$$

1.2. $\iiint_T xyz dx dy dz$, Де область T обмежена поверхнями $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$,

$z = 0$.

2. Обчислити інтеграли, перейшовши до циліндричних координат.

2.1. $\iiint_T z dx dy dz$, Де область T обмежена поверхнями $x^2 + y^2 = z^2$, $z = a$.

$$2.2. \int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} dy \int_y^{\sqrt{a^2 - y^2}} dx \int_0^{\frac{x^2 - y^2}{a}} \sqrt{x^2 + y^2} dz. \quad 2.3. \int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_{\frac{x^2+y^2}{2}}^2 (x^2 + y^2) dz.$$

3. Обчислити інтеграли, перейшовши до сферичних координат.

$$3.1. \int_0^a dx \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} dy \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} z dz. \quad 3.2. \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz.$$

3.3. $\iiint_T xyz^2 dx dy dz$, Де область T обмежена частиною сфери $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ і координатними площинами ($x > 0, y > 0, z > 0$).

4. Обчислити потрібним інтеграцією обсяги тіл, обмежених заданими поверхнями:

1) циліндрами $z = \ln(x+2)$ і $z = \ln(6-x)$ і площинами $x = 0$, $x + y = 2$ і $x - y = 2$;

2) параболоїда $z = x^2 + y^2$ і $z = x^2 + 2y^2$ і площинами $y = x$, $y = 2x$ і $x = 1$;

3) параболоїдом $z = x^2 + y^2$ і поверхнею $z^2 = xy$.

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

Сусідський дитина розлив фарби на зошит, реанімувати не вдалося.

Що кажуть про математику

«Математика є тим, що дає точним наукам відому міру впевненості» А. Ейнштейн.

Криволінійний інтеграл 1-го роду. Основні визначення. Основні властивості криволінійного інтеграла 1-го роду. Обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду. Диференціал дуги. Приклади обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду. Геометричний сенс криволінійного інтеграла 1-го роду. Криволінійні інтеграли 2-го роду. Криволінійний інтеграл 2-го роду. Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду. Орієнтація площині. Приклади обчислення криволінійних інтегралів 2-го роду. Умови незалежності криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування. Знаходження функції по її повного диференціалу

10. КРИВОЛІНІЙНИЙ ІНТЕГРАЛ 1-ГО РОДУ

10.1. Основні визначення

Криволінійний інтеграл 1-го роду - це узагальнене поняття певного інтеграла в разі, коли областю інтегрування є відрізок деякої кривої.

Нехай задана деяка крива AB в двовірному просторі. На кривій задаймо функцію $f(x, y)$. розіб'ємо точками M_i криву на відрізки. Складемо інтегральну суму $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$, де Δl_i - довжина дуги $\cup M_i M_{i+1}$; (ξ_i, η_i) - координата точки цієї дуги (рис. 10.1).

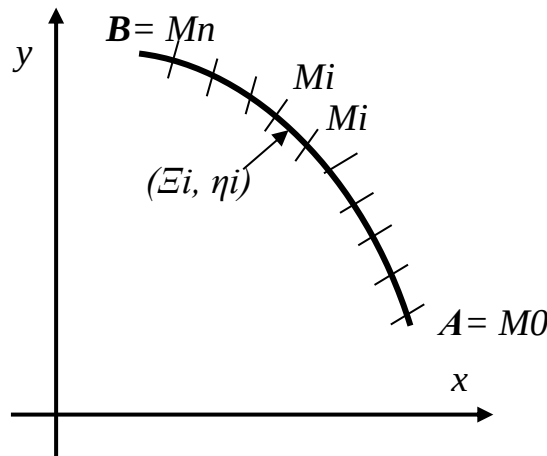


Рисунок 10.1

Def. Якщо інтегральна сума при $\max \Delta l_i \rightarrow 0$ має кінцевий межа I , Який не залежить від способу розподілу кривої AB і вибору точок $M_i(\xi_i, \eta_i)$, То ця межа називається криволінійним інтегралом 1-го роду від функції $f(x, y)$, Узятим уздовж кривої AB , і позначається як інтеграл по AB :

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta l_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i.$$

зауваження:

1) в наведеному визначенні напрямок кривої не грає ролі;

2) аналогічно можна розглядати визначення кривої в просторі R^3 .

Умова існування криволінійного інтеграла 1-го роду: функція $f(x,y)$, Безперервна в кожній точці і гладка, має похідну в кожній точці.

10.2. Основні властивості криволінійного інтеграла 1-го роду

1. Не залежить від напрямку інтегрування:

$$\int_{AB} f(x,y)dl = \int_{BA} f(x,y)dl.$$

2. Лінійність:

$$\int_L (c_1 f_1(x,y) + c_2 f_2(x,y))dl = c_1 \int_L f_1(x,y)dl + c_2 \int_L f_2(x,y)dl.$$

3. Адитивність:

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{L_1} f(x,y)dl + \int_{L_2} f(x,y)dl, \text{ де } L = L_1 \cup L_2.$$

4. Якщо для будь-якої точки кривої L виконується умова $f_1(x,y) \leq f_2(x,y)$,

то

$$\int_L f_1(x,y)dl \leq \int_L f_2(x,y)dl.$$

5. Існує така точка $C(x_c, y_c)$, що

$$\int_L f(x,y)dl = f(x_c, y_c)L.$$

10.3. Обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду

Обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду зводиться до обчислення певних інтегралів. Для цього необхідно згадати, як записується диференціал дуги (див. Геометричне додток певного інтеграла для обчислення довжини дуги).

10.3.1. диференціал дуги

Диференціал дуги кривої можна записати так:

а) для функції, заданої в явному вигляді ($y = f(x)$),

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx;$$

б) для функції, заданої параметрично $(x = \psi(t), y = \varphi(t))$,

$$dl = \sqrt{\dot{\psi}^2(t) + \dot{\varphi}^2(t)} dt,$$

якщо параметричну функцію записати як $x = x(t)$, $y = y(t)$, то

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)} dt;$$

в) для функції, заданої в полярній системі координат ($\rho = \rho(\varphi)$),

$$dl = \sqrt{\rho^2(t) + \dot{\rho}^2(t)} d\varphi.$$

10.3.2. Приклади обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду

Приведення криволінійних інтегралів 1-го роду до певних інтегралів виконується через задану функцію кривої L .

крива L задана в явному вигляді $y = f(x)$ на інтервалі $[a, b]$. тоді

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx.$$

ПРИКЛАД 1. обчислити $I = \int_L y dl$, де $L: y^2 = 2px; 0 \leq x \leq x_0$ при $p = 1,5$, $x_0 = 4,5$ (Рис. 10.2).

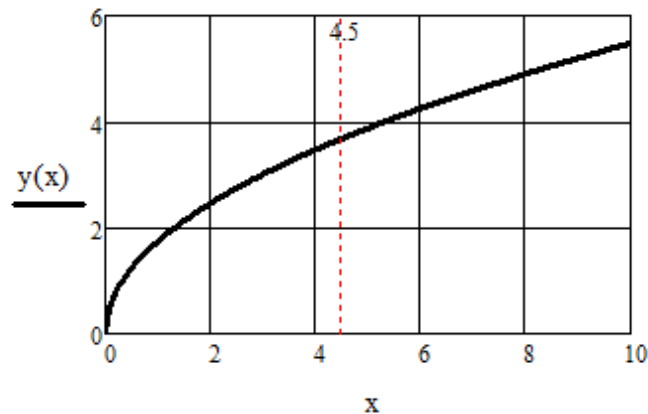


Рисунок 10.2

Рішення

$$y^2 = 2px, \quad 2yy' = 2p, \quad y' = \frac{p}{y}, \quad (y')^2 = \frac{p^2}{y^2} = \frac{p}{2x}, \quad dl = \sqrt{1 + (y')^2} dx,$$

$$dl = \sqrt{1 + \frac{p}{2x}} dx, \quad dl = \sqrt{\frac{2x + p}{2x}} dx;$$

$$I = \int_L y dl = \int_0^{x_0} \sqrt{2px} \sqrt{\frac{2x + p}{2x}} dx = \sqrt{p} \int_0^{x_0} \sqrt{2x + p} dx = \sqrt{p} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} (2x + p)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{x_0} =$$

$$= \sqrt{p} \cdot \frac{1}{3} \left((2x_0 + p)^{\frac{3}{2}} - (0 + p)^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{\sqrt{p}}{3} \left((2x_0 + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} \right).$$

Відповідь. $I = \frac{\sqrt{p}}{3} \left((2x_0 + p)^{\frac{3}{2}} - p^{\frac{3}{2}} \right).$

крива L задана параметрично $(x = \psi(t), y = \varphi(t))$ на інтервалі $[t_1, t_2]$. тоді

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(\psi(t), \varphi(t)) \sqrt{\dot{\psi}^2(t) + \dot{\varphi}^2(t)} dt.$$

Зауваження. Криволінійний інтеграл 1-го роду в просторі R^3 можна уявити через параметрично задану криву $(x = x(t), y = y(t), z = z(t))$ на інтервалі $[t_1, t_2]$.

тоді $dl = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt$, І інтеграл матиме вигляд

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)} dt.$$

ПРИКЛАД 2. підрахуємо $I = \int_L (x + y) dl$, де L - лінія перетину сфери

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ і площини $y = x$ в 1-м Октант (рис. 10.3).

Рішення

Вибираємо в якості параметра x .

тоді $y = x$ і $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{R^2 - 2x^2}$.

Знаходимо похідні цих змінних:

$$\dot{x} = 1, \dot{y} = 1, \dot{z} = \frac{1}{2\sqrt{R^2 - 2x^2}} (-4x) = -\frac{2x}{\sqrt{R^2 - 2x^2}}.$$

отже,

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} dx = \sqrt{1 + 1 + \left(-\frac{2x}{\sqrt{R^2 - 2x^2}} \right)^2} dx,$$

$$dl = \sqrt{2 + \frac{4x^2}{R^2 - 2x^2}} dx = \sqrt{\frac{2R^2 - 4x^2 + 4x^2}{R^2 - 2x^2}} dx = \sqrt{\frac{2R^2}{R^2 - 2x^2}} dx,$$

де x змінюється від 0 до $\frac{R\sqrt{2}}{2}$.

Інтеграл набуває вигляду

$$\begin{aligned}
 I &= \int_L (x + y) dl = \int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} (x + x) \sqrt{\frac{2R^2}{R^2 - 2x^2}} dx = \\
 &= R\sqrt{2} \int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} \frac{2x}{\sqrt{R^2 - 2x^2}} dx = -\frac{R\sqrt{2}}{2} \int_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} \frac{d(R^2 - 2x^2)}{\sqrt{R^2 - 2x^2}} = -\frac{R\sqrt{2}}{2} 2\sqrt{R^2 - 2x^2} \Big|_0^{\frac{R\sqrt{2}}{2}} = \\
 &= -R\sqrt{2} \left(\sqrt{R^2 - 2\left(\frac{R\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \sqrt{R^2 - 0} \right) = -R\sqrt{2}(0 - R) = R^2\sqrt{2}.
 \end{aligned}$$

