М. М. Гребенніков, М. І. Пекельний

ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

2018

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

М. М. Гребенніков, М. І. Пекельний

ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2018

УДК 539.3 / .6 (075.8)
Г79

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. С. А. Бичков,
канд. техн. наук, доц. Е. Т. Василевський

Г79 **Гребенніков, М. М.**

Геометричні характеристики плоских перерізів [Електронний ресурс]: навч. посіб. / М. М. Гребенніков, М. І. Пекельний. – Харків: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2018. – 92 с.

Викладено методику визначення центра ваги, моментів інерції складених плоских фігур. Наведено таблиці довідкових даних, приклади розв'язання задач і рекомендації до виконання домашнього завдання з даної теми з урахуванням кінематичної перевірки правильності розв’язання.

Для студентів, які вивчають курси «Опір матеріалів» і «Механіка матеріалів і конструкцій», при самостійній роботі.

Іл. 38. Табл. 9. Бібліогр.: 12 назв

УДК 539.3 / .6 (075.8)

© Гребенніков М. М., Пекельний М. І., 2018
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2018

Вступ

При проведенні розрахунків на міцність, жорсткість і стійкість конструктивних елементів типу бруса (стрижня) виникає необхідність використовувати деякі геометричні характеристики (властивості) плоских поперечних перерізів бруса (плоских фігур), тобто слід знати площу перерізу, положення його центра ваги, статичні моменти, осьові, полярний і відцентровий моменти інерції, радіуси інерції, осьові і полярний моменти опору.

Ці характеристики через їх вузьке прикладне значення в загальному курсі геометрії не вивчають, але вони тісно пов'язані з механікою матеріалів і конструкцій, тому завжди входять в курс механіки матеріалів і конструкцій як невід'ємні частини.

Надалі будемо ототожнювати поняття «плоска фігура» і «переріз», маючи на увазі «плоский поперечний переріз бруса».

У цьому посібнику розглянуто не всі використовувані в курсі «Механіка матеріалів і конструкцій» геометричні характеристики плоских перерізів. Деякі з них застосовують тільки при розрахунку брусів на міцність при крученні й вигині, а також в розрахунках на стійкість.

Основні позначення

d – діаметр круглого поперечного перерізу;
b – ширина поперечного перерізу;
h – висота поперечного перерізу;
F – площа поперечного перерізу;
y_c, z_c – координати центра ваги перерізу;
S_y, S_z – статичні моменти поперечного перерізу;
I_y, I_z – осьові моменти інерції поперечного перерізу;
I_{yz} – відцентровий момент інерції поперечного перерізу;
I_ρ – полярний момент інерції поперечного перерізу;
W_y, W_z – момент опору поперечного перерізу;
W_ρ – полярний момент опору перерізу;
i_y, i_z – радіус інерції поперечного перерізу;
α – кут повороту осей.

1. Статичні моменти перерізу

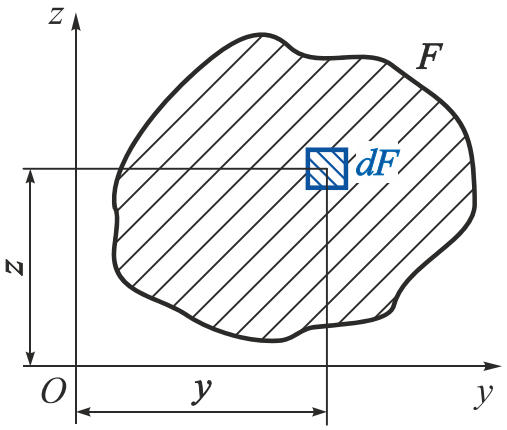


Рис. 1

Розглянемо поперечний переріз бруса F, пов'язаний з системою координат yOz (рис. 1). Виділимо елементарну площадку dF з координатами y, z.

Добуток елементарної площадки dF на відстань z від осі Oy

$$dS_y = zdF \qquad (1)$$

є елементарним ***статичним моментом*** площадки щодо осі Oy.

Аналогічно $dS_z = ydF$ – елементарний ***статичний момент*** площадки щодо осі Oz.

Підсумувавши величини dS_y і dS_z за площею перерізу F, одержимо

$$S_y = \int_F zdF, \qquad S_z = \int_F ydF, \qquad (2)$$

де S_y, S_z – статичні моменти перерізу F відносно осей y і z відповідно.

Із виразів (2) видно, що статичні моменти можуть бути додатними, від'ємними або такими, що дорівнюють нулю, і вимірюються в одиницях довжини в кубі (наприклад, $м^3$).

Зауваження Статичний момент складової площі дорівнює сумі статичних моментів її складових частин щодо тієї ж осі:

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} S_y^{(i)}; \qquad S_z = \sum_{i=1}^{n} S_z^{(i)}.$$

2. Центральні осі і центр ваги перерізу

Оскільки рівнодіючі внутрішніх зусиль проходять через «центр ваги» перерізу, то визначення положення центра ваги є важливим завданням.

Розглянемо зміну статичного моменту перерізу при паралельному перенесенні осей координат.

Дано: F, S_y, S_z, a, b (рис. 2).

Необхідно визначити S_{y_1}, S_{z_1}, тобто слід встановити, як змінюються статичні моменти перерізу при паралельному перенесенні осей.

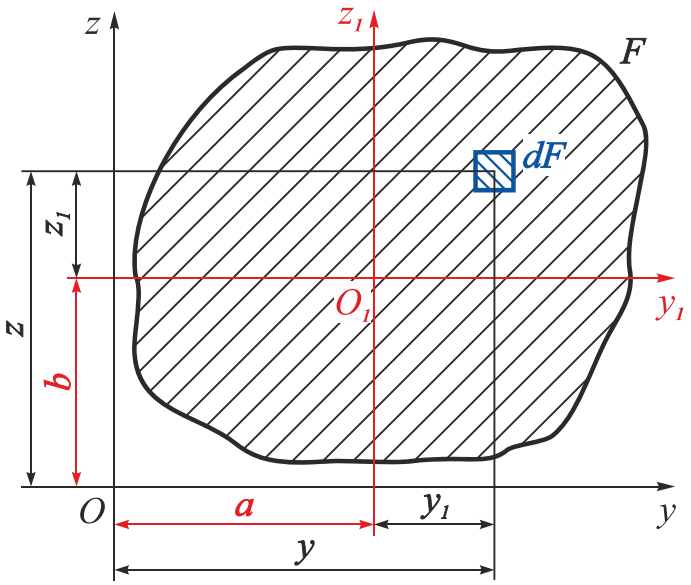


Рис. 2

Із виразів (2) одержимо

$$S_{y_1} = \int_F z_1 dF, \qquad (3)$$

$$S_{z_1} = \int_F y_1 dF\,.$$

Із рис. 2 видно, що

$$\begin{aligned} z_1 &= z - b; \\ y_1 &= y - a. \end{aligned} \qquad (4)$$

Підставивши значення z_1 і y_1 із співвідношень (4) у вирази (3), отримаємо

$$\begin{aligned} S_{y_1} &= \int_F (z-b)dF = \int_F zdF - b\int_F dF\,, \\ S_{z_1} &= \int_F (y-a)dF = \int_F ydF - a\int_F dF\,. \end{aligned} \qquad (5)$$

У виразах (5)

$$\int_F zdF = S_y, \qquad \int_F ydF = S_z, \qquad \int_F dF = F.$$

І всі ці величини є заданими, тому остаточно

$$\begin{aligned} S_{y_1} &= S_y - bF, \\ S_{z_1} &= S_z - aF. \end{aligned} \qquad (6)$$

Оскільки a і b – дійсні числа, то існує таке ***єдине значення*** b, при якому $S_{y_1} = 0$, і таке ***єдине*** значення a, при якому $S_{z_1} = 0$. Ці значення a і b є координатами центра ваги перерізу, їх позначають y_c і z_c відповідно, тобто, якщо $a = y_c$ і $b = z_c$, то

$$\begin{aligned} 0 &= S_y - z_c F, \\ 0 &= S_z - y_c F. \end{aligned} \qquad (7)$$

- Осі, відносно яких статичний момент перерізу дорівнює нулю, називають ***центральними осями*** цього ***перерізу***.
- Точка перетину центральних осей перерізу називається його ***центром ваги (ЦВ)***.

Система співвідношень (7) дозволяє розв'язувати важливі задачі двох типів:

1. Визначення статичних моментів перерізу:

а) найпростішого, якщо є відомими значення F, z_c і y_c, за співвідношеннями

$$\begin{aligned} S_y &= z_c F; \\ S_z &= y_c F; \end{aligned} \tag{8}$$

б) складеного, якщо є відомими значення F_i, z_{c_i} і y_{c_i}, за виразами

$$S_y = \sum_{i=1}^{n} z_{c_i} F_i\,; \qquad S_z = \sum_{i=1}^{n} y_{c_i} F_i, \tag{9}$$

де n – кількість простих частин складеного перерізу.

Співвідношення (8) і (9) є більш простою формою реалізації системи (2), оскільки виключають операцію інтегрування, якщо відомі площа перерізу і відстань від його центра ваги до осі, відносно якої обчислюють статичний момент перерізу.

2. Визначення координат центра ваги перерізу:

а) найпростішого, якщо наведено значення F, S_y і S_z, за співвідношеннями

$$y_c = \frac{S_z}{F}; \qquad z_c = \frac{S_y}{F}; \tag{10}$$

б) складеного, якщо наведено значення F_i, $S_y^{(i)}$ і $S_z^{(i)}$, за виразами

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_z^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} F_i}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} S_y^{(i)}}{\sum_{i=1}^{n} F_i}, \tag{11}$$

де n – кількість простих частин складеного перерізу.

Правило симетрії. Якщо переріз ***має вісь симетрії***, то статичний момент перерізу щодо цієї осі ***тотожно дорівнює нулю***. Отже:

а) вісь симетрії завжди є центральною віссю перерізу;

б) центр ваги перерізу завжди лежить на його осі симетрії, якщо така є;

в) якщо в перерізі є дві осі симетрії, то центр ваги (геометричний центр) цього перерізу буде знаходитися в точці перетину обох осей симетрії.

Справедливість правила симетрії видно з рис. 3, оскільки кожна площадка dF, що розташована вище осі y, для якої $zdF > 0$, має відповідну, розташовану нижче осі y, для якої $zdF < 0$. Тому

$$S_y = \int_F zdF = 0.$$

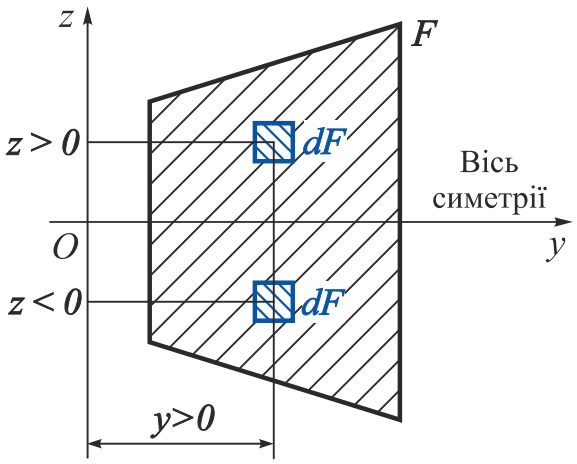


Рис. 3

3. Приклади визначення координат центра ваги простих перерізів

Приклад 1

Визначити координати центра ваги прямокутника з основою b і висотою h у системі осей yOz (рис. 4).

Дано: b, h.
Необхідно знайти z_c, y_c.

Розв'язання

Скориставшись виразом (10), запишемо

$$z_c = \frac{S_y}{F}, \quad \text{де} \quad F = bh, \quad S_y = \int_F zdF.$$

З урахуванням того, що $dF = bdz$, перейдемо до інтеграла за координатою z:

$$S_y = b\int_0^h zdz = \frac{bh^2}{2}.$$

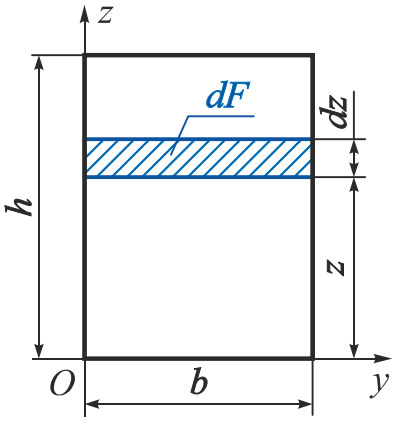


Рис. 4

Тоді $z_c = \frac{bh^2}{2bh} = +\frac{h}{2}$; аналогічно $y_c = +\frac{b}{2}$.

Приклад 2

Визначити, на якій відстані від основи b розташовано центр ваги трикутника (рис. 5).

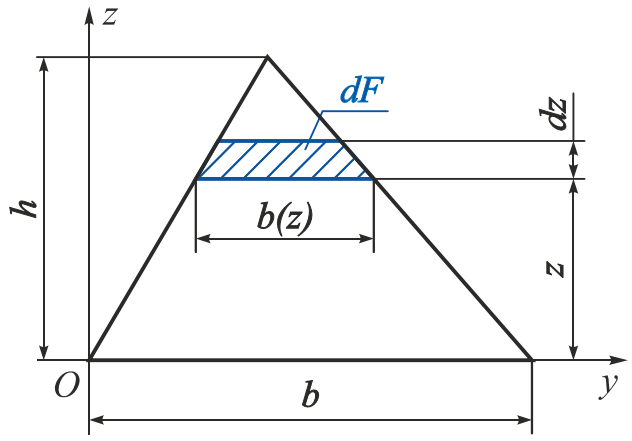


Рис. 5

Дано: b, h.

Необхідно знайти z_c.

Розв'язання

Для розв'язання задачі скористаємося співвідношенням (10):

$$z_c = \frac{S_y}{F}, \text{ де } F = \frac{bh}{2}; \quad S_y = \int_F z dF.$$

В останньому виразі $dF = b(z)dz$.

Із подібності трикутників

$$\frac{b(z)}{b} = \frac{h-z}{h} \Rightarrow b(z) = b\left(1 - \frac{z}{h}\right), \text{ тоді } dF = b\left(1 - \frac{z}{h}\right)dz.$$

Підставимо dF у вираз

$$S_y = \int_0^h b\left(1 - \frac{z}{h}\right)dz = b\left(\frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3h}\right)\Big|_0^h = \frac{bh^2}{6}.$$

Остаточно $$z_c = \frac{bh^2}{6}\frac{2}{bh} = \frac{h}{3}.$$

Приклад 3

Визначити координати центра ваги трикутника з основою b і висотою h у системі осей yOz (рис. 6).

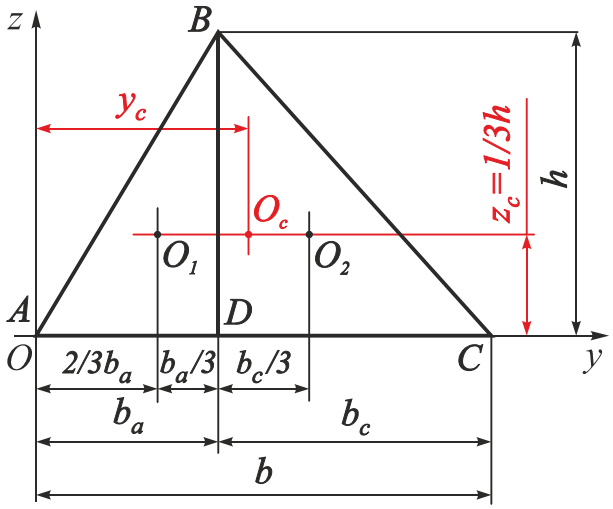


Рис. 6

Дано: b, h.

Необхідно знайти z_c, y_c.

Розв'язання

Розіб'ємо трикутник ABC на два прямокутних трикутника, провівши з вершини B на його основу AC перпендикуляр BD.

Позначимо на рис. 6 центри ваги трикутників ABD і BCD, які знаходяться на відстані $1/3$ від катетів (O_1 і O_2).

Складемо суму статичних моментів цих трикутників відносно осі Oz:

$$S_z = \sum_{i=1}^{2} S_z^{(i)} = \frac{b_a h}{2}\frac{2}{3}b_a + \frac{b_c h}{2}\left(b_a + \frac{b_c}{3}\right) = \frac{2{b_a}^2 h + b_c h(3b_a + b_c)}{6}.$$

Розділимо цю величину на площу трикутника ABC, отримаємо шукану абсцису y_c центру ваги O трикутника:

$$y_c = \frac{S_z}{F} = \frac{2{b_a}^2 h + b_c h(3b_a + b)}{6\dfrac{bh}{2}} = \frac{2{b_a}^2 + b_c(3b_a + b_c)}{3b}.$$

Спростимо цей вираз, підставивши значення $b_a + b_c = b$:

$$y_c = \frac{2{b_a}^2 + b_c(2b_a + b)}{3b} = \frac{2b_a(b_a + b_c) + b_c b}{3b} = \frac{2b_a + b_c}{3} = \frac{b + b_a}{3}.$$

Центри ваги O_1 і O_2 прямокутних трикутників ABD і BCD розташовані на прямій O_1O_2, яка паралельна основі трикутника ABC і знаходиться на відстані, що дорівнює одній третині висоти. На цій же лінії буде знаходитися і центр ваги O_c трикутника ABC.

Отже, ордината центра ваги трикутника ABC

$$z_c = \frac{h}{3}.$$

Приклад 4

Визначити положення центра ваги півкруга радіусом r відносно осі y (рис. 7).

Дано: r.

Необхідно знайти z_c.

Розв'язання

Оскільки переріз є симетричним відносно осі z, то центр ваги C півкруга розташовано на цій осі. Тому необхідно визначити тільки ординату z_c центра ваги.

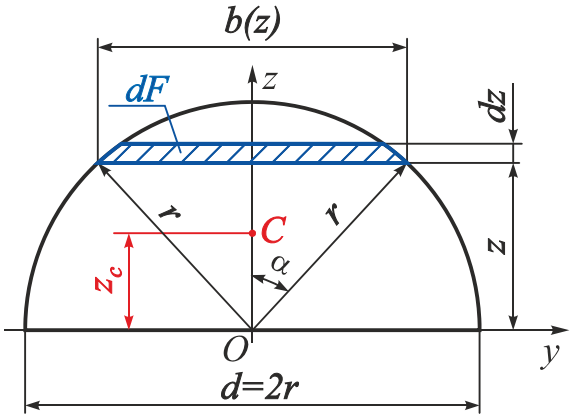


Рис. 7

Виділимо у півкрузі на відстані z від осі y елементарну площадку шириною $b(z)$ і висотою dz. Площа цієї площадки

$$dF = b(z)dz.$$

Як видно з рис. 7, $b(z) = 2r\sin\alpha$ і $z = r\cos\alpha$, отже,

$$dz = (-r\sin\alpha)d\alpha.$$

Тоді статичний момент відносно осі y

$$S_y = \int_F zdF = \int_0^r z \cdot 2r\sin\alpha \cdot dz = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 r\cos\alpha \cdot 2r\sin\alpha\,(-r\sin\alpha)d\alpha =$$

$$= -2r^3 \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin^2\alpha\cos\alpha\,d\alpha = -2r^3\left(\frac{\sin^3\alpha}{3}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{2}}^0 = \frac{2}{3}r^3.$$

Для знаходження положення центра ваги скористаємося співвідношенням (10)

$$z_c = \frac{S_y}{F} = \frac{\frac{2}{3}r^3}{\frac{\pi r^2}{2}} = \frac{4r}{3\pi} = 0{,}4244r.$$

Приклад 5

Визначити координати центра ваги складеного перерізу і показати систему центральних осей y і z (рис. 8).