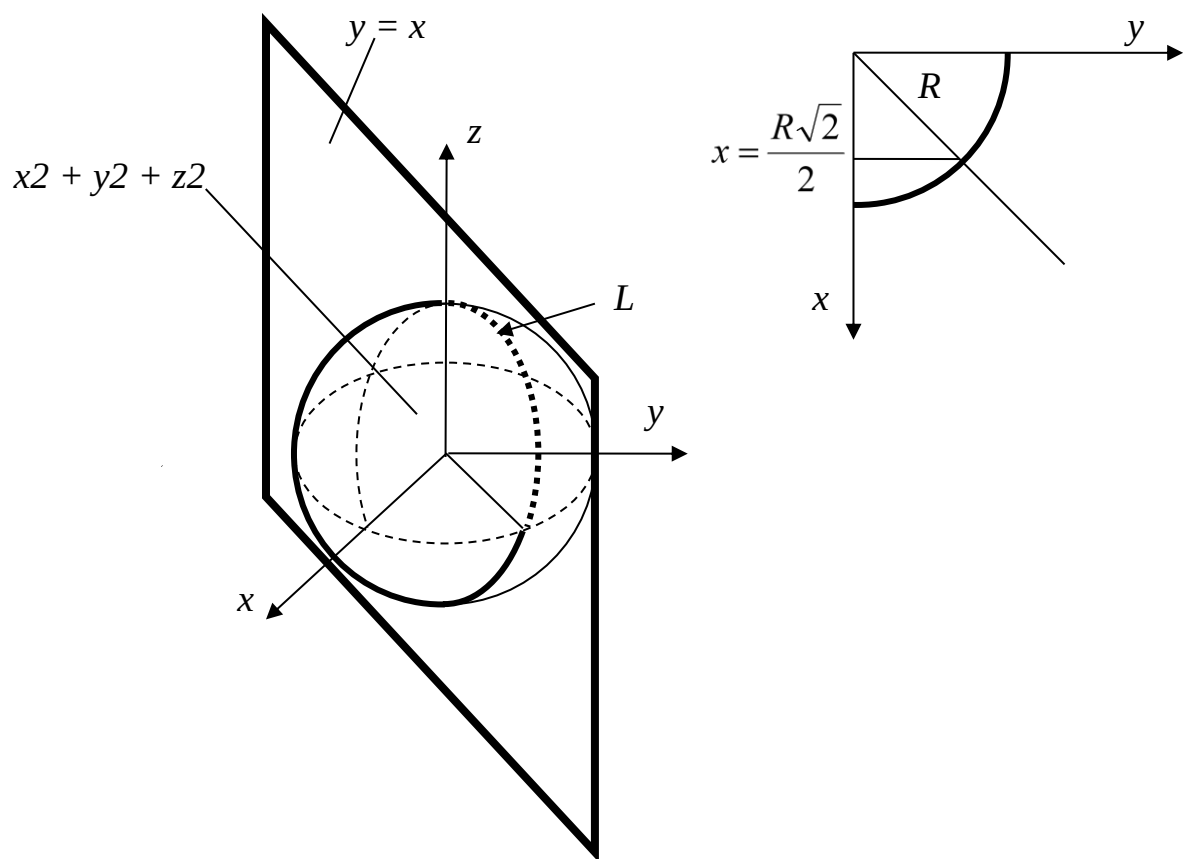


Рисунок 10.3

10.4. Геометричний сенс криволінійного інтеграла 1-го роду

Криволінійний інтеграл 1-го роду $\int_{AB} f(x,y)dl$ чисельна дорівнює площі циліндричної поверхні, складеної з перпендикулярів до площини xOy вздовж кривої AB (Змінної утворює $z = f(x,y)$) (Рис. 10.4).

Окремі випадки:

1. AB - відрізок $[a, b]$ осі Ox . тоді $dl = dx$, і отримуємо звичайний певний інтеграл $\int_a^b y(x)dx$.

2. AB - відрізок $[c, d]$ осі Oy . тоді $dl = dy$, і отримуємо звичайний певний інтеграл $\int_c^d x(y)dy$.

3. Якщо $f(x,y) = 1$, То криволінійний інтеграл отримуємо як довжину дуги.

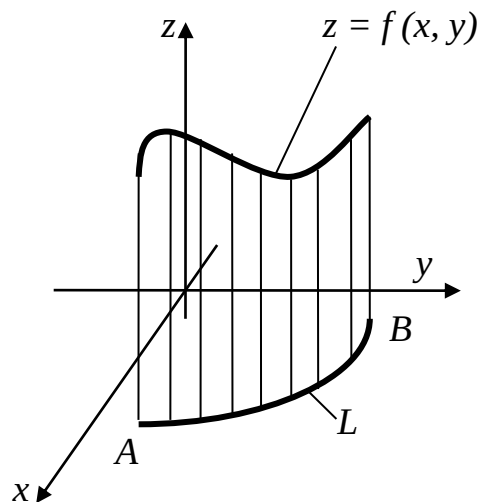


Рисунок 10.4

10.5. Криволінійні інтеграли 2-го роду

Криволінійні інтеграли 2-го роду не належать до інтегралам в міру.

Нехай на площині xOy задана деяка несамопересічна гладка крива $L = AB$. Нехай на цій кривій визначено дві функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$, Кожна з яких є безперервною уздовж цієї кривої. Розглянемо два випадки.

1-й випадок. Розіб'ємо криву на відрізки і складемо суму (рис. 10.5):

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i.$$

Def. Якщо при прагненні до нуля $\max \Delta x_i$ межа інтегральної суми

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

існує і не залежить від способу розбиття і вибору точок на відрізках кривої, то він називається криволінійним інтегралом 2-го роду функції $P(x, y)$ по координаті x , Узятим уздовж кривої AB :

$$\int_{AB} P(x, y) dx .$$

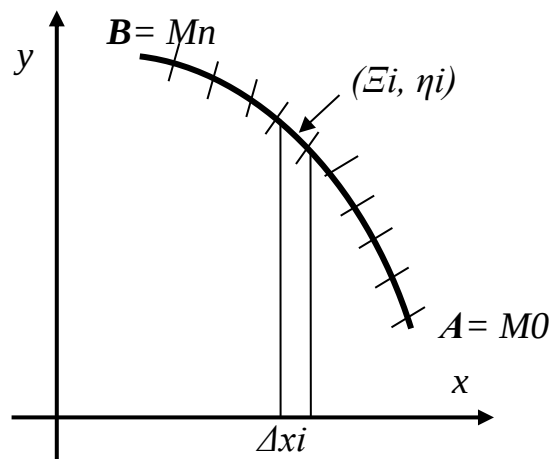


Рисунок 10.5

2-й випадок. Аналогічно визначаємо (рис. 10.6) криволінійний інтеграл 2-го роду функції $Q(x, y)$ по координаті y , Взятий вздовж кривої AB :

$$\int_{AB} Q(x, y) dy .$$

Def. Нехай задані крива AB і дві функції уздовж цієї кривої $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ і існують інтеграли $\int_{AB} P(x, y) dx$ і $\int_{AB} Q(x, y) dy$, Тоді загальним криволінійним інтегралом 2-го роду буде інтеграл виду

$$\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy ,$$

який позначаємо як

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy ,$$

т. е. за визначенням

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy .$$

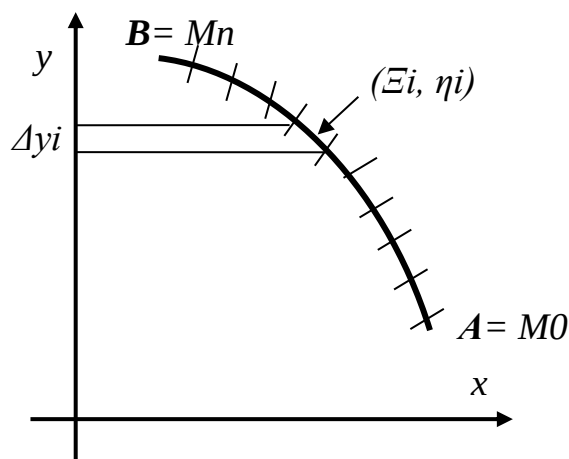


Рисунок 10.6

зауваження:

1. Умова існування загального криволінійного інтеграла 2-го роду: крива L - гладка, а функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ - безперервні.
2. При зміні напрямку інтегрування знак інтеграла змінюється на протилежний:

$$\int_{AB} = - \int_{BA}.$$

3. За аналогією для простору R^3 можна записати

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

10.6. Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду

1. Якщо $AB \parallel Ox$ ($A(x_A, y_c)$, $B(x_B, y_c)$, $y_c = const$), то

$$\int_{AB} Q(x, y)dy = 0$$

і загальний криволінійний інтеграл 2-го роду має вигляд

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y_c)dx = \int_{x_A}^{x_B} P(x, y_c)dx.$$

2. Якщо $AB \parallel Oy$ ($A(x_c, y_A)$, $B(x_c, y_B)$, $x_c = const$), то

$$\int_{AB} P(x, y)dx = 0$$

і загальний криволінійний інтеграл 2-го роду має вигляд

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{AB} Q(x_c, y)dy = \int_{y_A}^{y_B} Q(x_c, y)dy.$$

3. Якщо крива AB задана явною функцією $y = y(x)$ при $x_1 \leq x \leq x_2$, то

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= \int_{x_1}^{x_2} P(x, y(x))dx + Q(x, y(x))y'(x)dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx. \end{aligned}$$

4. Якщо крива AB задана параметричною функцією $y = y(t)$, $x = x(t)$ при $t_1 \leq t \leq t_2$, то

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy &= \int_{t_1}^{t_2} P(x(t), y(t))\dot{x}(t)dt + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t))dt. \end{aligned}$$

10.7. орієнтація площині

якщо крива AB являє собою замкнуту криву, то інтеграл 2-го роду має вигляд

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oint_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy.$$

Інтеграл по замкнутому контуру позначається як $\oint$. За позитивний напрямок прийнятий обхід проти годинникової стрілки (рис. 10.7).

10.8. Приклади обчислення криволінійних інтегралів 2-го роду

ПРИКЛАД 1. обчислити $I = \int_L 2xydx + x^2dy$: 1) L - пряма $y = x$ на інтервалі

$0 \leq x \leq 1$; 2) L - лінія $y = x^2$ на інтервалі $0 \leq x \leq 1$.

Рішення

1. Нехай $x = t$. тоді $y = t$ ($0 \leq t \leq 1$). В цьому випадку можна записати

$$I = \int_L 2xydx + x^2dy = \int_0^1 2ttdt + t^2dt = \int_0^1 3t^2dt = 3 \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = 1.$$

2. Нехай $x = t$. тоді $y = t^2$ ($0 \leq t \leq 1$). В цьому випадку можна записати

$dx = dt$ і $dy = 2tdt$, І інтеграл приймає вид

$$I = \int_L 2xydx + x^2 dy = \int_0^1 2t^2 dt + t^2 2tdt = \int_0^1 4t^3 dt = 4 \frac{t^4}{4} \Big|_0^1 = 1.$$

ПРИКЛАД 2. обчислити $I = \int_L xydx + (y - x)dy$: 1) L - лінія $y = \sqrt{x}$ на інтервалі

$0 \leq x \leq 1$; 2) L - пряма $y = x$ на інтервалі $0 \leq x \leq 1$.

Рішення

1. Нехай $x = t^2$. тоді $y = t$ ($0 \leq t \leq 1$). В цьому випадку можна записати $dx = 2tdt$ і $dy = dt$, І інтеграл приймає вид

$$I = \int_L xydx + (y - x)dy = \int_0^1 t^2 t 2tdt + (t - t^2)dt = \int_0^1 (2t^4 + t - t^2)dt =$$

$$= \left(2 \frac{t^5}{5} + \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{2}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{12 + 15 - 10}{30} = \frac{17}{30}.$$

2. Нехай $x = t$. тоді $y = t$ ($0 \leq t \leq 1$). В цьому випадку можна записати

$$I = \int_L xydx + (y - x)dy = \int_0^1 ttdt + (t - t)dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{t^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Зауваження. У першому завданні інтеграл не залежить від шляху інтегрування, в другому - залежить.

10.9. Умови незалежності криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування

Інтеграл 2-го роду в загальному випадку, як правило, залежить як від вибору початкової і кінцевої точок кривої, так і від виду самої кривої.

Th. Для того щоб криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

не залежав від шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб підінтегральний вираз було диференціалом деякої функції двох змінних.

◀ *Необхідність* (Якщо інтеграл не залежить від шляху інтегрування, то підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції).

нехай інтеграл $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ не залежить від шляху інтегрування.

Тоді інтеграл визначається завданням початкової $A(x_0, y_0)$ і кінцевої $B(x_1, y_1)$ точок. В цьому випадку можна ввести позначення такого інтеграла у вигляді

$$\int_{A(x_0, y_0)}^{B(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy .$$

якщо точку $A(x_0, y_0)$ зафіксувати, а точку $B(x_1, y_1)$ замінити довільною точкою $M(x, y)$, То заданий інтеграл буде являти собою деяку функцію двох змінних:

$$F(x, y) = \int_{A(x_0, y_0)}^{M(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy ,$$

$$\text{або } F(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy .$$

Визначимо приватні похідні функції $F(x, y)$.

Взявши довільну точку $B(x_1, y_1)$ і задавши приріст функції $F(x, y)$ вздовж осі Ox так, що перейдемо в точку $C(x_1 + \Delta x, y_1)$ і при цьому (рис. 10.7)

$$BC \parallel Ox ,$$

отримаємо значення функції

$$F(x_1 + \Delta x, y_1) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy .$$

приріст функції $\Delta F(x)$ в цьому випадку при змінному x і $y = const$:

$$\Delta F(x) = F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1) =$$

$$= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy =$$

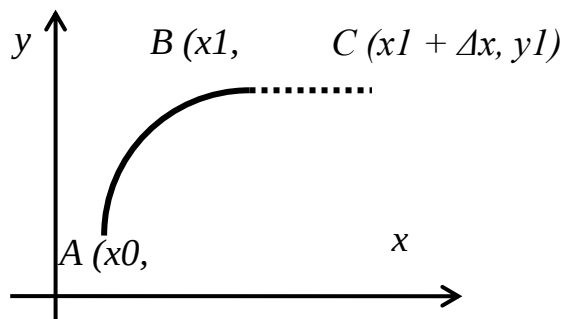


Рисунок 10.7

$$\begin{aligned}
&= \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy + \int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy - \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \\
&= \int_{(x_1, y_1)}^{(x_1 + \Delta x, y_1)} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} P(x, y_1)dx \quad (\text{так як } dy = 0).
\end{aligned}$$

Використовуючи теорему про середнє значення, отримаємо

$$\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} P(x, y_1)dx = P(c, y_1)\Delta x,$$

де $c \in [x_1, x_1 + \Delta x]$.

Тоді приватну похідну $\frac{\partial F}{\partial x}$ для довільного значення y можна записати так:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_1 + \Delta x, y_1) - F(x_1, y_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} P(c, y)\Delta x = P(x, y).$$

отже,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = P(x, y).$$

Аналогічно, вибравши $BC \parallel Oy$, отримаємо $\frac{\partial F}{\partial y} = Q(x, y)$.

Тоді запис виду $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ може бути представлена як

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}dy,$$

т. е. диференціалом функції $F(x, y)$:

$$dF = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

достатність (Якщо підінтегральний вираз є повним диференціалом деякої функції, то інтеграл не залежить від шляху інтегрування).

нехай $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ - диференціал деякої функції:

$$dF = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}dx + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y}dy = P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

нехай крива AB задана параметрично $x = x(t), y = y(t)$ на інтервалі $[t_0, t_1]$, Т. Е. $A(x_0, y_0) = A(x(t_0), y(t_0))$ і $B(x(t_1), y(t_1))$, тоді

$$\begin{aligned}
\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_{AB} dF(x, y) = \int_{t_0}^{t_1} dF(x(t), y(t)) = \\
&= F(x(t_1), y(t_1)) - F(x(t_0), y(t_0)) = F(x_1, y_1) - F(x_0, y_0) = F(B) - F(A).
\end{aligned}$$

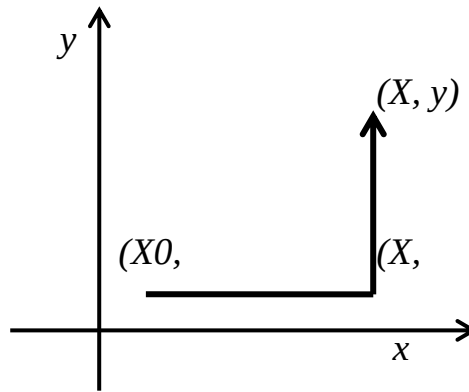


Рисунок 10.8

Таким чином, інтеграл не залежить від шляху інтегрування, а залежить тільки від точок A і B . ►

Слідство. Так як підінтегральна функція є повним диференціалом деякої функції $F(x, y)$, То для цієї функції повинні існувати змішані похідні $\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$, А отже, має виконуватися умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Дійсно, так як $P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$, а $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial F}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)$, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Висновок. Для того щоб криволінійний інтеграл не залежав від шляху інтегрування $\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, Необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

10.10. Знаходження функції по її повного диференціалу

1-й варіант. нехай вираз $P(x, y)dx + Q(x, y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $z(x, y)$, Т. Е. $dz = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$, де $\frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y)$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y)$.

Відповідно до наведеного вище твердженням, якщо підінтегральний вираз є повним диференціалом функції $z(x, y)$, То рішення криволінійного інтеграла 2-го роду не залежить від шляху інтегрування. Виберемо в якості шляху інтегрування ламану криву, де рух від точки (x_0, y_0) до довільної точки (x, y) виконується в два етапи: рух паралельно осі Ox , коли $y_0 = \text{const}$, Від точки (x_0, y_0) до точки (x, y_0) ; рух паралельно осі Oy , коли $x = \text{const}$, Від точки (x, y_0) до точки (x, y) (Рис. 10.8).

У цьому випадку інтеграл матиме вигляд

$$z(x,y) = \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy =$$

$$= \int_{(x_0,y_0)}^{(x,y_0)} P(x,y_0)dx + Q(x,y_0) \cdot 0 + \int_{(x,y_0)}^{(x,y)} P(x,y) \cdot 0 + Q(x,y)dy = \int_{x_0}^x P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x,y)dy.$$

Відновлену функцію напишемо у вигляді

$$z(x,y) = \int_{x_0}^x P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x,y)dy + C.$$

2-й варіант. якщо вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом деякої функції $z(x,y)$, то $\frac{\partial z}{\partial x} = P(x,y)$ і $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x,y)$.

Розглянемо $\frac{\partial z}{\partial x} = P(x,y)$.

нехай $y = \text{const}$. Тоді має місце вираз $dz = P(x,y)dx$, проінтегрував який, отримаємо

$$z = \int P(x,y)dx + C(y).$$

але $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x,y)$ при $x = \text{const}$. отже,

$$\frac{d\left(\int P(x,y)dx + C(y)\right)}{dy} = Q(x,y), \quad d\left(\int P(x,y)dx + C(y)\right) = Q(x,y)dy,$$

$$P(x,y) + \frac{dC(y)}{dy} = \int Q(x,y)dy, \quad \frac{dC(y)}{dy} = \int Q(x,y)dy - P(x,y),$$

$$C(y) = \int \left(\int Q(x,y)dy - P(x,y)\right)dy + \bar{C}.$$

Таким чином, відновлена функція набуває вигляду

$$z = \int P(x,y)dx + C(y) = \int P(x,y)dx + \int \left(\int Q(x,y)dy - P(x,y)\right)dy + \bar{C}.$$

ПРИКЛАД. Перевірити, чи є вираз $(3x^2y^2 + 1)dx + (2x^3y - 3y^2)dy$ повним диференціалом деякої функції $z(x,y)$ і, якщо є, то знайти $z(x,y)$.

Рішення

для $P(x,y) = 3x^2y^2 + 1$ і $Q(x,y) = 2x^3y - 3y^2$ визначаємо приватні похідні:

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = 6x^2y; \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 6x^2y.$$

Приватні похідні рівні, отже, вираз є повним диференціалом деякої функції. Відновлюємо функцію по її диференціалу.

1-й спосіб. для відшукування $z = z(x, y)$ розглянемо криволінійний інтеграл 2-го роду. В якості початкової точки інтегрування виберемо точку $A(0, 0)$, А в якості кінцевої - довільну точку $B(x, y)$. Лінію між цими точками представимо ламаною, що складається з двох ділянок: від точки $A(0,0)$ до точки $C(x,0)$; від точки $C(x,0)$ до точки $B(x, y)$.

знаходимо функцію $z(x, y)$:

$$\begin{aligned} z(x, y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} (3x^2 y^2 + 1) dx + (2x^3 y - 3y^2) dy = \\ &= \int_{(0,0)}^{(x,0)} (3x^2 \cdot 0 + 1) dx + 0 + \int_{(x,0)}^{(x,y)} 0 + (2x^3 y - 3y^2) dy = \int_0^x dx + \int_0^y (2x^3 y - 3y^2) dy \Big|_{x=const} = \\ &= x \Big|_0^x + \left(x^3 y^2 - y^3 \right) \Big|_0^y = x + x^3 y^2 - y^3; \\ z(x, y) &= x + x^3 y^2 - y^3 + C. \end{aligned}$$

2-й спосіб. знаходимо

$$P(x, y) = 3x^2 y^2 + 1, \quad \frac{\partial z}{\partial x} = P(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + 1.$$

нехай $y = const$. тоді $\frac{dz}{dx} = 3x^2 y^2 + 1, \quad dz = (3x^2 y^2 + 1) dx$.

Інтегруємо по змінній x при $y = const$:

$$z(x, y) = \int (3x^2 y^2 + 1) dx \Big|_{y=const} = x^3 y^2 + x + C(y).$$

Тут використовується константа $C(y)$, Яка залежить від y .

Так як $\frac{\partial z}{\partial y} = Q(x, y)$, То при $x = const$ маємо

$$\frac{d}{dy} (x^3 y^2 + x + C(y)) = 2x^3 y - 3y^2, \quad 2x^3 y + \frac{d}{dy} C(y) = 2x^3 y - 3y^2.$$

отже, $\frac{d}{dy} C(y) = -3y^2, \quad C(y) = -\int 3y^2 dy = -y^3 + \bar{C}$.

Таким чином, $z(x, y) = x^3 y^2 + x + C(y), \quad z(x, y) = x^3 y^2 + x - y^3 + \bar{C}$.

10.11. Висновки

Криволінійний інтеграл 1-го роду - це узагальнене поняття певного інтеграла в разі, коли областю інтегрування є відрізок деякої кривої.

Нехай задана деяка крива AB в двомірному просторі. На кривій задамо функцію $f(x, y)$. розіб'ємо точками M_i криву на відрізки. Складемо інтегральну суму $\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$, де Δl_i - довжина дуги $\cup M_i M_{i+1}$; (ξ_i, η_i) - координата точки цієї дуги.

Def. Якщо інтегральна сума при $\max \Delta l_i \rightarrow 0$ має кінцевий межа I , Який не залежить від способу розподілу кривої AB і вибору точок $M_i(\xi_i, \eta_i)$, То ця межа називається криволінійним інтегралом 1-го роду від функції $f(x, y)$, Узятим уздовж кривої AB , I позначається як інтеграл по AB :

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta l_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i.$$

Аналогічно можна розглядати визначення кривої в просторі R^3 .

Умова існування криволінійного інтеграла 1-го роду: функція $f(x, y)$, Безперервна в кожній точці і гладка, повинна мати похідну в кожній точці.

Основні властивості криволінійного інтеграла 1-го роду:

1. Не залежить від напрямку інтегрування:

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{BA} f(x, y) dl.$$

2. Лінійність:

$$\int_L (c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y)) dl = c_1 \int_L f_1(x, y) dl + c_2 \int_L f_2(x, y) dl.$$

3. Адитивність:

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{L_1} f(x, y) dl + \int_{L_2} f(x, y) dl, \text{ де } L = L_1 \cup L_2.$$

4. Якщо для будь-якої точки кривої L виконується умова $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то

$$\int_L f_1(x, y) dl \leq \int_L f_2(x, y) dl.$$

5. Існує така точка $C(x_c, y_c)$, що

$$\int_L f(x, y) dl = f(x_c, y_c) L.$$

Обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду зводиться до обчислення певних інтегралів. Для цього використовують запис диференціала дуги заданої кривої.