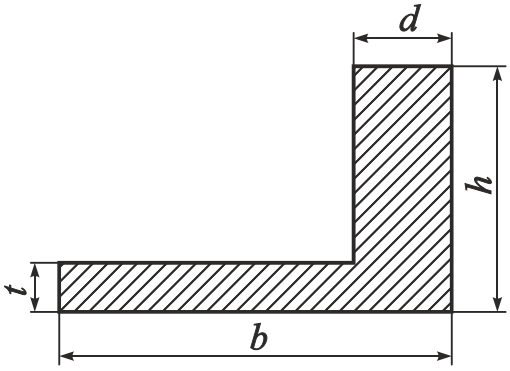


Рис. 8

Дано: $h = 5$ *см*, $b = 8$ *см*, $d = 2$ *см*, $t = 1$ *см*.

Необхідно знайти y_c, z_c.

Розв'язання

1. Виконаємо креслення складеного перерізу в масштабі (рис. 9).

2. Розіб'ємо переріз на найпростіші частини і назначимо цим частинам номери (1 і 2).

3. У центрі ваги кожної з найпростіших частин перерізу розташуємо центральні системи координат $y_iO_iz_i$ (в даному випадку $y_1O_1z_1$ і $y_2O_2z_2$).

4. Виберемо робочу (базову) систему координат, в якій будуть визначені координати центра ваги всього перерізу. Як робочу приймемо систему осей $y_1O_1z_1$.

Зауваження Задачу можна розв'язати в будь-якій системі координат, однак для мінімізації й спрощення обчислень доцільно вибрати як робочу (базову) центральну систему осей одного з елементів складеного перерізу.

5. Запишемо формули для визначення координат центра ваги складеного перерізу:

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{2} S_{z_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{2} F_i}; \quad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{2} S_{y_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{2} F_i}.$$

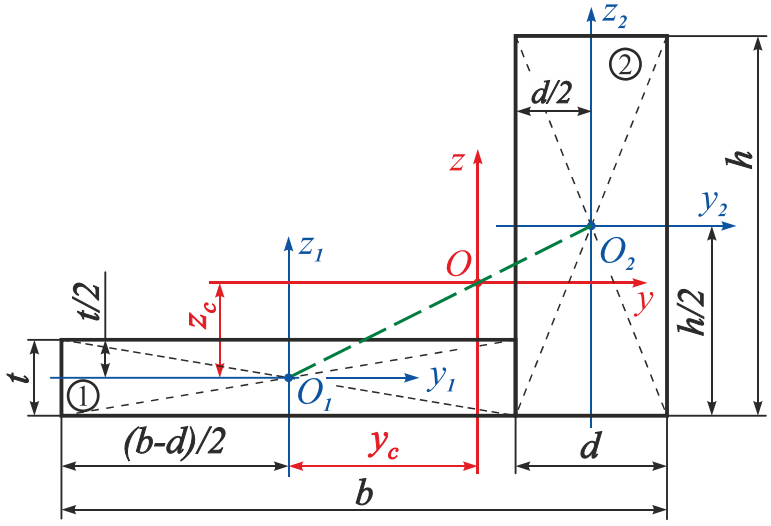


Рис. 9

6. Обчислимо площу складеного перерізу

$$\sum_{i=1}^{2} F_i = F_1 + F_2 = (b-d)t + hd = (8-2)\cdot 1 + 5\cdot 2 = 6 + 10 = 16\ см^2.$$

7. Визначимо статичні моменти складеного перерізу відносно осей y_1 і z_1:

$$S_{z_1} = \sum_{i=1}^{2} S_{z_1}^{(i)} = S_{z_1}^{(1)} + S_{z_1}^{(2)} = F_1 \cdot 0 + F_2\left(\frac{b-d}{2} + \frac{d}{2}\right) = 10 \cdot 4 = 40\ см^3;$$

$$S_{y_1} = \sum_{i=1}^{2} S_{y_1}^{(i)} = S_{y_1}^{(1)} + S_{y_1}^{(2)} = F_1 \cdot 0 + F_2\left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right) = 10 \cdot 2 = 20\ см^3.$$

8. Підставимо отримані результати в співвідношення (див. п. 5) і обчислимо координати центру ваги складеного перерізу в системі осей $y_1 O_1 z_1$:

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{40}{16} = 2{,}5\ см; \qquad z_c = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{20}{16} = 1{,}25\ см.$$

9. Відповідно до результатів обчислень покажемо на рис. 9 систему центральних осей yOz і центр ваги складеного перерізу – точку O.

<u>Перевірка правильності розв'язання</u>. Центр ваги складеного перерізу, що складається з двох простих частин, ***завжди лежить на лінії, що з'єднує центри ваги простих частин***. При цьому точка O поділяє відрізок O_1O_2 на частини, що є обернено пропорційними площам простих частин перерізу, тобто

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{F_2}{F_1};$$

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{\sqrt{y_c^2 + z_c^2}}{\sqrt{\left(\frac{b}{2} - y_c\right)^2 + \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} - z_c\right)^2}} = \frac{2{,}795}{1{,}677} = 1{,}667; \quad \frac{F_2}{F_1} = \frac{10}{6} = 1{,}667.$$

4. Осьові, полярний і відцентровий моменти інерції перерізу

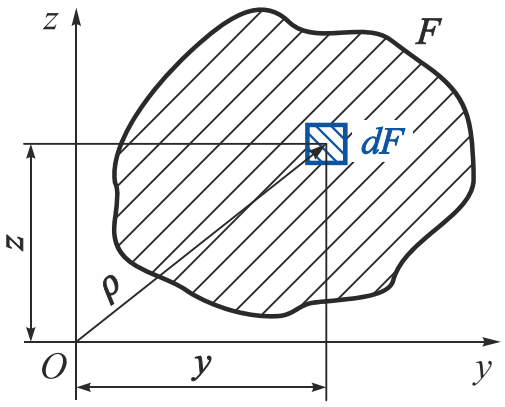


Рис. 10

За аналогією з поняттям моменту інерції маси тіла відносно довільної осі введемо поняття моментів інерції площі.

Осьовим (екваторіальним) ***моментом інерції*** перерізу щодо будь-якої осі називається сума добутків елементарних площадок dF на квадрати відстаней від їх центрів ваги до цієї осі (рис. 10):

$$I_y = \int_F z^2\, dF; \qquad I_z = \int_F y^2\, dF. \tag{12}$$

Відцентровим моментом інерції перерізу називається сума добутків елементарних площадок dF на координати центрів ваги цих площадок щодо двох ортогональних координатних осей, розташованих в площині фігури:

$$I_{yz} = \int_F yz\, dF. \tag{13}$$

Полярним моментом інерції перерізу називається сума добутків елементарних площадок dF на квадрат відстані від їх центрів ваги до будь-якого полюса, причому як полюс зазвичай вибирають початок координат (точка O на рис. 10):

$$I_\rho = \int_F \rho^2\, dF, \quad \rho = \sqrt{y^2 + z^2}. \tag{14}$$

Моменти інерції вимірюють в одиницях довжини в четвертому степені (наприклад, $м^4$).

Зі співвідношень (12) – (14) випливає, що при $F > 0$:

1) ***осьові*** і ***полярний*** моменти завжди ***більше нуля***:

$$I_y > 0; \quad I_z > 0; \quad I_\rho > 0;$$

2) величина ***відцентрового моменту*** інерції I_{yz} може бути ***додатною***, ***від'ємною*** або такою, що ***дорівнює нулю***.

Правило симетрії

Якщо переріз має ***вісь симетрії***, то в системі координат, що містять цю вісь, відцентровий момент інерції тотожно ***дорівнює нулю***. Справедливість цього правила очевидна з рис. 3.

- Пара ортогональних осей, відносно яких $I_{yz} = 0$, називаються ***головними осями інерції*** перерізу.

Таким чином, якщо одна з двох осей є віссю симетрії, то вона і будь-яка перпендикулярна їй будуть головними осями інерції, оскільки відносно цих осей відцентровий момент інерції дорівнює нулю.

Зауваження

Момент інерції складеного перерізу, що складається з n простих частин, дорівнює сумі моментів інерції його простих складових частин відносно тієї ж осі:

$$I_y = \sum_{i=1}^{n} I_y^{(i)}; \qquad I_z = \sum_{i=1}^{n} I_z^{(i)}; \qquad I_{yz} = \sum_{i=1}^{n} I_{yz}^{(i)},$$

де $I_y^{(i)}$, $I_z^{(i)}$, $I_{yz}^{(i)}$ – моменти інерції i-ї простої складової частини перерізу;

n – кількість складових частин усього перерізу.

5. Зв'язок між величинами I_ρ, I_y і I_z

За визначенням (14)

$$I_\rho = \int_F \rho^2 \, dF.$$

Якщо полюс O збігається з початком координат системи осей yOz, то

$$\rho^2 = z^2 + y^2$$

і тому

$$I_\rho = \int_F \rho^2 \, dF = \int_F (z^2 + y^2) \, dF = \int_F z^2 \, dF + \int_F y^2 \, dF = I_y + I_z. \qquad (15)$$

Таким чином, сума осьових моментів інерції перерізу відносно ***ортогональних*** осей y і z дорівнює полярному моменту інерції перерізу відносно початку координат і є інваріантною при повороті системи координат.

6. Приклади визначення моментів інерції найпростіших геометричних фігур

Приклад 1

Визначити моменти інерції прямокутного перерізу, показаного на рис. 11, відносно осей y і z, які є осями симетрії перерізу.

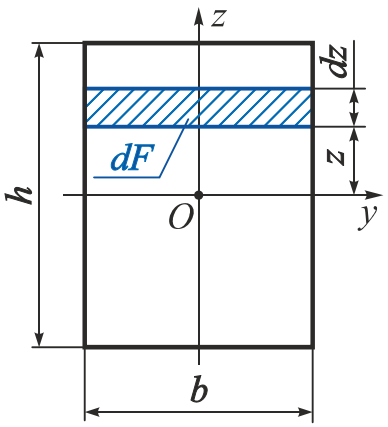


Рис. 11

Дано: h, b, O – центр ваги перерізу.
Необхідно знайти I_y, I_z, I_{yz}, I_ρ.

Розв'язання

1. Визначимо момент інерції відносно осі y.

Виділимо в прямокутнику на відстані z від осі y елементарну площадку шириною b і висотою dz. Площа цієї площадки

$$dF = bdz.$$

Підставимо значення dF в формулу (12) для обчислення осьового моменту інерції

$$I_y = \int_F z^2 dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} bz^2 dz = b\frac{z^3}{3}\Big|_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} = \frac{b}{3}\left(\frac{h^3}{8} + \frac{h^3}{8}\right) = \frac{bh^3}{12}.$$

2. Визначимо момент інерції відносно осі z.

Виконаємо викладки, аналогічні попереднім, одержимо

$$I_z = \frac{hb^3}{12}.$$

3. Оскільки y і z – осі симетрії перерізу, то вони є головними центральними осями перерізу. Отже, відцентровий момент інерції перерізу відносно системи осей yOz дорівнює нулю:

$$I_{yz} = 0.$$

4. Визначимо полярний момент інерції

$$I_\rho = I_y + I_z = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) = \frac{F}{12}(h^2 + b^2).$$

Приклад 2

Визначити моменти інерції перерізу коробчастого типу за умови, що осі y і z – осі симетрії перерізу (рис. 12).

Дано: B, H, b, h.
Необхідно знайти I_y, I_z, I_{yz}.

Розв'язання

1. Оскільки осі y і z – осі симетрії перерізу, то вони є головними центральними осями цього перерізу, тому положення центра ваги цього перерізу визначено – точка перетину осей y і z (точка O), тоді

$$I_{yz} = 0.$$

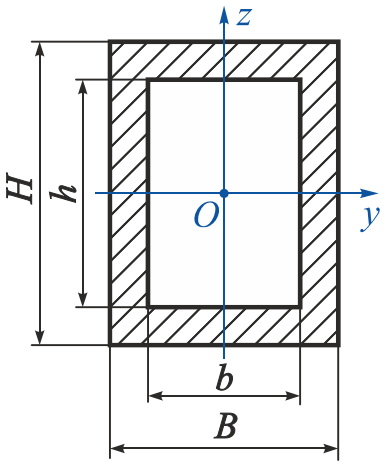


Рис. 12

2. Знайдемо I_y. Інтеграл суми дорівнює сумі інтегралів, тому

$$I_y = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12}.$$

3. Визначимо за аналогією

$$I_z = \frac{HB^3}{12} - \frac{hb^3}{12}.$$

Приклад 3

Визначити моменти інерції круглого перерізу (рис. 13) відносно центральних осей y і z.

Дано: d.
Необхідно знайти I_y, I_z, I_{yz}, I_ρ.

Розв'язання

1. Визначимо полярний момент інерції I_ρ.

Виділимо в круглому перерізі елементарну кільцеву площадку товщиною $d\rho$ і радіусом ρ. Площа цієї площадки $dF = 2\pi\rho d\rho$.

Підставимо значення dF в формулу (14):

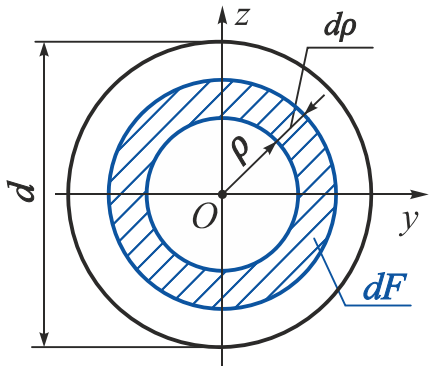


Рис. 13

$$I_\rho = \int_F \rho^2 dF = \int_0^{\frac{d}{2}} 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{\frac{d}{2}} = \frac{2\pi d^4}{4 \cdot 16} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

2. Визначимо осьові моменти інерції I_y і I_z.

Осьові моменти інерції круглого перерізу відносно всіх осей, що проходять через центр ваги, мають однакове значення, тобто $I_y = I_z$.

Тоді

$$I_\rho = I_y + I_z = 2I_y = 2I_z.$$

Звідси

$$I_y = I_z = \frac{I_\rho}{2} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

3. Оскільки осі y і z – осі симетрії перерізу, то вони є головними центральними осями перерізу. Отже, відцентровий момент інерції перерізу відносно системи осей yOz дорівнює нулю:

$$I_{yz} = 0.$$

Приклад 4

Визначити моменти інерції кільцевого перерізу відносно центральних осей y і z (рис. 14).

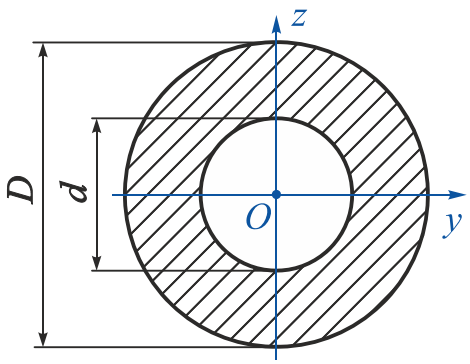


Рис. 14

Дано: D, d, $\alpha = {}^{d}/_{D}$.

Необхідно знайти I_y, I_z, I_{yz}, I_ρ.

Розв'язання

1. Оскільки осі y і z – осі симетрії перерізу, то вони є головними центральними осями цього перерізу і точка O – центр ваги, то

$$I_{yz} = 0.$$

2. Визначимо полярний момент інерції

$$I_\rho = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \{\text{з урахуванням } d = \alpha D\} = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4).$$

3. Знайдемо осьові моменти інерції відносно осей y і z.

Осьові моменти інерції кільцевого перерізу відносно всіх осей, що проходять через центр ваги, мають однакове значення, тобто $I_y = I_z$.

Тоді

$$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \{\text{з урахуванням } d = \alpha D\} = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4).$$

Приклад 5

Визначити моменти інерції прямокутного трикутника відносно осей, що збігаються з катетами (рис. 15).

Дано: h, b.
Необхідно знайти I_{y_1}, I_{z_1}, $I_{y_1z_1}$.

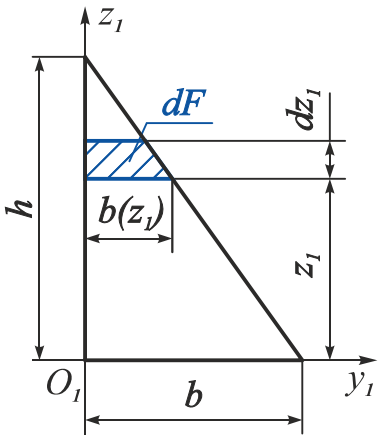


Рис. 15

Розв'язання

1. Знайдемо осьовий момент інерції відносно осі y_1.

Виділимо в прямокутному трикутнику на відстані z_1 від осі y_1 елементарну площадку шириною $b(z_1)$ і висотою dz_1. Площа цієї площадки

$$dF = b(z_1)dz_1.$$

З подоби трикутників визначимо $b(z_1)$:

$$\frac{b(z_1)}{b} = \frac{h - z_1}{h} \quad \Rightarrow \quad b(z_1) = b\left(1 - \frac{z_1}{h}\right).$$

Тоді

$$I_{y_1} = \int_F z_1^2 dF = \int_0^h bz_1^2 \left(1 - \frac{z_1}{h}\right)^2 dz_1 = b\left(\frac{z_1^3}{3} - \frac{z_1^4}{4h}\right)\Bigg|_0^h = \frac{bh^3}{12}.$$

2. За аналогією знайдемо осьовий момент інерції відносно осі z_1

$$I_{z_1} = \frac{hb^3}{12}.$$

3. Обчислимо відцентровий момент інерції відносно осей y_1 і z_1

$$I_{y_1z_1} = \int_0^h y_1 z_1 dF = \int_0^h z_1 \left(\int_0^{b(z_1)} y_1 dy_1 \right) dz_1 = \int_0^h z_1 \frac{b^2(z_1)}{2} dz_1.$$

Після підстановки $b(z_1)$ отримаємо

$$I_{y_1z_1} = \int_0^h \frac{b^2}{2} z_1 \left(1 - \frac{z_1}{h}\right)^2 dz_1 = \frac{b^2}{2}\left(\frac{z_1^2}{2} - \frac{2}{3}\frac{z_1^3}{h} + \frac{z_1^4}{4h^2}\right)\Bigg|_0^h =$$

$$= \frac{b^2h^2}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) = +\frac{b^2h^2}{24}.$$

Приклад 6

Визначити моменти інерції прямокутного трикутника відносно центральних осей y і z (рис. 6).