Диференціал дуги кривої можна записати у вигляді:

1. Крива L задана в явному вигляді ($y = f(x)$) на інтервалі $[a, b]$. тоді

$$dl = \sqrt{1 + y'^2} dx;$$

$$\int_L f(x,y)dl = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}dx.$$

2. Крива L задана параметрично $(x = x(t), y = y(t))$ на інтервалі $[t_1, t_2]$.
тоді

$$dl = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt;$$

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}dt.$$

3. Крива L задана в полярній системі координат $(\rho = \rho(\varphi))$ на інтервалі $[\varphi_1, \varphi_2]$. тоді

$$dl = \sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)}d\varphi;$$

$$\int_L f(x,y)dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(\rho \cos(\varphi), \rho \sin(\varphi))\sqrt{\rho^2(\varphi) + \dot{\rho}^2(\varphi)}d\varphi.$$

Зауваження. Криволінійний інтеграл 1-го роду в просторі R^3 можна уявити через параметрично задану криву $(x = x(t), y = y(t), z = z(t))$ на інтервалі $[t_1, t_2]$.

тоді $dl = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}dt$, І інтеграл матиме вигляд

$$\int_L f(x,y,z)dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}dt.$$

Геометричний сенс криволінійного інтеграла 1-го роду полягає в тому, що він чисельно дорівнює площі циліндричної поверхні, складеної з перпендикулярів до площини xOy вздовж кривої AB (Змінної утворює $z = f(x,y)$).

Окремі випадки:

1. AB - відрізок $[a, b]$ осі Ox . тоді $dl = dx$, І отримуємо звичайний певний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$.

2. AB - відрізок $[a, b]$ осі Oy . тоді $dl = dy$, І отримуємо звичайний певний інтеграл $\int_a^b f(y)dy$.

3. Якщо $f(x,y) = 1$, То криволінійний інтеграл отримуємо як довжину дуги.

Криволінійні інтеграли 2-го роду не належать до інтегралів в міру.

Нехай на площині xOy задана деяка несамопересічна гладка крива $L = AB$.
Нехай на цій кривій визначено дві функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$, Кожна з яких є безперервною уздовж цієї кривої.

Можливі два випадки.

1-й випадок. Розіб'ємо криву на відрізки і складемо суму виду

$$\sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i.$$

Def. Якщо при прагненні до нуля $\max \Delta x_i$ межа інтегральної суми

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \max \Delta x_i \rightarrow 0}} \sum_{i=0}^{n-1} P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$$

існує і не залежить від способу розбиття і вибору точок на відрізках кривої, то він називається криволінійним інтегралом 2-го роду функції $P(x, y)$ по координаті x , Узятим уздовж кривої AB :

$$\int_{AB} P(x, y) dx.$$

2-й випадок. Аналогічно визначаємо вигнутий інтеграл 2-го роду функції $Q(x, y)$ по координаті y , Взятий вздовж кривої AB :

$$\int_{AB} Q(x, y) dy.$$

Def. Нехай задані крива AB і дві функції вздовж кривої $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ і існують інтеграли $\int_{AB} P(x, y) dx$ і $\int_{AB} Q(x, y) dy$, Тоді загальним криволінійним інтегралом 2-го роду буде інтеграл виду

$$\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy,$$

який позначаємо як

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

т. е. за визначенням

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy.$$

зауваження:

1. Умова існування загального криволінійного інтеграла 2-го роду: крива L - гладка, а функції $P(x, y)$ і $Q(x, y)$ - безперервні.

2. При зміні напрямку інтегрування знак інтеграла змінюється на протилежний:

$$\int_{AB} = - \int_{BA}.$$

3. За аналогією для простору R^3 можна записати

$$\int_{AB} P(x, y, z)dx + Q(x, y, z)dy + R(x, y, z)dz.$$

Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду:

1. Якщо $AB \parallel Ox$ ($A(x_A, y_c)$, $B(x_B, y_c)$, $y_c = \text{const}$), то

$$\int_{AB} Q(x, y)dy = 0$$

і загальний криволінійний інтеграл 2-го роду має вигляд

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} P(x, y_c)dx = \int_{x_A}^{x_B} P(x, y_c)dx.$$

2. Якщо $AB \parallel Oy$ ($A(x_c, y_A)$, $B(x_c, y_B)$, $x_c = \text{const}$), то

$$\int_{AB} P(x, y)dx = 0$$

і загальний криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \int_{AB} Q(x_c, y)dy = \int_{y_A}^{y_B} Q(x_c, y)dy.$$

3. Якщо крива AB задана явною функцією $y = y(x)$ при $x_1 \leq x \leq x_2$, то

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_{x_1}^{x_2} P(x, y(x))dx + Q(x, y(x))y'(x)dx = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} (P(x, y(x)) + Q(x, y(x))y'(x))dx. \end{aligned}$$

4. Якщо крива AB задана параметричною функцією $y = y(t)$, $x = x(t)$

при $t_1 \leq t \leq t_2$, то

$$\begin{aligned} \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy &= \int_{t_1}^{t_2} P(x(t), y(t))\dot{x}(t)dt + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t)dt = \\ &= \int_{t_1}^{t_2} (P(x(t), y(t))\dot{x}(t) + Q(x(t), y(t))\dot{y}(t))dt. \end{aligned}$$

якщо крива AB являє собою замкнуту криву, то інтеграл 2-го роду має вигляд

$$\int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy = \oint_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy.$$

За позитивний напрямок прийнятий обхід проти годинникової стрілки.

Th. Для того щоб криволінійний інтеграл 2-го роду

$$\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

не залежав від шляху інтегрування, необхідно і достатньо, щоб підінтегральний вираз було диференціалом деякої функції двох змінних.

Слідство. Для того щоб криволінійний інтеграл не залежав від шляху інтегрування $\int_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, необхідно і достатньо, щоб виконувалася умова

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Знаходження функції по її повного диференціалу:

1-й варіант. Виберемо в якості шляху інтегрування ламану криву, де рух від точки (x_0, y_0) до довільної точки (x, y) виконується в два етапи: рух паралельно осі Ox , коли $y_0 = \text{const}$, Від точки (x_0, y_0) до точки (x, y_0) ; рух паралельно осі Oy , коли $x = \text{const}$, Від точки (x, y_0) до точки (x, y) .

В цьому випадку відновлена функція має вигляд

$$z(x,y) = \int_{x_0}^x P(x,y_0)dx + \int_{y_0}^y Q(x,y)dy + C.$$

2-й варіант. визначаємо

$$z = \int P(x,y)dx + C(y).$$

Потім з виразу $d\left(\int P(x,y)dx + C(y)\right) = Q(x,y)dy$ знаходимо

$$C(y) = \int \left(\int Q(x,y)dy - P(x,y) \right) dx + \bar{C}.$$

Відновлена функція має вигляд

$$z = \int P(x,y)dx + C(y) = \int P(x,y)dx + \int \left(\int Q(x,y)dy - P(x,y) \right) dx + \bar{C}.$$

Перерва

- Льоша, друг, допоможи мені вирішити задачу.
- А ти вже думав над нею?
- Думав.
- Ну, і що придумав?
- Що краще запитати у знаючу людину.

10.12. Питання для перевірки знань

1. Позначення криволінійного інтеграла 1-го роду:

$$\text{а) } \int_a^b f(x)dx ; \text{б) } \int_L f(x,y)dl ; \text{в) } \int_a^\infty f(x)dx .$$

2. Криволінійний інтеграл 1-го роду - це узагальнене поняття певного інтеграла, коли областю інтегрування є:

- а) відрізок деякої кривої; б) безліч точок деякої площини;
в) безліч точок деякого об'єму.

3. Визначення криволінійного інтеграла:

а) межа інтегральної суми виду $\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$ за умови, що $n \rightarrow \infty$ і $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, Якщо він існує і не залежить від способу розбиття кривої і вибору точок на ній; б) кінцевий межа відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що діаметр розбиття прагне до нуля і ця межа не залежить від способу розбиття області та вибору точок в отриманих областях; в) межа інтегральної суми виду $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$ за умови, що $n \rightarrow \infty$ і $\max \Delta l_i \rightarrow 0$, Якщо він існує і не залежить від способу розбиття області інтегрування і вибору точок на ділянках розбивки.

4. Значення криволінійного інтеграла 1-го роду:

- а) не залежить від напрямку кривої; б) залежить від напрямку кривої;
в) за певних умов залежить від напрямку кривої.

5. Геометричний сенс інтеграла $\int_L f(x, y)dl$:

- а) довжина лінії L ; б) площа циліндричної поверхні з котра утворює $f(x, y)$ вздовж кривої L ; в) обсяг циліндричного тіла з основою $f(x, y)$ і висотою L .

6. Криволінійний інтеграл 1-го роду, якщо шлях паралельний осі ox , являє собою:

$$\text{а) } \int_L f(x, y)dl ; \text{б) } \int_{Ox} P(x, y)dx ; \text{в) } \int_a^b f(x)dx .$$

7. Криволінійний інтеграл 1-го роду, якщо шлях паралельний осі Oy , являє собою:

$$\text{а) } \int_c^d f(y)dy ; \text{б) } \int_{Oy} Q(x, y)dy ; \text{в) } \int_L f(x, y)dl .$$

8. Криволінійний інтеграл 1-го роду, якщо функція дорівнює 1:

- а) являє собою площу області інтегрування; б) являє собою довжину дуги кривої інтегрування; в) дорівнює одиниці.

9. Якщо крива задана параметрично як $\varphi(t), \psi(t)$ на інтервалі $t \in [t_1, t_2]$, То криволінійний інтеграл 1-го роду функції $f(x, y)$ обчислюється так:

$$\text{а) } \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t))dt ; \text{б) } \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2} dt ; \text{в) } \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2} dt .$$

10. Якщо крива задана як $g(x)$ на інтервалі $x \in [a, b]$, То криволінійний інтеграл 1-го роду функції $f(x, y)$ обчислюється так:

$$\text{а) } \int_a^b f(x, g(x))dx ; \text{ б) } \int_a^b f(x, g(x))\sqrt{1+g'(x)}dx ; \text{ в) } \int_a^b \sqrt{1+g'(x)}dx .$$

11. Позначення узагальненого криволінійного інтеграла 2-го роду:

$$\text{а) } \int_{AB} P(x, y)dx ; \text{ б) } \int_{AB} P(x, y)dx + Q(x, y)dy ; \text{ в) } \int_{AB} Q(x, y)dy .$$

12. Чи відноситься криволінійний інтеграл 2-го роду до якого-небудь інтегралу в міру:

а ні; б) так; в) тільки від одиничної функції?

13. Криволінійний інтеграл 2-го роду функції $P(x, y)$ вздовж кривої AB - це межа:

а) відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що ця межа не залежить від способу розбиття області і вибору точок в отриманих областях; б) відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що діаметр розбиття прагне до нуля і ця межа не залежить від способу розбиття області і вибору точок в отриманих областях; в) інтегральної суми виду $\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$ за умови, що $n \rightarrow \infty$ і $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, Якщо він існує і не залежить від способу розбиття кривої і вибору точок на ній.

14. Криволінійний інтеграл 2-го роду функції $Q(x, y)$ вздовж кривої AB - це межа:

а) відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що ця межа не залежить від способу розбиття області і вибору точок в отриманих областях; б) відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що діаметр розбиття прагне до нуля і ця межа не залежить від способу розбиття області і вибору точок в отриманих областях; в) інтегральної суми виду $\sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$ за умови, що $n \rightarrow \infty$ і $\max \Delta y_i \rightarrow 0$, Якщо він існує і не залежить від способу розбиття кривої і вибору точок на ній.

15. Умова $\int_{AB} Pdx + Qdy = - \int_{BA} Pdx + Qdy$ для криволінійного інтеграла 2-го роду:

а) не виконується; б) виконується; в) виконується тільки для одиничних функцій.

16. Якщо пряма AB паралельна осі Ox , То інтеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy$ дорівнює:

$$\text{а) } \int_{AB} Qdy ; \text{ б) } \int_{AB} Pdx ; \text{ в) } \int_{AB} Pdx + Qdy .$$

17. Якщо пряма AB паралельна осі Oy , То інтеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy$ дорівнює:

$$\text{а) } \int_{AB} Qdy ; \text{ б) } \int_{AB} Pdx ; \text{ в) } \int_{AB} Pdx + Qdy .$$

18. Запис узагальненого криволінійного інтеграла 2-го роду, якщо крива AB задана параметрично як $\varphi(t), \psi(t)$ на інтервалі $t \in [t_1, t_2]$:

$$\text{а) } \int_{t_1}^{t_2} P(\varphi(t), \psi(t)) \dot{\varphi}(t) dt ; \text{ б) } \int_{t_1}^{t_2} (P(\varphi(t), \psi(t)) \dot{\varphi}(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \dot{\psi}(t)) dt ;$$

$$\text{в) } \int_{t_1}^{t_2} Q(\varphi(t), \psi(t)) \dot{\psi}(t) dt .$$

19. Який напрямок обходу контура на площині вважається позитивним:

а) проти годинникової стрілки; б) по ходу годинникової стрілки; в) такого поняття не існує?