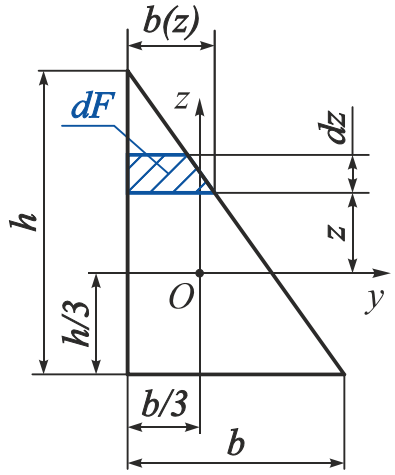


Рис. 16

Дано: h, b.

Необхідно знайти I_y, I_z, I_{yz}.

Розв'язання

1. Знайдемо осьовий момент інерції відносно осі y.

Виділимо в прямокутному трикутнику на відстані z від осі y елементарну площадку шириною $b(z)$ і висотою dz. Площа цієї площадки

$$dF = b(z)dz.$$

З подоби трикутників визначимо $b(z)$:

$$\frac{b(z)}{b} = \frac{\frac{2h}{3} - z}{h} \quad \Rightarrow \quad b(z) = \frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - z\right).$$

Тоді

$$I_y = \int\limits_F z^2 dF = \int\limits_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} z^2 \frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - z\right) dz = \frac{b}{3h}\left(\frac{2hz^3}{3} - \frac{3z^4}{4}\right)\Bigg|_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} =$$

$$= \frac{b}{3h}\left[\frac{2h\left(\frac{2}{3}h\right)^3}{3} - \frac{3\left(\frac{2}{3}h\right)^4}{4} - \frac{2h\left(-\frac{h}{3}\right)^3}{3} + \frac{3\left(-\frac{h}{3}\right)^4}{4}\right] = \frac{bh^3}{36}.$$

2. За аналогією знайдемо осьовий момент інерції відносно осі z

$$I_z = \frac{hb^3}{36}.$$

3. Обчислимо відцентровий момент інерції відносно осей y і z

$$I_{yz} = \int\limits_0^h yzdF = \int\limits_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} z\left(\int\limits_{-\frac{b}{3}}^{b(z)-\frac{b}{3}} ydy\right) dz = \int\limits_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} z\frac{\left(\frac{b}{h}\left(\frac{2h}{3} - z\right) - \frac{b}{3}\right)^2 - \left(-\frac{b}{3}\right)^2}{2} dz =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{-\frac{h}{3}}^{\frac{2}{3}h} \left(-\frac{2}{3}\frac{b^2z^2}{h} + \frac{b^2z^3}{h^2}\right) dz = \frac{b^2h^2}{2}\left(-\frac{16}{3\cdot 81} + \frac{4}{81} - \frac{2}{3\cdot 81} - \frac{1}{8\cdot 81}\right) = -\frac{b^2h^2}{72}.$$

Зауваження

1. Будь-який трикутник можна подати як комбінацію прямокутних трикутників, що дозволяє використовувати отримані співвідношення для визначення моментів інерції довільних трикутних перерізів.

2. Відцентровий момент інерції прямокутного трикутника відносно його центральних осей, паралельних катетам, може бути як додатним, так і від'ємним. Знак I_{yz} визначається взаєморозміщенням трикутника і його центральних осей. Розглянемо варіанти цього взаєморозміщення (рис. 17).

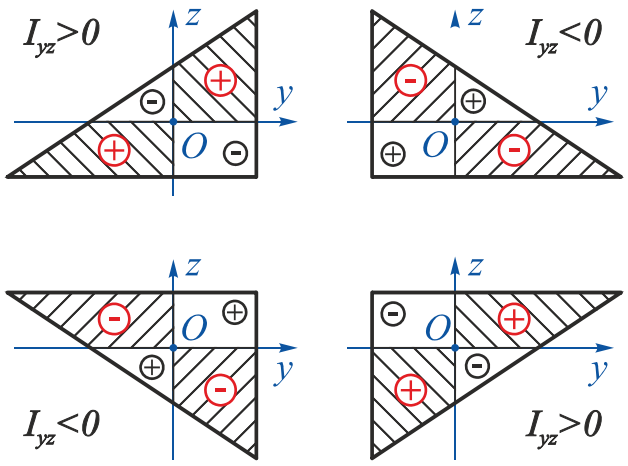


Рис. 17

Оскільки

$$I_{yz} = \int_F yzdF \quad \text{і} \quad dF > 0,$$

то знак I_{yz} визначається знаком добутку yz, який є додатним в першій і третій чвертях і від'ємним в другій і четвертій. Якщо креслення перерізу виконано в масштабі, то в більшості випадків можна візуально визначити знак I_{yz}. На рисунках заштриховано області, що переважають у процесі підсумовування (інтегрування) величин $yzdF$, що і визначає знак I_{yz}. Тому остаточно

$$I_{yz} = \pm\frac{b^2h^2}{72},$$

і знак вибирають або формально за результатами викладок, або з цих простих міркувань, які потребують розуміння сенсу операції інтегрування.

7. Зміна осьових і відцентрових моментів інерції перерізу при паралельному перенесенні осей

У розрахунках на міцність інженерних конструкцій і споруд часто виникає необхідність визначення осьових і відцентрових моментів інерції складних перетинів відносно осей, ***довільно*** розташованих відносно ***центральних***. Такі осьові і відцентрові моменти інерції можуть бути знайдені шляхом виконання двох операцій – паралельного перенесення і повороту відносно початку координат.

Розглянемо обчислення осьових і відцентрових моментів інерції при переході до осей, які паралельні центральним (рис. 18).

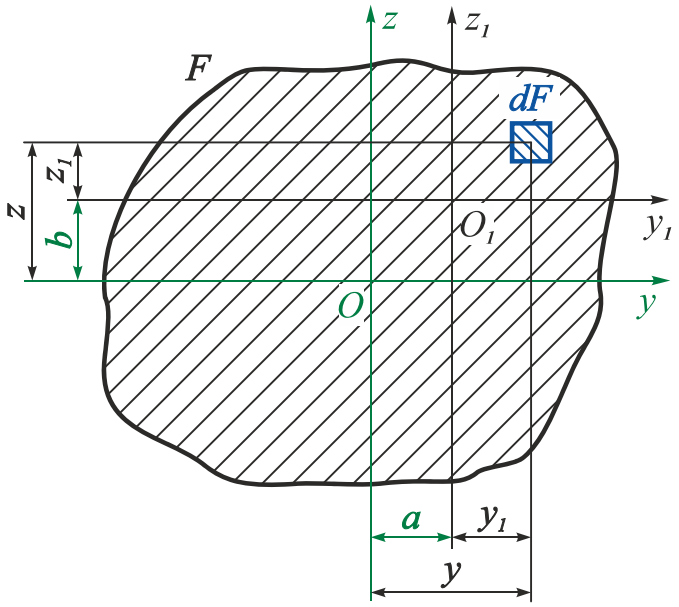


Рис. 18

Дано: F, a, b, I_y, I_z, I_{yz}; осі y і z є центральними осями перерізу F, тобто

$$S_y = \int_F z dF = 0,$$

$$S_z = \int_F y dF = 0.$$

Необхідно знайти I_{y_1}, I_{z_1}, $I_{y_1 z_1}$.

За визначенням (12), (13)

$$I_{y_1} = \int_F z_1^2 \, dF;$$

$$I_{z_1} = \int_F y_1^2 \, dF; \qquad (16)$$

$$I_{y_1 z_1} = \int_F y_1 z_1 \, dF.$$

З рис. 18 видно, що

$$z_1 = z - b,$$
$$y_1 = y - a. \qquad (17)$$

Підставивши значення z_1 і y_1 з рівнянь (17) у співвідношення (16), одержимо

$$I_{y_1} = \int_F (z-b)^2\, dF = \int_F z^2 dF - 2b \int_F z dF + b^2 \int_F dF\,;$$

$$I_{z_1} = \int_F (y-a)^2\, dF = \int_F y^2 dF - 2a \int_F y dF + a^2 \int_F dF\,;$$

$$I_{y_1 z_1} = \int_F (z-b)\,(y-a) dF = \int_F yz dF - b \int_F y dF - a \int_F z dF + ab \int_F dF.$$

У правих частинах цих співвідношень

$$\int_F z^2\, dF = I_y; \qquad \int_F y^2\, dF = I_z; \qquad \int_F yz\, dF = I_{yz}; \qquad \int_F dF = F;$$

$$\int_F z dF = S_y = 0; \qquad \int_F y dF = S_z = 0,$$

і всі ці величини задано, тому остаточно отримаємо

$$\begin{aligned} I_{y_1} &= I_y + b^2 F; \\ I_{z_1} &= I_z + a^2 F; \\ I_{yz} &= I_{yz} + abF. \end{aligned} \tag{18}$$

Таким чином, осьовий момент інерції плоского перерізу відносно деякої осі, що лежить в площині перерізу фігури і є паралельною центральній осі, дорівнює осьовому моменту інерції цієї фігури відносно центральної осі плюс добуток площі перерізу фігури на квадрат координати центра ваги перерізу в новій системі координат.

Відцентровий момент інерції перерізу відносно пари ортогональних осей, що лежать в площині перерізу і є паралельними центральним, дорівнює відцентровому моменту інерції перерізу відносно пари ортогональних центральних осей плюс добуток площі перерізу на координати центра ваги перерізу в новій системі координат. При визначенні ***відцентрового моменту інерції*** обов'язково ***враховують знаки координат*** відносно заданих осей.

Зауваження З перших двох співвідношень системи (18) випливає, що з усієї безлічі осей, паралельних якомусь координатному напрямку, центральна вісь вирізняється тим, що осьовий момент інерції відносно цієї осі має мінімальне значення.

8. Зміна осьових і відцентрових моментів інерції перерізу при повороті осей

Дано: F, I_y, I_z, I_{yz}, α. Система y_1Oz_1 отримана з вихідної шляхом повороту її на кут α відносно початку координат (показаний на рис. 19 напрямок повороту – проти годинникової стрілки – будемо вважати додатним).

Необхідно визначити I_{y_1}, I_{z_1}, $I_{y_1z_1}$.

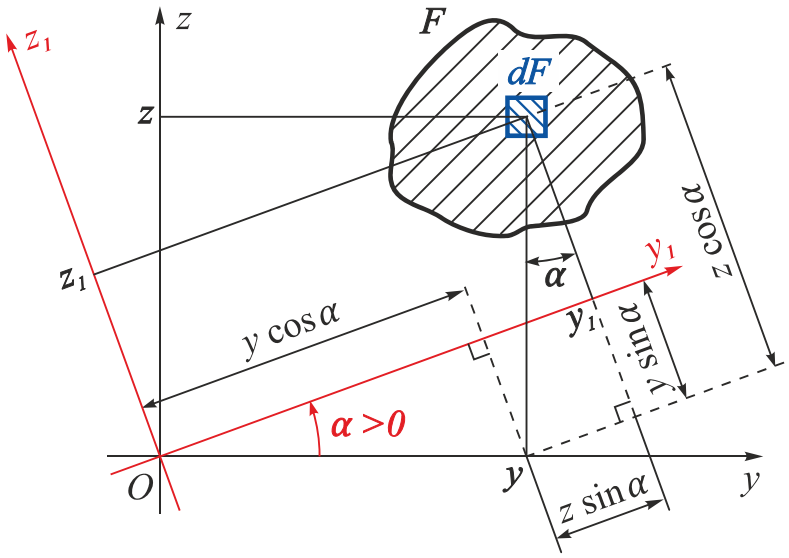


Рис. 19

За визначенням (12), (13)

$$I_{y_1} = \int_F z_1^2\, dF;$$
$$I_{z_1} = \int_F y_1^2\, dF; \qquad (19)$$
$$I_{y_1z_1} = \int_F y_1 z_1\, dF.$$

З рис. 16 видно, що

$$z_1 = z\cos\alpha - y\sin\alpha;$$
$$y_1 = y\cos\alpha + z\sin\alpha. \qquad (20)$$

Підставимо значення z_1 і y_1 у вирази системи (19):

$$I_{y_1} = \int_F (z\cos\alpha - y\sin\alpha)^2\, dF =$$
$$= \cos^2\alpha \int_F z^2 dF - 2\sin\alpha\cos\alpha \int_F yz dF + \sin^2\alpha \int_F y^2 dF; \qquad (21)$$

$$I_{z_1} = \int_F (y\cos\alpha + z\sin\alpha)^2\, dF = \\ = \cos^2\alpha \int_F y^2 dF + 2\sin\alpha\cos\alpha \int_F yzdF + \sin^2\alpha \int_F z^2 dF. \tag{22}$$

З урахуванням того, що у виразах (21) і (22)

$$\int_F z^2\, dF = I_y; \qquad \int_F y^2\, dF = I_z; \qquad \int_F yz\, dF = I_{yz}; \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha,$$

і всі ці величини задано, отримаємо остаточно вираз для визначення осьових моментів інерції перерізу при повороті осей:

$$I_{y_1} = I_y\cos^2\alpha + I_z\sin^2\alpha - I_{yz}\sin 2\alpha\,; \\ I_{z_1} = I_z\cos^2\alpha + I_y\sin^2\alpha + I_{yz}\sin 2\alpha. \tag{23}$$

Перейдемо до знаходження відцентрового моменту інерції перерізу:

$$I_{y_1z_1} = \int_F (z\cos\alpha - y\sin\alpha)\,(y\cos\alpha + z\sin\alpha)dF = \\ = \cos^2\alpha \int_F yzdF - \sin\alpha\cos\alpha \int_F y^2 dF + \sin\alpha\cos\alpha \int_F z^2 dF - \sin^2\alpha \int_F yzdF = \\ = (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) \int_F yzdF + 2\sin\alpha\cos\alpha \frac{1}{2}\left(\int_F z^2 dF - \int_F y^2 dF\right).$$

З урахуванням того, що в цьому виразі

$$\int_F z^2\, dF = I_y; \qquad \int_F y^2\, dF = I_z; \qquad \int_F yz\, dF = I_{yz}; \\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos 2\alpha\,; \qquad 2\sin\alpha\cos\alpha = \sin 2\alpha,$$

і всі ці величини задано, отримаємо остаточно

$$I_{y_1z_1} = I_{yz}\cos 2\alpha + \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha. \tag{24}$$

Зауваження

1. У формулах (23), (24) вихідні осі – ***довільні*** (не обов'язково центральні).
2. Вирази (23), (24) є періодичними функціями з найменшим періодом π і залежать від α.
3. При повороті осей на $\pi/2$ відцентровий момент інерції змінює свій знак, а осьові моменти інерції завжди залишаються додатними (при будь-якому α).

9. Інваріантність суми осьових моментів інерції перерізу відносно повороту осей

Знайдемо суму осьових моментів інерції з рівнянь (23):

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y \cos^2\alpha + I_z \sin^2\alpha - I_{yz} \sin 2\alpha + I_z \cos^2\alpha + I_y \sin^2\alpha + I_{yz} \sin 2\alpha = \\ = I_y(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + I_z(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha).$$

Звідси з урахуванням того, що $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, отримаємо

$$I_{y_1} + I_{z_1} = I_y + I_z = I_\rho = const. \qquad (25)$$

Це положення, по суті, вже доведено раніше (див. розд. 5). Було показано (див. рівняння (15)), що

$$I_\rho = I_y + I_z.$$

Таким чином, при фіксованому положенні полюса величина I_ρ не змінюється або, іншими словами, ***сума двох осьових моментів інерції*** відносно будь-якої пари ортогональних осей, що виходять з однієї точки, є ***величиною постійною***.

10. Головні осі й головні моменти інерції перерізу

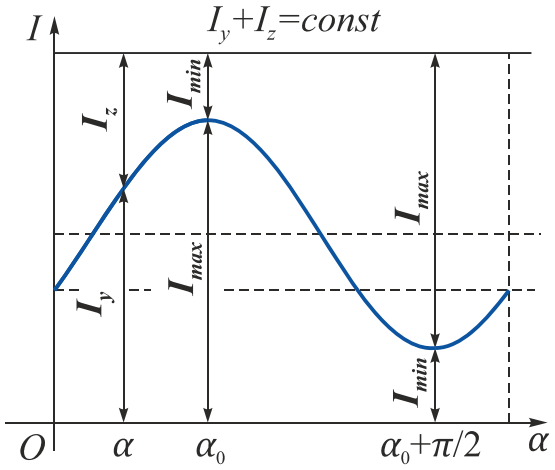


Рис. 20

Із співвідношень (23) видно, що функції $I_{y_1} = f_1(\alpha)$ і $I_{z_1} = f_2(\alpha)$ є безперервними і періодичними з найменшим періодом π. Крім того, як випливає з рівняння (25), сума цих функцій – величина постійна і для перерізу кінцевих розмірів – величина кінцева. Графічно це показано на рис. 20.

Із цього рисунка видно, що в межах періоду існує таке значення $\alpha = \alpha_0$ (а також $\alpha = \alpha_0 + {}^{\pi}/_{2}$), при якому осьові моменти інерції перерізу набувають ***одночасно*** екстремальних значень.

Для визначення величини α_0 продиференціюємо одне зі співвідношень (23) (наприклад, перше) за α і прирівняємо його до нуля:

$$\frac{dI_{y_1}}{d\alpha} = I_y 2\cos\alpha_0\,(-\sin\alpha_0) + I_z 2\sin\alpha_0\cos\alpha_0 - 2I_{yz}\cos 2\alpha_0 = 0.$$

Звідси

$$\left(I_z - I_y\right)\sin 2\alpha_0 = 2I_{yz}\cos 2\alpha_0 \tag{26}$$

і остаточно

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{\left(I_z - I_y\right)}. \tag{27}$$

Визначимо величину відцентрового моменту інерції перерізу при $\alpha = \alpha_0$. Перепишемо вираз (26) у вигляді

$$I_{yz}\cos 2\alpha_0 = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha_0 \tag{28}$$

і підставимо в рівняння (24) значення першого доданка правої частини за формулою (28)

$$I_{y_1 z_1} = \frac{I_z - I_y}{2}\sin 2\alpha_0 + \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha_0 \equiv 0. \tag{29}$$

Таким чином, при $\alpha = \alpha_0$:

1) осьові моменти інерції перерізу набувають одночасно екстремальних значень;

2) відцентровий момент інерції перерізу стає таким, що дорівнює нулю.

На основі отриманих результатів можна сформулювати такі визначення:

- Осі, відносно яких осьові моменти інерції перерізу набувають одночасно екстремальних значень, а відцентровий момент інерції перерізу стає таким, що дорівнює нулю, називаються ***головними осями інерції перерізу***.

- Якщо головні осі інерції перерізу проходять через його центр ваги, то вони називаються ***головними центральними осями інерції перерізу***.

- Осьові моменти інерції перерізу відносно його головних осей називаються ***головними моментами інерції перерізу***.

Положення головних осей інерції перерізу знаходять за формулою (27).

Для визначення величин головних моментів інерції перерізу (при $\alpha = \alpha_0$) перепишемо співвідношення (23), використавши тригонометричні співвідношення

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}; \qquad \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

у вигляді

$$I_{y_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_y - I_z}{2}\cos 2\alpha_0 - I_{yz}\sin 2\alpha_0;$$

$$I_{z_1} = \frac{I_y + I_z}{2} + \frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha_0 + I_{yz}\sin 2\alpha_0;$$

або

$$I_{\substack{max\\min}} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \left(\frac{I_z - I_y}{2}\cos 2\alpha_0 + I_{yz}\sin 2\alpha_0\right). \tag{30}$$

Виключимо з відомих тригонометричних співвідношень

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha_0}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}; \qquad \cos 2\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\alpha_0}}$$

α_0 за допомогою виразу (27) і отримаємо

$$\sin 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{\sqrt{\left(I_z - I_y\right)^2 + 4I_{yz}^2}}; \qquad \cos 2\alpha_0 = \frac{I_z - I_y}{\sqrt{\left(I_z - I_y\right)^2 + 4I_{yz}^2}}.$$

Тоді співвідношення (30) можна записати у вигляді

$$I_{\substack{max\\min}} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \left(\frac{I_z - I_y}{2}\frac{I_z - I_y}{\sqrt{\left(I_z - I_y\right)^2 + 4I_{yz}^2}} + I_{yz}\frac{2I_{yz}}{\sqrt{\left(I_z - I_y\right)^2 + 4I_{yz}^2}}\right).$$

Після перетворень остаточно отримаємо

$$I_{\substack{max\\min}} = I_{\substack{u\\v}} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{yz}^2} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(I_z - I_y\right)^2 + 4I_{yz}^2}. \tag{31}$$

Зауваження

1. Отриманий за допомогою виразу (27) кут α_0 слід відкладати ***проти годинникової стрілки***, якщо $\alpha_0 > 0$, і за ***годинниковою*** стрілкою, якщо $\alpha_0 < 0$.
2. Вісь, відносно якої головний момент інерції перерізу має максимальне значення, знаходиться на ***найкоротшій кутовій відстані*** від тієї центральної осі перерізу (y або z), відносно якої осьовий момент інерції є більшим.
3. З розглянутого раніше правила симетрії випливає, що якщо хоча б одна з осей є віссю симетрії перерізу, то ця система взаємно перпендикулярних осей є системою головних осей інерції перерізу.

Розглянемо окремі випадки.

1. Якщо $I_y = I_z$ і $I_{yz} = 0$, то з формули (24)

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} \cos 2\alpha + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha$$

випливає, що значення відцентрового моменту інерції відносно будь-якої пари взаємно перпендикулярних осей $I_{y_1 z_1}$ дорівнює нулю. Отже, будь-які осі, отримані шляхом повороту системи координат yOz, є головними осями інерції (як і осі y і z). Таким чином,

$$I_y = I_z = I_{max} = I_{min} = const.$$

2. Якщо фігура має більше двох осей симетрії, то її осьові моменти інерції відносно всіх центральних осей дорівнюють один одному.

Направимо одну з осей (y або z) за одною з осей симетрії, а іншу – перпендикулярно до неї. Відносно цих осей відцентровий момент інерції $I_{yz} = 0$. Якщо фігура має більше двох осей симетрії, то будь-яка з них становить гострий кут з віссю z. Позначимо таку вісь z_1, а перпендикулярну до неї вісь – y_1.

Відцентровий момент інерції $I_{y_1 z_1} = 0$, так як вісь z_1 є віссю симетрії. За формулою (24)

$$I_{y_1 z_1} = I_{yz} \cos 2\alpha + \frac{I_y - I_z}{2} \sin 2\alpha = 0,$$

але оскільки

$$I_{yz} = 0,$$

то

$$I_y = I_z.$$

Тоді згідно з пунктом 1 момент інерції відносно будь-якої осі має одне й те ж значення, і будь-які осі, отримані шляхом повороту системи координат yOz, є головними осями інерції.

Із цього випливає, що ***для всіх правильних фігур*** (квадрата, круга, рівностороннього трикутника і т.д.) ***моменти інерції відносно всіх центральних осей дорівнюють один одному, і всі ці осі є головними осями інерції***.

3. Якщо $I_y = I_z$ і $I_{yz} \neq 0$, то за формулою (27)

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{(I_z - I_y)};$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \infty; \qquad 2\alpha_0 = 90°; \qquad \alpha_0 = 45°.$$

У цьому випадку головні осі інерції нахилено до вихідних осей y і z під кутами $45°$.

11. Приклади розв’язання типових задач

Приклад 1

Визначити моменти інерції прямокутного трикутника відносно центральних осей, паралельних катетам, використавши формули паралельного перенесення (рис. 21).

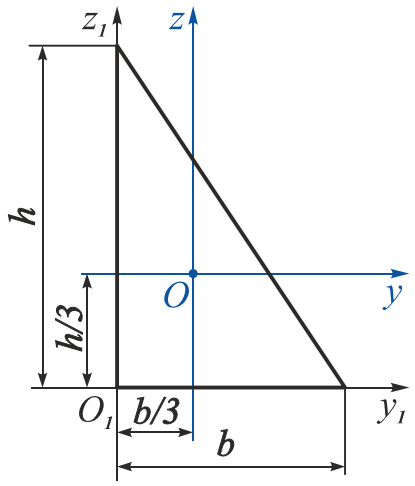


Рис. 21

Дано: h, b.
Необхідно знайти I_y, I_z, I_{yz}.

Розв’язання

Для розв’язання цієї задачі скористаємося результатами прикладу 5 (див. розд. 6) і співвідношеннями (18) паралельного перенесення осей. Однак при цьому необхідно врахувати, що перехід здійснюється від нецентральних осей y_1, z_1 до центральних y, z, тому формули паралельного перенесення будуть мати вигляд

$$I_y = I_{y_1} - b_1^2 F; \qquad I_z = I_{z_1} - a_1^2 F; \qquad I_{yz} = I_{y_1 z_1} - a_1 b_1 F,$$

де

$$b_1 = \frac{h}{3}; \quad a_1 = \frac{b}{3}; \quad F = \frac{bh}{2}; \quad I_{y_1} = \frac{bh^3}{12}; \quad I_{z_1} = \frac{hb^3}{12}; \quad I_{y_1 z_1} = \frac{b^2 h^2}{24}.$$

Визначимо осьові і відцентрові моменти інерції:

$$I_y = \frac{bh^3}{12} - \frac{h^2}{9}\frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36};$$

$$I_z = \frac{hb^3}{12} - \frac{b^2}{9}\frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{36};$$

$$I_{yz} = \frac{b^2 h^2}{24} - \frac{bh}{9}\frac{bh}{2} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$

Розглянутий варіант знаходження моментів інерції прямокутного трикутника відносно центральних осей, паралельних катетам, є менш трудомістким порівняно з варіантом безпосереднього інтегрування за формулами (12), (13) (див. приклад 6 із розд. 6).

Приклад 2

Визначити моменти інерції рівнобедреного трикутника відносно центральних осей yOz (рис. 22).

Дано: h, b.
Необхідно знайти I_y, I_z, I_{yz}.

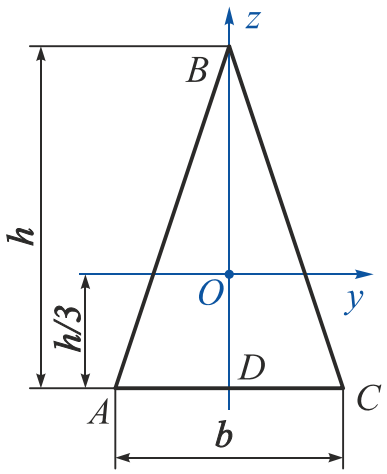


Рис. 22

Розв'язання

1. Розіб'ємо рівнобедрений трикутник ABC на два прямокутних трикутника ABD і BCD.

2. Визначимо I_y.

Момент інерції рівнобедреного трикутника ABC відносно осі y буде дорівнювати сумі осьових моментів трикутників ABD і BCD щодо осі y:

$$I_y = I_y^{(ABD)} + I_y^{(BCD)} = 2I_y^{(ABD)} = 2I_y^{(BCD)} = 2 \cdot \frac{\frac{b}{2}h^3}{36} = \frac{bh^3}{36}.$$

Зауваження Момент інерції будь-якого трикутника відносно центральної осі y, паралельної основі,

$$I_y = \frac{bh^3}{36}.$$

3. Знайдемо I_z.

Момент інерції рівнобедреного трикутника ABC відносно осі z буде дорівнювати сумі осьових моментів трикутників ABD і BCD щодо осі z:

$$I_z = I_z^{(ABD)} + I_z^{(BCD)} = 2I_z^{(ABD)} = 2I_z^{(BCD)} = 2\frac{h\left(\frac{b}{2}\right)^3}{12} = \frac{hb^3}{48}.$$

4. Визначимо I_{yz}.

Оскільки вісь z є віссю симетрії перерізу, то вона й перпендикулярна їй вісь y є головними центральними осями перерізу. Отже, відцентровий момент інерції перерізу відносно системи осей yOz дорівнює нулю:

$$I_{yz} = 0.$$

Приклад 3

Визначити положення головних осей інерції, що проходять через точку A (рис. 23).

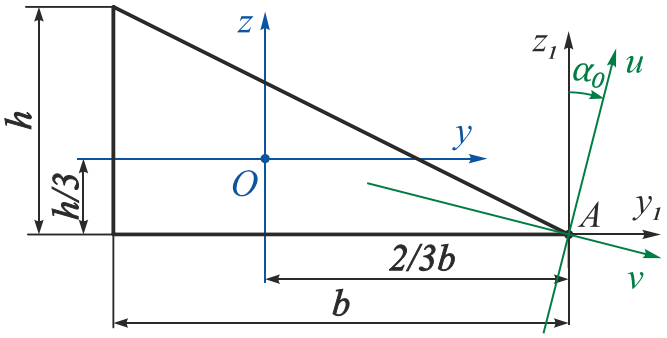


Рис. 23

Дано: $h = 3$ *см*, $b = 6$ *см*.
Необхідно знайти α_0.

Розв'язання

1. Визначимо моменти інерції відносно осей y_1, z_1, що проходять через точку A і є паралельними граням трикутника, скориставшись теоремами про паралельне перенесення осей:

$$I_{y_1} = I_y + \left(\frac{1}{3}h\right)^2 F = \frac{bh^3}{36} + \frac{1}{9}h^2\frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{6\cdot 3^3}{12} = 13{,}5\ см^4;$$

$$I_{z_1} = I_z + \left(\frac{2}{3}b\right)^2 F = \frac{hb^3}{36} + \frac{4}{9}b^2\frac{bh}{2} = \frac{hb^3}{4} = \frac{3\cdot 6^3}{4} = 162\ см^4;$$

$$I_{y_1z_1} = I_{yz} + \left(-\frac{2}{3}b\right)\left(+\frac{1}{3}h\right)F = -\frac{b^2h^2}{72} - \frac{2}{3}b\frac{1}{3}h\frac{bh}{2} = -\frac{b^2h^2}{8} =$$
$$= -\frac{6^2\cdot 3^2}{8} = -40{,}5\ см^4.$$

2. Визначимо кут α_0, на який необхідно повернути осі y_1Az_1, щоб вони стали головними:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{y_1z_1}}{\left(I_{z_1} - I_{y_1}\right)} = \frac{2(-40{,}5)}{162 - 13{,}5} = -0{,}545;$$

$$2\alpha_0 = -28{,}59°;$$

$$\alpha_0 = -14{,}295° = -14°15'32''.$$

Отриманий від'ємний кут α_0 слід відкласти за годинниковою стрілкою. При цьому вісь більшого осьового моменту z_1 стане віссю максимального моменту u, а вісь меншого з осьових моментів y_1 – віссю мінімального моменту v. Таким чином, виконається умова

$$I_u > I_{z_1} > I_{y_1} > I_v.$$

Приклад 4

Визначити головні центральні моменти інерції таврового перерізу (z – вісь симетрії) (рис. 24).

Дано: $h = 16\ см$, $b = 10\ см$, $t = 4\ см$, $d = 2\ см$.

Необхідно знайти I_y, I_z.

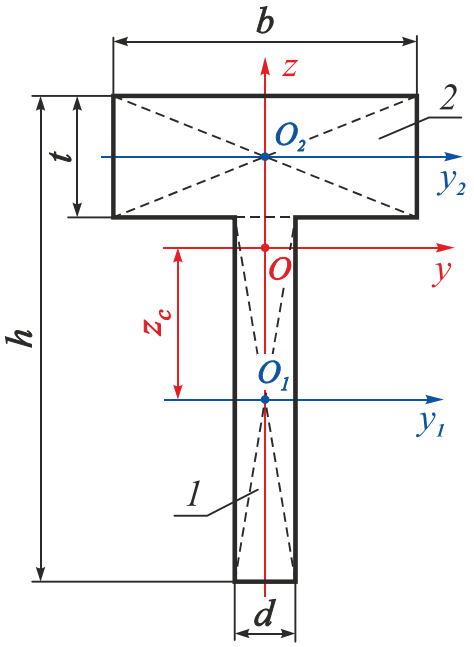


Рис. 24

Розв'язання

1. Оскільки вісь z – вісь симетрії перерізу, то центр ваги лежить на осі z, тобто $y_c = 0$ і $I_{yz} = 0$ (y – будь-яка вісь, перпендикулярна осі z).

Знайдемо другу координату центра ваги. Розіб'ємо переріз на два прямокутника і розташуємо в центрі ваги кожного з них другу центральну вісь y_1 і y_2. Приймемо робочу систему координат zO_1y_1. Тоді

$$z_c = \frac{\sum_{i=1}^{2} S_{y_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{2} F_i} = \frac{S_{y_1}^{(1)} + S_{y_1}^{(2)}}{F_1 + F_2} = \frac{0 + bt\left(\frac{h-t}{2} + \frac{t}{2}\right)}{(h-t)d + bt} = \frac{10 \cdot 4 \cdot \frac{16}{2}}{12 \cdot 2 + 10 \cdot 4} = \frac{320}{64} = 5\ см.$$

2. Обчислимо момент інерції відносно осі z:

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = \frac{(h-t)d^3}{12} + \frac{tb^3}{12} = \frac{(16-4) \cdot 2^3}{12} + \frac{4 \cdot 10^3}{12} = 341{,}333\ см^4.$$

3. Знайдемо момент інерції відносно осі y:

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = 888 + 413{,}333 = 1301{,}333\ см^4;$$

$$I_y^{(1)} = I_{y_1}^{(1)} + z_c^2 F_1 = \frac{d(h-t)^3}{12} + z_c^2(h-t)d =$$

$$= \frac{2(16-4)^3}{12} + 5^2(16-4) \cdot 2 = 888\ см^4;$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2}^{(2)} + \left(\frac{h}{2} - z_c\right)^2 F_2 = \frac{bt^3}{12} + \left(\frac{h}{2} - z_c\right)^2 bt =$$

$$= \frac{10 \cdot 4^3}{12} + \left(\frac{16}{2} - 5\right)^2 \cdot 10 \cdot 4 = 413{,}333\ см^4.$$

Приклад 5

Визначити осьові і відцентрові моменти інерції півкруга радіусом r відносно осей y і z (рис. 24).

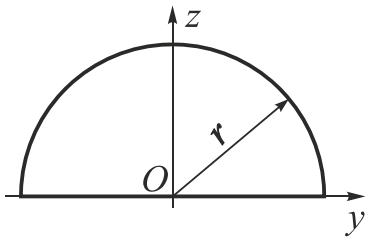


Рис. 25

Дано: r.
Необхідно знайти I_y, I_z, I_{yz}.

Розв'язання

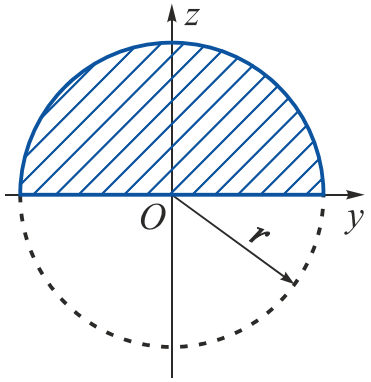


Рис. 26

Доповнимо півкруга до круга (рис. 26). Для круглого поперечного перерізу

$$I_y^{\circ} = I_z^{\circ} = \frac{\pi d^4}{64}; \qquad I_{yz}^{\circ} = 0.$$

Тоді для півкруга як півфігури

$$I_y = I_z = \frac{I_y^{\circ}}{2} = \frac{I_z^{\circ}}{2} = \frac{\pi d^4}{128}; \qquad I_{yz} = \frac{I_{yz}^{\circ}}{2} = 0.$$

Зауваження

1. Для перерізу, що має одну або більше ***пар*** взаємно перпендикулярних осей симетрії, зручно користуватися поняттям «***півфігура***».

Півфігурою називають фігуру, отриману шляхом розсічення плоскої фігури лінією будь-якої форми, але обернено симетричною осям симетрії; при цьому при повороті півфігури на 180° навколо центру ваги всієї фігури вона (півфігура) збігається з другою півфігурою (рис. 27).

Головні центральні осі фігури (див. рис. 27) є головними осями їх півфігур. Це очевидно, якщо провести додаткову лінію A_1O (див. рис. 27, а, б, в, г), симетричну AO, додаткову лінію A_1C (див. рис. 27, д), симетричну AC. У отриманих частин ***I*** і ***II*** півфігури вісь y для частини ***I*** і вісь z для частини ***II*** є осями симетрії і, отже, для всієї півфігури – головними осями інерції.

2. Моменти інерції півфігури відносно осей, що є головними центральними осями всієї фігури, дорівнюють половині величини

моментів інерції відносно відповідних головних центральних осей всієї фігури.