20. Який обхід контуру на площині вважається верхнім:

а) проти годинникової стрілки; б) по ходу годинникової стрілки; в) такого поняття не існує?

21. Який напрямок обходу контура на площині вважається негативним:

а) проти годинникової стрілки; б) по ходу годинникової стрілки; в) такого поняття не існує?

22. Який обхід контуру на площині вважається нижнім:

а) проти годинникової стрілки; б) по ходу годинникової стрілки; в) такого поняття не існує?

23. Криволінійний інтеграл 2-го роду по замкненому контуру має вигляд:

$$\text{а) } \oint_L Pdx + Qdy ; \text{ б) } \oint_L Qdy ; \text{ в) } \oint_L Pdl .$$

24. Умова незалежності криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування. Підінтегральний вираз є:

а) одиничною функцією; б) безперервною функцією; в) повним диференціалом деякої функції.

25. Умова незалежності криволінійного інтеграла $\int_{AB} Pdx + Qdy$ від шляху інтегрування:

$$\text{а) } dF = Pdx + Qdy ; \text{ б) } Pdx = Qdy ; \text{ в) } Pdx = -Qdy .$$

26. Умова незалежності криволінійного інтеграла $\int_{AB} Pdx + Qdy$ від шляху інтегрування:

$$\text{а) } \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} ; \text{ б) } \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} ; \text{ в) } \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} .$$

27. Відновлення функції по її повного диференціалу:

а) обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду від повного диференціала уздовж довільної кривої від обраної точки до довільної (x, y) ; б) обчислити

криволінійний інтеграл 2-го роду вздовж лінії, паралельної осі Ох, а потім Оу, від обраної точки до довільної (x, y) ; в) проінтегрувати складові диференціала.

10.13. Завдання для роботи в аудиторії і вдома

1. Обчислити криволінійні інтеграли.

1.1. $\int_L \frac{dl}{x-y}$, де L - відрізок прямої $y = \frac{1}{2}x - 2$, Укладений між точками $A(0, -2)$ і $B(4, 0)$.

1.2. $\int_L y dl$, де L - дуга параболи $y^2 = 2px$, Відтята параболою $x^2 = 2py$.

1.3. $\int_L (x^2 + y^2)^n dl$, де L - окружність $x = a \cos t, y = a \sin t$.

1.4. $\int_L x \sqrt{x^2 - y^2} dl$, Де область L - лінія, задана рівнянням $(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) (x \geq 0)$ (Половина лемніскати).

2. Обчислити $\int_L \arctg \frac{y}{x} dl$, де L - частина спіралі Архімеда $\rho = 2\varphi$, Укладена всередині кола радіусом R з центром на початку координат (в полюсі).

3. Обчислити інтеграл $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$, де L - перший виток гвинтової лінії $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = at$.

4. Обчислити $\int_L (x + y) dl$, де L - чверть кола $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, y = x$, Що лежить в першому Октант.

5. Обчислити криволінійні інтеграли.

5.1. $\int_L x dy$, де L - контур трикутника, утвореного осями координат і прямої $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$, В позитивному напрямку (т. Е. Проти годинникової стрілки).

5.2. $\int_L (x^2 + y^2) dy$, де L - контур чотирикутника з вершинами (зазначеними в порядку обходу) в точках $A(0, 0)$, $B(2, 0)$, $C(4, 4)$ і $D(0, 4)$.

5.3. $\int_{(0,0)}^{(\pi, 2\pi)} -x \cos y dx + y \sin x dy$ вздовж відрізка, що з'єднує точки $(0, 0)$ і $(\pi, 2\pi)$.

5.4. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} 2xy dx + x^2 dy$ уздовж ліній: 1) $y = x$; 2) $y = x^2$; 3) $y = x^3$; 4) $y^2 = x$.

5.5. $\int_L y dx + x dy$, де L - чверть кола $x = R \cos t, y = R \sin t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \frac{\pi}{2}$.

5.6. $\int_L (2a - y) dx - (a - y) dy$, де L - перша (від початку координат) арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

5.7. $\int_L x dx + y dy + (x + y - 1) dz$, де L - відрізок прямої від точки $(1, 1, 1)$ до точки $(2, 3, 4)$.

6. Обчислити криволінійні інтеграли від повних диференціалів.

6.1. $\int_{(-1,2)}^{(2,3)} y dx + x dy$.

6.2. $\int_{(3,4)}^{(5,12)} \frac{x dx + y dy}{x^2 + y^2}$ (Початок координат не лежить на контурі інтегрування).

6.3. $\int_{(1,-1,2)}^{(2,1,3)} x dx - y^2 dy + z dz$.

7. Знайти функції за даними повним диференціалом.

7.1. $du = x^2 dx + y^2 dy$. 7.2. $du = \left(\frac{x-2y}{(y-x)^2} + x \right) dx + \left(\frac{y}{(y-x)^2} - y^2 \right) dy$.

7.3. $du = \frac{(x+2y) dx + y dy}{(x+y)^2}$. 7.4. $du = \frac{2x(1-e^y)}{(1+x^2)^2} dx + \left(\frac{e^y}{1+x^2} + 1 \right) dy$.

10.14. Самостійна робота

1. Обчислити криволінійні інтеграли.

1.1. $\int_L xy dl$, де L - контур прямокутника з вершинами $A(0, 0)$, $B(4, 0)$, $C(4, 2)$ і $D(0, 2)$.

1.2. $\int_L \sqrt{2y} dl$, де L - перша арка циклоїди $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1.3. $\int_L (x - y) dl$, де L - окружність $x^2 + y^2 = ax$.

2. Обчислити $\int_L xyz dl$, де L - чверть кола $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 = \frac{R^2}{4}$, Що лежить в першому Октант.

3. Обчислити $\int_L (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl$, де L - перший виток конічної гвинтової лінії $x = t \cos t$, $y = t \sin t$, $z = t$.

4. Обчислити криволінійні інтеграли.

4.1. $\int_L x dy$, де L - відрізок прямої $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ від точки її перетину з віссю абсцис до точки перетину з віссю ординат.

4.2. $\int_L (x^2 - y^2) dx$, де L - дуга параболи $y = x^2$ від точки $(0, 0)$ до точки $(2, 4)$.

4.3. $\int_{(0,0)}^{(1,1)} xy dx + (y - x) dy$ уздовж ліній: 1) $y = x$; 2) $y = x^2$; 3) $y^2 = x$; 4) $y = x^3$.

4.4. $\int_L y dx - x dy$, де L - еліпс $x = a \cos t, y = b \sin t$, Пробігає в позитивному напрямку.

4.5. $\int_L \frac{y^2 dx - x^2 dy}{x^2 + y^2}$, де L - півколо $x = a \cos t, y = a \sin t$ від $t_1 = 0$ до $t_2 = \pi$.

4.6. $\int_L yz dx + zx dy + xy dz$, де L - дуга гвинтової лінії $x = R \cos t, y = R \sin t, z = \frac{at}{2\pi}$ від точки перетину лінії з площиною $z = 0$ до точки її перетину з площиною $z = a$.

5. Обчислити криволінійні інтеграли від повних диференціалів.

5.1. $\int_{(0,0)}^{(2,1)} 2xy dx + x^2 dy$. 5.2. $\int_{(1,2,3)}^{(3,2,1)} yz dx + zx dy + xy dz$.

6. Знайти функції за даними повним диференціалом.

6.1. $du = 4(x^2 - y^2)(x dx - y dy)$. 6.2. $du = (2x \cos y - y^2 \sin x) dx + (2y \cos x - x^2 \sin y) dy$.

6.3. $du = \frac{(3y - x) dx + (y - 3x) dy}{(x + y)^3}$. 6.4. $du = \frac{x}{y \sqrt{x^2 + y^2}} dx - \left(\frac{x^2 + \sqrt{x^2 + y^2}}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy$.

«Відмазка» з приводу невиконаного домашнього завдання

Молодший брат розлив клей на зошит, реанімувати не вдалося.

Що кажуть про математику

«Жодне людське дослідження не може називатися справжньою наукою, якщо воно не пройшло через математичні докази» Леонардо да Вінчі.

Модуль. Криволінійні і кратні інтеграли

Модуль складається з двох частин:

- 1) 20 хвилин - на відповіді за спрощеним варіантом тестів;
- 2) після 5-хвилинної перерви 45 хвилин - для письмової роботи за рішенням прикладів заданого варіанту.

Тести

1. Позначення криволінійного інтеграла 1-го роду:

а) $\int_a^b f(x)dx$; б) $\int_L f(x, y)dl$; в) $\int_a^\infty f(x)dx$.

2. Криволінійний інтеграл 1-го роду - це узагальнене поняття певного інтеграла, коли областю інтегрування є:

- а) відрізок деякої кривої; б) безліч точок деякої площини;
- в) безліч точок деякого об'єму.

3. Визначення криволінійного інтеграла:

- а) межа інтегральної суми виду $\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$ за умови, що $n \rightarrow \infty$ і $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, Якщо він існує і не залежить від способу розбиття кривої і вибору точок на ній; б) кінцевий межа відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що діаметр розбиття прагне до нуля і ця межа не залежить від способу розбиття області і вибору точок в отриманих областях; в) межа інтегральної суми виду $\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta l_i$ за умови, що $n \rightarrow \infty$ і $\max \Delta l_i \rightarrow 0$, Якщо він існує і не залежить від способу розбиття області інтегрування і вибору точок на ділянках розбивки.

4. Значення криволінійного інтеграла 1-го роду:

- а) не залежить від напрямку кривої; б) залежить від напрямку кривої;
- в) за певних умов залежить від напрямку кривої.

5. Геометричний сенс інтеграла $\int_L f(x, y)dl$:

- а) довжина лінії L ; б) площа циліндричної поверхні з котра утворює $f(x, y)$ вздовж кривої L ; в) обсяг циліндричного тіла з основою $f(x, y)$ і висотою L .

6. Криволінійний інтеграл 1-го роду, якщо шлях паралельний осі ox , являє собою:

а) $\int_L f(x, y)dl$; б) $\int_{OX} P(x, y)dx$; в) $\int_a^b f(x)dx$.

7. Криволінійний інтеграл 1-го роду, якщо шлях паралельний осі Oy , являє собою:

а) $\int_c^d f(y)dy$; б) $\int_{OY} Q(x, y)dy$; в) $\int_L f(x, y)dl$.

8. Криволінійний інтеграл 1-го роду, якщо функція дорівнює 1:

а) являє собою площу області інтегрування; б) являє собою довжину дуги кривої інтегрування; в) дорівнює одиниці.

9. Якщо крива задана параметрично як $\varphi(t)$, $\psi(t)$ на інтервалі $t \in [t_1, t_2]$, То криволінійний інтеграл 1-го роду функції $f(x, y)$ обчислюється так:

$$\text{а) } \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t)) dt; \text{ б) } \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2} dt; \text{ в) } \int_{t_1}^{t_2} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2} dt.$$

10. Якщо крива задана як $g(x)$ на інтервалі $x \in [a, b]$, То криволінійний інтеграл 1-го роду функції $f(x, y)$ обчислюється так:

$$\text{а) } \int_a^b f(x, g(x)) dx; \text{ б) } \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + g'^2(x)} dx; \text{ в) } \int_a^b \sqrt{1 + g'^2(x)} dx.$$

11. Позначення узагальненого криволінійного інтеграла 2-го роду:

$$\text{а) } \int_{AB} P(x, y) dx; \text{ б) } \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy; \text{ в) } \int_{AB} Q(x, y) dy.$$

12. Чи відноситься криволінійний інтеграл 2-го роду до якого-небудь інтегралу в міру:

а) ні; б) так; в) тільки від одиничної функції?