Розглянемо, наприклад, прямокутник на рис. 27, а:

$$I_y(\text{півфігури } ABCD) = I_y(KK_1CD) + I_y(KAO) - I_y(K_1BO).$$

Оскільки $I_y(KAO) = I_y(K_1BO)$, остаточно отримаємо

$$I_y = I_y(KK_1CD) = \frac{1}{2}\cdot\frac{bh^3}{12} = \frac{bh^3}{24}; \qquad I_z = \frac{1}{2}\cdot\frac{hb^3}{12} = \frac{hb^3}{24}.$$

Для півфігури на рис. 27, в $\quad I_y = I_z = \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi d^4}{128}.$

Для півфігури на рис. 27, г $\quad I_y = I_z = \frac{1}{2}\cdot\frac{a^4}{12} = \frac{a^4}{24}.$

Для півфігури на рис. 27, д $\quad I_y = I_z = \frac{1}{2}\cdot\frac{5\sqrt{3}}{16}a^4 = \frac{5\sqrt{3}}{32}a^4.$

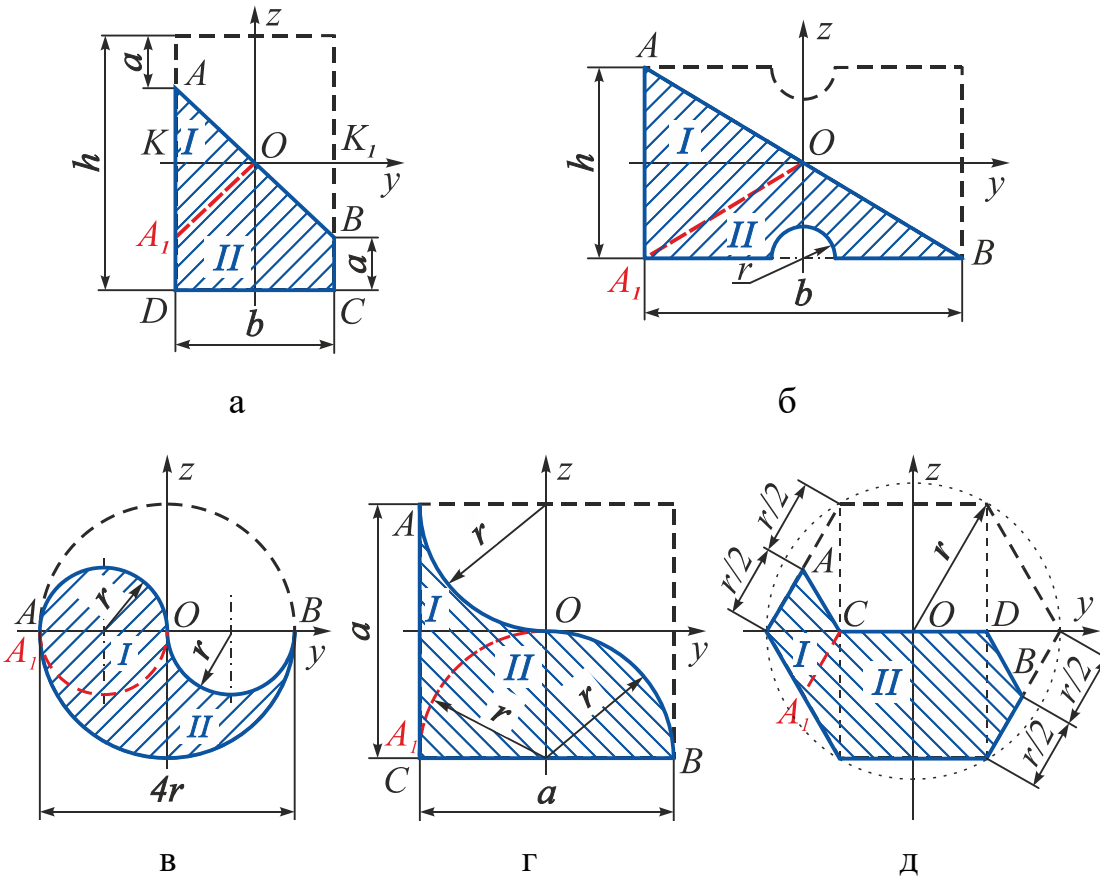


Рис. 27

3. Якщо фігура має дві (див. рис. 27, г) і більше (див. рис. 27, в, д) ***пари*** взаємно перпендикулярних осей симетрії, то будь-які дві взаємно перпендикулярні осі, що проходять через центр ваги всієї фігури, є головними осями півфігури.

Приклад 6

Визначити положення головних центральних осей інерції заданого перерізу та величини головних моментів інерції в системі цих осей (рис. 28).

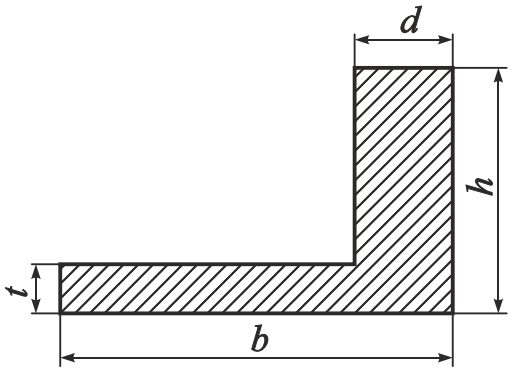


Рис. 28

Дано: $h = 5$ *см*, $b = 8$ *см,* $d = 2$ *см*, $t = 1$ *см*.

Необхідно знайти y_c, z_c, α_0, I_u, I_v.

Розв'язання

1. Виконаємо креслення складеного перерізу в масштабі.

2. Розіб'ємо переріз на найпростіші частини (прямокутник розміром $b \times h$ з вирізом $(b-d) \times (h-t)$) і надамо цим частинам номери 1 і 2 (рис. 29).

3. У центрі ваги кожної з найпростіших частин перерізу розташуємо центральні системи координат $y_i O_i z_i$ (в нашому випадку $y_1 O_1 z_1$ і $y_2 O_2 z_2$).

4. Знайдемо координати центра ваги складеного перерізу.

Виберемо робочу (базову) систему координат, в якій будуть визначено координати центра ваги всього перерізу. Як робочу приймемо систему осей $y_1 O_1 z_1$.

Тоді формули для обчислення координат центра ваги матимуть вигляд

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{2} S_{z_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{2} F_i}; \qquad z_c = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{2} S_{y_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{2} F_i},$$

де площа поперечного перерізу

$$F_1 = bh = 8 \cdot 5 = 40\ см^2; \qquad F_2 = (b-d)(h-t) = (8-2)(5-1) = 24\ см^2;$$

$$F = \sum_{i=1}^{2} F_i = F_1 - F_2 = 40 - 24 = 16\ см^2;$$

статичний момент відносно осі z_1

$$S_{z_1} = \sum_{i=1}^{2} S_{z_1}^{(i)} = S_{z_1}^{(1)} - S_{z_1}^{(2)} = F_1 \cdot 0 - F_2 \left(-\frac{d}{2}\right) = 0 - 24 \cdot (-1) = 24\ см^3;$$

статичний момент відносно осі y_1

$$S_{y_1} = \sum_{i=1}^{2} S_{y_1}^{(i)} = S_{y_1}^{(1)} - S_{y_1}^{(2)} = F_1 \cdot 0 - F_2 \left(\frac{t}{2}\right) = 0 - 24 \cdot \frac{1}{2} = -12\ см^3.$$

Зауваження

1. При обчисленні статичних моментів необхідно враховувати знаки координат центрів ваги складових частин перерізу в робочій (базовій) системі координат.
2. Якщо в складеному перерізі є виріз (отвір), то геометричні характеристики цього вирізу (площа, статичні моменти, моменти інерції) слід віднімати.

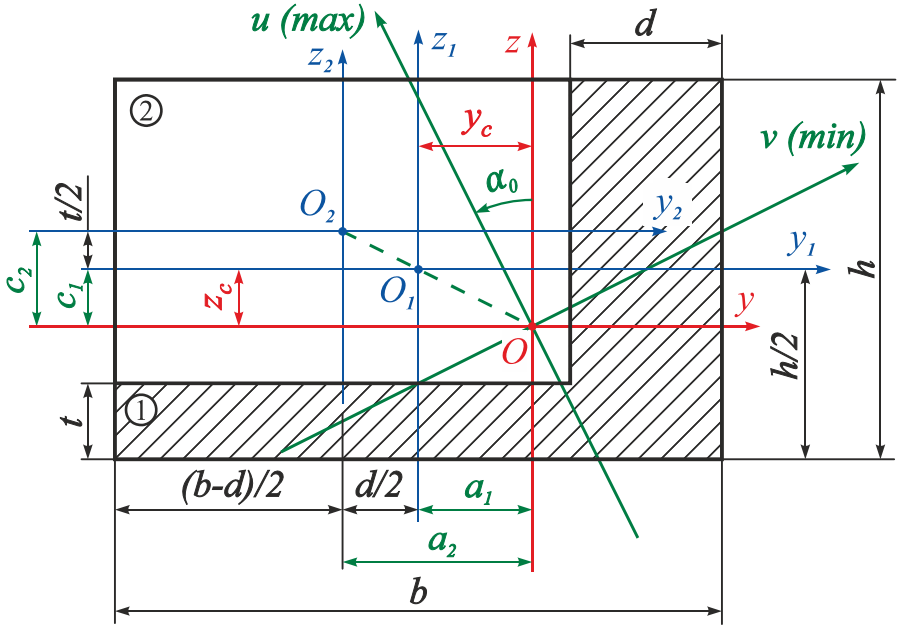


Рис. 29

Обчислимо координати центру ваги O складеного перерізу в системі осей $y_1O_1z_1$:

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{24}{16} = 1{,}5\ см; \qquad z_c = \frac{S_{y_1}}{F} = -\frac{12}{16} = -0{,}75\ см.$$

Відповідно до результатів обчислень покажемо на рис. 29 систему центральних осей yOz і центр ваги складеного перерізу – точку O.

Визначимо координати центрів ваги складових частин перерізу (точок O_1 і O_2) в системі центральних осей yOz:

$$a_1 = -y_c = -1{,}5\ см; \qquad a_2 = -\left(y_c + \frac{d}{2}\right) = -\left(1{,}5 + \frac{2}{2}\right) = -2{,}5\ см;$$

$$c_1 = |z_c| = 0{,}75\ см; \qquad c_2 = |z_c| + \frac{t}{2} = |-0{,}75| + \frac{1}{2} = 1{,}25\ см.$$

Перевірка правильності визначення центра ваги

а) графічна перевірка

Для перевірки правильності знаходження центра ваги з'єднаємо пунктиром точки O_1 і O_2. Точка O має лежати на цій лінії.

Зауваження | Центр ваги складеного перерізу, що містить дві прості частини, ***завжди лежить на лінії, що з'єднує центри ваги простих частин***, і відношення відстаней від центра ваги всієї фігури до центрів ваги складових частин є обернено пропорційним відношенню площ складових частин.

У цьому випадку

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{F_2}{F_1};$$

$$|OO_1| = \sqrt{a_1^2 + c_1^2} = 1{,}677\ см; \qquad |OO_2| = \sqrt{a_2^2 + c_2^2} = 2{,}795\ см;$$

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{1{,}677}{2{,}795} = 0{,}6; \qquad \frac{F_2}{F_1} = \frac{40}{24} = 0{,}6; \qquad 0{,}6 = 0{,}6;$$

б) аналітична перевірка

Скористаємося властивістю центральних осей, згідно з якою статичний момент складеного перерізу відносно центральних осей дорівнює нулю:

$$S_y = \sum_{i=1}^{2} S_y^{(i)} = S_y^{(1)} - S_y^{(2)} = bhc_1 - (b-d)(h-t)c_2 = 60 - 60 = 0\ см^3;$$

$$S_z = \sum_{i=1}^{2} S_z^{(i)} = S_z^{(1)} - S_z^{(2)} = bha_1 - (b-d)(h-t)a_2 = 30 - 30 = 0\ см^3.$$

Таким чином, положення центра ваги складеного перерізу визначено правильно.

5. Знайдемо моменти інерції складеного перерізу в системі центральних осей yOz.

Визначимо осьові і відцентровий моменти інерції складових частин перерізу:

для першого прямокутника

$$I_{y_1} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \cdot 5^3}{12} = 83{,}333\ см^4;$$

$$I_{z_1} = \frac{hb^3}{12} = \frac{5 \cdot 8^3}{12} = 213{,}333\ \ см^4; \qquad I_{y_1 z_1} = 0;$$

для другого прямокутника

$$I_{y_2} = \frac{(b-d)(h-t)^3}{12} = \frac{6 \cdot 4^3}{12} = 32\ см^4;$$

$$I_{z_2} = \frac{(h-t)(b-d)^3}{12} = \frac{4 \cdot 6^3}{12} = 72\ \ см^4; \qquad I_{y_2 z_2} = 0.$$

Зведемо попередньо отримані результати в табл. 1.

Таблиця 1

Частина перерізу	Геометричні характеристики					
	$F_i, см^2$	$I_{y_i}, см^4$	$I_{z_i}, см^4$	$I_{y_i z_i}, см^4$	$a_i, см$	$c_i, см$
1	40	83,333	213,333	0	-1,5	0,75
2	24	32	72	0	-2,5	1,25

Зауваження Всі подальші обчислення необхідно виконувати в системі ***центральних осей*** yOz складеного перерізу.

Знайдемо осьові і відцентровий моменти інерції складеного перерізу в системі центральних осей yOz, використавши формули паралельного перенесення:

$$I_y = I_y^{(1)} - I_y^{(2)} = 105{,}833 - 69{,}5 = 36{,}333\ см^4;$$
$$I_y^{(1)} = I_{y_1} + c_1^2 F_1 = 83{,}333 + 0{,}75^2 \cdot 40 = 105{,}833\ см^4;$$
$$I_y^{(2)} = I_{y_2} + c_2^2 F_2 = 32 + 1{,}25^2 \cdot 24 = 69{,}5\ см^4;$$

$$I_z = I_z^{(1)} - I_z^{(2)} = 303{,}333 - 222{,}0 = 81{,}333\ см^4;$$
$$I_z^{(1)} = I_{z_1} + a_1^2 F_1 = 213{,}333 + (-1{,}5)^2 \cdot 40 = 303{,}333\ см^4;$$
$$I_z^{(2)} = I_{z_2} + a_2^2 F_2 = 72 + (-2{,}5)^2 \cdot 24 = 222{,}0\ см^4;$$

$$I_{yz} = I_{yz}^{(1)} - I_{yz}^{(2)} = -45{,}0 - (-75{,}0) = 30{,}0\ см^4;$$
$$I_{yz}^{(1)} = I_{y_1 z_1} + a_1 c_1 F_1 = 0 + (-1{,}5) \cdot 0{,}75 \cdot 40 = -45{,}0\ см^4;$$
$$I_{yz}^{(2)} = I_{y_2 z_2} + a_2 c_2 F_2 = 0 + (-2{,}5) \cdot 1{,}25 \cdot 24 = -75{,}0\ см^4.$$

Зауваження

1. Величини осьових моментів інерції відносно центральних осей мають бути додатними, що випливає з визначення осьового моменту інерції.
2. Якщо велика площа складеного перерізу знаходиться в першій і третій чвертях, то відцентровий момент інерції буде додатним, якщо в другій і четвертій – від'ємним.

6. Обчислимо положення головних осей інерції перерізу:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot 30{,}0}{81{,}333 - 36{,}333} = 1{,}333;$$

$$2\alpha_0 = 53{,}123°; \qquad \alpha_0 = 26{,}5615° = 26°34'.$$

Оскільки $\alpha_0 > 0$, то поворот осей y і z на цей кут необхідно виконувати проти годинникової стрілки відповідно до прийнятого правила знаків. Отримані в результаті цього повороту осі і будуть головними центральними осями інерції складеного перерізу.

7. Визначимо величини головних моментів інерції перерізу:

$$I\underset{min}{max} = I_{\overset{u}{v}} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{y_0 z_0}^2} =$$

$$= \frac{36{,}333 + 81{,}333}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{81{,}333 - 36{,}333}{2}\right)^2 + 30{,}0^2} = 58{,}833 \pm 37{,}5\ см^4.$$

Звідси

$$I_{max} = I_u = 96{,}333\ см^4;$$

$$I_{min} = I_v = 21{,}333\ см^4.$$

Зауваження | Величини головних центральних моментів інерції мають бути додатними, що випливає з визначення осьового моменту інерції.

За результатами проведеного розрахунку покажемо на рис. 29 головні центральні осі інерції складеного перерізу – осі u і v.

Оскільки $I_z > I_y$, то максимальне значення осьовий момент інерції перерізу має відносно осі, що знаходиться на мінімальній кутовій відстані від осі z.

8. Перевіримо правильність розв'язання задачі:

а) перевіримо виконання співвідношення

$$I_{max} > I_z > I_y > I_{min}\ (\text{якщо}\ I_z > I_y)$$

або

$$I_{max} > I_y > I_z > I_{min}\ \ (\text{якщо}\ I_y > I_z).$$

У даному випадку

$$96{,}333 > 81{,}333 > 36{,}333 > 21{,}333;$$

б) перевіримо сталість суми величин осьових моментів при повороті осей:

$$I_{max} + I_{min} = I_z + I_y;$$

$$96{,}333 + 21{,}333 = 117{,}666; \qquad 81{,}333 + 36{,}333 = 117{,}666;$$

$$117{,}666 = 117{,}666;$$

в) обчислимо відцентровий момент інерції відносно головних центральних осей, який має дорівнювати нулю:

$$I_{uv} = I_{yz}\cos 2\alpha_0 + \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha_0 =$$

$$= 30{,}0 \cdot \cos(2 \cdot 26{,}5615) + \frac{36{,}333 - 81{,}333}{2} \cdot \sin(2 \cdot 26{,}5615) =$$

$$= 30{,}0 \cdot 0{,}6001 + (-22{,}5) \cdot 0{,}7999 = 18{,}003 - 17{,}9978 = 0{,}0052\ м^4.$$

Похибка обчислень

$$\Delta\% = \frac{0{,}0052}{18{,}003} \cdot 100\ \% = 0{,}0289\ \% \leq 1\ \%,$$

значить, задачу розв’язано правильно.

Зауваження

1. Цю задачу можна розв’язувати, використовуючи різні варіанти розбивання перерізу на складові частини (в прикладі 5 розд. 3 при визначенні координат центра ваги використано інше розбивання).
2. Розбивання необхідно виконувати так, щоб можна було мінімізувати обсяг обчислювальної роботи.
3. Остаточний розв’язок при всіх варіантах розбивання має бути однаковим.
4. Якщо складений переріз містить дві однакові частини, що повернені на 90° відносно одна одної, то центр ваги всього перерізу буде лежати на середині лінії, що з’єднує центри ваги складових частин, одна з головних центральних осей перерізу буде збігатися з цією лінією, а інша буде перпендикулярна до неї (рис. 30).

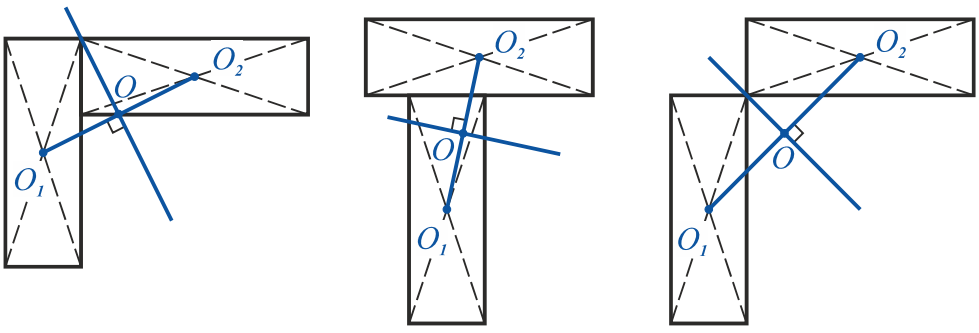


Рис. 30

Приклад 7

Визначити положення головних центральних осей інерції заданого перерізу та величини головних моментів інерції в системі цих осей (рис. 31).

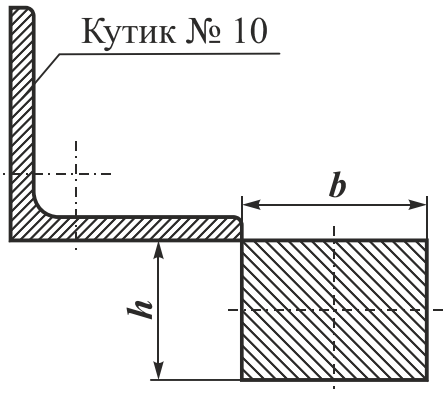


Рис. 31

Дано: $h = 6$ *см*, $b = 8$ *см,* кутик № 10.

Необхідно знайти y_c, z_c, α_0, I_u, I_v.

Розв'язання

1. Виконаємо креслення складеного перерізу в масштабі.

2. Розіб'ємо переріз на найпростіші частини (кутик і прямокутник) і надамо цим частинам номери 1 і 2.

3. У центрі ваги кожної з найпростіших частин перерізу розташуємо центральні системи координат $y_i O_i z_i$ (в даному випадку $y_1 O_1 z_1$ і $y_2 O_2 z_2$).

4. Обчислимо моменти інерції і площу прямокутника, а з таблиць сортаменту випишемо геометричні характеристики кутика № 10, необхідні для розв'язання цієї задачі, і зведемо їх в табл. 2.

Таблиця 2

Частина перерізу	Геометричні характеристики							
	h_i, *см*	b_i, *см*	F_i, *см*^{2}	I_{y_i}, *см*^{4}	I_{z_i}, *см*^{4}	$I_{y_i z_i}$, *см*^{4}	y_0, *см*	z_0, *см*
1 (кутик)	10	10	19,24	178,95	178,95	-110	2,83	2,83
2 (прямокутник)	6	8	48	144	256	0	0	0

Для прямокутника

$$F_2 = bh = 8 \cdot 6 = 48\ см^2; \qquad I_{y_2 z_2} = 0;$$

$$I_{y_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{8 \cdot 6^3}{12} = 144\ см^4; \qquad I_{z_2} = \frac{hb^3}{12} = \frac{6 \cdot 8^3}{12} = 256\ см^4.$$

Зауваження

1. Якщо в складений переріз входять як прості частини прокатні профілі, то їх геометричні характеристики вибирають із таблиць сортаменту.
2. Для рівнополичного кутика $I_y = I_z$.

3. Знак відцентрового моменту кутика визначається його взаєморозміщенням відносно власних центральних осей (рис. 32).

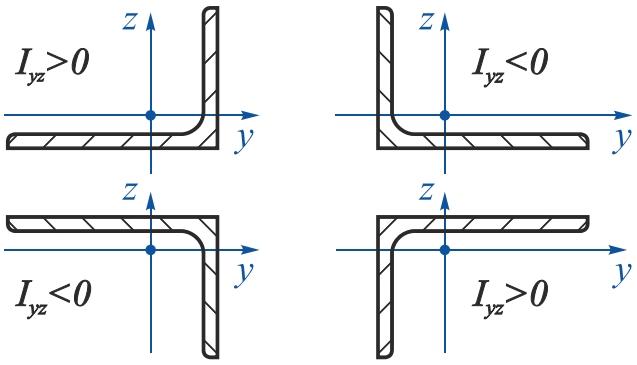


Рис. 32

5. Знайдемо координати центра ваги складеного перерізу.

Виберемо робочу (базову) систему координат, в якій будуть визначено координати центра ваги всього перерізу. Приймемо як робочу таку систему осей, щоб весь переріз знаходився в першій чверті ($y_3O_3z_3$) (рис. 33).

Зауваження Якщо робочу (базову) систему координат вибрано таким чином, що переріз повністю знаходиться в першій чверті, то статичні моменти перерізу відносно базових осей і координати його центра ваги будуть додатними, що зменшує ймовірність помилки при знаходженні положення центра ваги.

Тоді формули для визначення координат центра ваги будуть мати вигляд

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{2} S_{z_3}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{2} F_i}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{2} S_{y_3}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{2} F_i},$$

де $\sum_{i=1}^{2} F_i = F_1 + F_2 = 19{,}24 + 48 = 67{,}24\ см^2;$

$$S_{z_3} = \sum_{i=1}^{2} S_{z_3}^{(i)} = S_{z_3}^{(1)} + S_{z_3}^{(2)} = F_1 \cdot y_0 + F_2\left(b_1 + \frac{b_2}{2}\right) =$$

$$= 19{,}24 \cdot 2{,}83 + 48 \cdot \left(10 + \frac{8}{2}\right) = 726{,}449\ см^3;$$

$$S_{y_3} = \sum_{i=1}^{2} S_{y_3}^{(i)} = S_{y_3}^{(1)} + S_{y_3}^{(2)} = F_1 \cdot (h_2 + z_0) + F_2 \left(\frac{h_2}{2}\right) =$$

$$= 19{,}24 \cdot (6 + 2{,}83) + 48 \cdot \frac{6}{2} = 313{,}889 \text{ см}^3.$$

Обчислимо координати центра ваги O складеного перерізу в системі осей $y_3 O_3 z_3$:

$$y_c = \frac{S_{z_3}}{F} = \frac{726{,}449}{67{,}24} = 10{,}804 \text{ см}; \qquad z_c = \frac{S_{y_3}}{F} = \frac{313{,}889}{67{,}24} = 4{,}668 \text{ см}.$$

Відповідно до результатів обчислень покажемо на рис. 33 систему центральних осей yOz і центр ваги складеного перерізу – точку O.

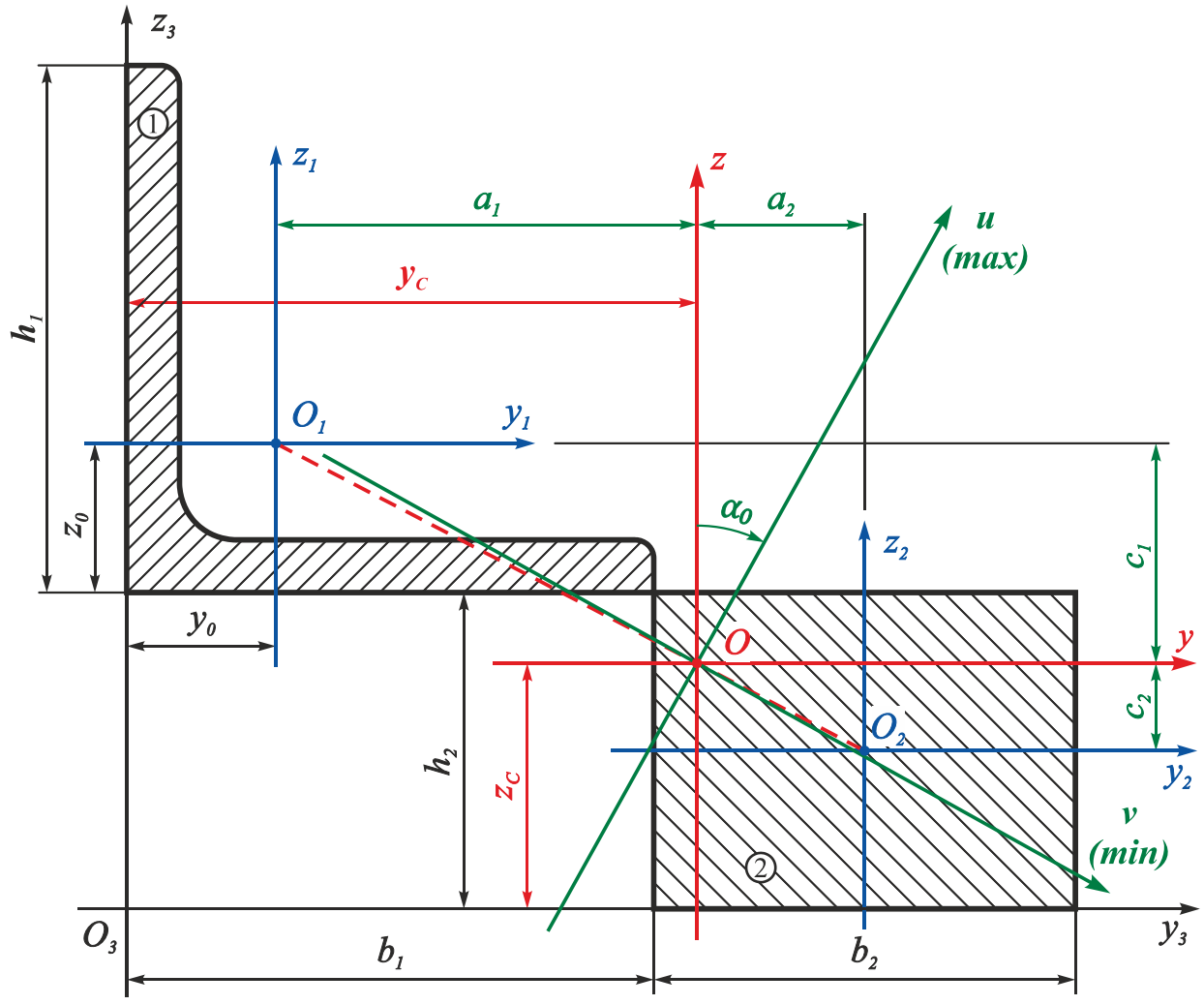


Рис. 33

Визначимо координати центрів ваги складових частин перерізу (точок O_1 і O_2) в системі центральних осей yOz:

$$a_1 = -(y_c - y_0) = -(10{,}804 - 2{,}83) = -7{,}974 \text{ см};$$

$$a_2 = b_1 + \frac{b_2}{2} - y_c = 10 + \frac{8}{2} - 10{,}804 = 3{,}196 \text{ см};$$

$$c_1 = h_2 + z_0 - z_c = 6 + 2{,}83 - 4{,}668 = 4{,}162\ см;$$
$$c_2 = -\left(z_c - \frac{h_2}{2}\right) = -\left(4{,}668 - \frac{6}{2}\right) = -1{,}668\ см.$$

Перевірка правильності визначення центра ваги

а) графічна перевірка

Для перевірки правильності знаходження центра ваги з'єднаємо пунктиром точки O_1 і O_2 (див. рис. 33). Точка O має лежати на цій лінії.

Зауваження | Центр ваги складеного перерізу, що містить дві прості частини, ***завжди лежить на лінії, що з'єднує центри ваги простих частин***. При цьому точка O поділяє відрізок O_1O_2 на частини, обернено пропорційні площам простих частин перерізу:

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{F_2}{F_1};$$

$$|OO_1| = \sqrt{a_1^2 + c_1^2} = 8{,}9976\ см; \qquad |OO_2| = \sqrt{a_2^2 + c_2^2} = 3{,}6051\ см;$$

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{8{,}9976}{3{,}6051} = 2{,}496; \qquad \frac{F_2}{F_1} = \frac{48}{19{,}24} = 2{,}495; \qquad 2{,}496 \approx 2{,}495;$$

б) аналітична перевірка

Скористаємося властивістю центральних осей, згідно з якою статичний момент складеного перерізу відносно центральних осей дорівнює нулю:

$$S_y = \sum_{i=1}^{2} S_y^{(i)} = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} = F_1 c_1 + F_2 c_2 = 19{,}24 \cdot 4{,}162 + 48 \cdot (-1{,}668) =$$
$$= 80{,}077 - 80{,}064 = 0{,}013\ см^3.$$

Відносна похибка

$$\Delta\% = \frac{0{,}013}{80{,}077} \cdot 100\ \% = 0{,}0162\ \% < 1\ \%; \qquad [\Delta\%] \le 1\ \%;$$

$$S_z = \sum_{i=1}^{2} S_z^{(i)} = S_z^{(1)} + S_z^{(2)} = F_1 a_1 + F_2 a_2 = 19{,}24 \cdot (-7{,}974) + 48 \cdot 3{,}196 =$$
$$= -153{,}412 + 153{,}408 = -0{,}004\ см^3.$$

Відносна похибка

$$\Delta\% = \left|\frac{-0{,}004}{153{,}408}\right| \cdot 100\ \% = 0{,}0026\ \% < 1\ \%; \qquad [\Delta\%] \le 1\ \%.$$

Таким чином, положення центра ваги складеного перерізу визначено правильно.

6. Знайдемо осьові і відцентровий моменти інерції складеного перерізу в системі центральних осей yOz, використавши формули паралельного перенесення:

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = 512{,}230 + 280{,}769 = 792{,}999\ см^4;$$

$$I_y^{(1)} = I_{y_1} + c_1^2 F_1 = 178{,}95 + 4{,}162^2 \cdot 19{,}24 = 512{,}230\ см^4;$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2} + c_2^2 F_2 = 144 + (-1{,}668)^2 \cdot 48 = 280{,}769\ см^4;$$

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = 1402{,}319 + 746{,}292 = 2148{,}611\ см^4;$$

$$I_z^{(1)} = I_{z_1} + a_1^2 F_1 = 178{,}95 + (-7{,}974)^2 \cdot 19{,}24 = 1402{,}319\ см^4;$$

$$I_z^{(2)} = I_{z_2} + a_2^2 F_2 = 256 + (3{,}196)^2 \cdot 48 = 746{,}292\ см^4;$$

$$I_{yz} = I_{yz}^{(1)} + I_{yz}^{(2)} = -748{,}533 + (-255{,}885) = -1004{,}418\ см^4;$$

$$I_{yz}^{(1)} = I_{y_1 z_1} + a_1 c_1 F_1 = -110 + (-7{,}974) \cdot 4{,}162 \cdot 19{,}24 = -748{,}533\ см^4;$$

$$I_{yz}^{(2)} = I_{y_2 z_2} + a_2 c_2 F_2 = 0 + 3{,}196 \cdot (-1{,}668) \cdot 48 = -255{,}885\ см^4.$$

Зауваження

1. Величини осьових моментів інерції відносно центральних осей мають бути додатними, що випливає з визначення осьового моменту інерції.
2. Якщо велика площа складеного перерізу знаходиться в першій і третій чвертях, то відцентровий момент інерції буде додатним, якщо в другій і четвертій – від'ємним.

7. Обчислимо положення головних осей інерції перерізу:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot (-1004{,}418)}{2148{,}611 - 792{,}999} = -1{,}482;$$

$$2\alpha_0 = -55{,}99°; \qquad \alpha_0 = -27{,}995° = -27°59'42''.$$

Оскільки $\alpha_0 < 0$, то поворот осей y і z на цей кут необхідно виконувати за годинниковою стрілкою відповідно до прийнятого правила знаків. Отримані в результаті цього повороту осі і будуть головними центральними осями інерції складеного перерізу.

8. Визначимо величини головних моментів інерції перерізу:

$$I_{\substack{max \\ min}} = I_{\substack{u \\ v}} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{y_0 z_0}^2} = \frac{792{,}999 + 2148{,}611}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{2148{,}611 - 792{,}999}{2}\right)^2 + (-1004{,}418)^2} = 1470{,}805 \pm 1211{,}725\ см^4.$$

Звідси

$$I_{max} = I_u = 2682{,}53\ см^4;$$
$$I_{min} = I_v = 259{,}08\ см^4.$$

Зауваження | Величини головних центральних моментів інерції мають бути додатними, що випливає з визначення осьового моменту інерції.

За результатами проведеного розрахунку покажемо на рис. 33 головні центральні осі інерції складеного перерізу – осі u і v.

Оскільки $I_z > I_y$, то максимальне значення осьовий момент інерції перерізу має відносно осі, що знаходиться на мінімальній кутовій відстані від осі z.

9. Перевіримо правильність розв'язання задачі:

а) перевіримо виконання співвідношення

$$I_{max} > I_z > I_y > I_{min}\ (\text{якщо } I_z > I_y)$$

або

$$I_{max} > I_y > I_z > I_{min}\ \ (\text{якщо } I_y > I_z).$$

У даному випадку

$$2682{,}53 > 2148{,}611 > 792{,}999 > 259{,}08;$$

б) перевіримо сталість суми величин осьових моментів при повороті осей:

$$I_{max} + I_{min} = I_z + I_y;$$
$$2682{,}53 + 259{,}08 = 2941{,}61; \qquad 2148{,}611 + 792{,}999 = 2941{,}61;$$
$$2941{,}61 = 2941{,}61;$$

в) обчислимо відцентровий момент інерції відносно головних центральних осей, який має дорівнювати нулю:

$$I_{uv} = I_{yz}\cos 2\alpha_0 + \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha_0 =$$
$$= -1004{,}418 \cdot \cos\big(2 \cdot (-27{,}995)\big) + \frac{792{,}999 - 2148{,}611}{2} \cdot \sin\big(2 \cdot (-27{,}995)\big) =$$
$$= -561{,}808 + 561{,}860 = 0{,}052\ м^4.$$

Похибка обчислень

$$\Delta\% = \left|\frac{0{,}052}{561{,}860}\right| \cdot 100\ \% = 0{,}0093\ \% \le 1\ \%,$$

значить, задачу розв'язано правильно.

Приклад 8

Визначити положення головних центральних осей інерції заданого перерізу та величини головних моментів інерції в системі цих осей (рис. 34).

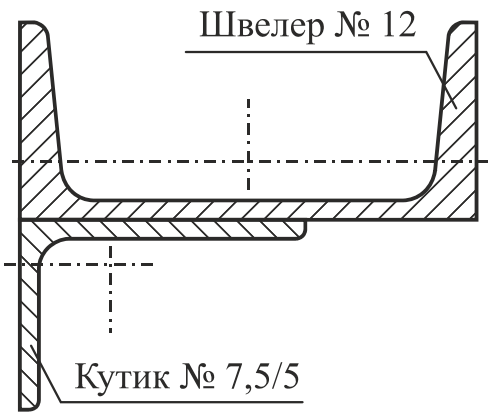


Рис. 34

Дано: швелер № 12, кутик № 7,5/5.

Необхідно знайти y_c, z_c, α_0, I_u, I_v.

Розв'язання

1. Виконаємо креслення складеного перерізу в масштабі.

2. Розіб'ємо переріз на найпростіші частини (швелер та кутик) і присвоїмо цим частинам номери 1 і 2 відповідно.

3. У центрі ваги кожної з найпростіших частин перерізу розташуємо центральні системи координат $y_i O_i z_i$ (в даному випадку $y_1 O_1 z_1$ і $y_2 O_2 z_2$).