13. Криволінійний інтеграл 2-го роду функції $P(x, y)$ вздовж кривої AB - це межа:

а) відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що ця межа не залежить від способу розбиття області і вибору точок в отриманих областях; б) відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що діаметр розбиття прагне до нуля і ця межа не залежить від способу розбиття області і вибору точок в отриманих областях; в) інтегральної суми виду $\sum_{i=1}^n P(\xi_i, \eta_i) \Delta x_i$ за умови, що $n \rightarrow \infty$ і $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, Якщо він існує і не залежить від способу розбиття кривої і вибору точок на ній.

14. Криволінійний інтеграл 2-го роду функції $Q(x, y)$ вздовж кривої AB - це межа:

а) відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що ця межа не залежить від способу розбиття області і вибору точок в отриманих областях; б) відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що діаметр розбиття прагне до нуля і ця межа не залежить від способу розбиття області і вибору точок в отриманих областях; в) інтегральної суми виду $\sum_{i=1}^n Q(\xi_i, \eta_i) \Delta y_i$ за умови, що $n \rightarrow \infty$ і $\max \Delta y_i \rightarrow 0$, Якщо він існує і не залежить від способу розбиття кривої і вибору точок на ній.

15. Умова $\int_{AB} Pdx + Qdy = - \int_{BA} Pdx + Qdy$ для криволінійного інтеграла 2-го

роду:

а) не виконується; б) виконується; в) виконується тільки для одиничних функцій.

16. Якщо пряма AB паралельна осі Ox , То інтеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy$ **дорівнює:**

а) $\int_{AB} Qdy$; б) $\int_{AB} Pdx$; в) $\int_{AB} Pdx + Qdy$.

17. Якщо пряма AB паралельна осі Oy , То інтеграл $\int_{AB} Pdx + Qdy$ **дорівнює:**

а) $\int_{AB} Qdy$; б) $\int_{AB} Pdx$; в) $\int_{AB} Pdx + Qdy$.

18. Запис узагальненого криволінійного інтеграла 2-го роду, якщо крива AB задана параметрично як $\varphi(t)$, $\psi(t)$ на інтервалі $t \in [t_1, t_2]$:

а) $\int_{t_1}^{t_2} P(\varphi(t), \psi(t))\dot{\varphi}(t)dt$; б) $\int_{t_1}^{t_2} (P(\varphi(t), \psi(t))\dot{\varphi}(t) + Q(\varphi(t), \psi(t))\dot{\psi}(t))dt$;

в) $\int_{t_1}^{t_2} Q(\varphi(t), \psi(t))\dot{\psi}(t)dt$.

19. Який напрямок обходу контура на площині вважається позитивним:

а) проти годинникової стрілки; б) по ходу годинникової стрілки; в) такого поняття не існує?

20. Який обхід контуру на площині вважається верхнім:

а) проти годинникової стрілки; б) по ходу годинникової стрілки; в) такого поняття не існує?

21. Який напрямок обходу контура на площині вважається негативним:

а) проти годинникової стрілки; б) по ходу годинникової стрілки; в) такого поняття не існує?

22. Який обхід контуру на площині вважається нижнім:

а) проти годинникової стрілки; б) по ходу годинникової стрілки; в) такого поняття не існує?

23. Криволінійний інтеграл 2-го роду по замкненому контуру має вигляд:

а) $\oint_L Pdx + Qdy$; б) $\oint_L Qdy$; в) $\oint_L Pdl$.

24. Умова незалежності криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування. Під інтегральний вираз є:

а) одиничною функцією; б) безперервною функцією; в) повним диференціалом деякої функції.

25. Умова незалежності криволінійного інтеграла $\int_{AB} Pdx + Qdy$ від шляху

інтегрування:

а) $dF = Pdx + Qdy$; б) $Pdx = Qdy$; в) $Pdx = -Qdy$.

26. Умова незалежності криволінійного інтеграла $\int_{AB} Pdx + Qdy$ від шляху

інтегрування:

а) $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}$; б) $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$; в) $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}$.

27. Відновлення функції по її повного диференціалу:

а) обчислити криволінійний інтеграл 1-го роду від повного диференціала уздовж довільної кривої від обраної точки до довільної (x, y) ; б) обчислити криволінійний інтеграл 2-го роду вздовж лінії, паралельної осі Ox , а потім Oy , від обраної точки до довільної (x, y) ; в) проінтегрувати складові диференціала.

28. Інтегральна сума функції $f(x, y)$ відповідного даного розбиття прямокутника $[a, b] \times [c, d]$ і довільного вибору точок ξ_k, η_l на приватних прямокутниках розбиття - це число, що дорівнює:

а) $I_D = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^m f(\xi_k, \eta_l) \Delta x_k \Delta y_l$; б) $I_D = \sum_{k=1}^n \Delta x_k \sum_{l=1}^n f(\xi_k, \eta_l) \Delta y_l$;

в) $I_D = \sum_{l=1}^n \Delta y_l \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_l) \Delta x_k$.

29. За Ріманом, подвійний кратний інтеграла функції $f(x, y)$ на прямокутнику D - це:

а) дворазове інтегрування функції $f(x, y)$ на прямокутнику D ;
б) межа відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що ця межа не залежить від способу розбиття області і вибору точок в отриманих областях; в) межа відповідних інтегральних сум функції $f(x, y)$ за умови, що діаметр розбиття прагне до нуля і ця межа не залежить від способу розбиття області і вибору точок в отриманих областях.

30. Позначення подвійного інтеграла функції $f(x, y)$ по області D :

а) $I = \iint_D f(x, y) dx dy$; б) $I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(y) dy$; в) $I = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x) dx$.

31. Умова існування подвійного інтеграла:

а) функція позитивна в заданій області; б) функція обмежена в заданій області; в) функція обмежена і неперервна в заданій області, крім, можливо, точок площі нуль.

32. Подвійний кратний інтеграл обчислюється:

а) за допомогою двох визначених інтегралів; б) шляхом подвійного інтегрування; в) шляхом повторного інтегрування.

33. Формула, що виражає лінійність подвійного інтеграла:

$$\text{а) } \iint_D f dS = \iint_{D_1} f dS + \iint_{D_2} f dS, \text{ де } \begin{cases} D = D_1 \cup D_2, \\ D_1 \cap D_2 = \emptyset; \end{cases} \quad \text{б) } \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy;$$

$$\text{в) } \iint_D c_1 f_1 dS + \iint_D c_2 f_2 dS = c_1 \iint_D f_1 dS + c_2 \iint_D f_2 dS.$$

34. Формула, що виражає адитивність подвійного інтеграла:

$$\text{а) } \iint_D f dS = \iint_{D_1} f dS + \iint_{D_2} f dS, \text{ де } \begin{cases} D = D_1 \cup D_2, \\ D_1 \cap D_2 = \emptyset; \end{cases} \quad \text{б) } \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy;$$

$$\text{в) } \iint_D c_1 f_1 dS + \iint_D c_2 f_2 dS = c_1 \iint_D f_1 dS + c_2 \iint_D f_2 dS.$$

35. Якщо функції f і g в області D інтегруються, то добуток цих функцій в області D є:

а) не інтегрованим; б) інтегрованим; в) інтегрованим для позитивних функцій.

36. Виберіть правильне нерівність:

а) якщо $f \leq g$, то $\iint_D f dS < \iint_D g dS$; б) якщо $f > g$, то $\iint_D f dS < \iint_D g dS$; в) якщо $f < g$, то $\iint_D f dS < \iint_D g dS$.

37. Виберіть правильне нерівність:

$$\text{а) } \left| \iint_D f dS \right| \leq \iint_D f |dS|; \text{ б) } \iint_D |f dS| \leq \left| \iint_D f dS \right|; \text{ в) } \left| \iint_D f dS \right| \leq \iint_D |f dS|.$$

38. Теорема про повну загальну середню для функції двох змінних в області D :

а) якщо функція $f(x, y)$ інтегрується в області D і задовольняє нерівності $m < f(x, y) < M$, то $mS \leq \iint_D f(x, y) ds \leq MS$; б) якщо функція $f(x, y)$ інтегрується в області D і задовольняє нерівності $m \leq f(x, y) \leq M$, то $mS \leq \iint_D f(x, y) ds \leq MS$; в) якщо функція $f(x, y)$ інтегрується в області D і задовольняє нерівності $m \leq f(x, y) \leq M$, то $mS < \iint_D f(x, y) ds < MS$.

39. Середнє значення функції двох змінних $f(x, y)$:

а) в області D знайдеться така точка (ξ, η) , що $f(\xi, \eta) = \iint_D f(x, y) ds$; б) в області D знайдеться така точка (ξ, η) , що $f(\xi, \eta) = S \iint_D f(x, y) ds$; в) в області D знайдеться така точка (ξ, η) , що $f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \iint_D f(x, y) ds$.

40. Область $D = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ називається:

а) 1-й стандартної; б) 2-й стандартної; в) 3-й стандартної.

41. Область $D = \{(x, y): a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ називається:

а) 1-й стандартної; б) 2-й стандартної; в) 3-й стандартної.

42. Область $D = \{(x, y): x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$ називається:

а) 1-й стандартної; б) 2-й стандартної; в) 3-й стандартної.

43. Якщо задана нестандартна область інтегрування для подвійного інтеграла, то цю область:

а) замінюють на стандартну і виконують повторне інтегрування;

б) розбивають на під області і використовують лінійні властивості інтегралів; в) розбивають на стандартні під області і використовують властивість адитивності.

44. Затвердження про зведення подвійного інтеграла до повторного, в якому внутрішній інтеграл є певним інтегралом:

а) нехай існує подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ і для будь-якого $x \in [a, b]$ існує певний інтеграл $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, Тоді існує певний інтеграл виду

$\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$; б) нехай для будь-якого $x \in [a, b]$ існує певний інтеграл $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, Тоді існують подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ і певний інтеграл виду $\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$; в) нехай для будь-якого $x \in [a, b]$ існує певний інтеграл $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, Тоді подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ можна замінити певним інтегралом виду $\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.

а) нехай існує подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ і для будь-якого $x \in [a, b]$ існує певний інтеграл $I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, Тоді повторним називають інтеграл:

45. Нехай існує подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ і для будь-якого $x \in [a, b]$ існує певний інтеграл $I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, Тоді повторним називають інтеграл:

а) нехай існує подвійний інтеграл $\iint_D f(x, y) dx dy$ і для будь-якого $x \in [a, b]$ існує певний інтеграл $I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, Тоді повторним називають інтеграл:

$$\text{а) } \int_a^b I(x) dy; \text{ б) } \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy; \text{ в) } \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

46. У записі $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ внутрішнім є інтеграл:

$$\text{а) } \int_a^b I(x) dy; \text{ б) } \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy; \text{ в) } \int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy.$$

47. Якщо $I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, То в запису $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$ зовнішнім є інте-

грал:

$$\text{а) } I(x); \text{ б) } \int_a^b I(x) dy; \text{ в) } \int_a^b I(x) dx.$$

48. Особливість подвійного інтеграла при інтегруванні по 1-й стандартної області:

а) інтервали щодо порядку інтегрування $[a, b]$ і $[c, d]$ рівноцінні; б) точки входу і виходу внутрішнього інтеграла лежать на кривих, кожна з яких представляє собою одну функцію; в) подвійний інтеграл можна представити як два певних інтеграла.

49. Особливість подвійного інтеграла при інтегруванні по 2-й стандартної області:

а) точки входу і виходу внутрішнього інтеграла лежать на кривих, кожна з яких представляє собою одну функцію; б) інтервали щодо порядку інтегрування $[a, b]$ і $[y_1(x), y_2(x)]$ рівноцінні; в) подвійний інтеграл можна представити як два певних інтеграла.

50. Геометричний сенс подвійного інтеграла. Подвійний інтеграл:

а) від безперервної невід'ємної функції дорівнює площі області інтегрування; б) від безперервної невід'ємної функції дорівнює довжині кривої; в) від функції $f(x, y) = 1$ дорівнює площі області інтегрування.