4. З таблиць сортаменту випишемо геометричні характеристики швелера № 12 і кутика № 7,5/5, необхідні для розв'язання задачі, і зведемо їх в табл. 3.

Таблиця 3

Частина перерізу	Геометричні характеристики							
	$h_i, см$	$b_i, см$	$F_i, см^2$	$I_{y_i}, см^4$	$I_{z_i}, см^4$	$I_{y_i z_i}, см^4$	$y_{0_i}, см$	$z_{0_i}, см$
1 (швелер)	12,0	5,2	13,3	31,2	304,0	0	0	1,54
2 (кутик)	5,0	7,5	6,11	12,47	34,81	12,0	2,39	1,17

Зауваження

1. Якщо в складений переріз входять як прості частини прокатні профілі, то їх геометричні характеристики вибирають з таблиць сортаменту. При цьому слід враховувати розташування цих частин відносно власних центральних осей.
2. Оскільки вісь y_1 є віссю симетрії швелера, то відцентровий момент інерції швелера $I_{y_1 z_1} = 0$.
3. Знак відцентрового моменту кутика визначається його взаєморозміщенням відносно власних центральних осей (див. рис. 32).

5. Знайдемо координати центра ваги складеного перерізу.

Виберемо робочу (базову) систему координат, в якій будуть визначені координати центра ваги всього перерізу. Як робочу приймемо систему центральних осей швелера $y_1 O_1 z_1$.

Тоді формули для визначення координат центра ваги будуть мати вигляд

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{2} S_{z_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{2} F_i}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{2} S_{y_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{2} F_i},$$

де $\sum_{i=1}^{2} F_i = F_1 + F_2 = 13{,}3 + 6{,}11 = 19{,}41\ см^2$;

$$S_{z_1} = \sum_{i=1}^{2} S_{z_1}^{(i)} = S_{z_1}^{(1)} + S_{z_1}^{(2)} = F_1 \cdot 0 + F_2 \left(-\left(\frac{h_1}{2} - y_{0_2} \right) \right) =$$

$$= 13{,}3 \cdot 0 + 6{,}11 \cdot \left(-\left(\frac{12}{2} - 2{,}39 \right) \right) = -22{,}057\ см^3;$$

$$S_{y_1} = \sum_{i=1}^{2} S_{y_1}^{(i)} = S_{y_1}^{(1)} + S_{y_1}^{(2)} = F_1 \cdot 0 + F_2 \left(-\left(z_{0_1} + z_{0_2} \right) \right) =$$

$$= 13{,}3 \cdot 0 + 6{,}11 \cdot \left(-(1{,}54 + 1{,}17) \right) = -16{,}558\ см^3.$$

Обчислимо координати центра ваги O складеного перерізу в системі осей $y_1 O_1 z_1$:

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{-22{,}057}{19{,}41} = -1{,}136\ см; \qquad z_c = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{-16{,}558}{19{,}41} = -0{,}853\ см.$$

Відповідно до результатів обчислень покажемо на рис. 35 систему центральних осей yOz і центр ваги складеного перерізу – точку O.

Визначимо координати центрів ваги складових частин перерізу (точок O_1 і O_2) в системі центральних осей yOz:

$$a_1 = |y_c| = 1{,}136\ см;$$

$$a_2 = -\left(\frac{h_1}{2} - y_{0_2} - |y_c| \right) = -\left(\frac{12}{2} - 2{,}39 - 1{,}136 \right) = -2{,}474\ см;$$

$$c_1 = |z_c| = 0{,}853\ см;$$

$$c_2 = -\left(z_{0_1} + z_{0_2} - |z_c| \right) = -(1{,}54 + 1{,}17 - 0{,}853) = -1{,}857\ см.$$

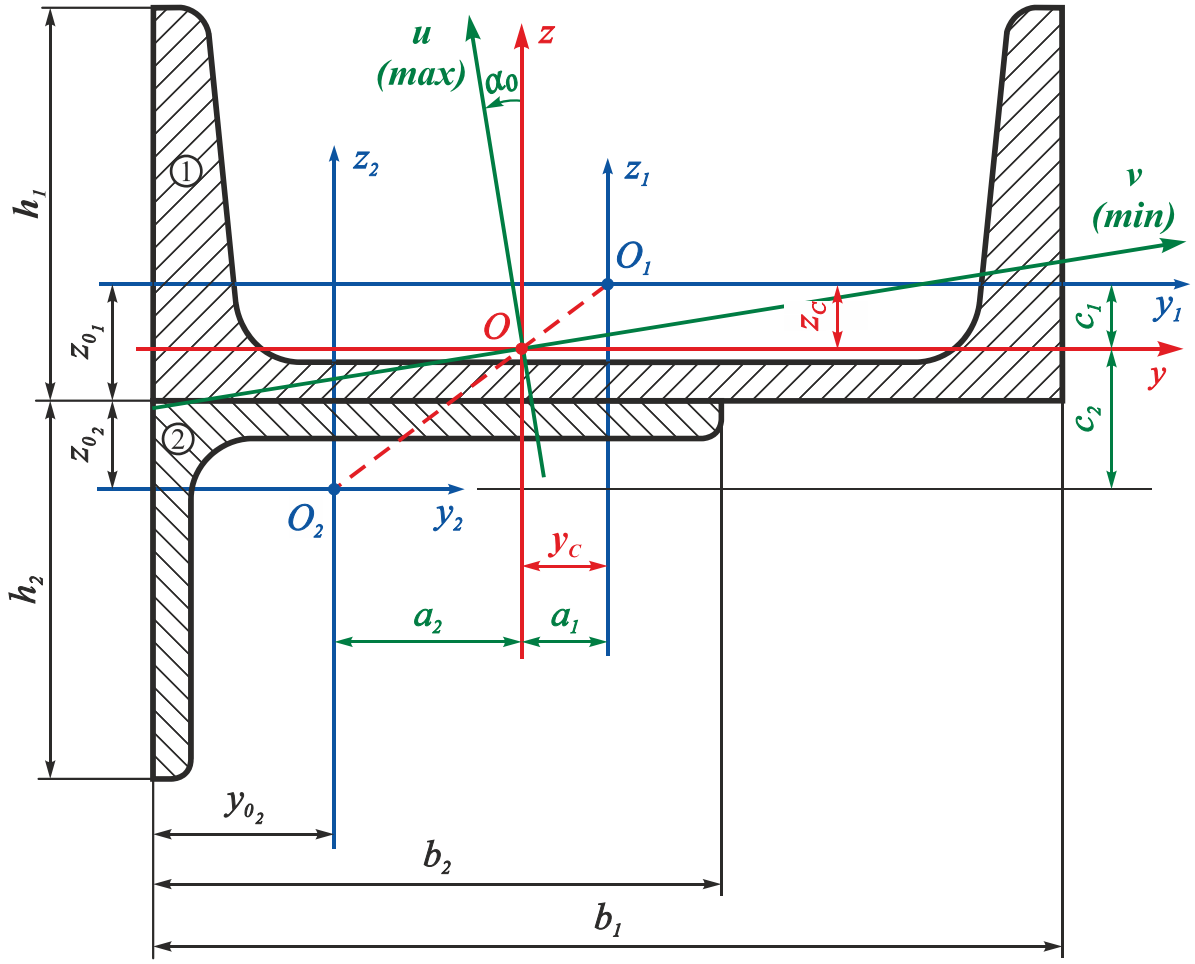


Рис. 35

<u>Перевірка правильності визначення центра ваги</u>:

а) <u>графічна перевірка</u>

Для перевірки правильності знаходження центра ваги з'єднаємо пунктиром точки O_1 і O_2. Точка O має лежати на цій лінії.

<u>Зауваження</u> Центр ваги складеного перерізу, що містить дві прості частини, ***завжди лежить на лінії, що з'єднує центри ваги простих частин***. При цьому точка O поділяє відрізок O_1O_2 на частини, обернено пропорційні площам простих частин перерізу:

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{F_2}{F_1};$$

$$|OO_1| = \sqrt{a_1^2 + c_1^2} = 1{,}421 \text{ см}; \qquad |OO_2| = \sqrt{a_2^2 + c_2^2} = 3{,}094 \text{ см};$$

$$\frac{|OO_1|}{|OO_2|} = \frac{1{,}421}{3{,}094} = 0{,}4593; \qquad \frac{F_2}{F_1} = \frac{6{,}11}{13{,}3} = 0{,}4994; \qquad 0{,}4593 \approx 0{,}4994;$$

б) аналітична перевірка

Скористаємося властивістю центральних осей, згідно з якою статичний момент складеного перерізу відносно центральних осей дорівнює нулю:

$$S_y = \sum_{i=1}^{2} S_y^{(i)} = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} = F_1 c_1 + F_2 c_2 = 13{,}3 \cdot 0{,}853 + 6{,}11 \cdot (-1{,}857) =$$
$$= 11{,}3449 - 11{,}3463 = -0{,}0014\ см^3.$$

Відносна похибка

$$\Delta\% = \left|\frac{-0{,}0014}{11{,}3449}\right| \cdot 100\ \% = 0{,}01234\ \% < 1\ \%; \qquad [\Delta\%] \le 1\ \%;$$

$$S_z = \sum_{i=1}^{2} S_z^{(i)} = S_z^{(1)} + S_z^{(2)} = F_1 a_1 + F_2 a_2 = 13{,}3 \cdot 1{,}136 + 6{,}11 \cdot (-2{,}474) =$$
$$= 15{,}1088 - 15{,}1161 = -0{,}0073\ см^3.$$

Відносна похибка

$$\Delta\% = \left|\frac{-0{,}0073}{15{,}1088}\right| \cdot 100\ \% = 0{,}00483\ \% < 1\ \%; \qquad [\Delta\%] \le 1\ \%.$$

Таким чином, положення центра ваги складеного перерізу визначено правильно.

6. Знайдемо осьові і відцентровий моменти інерції складеного перерізу в системі центральних осей yOz, використавши формули паралельного перенесення:

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} = 40{,}977 + 33{,}540 = 74{,}517\ см^4;$$
$$I_y^{(1)} = I_{y_1} + c_1^2 F_1 = 31{,}3 + 0{,}853^2 \cdot 13{,}3 = 40{,}977\ см^4;$$
$$I_y^{(2)} = I_{y_2} + c_2^2 F_2 = 12{,}47 + (-1{,}857)^2 \cdot 6{,}11 = 33{,}540\ см^4;$$

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} = 321{,}164 + 72{,}207 = 393{,}371\ см^4;$$
$$I_z^{(1)} = I_{z_1} + a_1^2 F_1 = 304{,}0 + 1{,}136^2 \cdot 13{,}3 = 321{,}164\ см^4;$$
$$I_z^{(2)} = I_{z_2} + a_2^2 F_2 = 34{,}81 + (-2{,}474)^2 \cdot 6{,}11 = 72{,}207\ см^4;$$

$$I_{yz} = I_{yz}^{(1)} + I_{yz}^{(2)} = 12{,}888 + 28{,}071 = 52{,}959\ см^4;$$
$$I_{yz}^{(1)} = I_{y_1 z_1} + a_1 c_1 F_1 = 0 + 1{,}136 \cdot 0{,}853 \cdot 13{,}3 = 12{,}888\ см^4;$$
$$I_{yz}^{(2)} = I_{y_2 z_2} + a_2 c_2 F_2 = 12 + (-2{,}474) \cdot (-1{,}857) \cdot 6{,}11 = 40{,}071\ см^4.$$

Зауваження

1. Величини осьових моментів інерції відносно центральних осей мають бути додатними, що випливає з визначення осьового моменту інерції.
2. Якщо велика площа складеного перерізу знаходиться в першій і третій чвертях, то відцентровий момент інерції буде додатним, якщо в другій і четвертій – від'ємним.

7. Обчислимо положення головних осей інерції перерізу:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot 52{,}959}{393{,}371 - 74{,}517} = 0{,}332;$$

$$2\alpha_0 = 18{,}366°; \qquad \alpha_0 = 9{,}183° = 9°10'59''.$$

Оскільки $\alpha_0 > 0$, то поворот осей y і z на цей кут необхідно виконувати проти годинникової стрілки відповідно до прийнятого правила знаків. Отримані в результаті цього повороту осі і будуть головними центральними осями інерції складеного перерізу.

8. Визначимо величини головних моментів інерції перерізу:

$$I_{\substack{max \\ min}} = I_{\substack{u \\ v}} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{y_0 z_0}^2} = \frac{74{,}517 + 393{,}371}{2} \pm$$

$$\pm \sqrt{\left(\frac{393{,}371 - 74{,}517}{2}\right)^2 + (52{,}959)^2} = 233{,}944 \pm 167{,}993 \; см^4.$$

Звідси

$$I_{max} = I_u = 401{,}937 \; см^4;$$
$$I_{min} = I_v = 65{,}951 \; см^4.$$

Зауваження

Величини головних центральних моментів інерції мають бути додатними, що випливає з визначення осьового моменту інерції.

За результатами проведеного розрахунку покажемо на рис. 35 головні центральні осі інерції складеного перерізу – осі u і v.

Оскільки $I_z > I_y$, то максимальне значення осьовий момент інерції перерізу приймає відносно осі, що знаходиться на мінімальній кутовій відстані від осі z.

9. Перевіримо правильність розв'язання задачі:

а) перевіримо виконання співвідношення

$I_{max} > I_z > I_y > I_{min}$ (якщо $I_z > I_y$) або $I_{max} > I_y > I_z > I_{min}$ (якщо $I_y > I_z$).

У даному випадку

$$401{,}937 > 393{,}371 > 74{,}517 > 65{,}951;$$

б) перевіримо сталість суми величин осьових моментів при повороті осей:

$$I_{max} + I_{min} = I_z + I_y;$$

$$401{,}937 + 65{,}951 = 467{,}888; \qquad 393{,}371 + 74{,}517 = 467{,}888;$$

$$467{,}888 = 467{,}888;$$

в) обчислимо відцентровий момент інерції відносно головних центральних осей, який явно має дорівнювати нулю:

$$I_{uv} = I_{yz}\cos 2\alpha_0 + \frac{I_y - I_z}{2}\sin 2\alpha_0 =$$

$$= 52{,}959 \cdot \cos(2 \cdot 9{,}183) + \frac{74{,}517 - 393{,}371}{2} \cdot \sin(2 \cdot 9{,}183) =$$

$$= 52{,}959 \cdot 0{,}949 - 159{,}427 \cdot 0{,}315 = 50{,}2581 - 50{,}2195 = -0{,}0386\ см^4.$$

Похибка обчислень

$$\Delta\% = \left|\frac{-0{,}0386}{50{,}2581}\right| \cdot 100\ \% = 0{,}077\ \% \le 1\ \%,$$

значить, задачу розв'язано правильно.

Приклад 9

Знайти відцентровий момент інерції кутика № 7,5/5 відносно центральних осей, паралельних полицям (рис. 36), якщо є відомим положення головних центральних осей інерції перерізу і величини головних моментів інерції в системі цих осей.

Дано: кутик № 7,5/5.
Необхідно знайти I_{yz}.

Розв'язання

У деяких довідниках не наведено даних щодо відцентрового моменту інерції кутиків відносно центральних осей, паралельних полицям (наприклад ГОСТ 8510-72). З цього ГОСТа виберемо:

$$I_{min} = 7{,}24\ см^4; \qquad I_y = 34{,}81\ см^4;$$

$$I_z = 12{,}47\ см^4; \qquad \operatorname{tg}\alpha = 0{,}436.$$

Для знаходження відцентрового моменту інерції I_{yz} скористаємося формулою зміни відцентрового моменту інерції перерізу при повороті осей (перехід від головних осей до осей yOz):

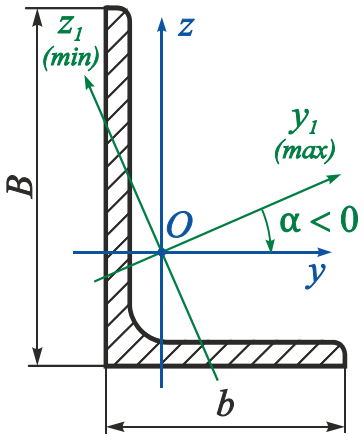


Рис. 36

$$I_{yz} = I_{y_1 z_1} \cos 2\alpha + \frac{I_{max} - I_{min}}{2} \sin 2\alpha.$$

Значення I_{max} обчислимо з умови інваріантності суми осьових моментів інерції відносно повороту осей, тобто із співвідношення

$$I_{max} + I_{min} = I_y + I_z;$$

$$I_{max} + 7{,}24 = 34{,}81 + 12{,}47 \quad \Rightarrow \quad I_{max} = 40{,}04\ см^4.$$

Відцентровий момент інерції кутика відносно головних центральних осей тотожно дорівнює нулю ($I_{y_1 z_1} \equiv 0$).

Кут нахилу головних центральних осей

$$\alpha = -\operatorname{arctg} 0{,}436 = -23{,}557°.$$

Кут в цьому випадку є від'ємним, оскільки найкоротше суміщення осі максимального моменту інерції з віссю y відбувається за годинниковою стрілкою.

Таким чином, відцентровий момент кутика (див. приклад 8, табл. 3).

$$I_{yz} = 0 + \frac{40{,}04 - 7{,}24}{2} \sin\big(2 \cdot (-23{,}557°)\big) = 16{,}4 \cdot (-0{,}7327) = -12{,}02\ см^4.$$

Зауваження

1. Вісь максимального моменту інерції рівнополичного кутика є віссю симетрії, отже, $\alpha = 45°$.
2. Відцентровий момент інерції нерівнополичного кутика простіше обчислити за формулою
$$I_{yz} = \frac{\operatorname{tg} 2\alpha \left(I_z - I_y\right)}{2}.$$
3. У таблицях сортаменту відцентровий момент інерції наведено за модулем. Його знак можна визначити, скориставшись рис. 32.

Приклад 10

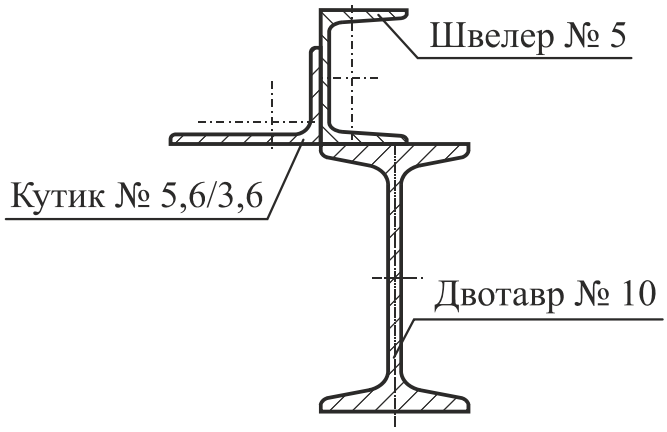


Рис. 37

Визначити положення головних центральних осей інерції заданого перерізу і величини головних моментів інерції в системі цих осей (рис. 37).