51. Криволінійні координати - це:

а) числа u_0 і v_0 , Що характеризують положення точки (x_0, y_0) на площині D при центральному проектуванні; б) числа u_0 і v_0 , Що характеризують положення точки (x_0, y_0) на площині D, коли координатні лінії являють собою криві; в) числа u_0 і v_0 , Що характеризують положення точки (x_0, y_0) на площині D і не залежать від кривих координатних ліній.

52. Координатна лінія - це:

$$\text{а) крива області D } \begin{cases} x = x(u, v_0) \\ y = y(u, v_0) \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x = x(u_0, v) \\ y = y(u_0, v) \end{cases} \text{ при } u_0 = \text{const}, v_0 = \text{const}$$

;

б) крива області $D \begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u, v_0) \end{cases}$ або $\begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u_0, v) \end{cases}$ при $u_0 = \text{const}$, $v_0 = \text{const}$;

в) крива області $D \begin{cases} x = x(u_0, v), \\ y = y(u, v_0) \end{cases}$ або $\begin{cases} x = x(u, v_0), \\ y = y(u_0, v) \end{cases}$ при $u_0 = \text{const}$, $v_0 = \text{const}$.

53. Виберіть співвідношення, відповідне заміні змінних в подвійному інтегралі:

а) $dxdy = |J(u, v)|dudv$; б) $dxdy = |J(u, v)dudv|$; в) $dxdy = J(u, v)|dudv|$.

54. Виберіть умови, які повинні відповідати відображенню при переході до нових змінних:

а) відображення взаємно однозначне, безперервно і має приватні похідні, якобіан дорівнює нулю; б) відображення взаємно однозначне, безперервно і має безперервні приватні похідні, якобіан не дорівнює нулю; в) відображення однозначне, безперервно, має приватні похідні, якобіан не дорівнює нулю.

55. Елемент майданчика в прямокутних координатах:

а) $J(u, v)dudv$; б) $dxdy$; в) $dudv$.

56. Елемент майданчика в криволінійних координатах, відповідний елементу майданчика в декартовій системі координат:

а) $dxdy$; б) $J(u, v)dudv$; в) $dudv$.

57. Для обчислення площі області за допомогою подвійного інтеграла потрібно:

а) в якості підінтегральної функції вибрати функцію $f(x, y) = 1$; б) визначити значення подвійного інтеграла по заданій області; в) визначити модуль значення подвійного інтеграла по заданій області.

58. Щоб обчислити об'єм криволінійного циліндра:

а) потрібно визначити модуль значення подвійного інтеграла по заданій області; б) потрібно як підінтегральної функції подвійного інтеграла вибрати функцію $f(x, y) = 1$; в) потрібно визначити подвійний інтеграл від безперервної невід'ємної функції.

59. Виберіть співвідношення, відповідне заміні змінних в подвійному інтегралі при переході до полярної системи координат:

а) $dxdy = \rho \sin \varphi d\rho d\varphi$; б) $dxdy = \rho^2 d\rho d\varphi$; в) $dxdy = \rho d\rho d\varphi$.

60. Виберіть співвідношення, відповідне заміні змінних в подвійному інтегралі при переході до криволінійній системі координат виду $x = a\rho \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \varphi$:

а) $dxdy = ab\rho^2 d\rho d\varphi$; б) $dxdy = ab\rho d\rho d\varphi$; в) $dxdy = ab\rho \sin \varphi d\rho d\varphi$.

61. Маса пластини, якщо одиницею величини $\rho_M(x, y) \in 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$:

а) $m = \iint_D dxdy$; б) $m = \iint_D \rho_M(x, y) dxdy$; в) $m = \iint_D \rho_M^2(x, y) dxdy$.

62. Координати центра ваги пластини, якщо одиницею величини $\rho_M(x,y) \in 1/\text{м}^2$:

$$\begin{aligned} \text{а) } x_c &= \frac{\iint_D x \rho_M(x,y) dx dy}{\iint_D \rho_M(x,y) dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \rho_M(x,y) dx dy}{\iint_D \rho_M(x,y) dx dy}; \quad \text{б) } x_c = \frac{\iint_D x \rho_M^2(x,y) dx dy}{\iint_D \rho_M^2(x,y) dx dy}, \\ y_c &= \frac{\iint_D y \rho_M^2(x,y) dx dy}{\iint_D \rho_M^2(x,y) dx dy}; \quad \text{в) } x_c = \frac{\iint_D x \rho_M(x,y) dx dy}{\iint_D dx dy}, \quad y_c = \frac{\iint_D y \rho_M(x,y) dx dy}{\iint_D dx dy}. \end{aligned}$$

63. Визначення статичних моментів плоскої пластини, якщо одиницею величини $\rho_M(x,y) \in 1/\text{м}^2$:

$$\begin{aligned} \text{а) } S_x &= \iint_D y \rho_M(x,y) dx dy, \quad S_y = \iint_D x \rho_M(x,y) dx dy; \quad \text{б) } S_x = \iint_D y^2 \rho_M(x,y) dx dy, \\ S_y &= \iint_D x^2 \rho_M(x,y) dx dy; \quad \text{в) } S = \iint_D (x^2 + y^2) \rho_M(x,y) dx dy. \end{aligned}$$

64. Визначення осевих моментів інерції плоскої пластини, якщо одиницею величини $\rho_M(x,y) \in 1/\text{м}^2$:

$$\begin{aligned} \text{а) } I_x &= \iint_D y \rho_M(x,y) dx dy, \quad I_y = \iint_D x \rho_M(x,y) dx dy; \quad \text{б) } I_x = \iint_D y^2 \rho_M(x,y) dx dy, \\ I_y &= \iint_D x^2 \rho_M(x,y) dx dy; \quad \text{в) } I = \iint_D (x^2 + y^2) \rho_M(x,y) dx dy. \end{aligned}$$

65. Визначення полярних моментів інерції плоскої пластини, якщо одиницею величини $\rho_M(x,y) \in 1/\text{м}^2$:

$$\begin{aligned} \text{а) } I_p &= \iint_D y x \rho_M(x,y) dx dy; \quad \text{б) } I_p = \iint_D (x^2 + y^2) \rho_M(x,y) dx dy; \\ \text{в) } I_p &= \iint_D y^2 x^2 \rho_M(x,y) dx dy. \end{aligned}$$

66. За Ріманом, потрійний кратний інтеграл функції $f(x,y,z)$ в області V - це:

а) певний інтеграл від подвійного інтеграла заданої функції по заданій області: $\iiint_V f(x,y,z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{f_1(x,y)}^{f_2(x,y)} f(x,y,z) dz$; б) кінцевий межа відповідних інтегральних сум функції $f(x,y,z)$ за умови, що число розбиття області V прямує до нескінченності і ця межа не залежить від способу розбиття області V і вибору точок

в елементарних обсягах; в) послідовне потрійне інтегрування заданої функції за

$$\text{всіма її змінним: } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} I(x, y, z) dz .$$

67. Позначення потрійного інтеграла, якщо $V = \{(x, y, z) | a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x), z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$:

$$\text{а) } I = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} I(x, y, z) dz ; \text{ б) } I = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dz \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_a^b I(x, y, z) dx ;$$

$$\text{в) } I = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dz \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_a^b I(x, y, z) dx .$$

68. Потрійний кратний інтеграл обчислюється:

- а) через заміну змінних; б) за допомогою повторного інтегрування;
в) триразовим інтеграцією заданої функції.

69. Виберіть правильне твердження про зведення потрійного інтеграла до повторного, в якому внутрішній інтеграл є певним інтегралом:

а) нехай функція $f(x, y, z)$ обмежена поверхнями $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, Проекції яких на площину xOy представляють собою область D , Для якої існує

певний інтеграл $I(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$, Тоді існує подвійний інтеграл виду

$$\iint_D I(x, y) dx dy = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \text{ (Він називається повторним) і справедливо}$$

рівність $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$; б) нехай функція $f(x, y, z)$

обмежена поверхнями $z = z_1(x, y)$ і $z = z_2(x, y)$, Проекції яких на площину xOy представляють собою область D , Тоді для $\forall (x, y) \in D$ існує певний інтеграл

$$I(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \text{ і справедливо рівність } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz =$$

$$= \iint_D dx dy \int_{f_1(x, y)}^{f_2(x, y)} I(x, y, z) dz ; \text{ в) нехай існує потрійний інтеграл } \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \text{ і для}$$

$\forall (x, y) \in D$ існує певний інтеграл $I(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$, Тоді існує подвійний

інтеграл $\iint_D I(x, y) dx dy = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$ (Він називається повто-

рним) і справедливо рівність $\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} I(x, y, z) dz$.

70. Елементарний об'єм в декартовій системі координат:

а) $dV = |dx dy dz|$; б) $dV = dx^3 dy^3 dz^3$; в) $dV = dx dy dz$.

71. Нехай функції $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ встановлюють взаємно однозначна відповідність між областями G і D в просторі R^3 , Тоді якобіан $J(u, v, w)$ має вид:

$$\text{а) } J(u, v, w) = \frac{D(u, v, w)}{D(x, y, z)}; \text{ б) } J(u, v, w) = \frac{D(x, y, z)}{D(u, v, w)}; \text{ в) } J(u, v, w) = \begin{vmatrix} u'_x & u'_y & u'_z \\ v'_x & v'_y & v'_z \\ w'_x & w'_y & w'_z \end{vmatrix}.$$

72. Формули переходу від декартової системи координат до циліндричної мають вигляд:

а) $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$; б) $x = \rho \sin \varphi$, $y = \rho \cos \varphi$, $z = z$;
в) $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$.

73. Допустимі значення координат циліндричної системи координат:

а) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $-\infty \leq \rho \leq +\infty$, $0 < z < +\infty$; б) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \rho \leq +\infty$, $-\infty < z < +\infty$; в) $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \rho \leq +\infty$, $-\infty < z < +\infty$.

74. Виберіть співвідношення, відповідне заміні змінних в потрійному інтегралі для циліндричної системи координат:

а) $dx dy dz = \rho d\rho d\varphi dz$; б) $dx dy dz = \rho^2 d\rho d\varphi dz$; в) $dx dy dz = \rho \sin \varphi d\rho d\varphi dz$.

75. Виберіть формули переходу від декартової системи координат до сферичної:

а) $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, $z = z$; б) $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \cos \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$;
в) $x = \rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = \rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = \rho \cos \theta$.

76. Допустимі значення координат сферичної системи координат:

а) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta < 2\pi$, $0 \leq \rho \leq +\infty$; б) $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \rho \leq +\infty$;
в) $-\pi \leq \varphi \leq \pi$, $0 \leq \theta < \pi$, $0 \leq \rho \leq +\infty$.

77. Виберіть співвідношення, відповідне заміні змінних в потрійному інтегралі для сферичної системи координат:

а) $dx dy dz = \rho \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$; б) $dx dy dz = \rho d\rho d\theta d\varphi$; в) $dx dy dz = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$.

78. Виберіть співвідношення, відповідне заміні змінних в криволінійній системі координат виду $x = a\rho \sin \theta \cos \varphi$, $y = b\rho \sin \theta \sin \varphi$, $z = c\rho \cos \theta$:

а) $dx dy dz = abc\rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$; б) $dx dy dz = abc\rho \sin \theta d\rho d\theta d\varphi$;

в) $dx dy dz = abc\rho d\rho d\theta d\varphi$.

79. Визначення обсягу за допомогою потрійного інтеграла:

а) $V = \iiint_V dV$; б) $V = \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$; в) $V = \pi \iiint_V dx dy dz$.

80. Визначення маси тіла, якщо одиницею величини $\rho(x, y, z) \in 1^{kg}/m^3$:

а) $m = \iiint_V \rho^2(x, y, z) dx dy dz$; б) $m = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$; в) $m = \iiint_V d\rho(x, y, z)$.

81. Визначення координат центру ваги тіла, якщо одиницею величини $\rho(x, y, z) \in 1^{kg}/m^3$:

$$\begin{aligned} \text{а), б), в), г), д), е), з), } x_c &= \frac{\iiint_V x dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz} y_c = \frac{\iiint_V y dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz} z_c = \frac{\iiint_V z dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz} x_c = \frac{\iiint_V x \rho dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz} \\ y_c &= \frac{\iiint_V y \rho dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz} ; \text{ в), г), д), е), з), } Z_c = \frac{\iiint_V z \rho dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz} x_c = \frac{\iiint_V x \rho dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz} y_c = \frac{\iiint_V y \rho dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz} \\ Z_c &= \frac{\iiint_V z \rho dx dy dz}{\iiint_V \rho dx dy dz} . \end{aligned}$$

82. Визначення статичних моментів тіла щодо координатних площин, якщо одиницею величини $\rho_M(x, y, z) \in 1^{kg}/m^3$:

а) $S_{xy} = \iiint_V z^2 \rho_M dx dy dz$, $S_{yz} = \iiint_V x^2 \rho_M dx dy dz$, $S_{zx} = \iiint_V y^2 \rho_M dx dy dz$;

б) $S_{xy} = \iiint_V z \rho_M dx dy dz$, $S_{yz} = \iiint_V x \rho_M dx dy dz$, $S_{zx} = \iiint_V y \rho_M dx dy dz$; в) $S_{yz} = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho_M dx dy dz$, $S_{xz} = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho_M dx dy dz$, $S_{xy} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho_M dx dy dz$.

83. Визначення моментів інерції тіла щодо координатних площин, якщо одиницею величини $\rho_M(x, y, z) \in 1^{kg}/m^3$:

а) $I_{xy} = \iiint_V z^2 \rho_M dx dy dz$, $I_{yz} = \iiint_V x^2 \rho_M dx dy dz$, $I_{zx} = \iiint_V y^2 \rho_M dx dy dz$;

б) $I_{xy} = \iiint_V z \rho_M dx dy dz$, $I_{yz} = \iiint_V x \rho_M dx dy dz$, $I_{zx} = \iiint_V y \rho_M dx dy dz$;

в) $I_{yz} = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho dx dy dz$, $I_{xz} = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho dx dy dz$, $I_{xy} = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho dx dy dz$.

Типові приклади для підготовки до модуля

1. Обчислити $\int_L (x + y)dl$, де L - пелюстка лемніскати $\rho = \sqrt{\sin 2\varphi}$, Розташованої в першому координатному куті.
2. Обчислити $\int_L (x + y)dx + (x - y)dy$, де L - дуга параболи $y = x^2$ від точки $A(-1; 1)$ до точки $B(1; 1)$.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Практичний курс вищої математики: навч. посіб. : У 4 кн. / І. В. Брисіна, О. В. Головченко, В. Ф. Деменко та ін. - Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т », 2004. - Кн. 2: Інтегральне числення Функції однієї змінної. Диференціальні рівняння. Кратні та криволінійні інтегралі. Елементи Теорії векторного поля. - 221 с.

Практичний курс вищої математики: навч. посіб. : У 4 кн. / І. В. Брисіна, О. В. Головченко, В. Ф. Деменко та ін. - Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т », 2004. - Кн. 4: Кратні и криволінійні інтегралі. Теорія поля. Ряди. Теорія Функції комплексного змінного и елементи операційного числення. - 268 с.

Робочий зошит. Диференціальне числення функції однієї та декількох змінних. / І. В. Брисіна, О. В. Головченко, В. Ф. Деменко та ін. - Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т », 2004. - 144 с.

Робочий зошит. Інтегральне числення. Диференціальні рівняння. / І. В. Брисіна, О. В. Головченко, В. Ф. Деменко та ін. - Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т », 2006. - 177 с.

ЗМІСТ

1. Функція багатьох змінних	3
1.1. Метричний простір	3
1.2. m -мірним евклидово простір	3
1.3. Функція декількох змінних	4
1.4. Межа функції декількох змінних	4
1.5. Повторні межі	5
1.6. Безперервність функції	6
1.7. Властивості неперервних функцій	6
1.8. Приватні похідні	7
1.9. Диференціал функції багатьох змінних	7
1.10. Приватні похідні 2-го і більш високих порядків	9
1.11. Диференціал 2-го порядку	10
1.12. Формула Тейлора	11
1.13. Висновки ..	12
1.14. Питання для перевірки знань	17
1.15. Завдання для роботи в аудиторії і вдома	22
1.16. Самостійна робота.....	24
2. Функція багатьох змінних	26
2.1. Похідна складної функції	26
2.2. Інваріантність форми диференціала 1-го порядку складної функції	27
2.3. Диференціювання неявно заданої функції	27
2.4. Визначення частинних похідних неявно заданої функції шляхом побудови диференціала	29
2.5. Геометричне додток функцій багатьох змінних	29
2.5.1. Дотична до поверхні площина,.....	29
2.5.1.1. Площина, яка дотична до поверхні, заданої в явному вигляді.....	30
2.5.1.2. Площина, яка дотична до поверхні, заданої в неявному вигляді.....	31
2.5.2. Нормаль до поверхні	32
2.5.3. Похідна за напрямком.....	32
2.6. Висновки	33
2.7. Питання для перевірки знань	36
2.8. Завдання для роботи в аудиторії і вдома	39
2.9. Самостійна робота.....	41
2.9.1. Неявно задана система функцій.....	41
2.9.2. Диференціювання неявно заданої системи функцій.....	41
2.9.3. Існування неявних функцій, заданих системою.....	42
2.9.4. Висновки.....	43
2.9.5. Питання для перевірки знань.....	44

2.10. Самостійна практична робота.....	45
3. Екстремум функції багатьох змінних	48
3.1. Визначення екстремуму функції	48
3.2. Необхідна умова екстремуму	48
3.3. Достатня умова екстремуму	49
3.4. Критерій Сильвестра	49
3.5. Умовний екстремум функції багатьох змінних	52
3.5.1. Постановка задачі.....	52
3.5.2. Умовний екстремум	52
3.5.3. Рішення завдання на умовний екстремум	52
3.6. Висновки	56
3.7. Питання для перевірки знань	59
3.8. Завдання для роботи в аудиторії і вдома	60
3.9. Самостійна робота.....	60
3.9.1. Умовний екстремум функції багатьох змінних.....	61
3.9.2. Постановка задачі.....	61
3.9.3. Умовний екстремум.....	61
3.9.4. Рішення завдання на умовний екстремум.....	62
3.9.5. Висновки.....	65
3.9.6. Питання для перевірки знань.....	66
3.9.7. Практичні задачі.....	67
3.10. Самостійна практична робота.....	67
4. Прості диференціальні рівняння	68
4.1. Загальні визначення	68
4.2. Диференціальні рівняння 1-го порядку	68
4.3. Рівняння з відокремлюваними змінними	70
4.4. Однорідні рівняння	72
4.5. Лінійні диференціальні рівняння 1-го порядку	74
4.5.1. Основні визначення	74
4.5.2. Метод варіації довільної сталої	74
4.5.3. Рівняння Бернуллі	76
4.5.4. Рівняння в повних диференціалах	78
4.6. Висновки	79
4.7. Питання для перевірки знань	84
4.8. Завдання для роботи в аудиторії і вдома	88
4.9. Самостійна робота.....	89
Історична давідка.....	91
5. Диференціальні рівняння вищих порядків	93
5.1. Основні визначення	93
5.2. Диференціальні рівняння вищих порядків, що допускають по- ниження порядку	93
5.3. Лінійні диференціальні рівняння n -го порядку	97
5.3.1. Основні визначення	97

5.3.2. Основні відомості про рішення лінійного диференціального рівняння n -го порядку	98
5.3.3. Рішення однорідних лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку з постійними коефіцієнтами методом Ейлера	99
5.3.4. Приклади розв'язання лінійних однорідних рівнянь	100
5.4. Висновки	102
5.5. Питання для перевірки знань	107
5.6. Завдання для роботи в аудиторії і вдома	110
5.7. Самостійна робота.....	111
6. Рішення лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку з постійними коефіцієнтами	112
6.1. Рішення неоднорідних лінійних диференціальних рівнянь n -го порядку з постійними коефіцієнтами	112
6.2. Властивості розв'язків лінійних диференціальних рівнянь n -порядку	112
6.3. Про структуру рішення лінійного неоднорідного диференціального рівняння n -порядка	113
6.4. Рішення лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь n -порядка з постійними коефіцієнтами методом варіації довільних сталих	113
6.5. Рішення лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь n -порядка з постійними коефіцієнтами і зі спеціальною правою частиною	115
6.6. Висновки	120
6.7. Питання для перевірки знань	123
6.8. Завдання для роботи в аудиторії і вдома	124
6.9. Самостійна робота.....	125
7. Системи диференціальних рівнянь	126
7.1. Основні поняття.....	126
7.2. Побудова рішення нормальної системи методом виключення.....	127
7.3. Побудова рішення лінійних систем диференціальних рівнянь методом Ейлера	130
7.3.1. Лінійні системи диференціальних рівнянь	130
7.3.2. Метод Ейлера	130
7.4. Матрична форма запису рішення лінійної нормальної системи диференціальних рівнянь з постійними коефіцієнтами.....	133
7.5. Висновки	136
7.6. Питання для перевірки знань	141
7.7. Завдання для роботи в аудиторії і вдома	143
7.8. Самостійна робота.....	143
8. Кратні інтеграли	145
8.1. Подвійний інтеграл	145
8.2. Основні властивості подвійного інтеграла	146

8.3. Обчислення подвійного інтеграла в декартовій системі координат	147
8.4. Геометричний сенс подвійного інтеграла	150
8.5. Заміна змінних в подвійному інтегралі	151
8.6. Додаток подвійного інтеграла	153
8.7. Висновки	154
8.8. Питання для перевірки знань	157
8.9. Завдання для роботи в аудиторії і вдома	162
8.10. Самостійна робота.....	164
8.10.1. Практика	164
8.10.2. Теорія	165
8.10.3. Історичний нарис	170
9. Потрійний інтеграл	172
9.1. Визначення потрійного інтеграла	172
9.2. Основні властивості потрійного інтеграла	173
9.3. Обчислення потрійного інтеграла в декартових координатах ...	174
9.4. Заміна змінних при обчисленні потрійного інтеграла	176
9.4.1. Циліндрична система координат	177
9.4.2. Сферична система координат	180
9.5. Застосування потрійного інтеграла	183
9.6. Висновки	184
9.7. Питання для перевірки знань	189
9.8. Завдання для роботи в аудиторії і вдома	192
9.9. Самостійна робота.....	193
10. Криволінійний інтеграл 1-го роду	195
10.1. Основні визначення	195
10.2. Основні властивості криволінійного інтеграла 1-го роду	196
10.3. Обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду	196
10.3.1. Диференціал дуги	196
10.3.2. Приклади обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду	197
10.4. Геометричний сенс криволінійного інтеграла 1-го роду.....	200
10.5. Криволінійні інтеграли 2-го роду	200
10.6. Обчислення криволінійного інтеграла 2-го роду	202
10.7. Орієнтація площині	203
10.8. Приклади обчислення криволінійних інтегралів 2-го роду	203
10.9. Умови незалежності криволінійного інтеграла 2-го роду від шляху інтегрування	204
10.10. Знаходження функції по її повного диференціалу	207
10.11. Висновки	209
10.12. Питання для перевірки знань	214
10.13. Завдання для роботи в аудиторії і вдома	218
10.14. Самостійна робота.....	219

Модуль. Криволінійні і кратні інтеграли.....	221
Тести	221
Типові приклади для підготовки до модуля	233
Бібліографічний список.....	234

Навчальне видання

**Бахмет Геннадій Костянтинович,
Головченко Олександр Васильович,
Ніколаєв Олексій Георгійович та ін.**

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Частина 4

Диференціальні рівняння. Кратні інтегралі. Криволінійні інтегралі

(Українською мовою)

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план 2020

Підписано до видання 21.09.2020

Розум. друк. арк. 14,7. Обл.-вид. арк. 16,56. Електронний ресурс

Видавець и виготовлювач

Національний Аерокосмічний університет ім. М. Є.

Жуковського «Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu> Видавничий

центр «ХАІ» 61070, Харків-70,

вул. Чкалова, 17 izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів и розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001