Дано: двотавр № 10, швелер № 5, кутик № 5,6/3,6.

Необхідно знайти y_c, z_c, α_0, I_u, I_v.

Розв'язання

1. Виконаємо креслення складеного перерізу в масштабі.

2. Розіб'ємо переріз на найпростіші частини і надамо цим частинам такі номери: двотавр – 1, швелер – 2, кутик – 3 (рис. 38).

3. У центрі ваги кожної з найпростіших частин перерізу розташуємо центральні системи координат $y_i O_i z_i$.

4. З таблиць сортаменту випишемо геометричні характеристики двотавра № 10, швелера № 5, кутика № 5,6/3,6 і зведемо їх в табл. 4.

Таблиця 4

Частина перерізу	Геометричні характеристики							
	$h_i, см$	$b_i, см$	$F_i, см^2$	$I_{y_i}, см^4$	$I_{z_i}, см^4$	$I_{y_i z_i}, см^4$	$y_{0_i}, см$	$z_{0_i}, см$
1 (двутавр)	10,0	5,5	12,0	198,0	17,9	0	0	0
2 (швелер)	5,0	3,2	6,16	22,8	5,61	0	1,16	0
3 (кутик)	3,6	5,6	3,58	3,7	11,37	3,74	1,82	0,84

5. Знайдемо координати центра ваги складеного перерізу.

Виберемо робочу (базову) систему координат, в якій будуть визначені координати центра ваги всього перерізу. Як робочу приймемо систему центральних осей двотавра $y_1 O_1 z_1$.

Тоді формули для визначення координат центра ваги будуть мати вигляд

$$y_c = \frac{\sum_{i=1}^{3} S_{z_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{3} F_i}; \qquad z_c = \frac{\sum_{i=1}^{3} S_{y_1}^{(i)}}{\sum_{i=1}^{3} F_i},$$

де $\sum_{i=1}^{2} F_i = F_1 + F_2 + F_3 = 12{,}0 + 6{,}16 + 3{,}58 = 21{,}74\ см^2$;

$$S_{z_1} = \sum_{i=1}^{3} S_{z_1}^{(i)} = F_1 \cdot 0 + F_2\left(-\left(\frac{b_1}{2} - y_{0_2}\right)\right) + F_3\left(-\left(\frac{b_1}{2} + y_{0_3}\right)\right) =$$

$$= 12{,}0 \cdot 0 + 6{,}16 \cdot \left(-\left(\frac{5{,}5}{2} - 1{,}16\right)\right) + 3{,}58 \cdot \left(-\left(\frac{5{,}5}{2} + 1{,}82\right)\right) =$$

$$= -26{,}155\ см^3;$$

$$S_{y_1} = \sum_{i=1}^{3} S_{y_1}^{(i)} = F_1 \cdot 0 + F_2\left(\frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2}\right) + F_3\left(\frac{h_1}{2} + z_{0_3}\right) =$$

$$= 12{,}0 \cdot 0 + 6{,}16 \cdot \left(\frac{10{,}0}{2} + \frac{5{,}0}{2}\right) + 3{,}58 \cdot \left(\frac{10{,}0}{2} + 0{,}84\right) = 67{,}107\ см^3.$$

Обчислимо координати центра ваги O складеного перерізу в системі осей $y_1 O_1 z_1$:

$$y_c = \frac{S_{z_1}}{F} = \frac{-26{,}155}{21{,}74} = -1{,}203\ см; \qquad z_c = \frac{S_{y_1}}{F} = \frac{67{,}107}{21{,}74} = 3{,}087\ см.$$

Відповідно до результатів обчислень покажемо на рис. 38 систему центральних осей yOz і центр ваги складеного перерізу – точку O.

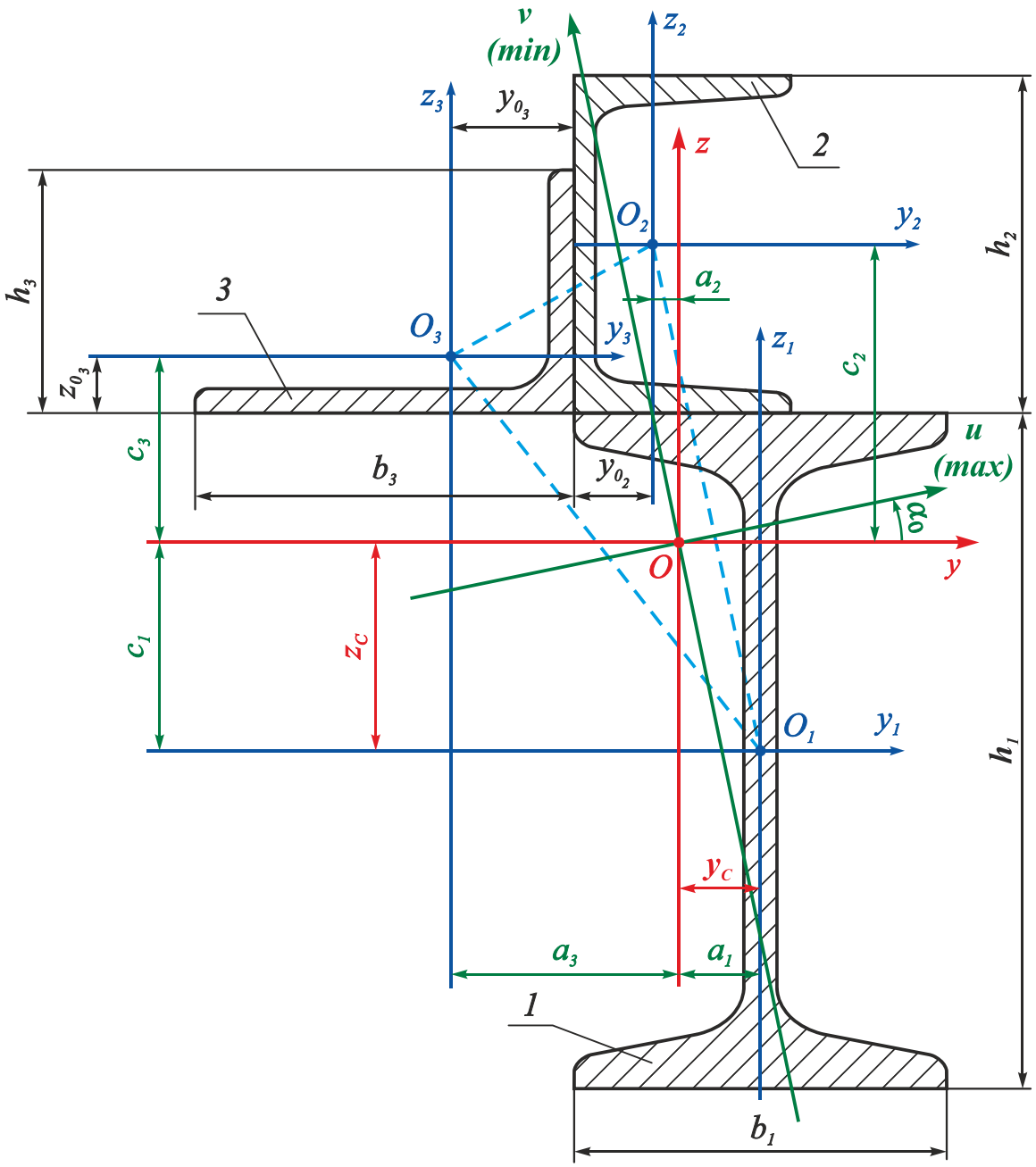


Рис. 38

Зауваження | Центр ваги перерізу, що містить три і більше складових частин, розташовано всередині області, обмеженої лініями, що з'єднують центри ваги складових частин (на рис. 38 – всередині трикутника $O_1O_2O_3$).

Координати центрів ваги складових частин перерізу (точок O_1, O_2 і O_3) в системі центральних осей yOz:

$$a_1 = |y_c| = 1{,}203 \text{ } см;$$

$$a_2 = -\left(\frac{b_1}{2} - y_{0_2} - |y_c|\right) = -\left(\frac{5{,}5}{2} - 1{,}16 - 1{,}203\right) = -0{,}387 \text{ } см;$$

$$a_3 = -\left(\frac{b_1}{2} + y_{0_3} - |y_c|\right) = -\left(\frac{5{,}5}{2} + 1{,}82 - 1{,}203\right) = -3{,}367 \text{ } см;$$

$$c_1 = -z_c = -3{,}087 \text{ } см;$$

$$c_2 = \frac{h_1}{2} + \frac{h_2}{2} - z_c = \frac{10{,}0}{2} + \frac{5{,}0}{2} - 3{,}087 = 4{,}413 \text{ } см;$$

$$c_3 = \frac{h_1}{2} + z_{0_3} - z_c = \frac{10{,}0}{2} + 0{,}84 - 3{,}087 = 2{,}753 \text{ } см.$$

Перевірка правильності визначення центра ваги

Скористаємося властивістю центральних осей, згідно з якою статичний момент складеного перерізу відносно центральних осей дорівнює нулю:

$$S_y = \sum_{i=1}^{2} S_y^{(i)} = S_y^{(1)} + S_y^{(2)} + S_y^{(3)} = F_1c_1 + F_2c_2 + F_3c_3 =$$

$$= 12{,}0 \cdot (-3{,}087) + 6{,}16 \cdot 4{,}413 + 3{,}58 \cdot 2{,}753 =$$

$$= -37{,}044 + 27{,}184 + 9{,}856 = -0{,}004 \text{ } см^3.$$

Відносна похибка

$$\Delta\% = \left|\frac{-0{,}004}{37{,}040}\right| \cdot 100\ \% = 0{,}0108\ \% < 1\ \%; \qquad [\Delta\%] \le 1\ \%;$$

$$S_z = \sum_{i=1}^{2} S_z^{(i)} = S_z^{(1)} + S_z^{(2)} + S_z^{(3)} = F_1a_1 + F_2a_2 + F_2a_2 =$$

$$= 12{,}0 \cdot 1{,}203 + 6{,}16 \cdot (-0{,}387) + 3{,}58 \cdot (-3{,}367) =$$

$$= 14{,}436 - 2{,}384 - 12{,}054 = -0{,}002 \text{ } см^3.$$

Відносна похибка

$$\Delta\% = \left|\frac{-0{,}002}{14{,}436}\right| \cdot 100\ \% = 0{,}0139\ \% < 1\ \%; \qquad [\Delta\%] \le 1\ \%.$$

Таким чином, положення центра ваги складеного перерізу визначено правильно.

6. Знайдемо осьові і відцентровий моменти інерції складеного перерізу в системі центральних осей yOz, використавши формули паралельного перенесення:

$$I_y = I_y^{(1)} + I_y^{(2)} + I_y^{(3)} = 312{,}355 + 142{,}763 + 30{,}833 = 485{,}951\ см^4;$$

$$I_y^{(1)} = I_{y_1} + c_1^2 F_1 = 198{,}0 + (-3{,}087)^{\,2} \cdot 12{,}0 = 312{,}355\ см^4;$$

$$I_y^{(2)} = I_{y_2} + c_2^2 F_2 = 22{,}8 + 4{,}413^2 \cdot 6{,}16 = 142{,}763\ см^4;$$

$$I_y^{(3)} = I_{y_3} + c_3^2 F_3 = 3{,}7 + 2{,}753^2 \cdot 3{,}58 = 30{,}833\ см^4;$$

$$I_z = I_z^{(1)} + I_z^{(2)} + I_z^{(3)} = 35{,}267 + 6{,}533 + 51{,}955 = 93{,}755\ см^4;$$

$$I_z^{(1)} = I_{z_1} + a_1^2 F_1 = 17{,}9 + 1{,}203^2 \cdot 12{,}0 = 35{,}267\ см^4;$$

$$I_z^{(2)} = I_{z_2} + a_2^2 F_2 = 5{,}61 + (-0{,}387)^2 \cdot 6{,}16 = 6{,}533\ см^4;$$

$$I_z^{(3)} = I_{z_3} + a_3^2 F_3 = 11{,}37 + (-3{,}367)^2 \cdot 3{,}58 = 51{,}955\ см^4;$$

$$I_{yz} = I_{yz}^{(1)} + I_{yz}^{(2)} + I_{yz}^{(3)} = -44{,}564 - 10{,}520 - 29{,}444 = -84{,}528\ см^4;$$

$$I_{yz}^{(1)} = I_{y_1 z_1} + a_1 c_1 F_1 = 0 + 1{,}203 \cdot (-3{,}087) \cdot 12{,}0 = -44{,}564\ см^4;$$

$$I_{yz}^{(2)} = I_{y_2 z_2} + a_2 c_2 F_2 = 0 + (-0{,}387) \cdot 4{,}413 \cdot 6{,}16 = -10{,}520\ см^4;$$

$$I_{yz}^{(3)} = I_{y_3 z_3} + a_3 c_3 F_3 = 3{,}74 + (-3{,}367) \cdot 2{,}753 \cdot 3{,}58 = -29{,}444\ см^4.$$

Зауваження | Велика площа складеного перерізу знаходиться в другій і четвертій чвертях, отже відцентровий момент інерції буде від'ємним.

7. Обчислимо положення головних осей інерції перерізу:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y} = \frac{2 \cdot (-84{,}528)}{93{,}755 - 485{,}951} = 0{,}431;$$

$$2\alpha_0 = 23{,}316°; \qquad \alpha_0 = 11{,}658° = 11°39'29''.$$

Оскільки $\alpha_0 > 0$, то поворот осей y і z на цей кут необхідно виконати проти годинникової стрілки відповідно до прийнятого правила знаків. Отримані в результаті цього повороту осі і будуть головними центральними осями інерції складеного перерізу.

8. Визначимо величини головних моментів інерції перерізу:

$$I_{\substack{max \\ min}} = I_{\substack{u \\ v}} = \frac{I_y + I_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_z - I_y}{2}\right)^2 + I_{y_0 z_0}^2} = \frac{485{,}951 + 93{,}755}{2} \pm$$

$$\pm\sqrt{\left(\frac{93{,}755-485{,}951}{2}\right)^2+(-84{,}528)^2}=289{,}853\pm213{,}540\ см^4.$$

Звідси

$$I_{max}=I_u=503{,}393\ см^4;$$

$$I_{min}=I_v=76{,}313\ см^4.$$

За результатами проведеного розрахунку покажемо на рис. 38 головні центральні осі інерції складеного перерізу – осі u і v.

Оскільки $I_y>I_z$, то максимальне значення осьовий момент інерції перерізу має відносно осі, що знаходиться на мінімальній кутовій відстані від осі y.

9. Перевіримо правильність розв'язання задачі:

а) перевіримо виконання співвідношення

$$I_{max}>I_z>I_y>I_{min}\ (\text{якщо } I_z>I_y)$$

або

$$I_{max}>I_y>I_z>I_{min}\ \ (\text{якщо } I_y>I_z).$$

У даному випадку

$$503{,}393>485{,}951>379{,}855>76{,}313;$$

б) перевіримо сталість суми осьових моментів при повороті осей:

$$I_{max}+I_{min}=I_y+I_z;$$

$$503{,}393+76{,}313=485{,}951+93{,}755;$$

$$579{,}706=579{,}706;$$

в) обчислимо відцентровий момент інерції відносно головних центральних осей, який явно має дорівнювати нулю ($I_{uv}=0$):

$$I_{uv}=I_{yz}\cos 2\alpha_0+\frac{I_y-I_z}{2}\sin 2\alpha_0=$$

$$=(-84{,}528)\cdot\cos(2\cdot11{,}658°)+\frac{485{,}951-93{,}755}{2}\cdot\sin(2\cdot11{,}658°)=$$

$$=-77{,}625+77{,}616=-0{,}009\ м^4.$$

Похибка обчислень

$$\Delta\%=\left|\frac{-0{,}009}{77{,}616}\right|\cdot100\ \%=0{,}0116\ \%\le1\ \%,$$

отже, задачу розв'язано правильно.

Запитання для самоперевірки

1. Назвіть основні геометричні характеристики поперечних перерізів.

2. Для чого є необхідними геометричні характеристики плоских перерізів?

3. Що таке статичний момент плоскої фігури відносно осі?

4. Яку розмірність має статичний момент?

5. Чому дорівнює статичний момент відносно осі, що проходить через центр ваги перерізу?

6. Як визначити координати центра ваги простого і складеного перерізів?

7. Які осі називають центральними осями?

8. Що називається осьовим, полярним і відцентровим моментами інерції перерізу?

9. Яку розмірність мають моменти інерції перерізу?

10. Чому осьові і полярні моменти інерції не можуть бути від'ємними?

11. Відносно яких з паралельних осей осьовий момент інерції буде найменшим?

12. Який вигляд мають формули переходу для обчислення моментів інерції при паралельному перенесенні осей?

13. За допомогою яких виразів визначають величини головних моментів інерції і положення головних осей?

14. Які осі називають головними осями інерції?

15. Які осі називають головними центральними осями інерції?

16. Які властивості мають головні центральні моменти інерції перерізу?

17. Чому дорівнює відцентровий момент інерції відносно головних центральних осей?

18. Положення головних осей яких перерізів можна вказати без обчислень?

19. Чи змінюється сума осьових моментів інерції відносно двох взаємно перпендикулярних осей при повороті цих осей?

20. Чому дорівнюють осьові моменти інерції круга та кільця відносно осей, що проходять через їх центри ваги?

21. Чому дорівнюють осьові моменти інерції прямокутника і прямокутного трикутника відносно осей, що проходять через їх центри ваги?

22. Як визначається знак відцентрового моменту інерції прямокутного трикутника і кутика відносно осей, паралельних основам?

Порядок виконання завдання і варіанти

1. Виконати креслення складеного перерізу в масштабі.
2. Розбити переріз на найпростіші частини.
3. У центрі ваги кожної з найпростіших частин перерізу розташувати центральні системи координат $y_i O_i z_i$.
4. З таблиць сортаменту вибрати геометричні характеристики прокатних профілів (завдання 1).

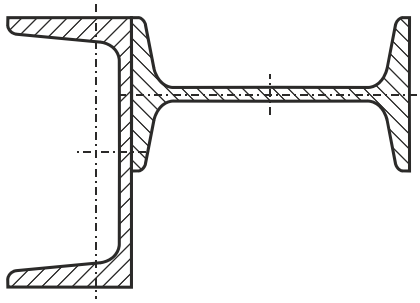
   Обчислити геометричні характеристики найпростіших геометричних фігур (завдання 2).

Зауваження до завдання 2	1. Геометричні розміри найпростіших фігур наведено в сантиметрах. 2. Всі трикутники – прямокутні або рівнобедрені.

5. Знайти координати центра ваги складеного перерізу. Перевірити правильність обчислень положення центра ваги.
6. Визначити осьові і відцентрові моменти інерції складеного перерізу в системі центральних осей yOz.
7. Обчислити положення головних центральних осей інерції перерізу, тобто кут, на який необхідно повернути центральні осі, щоб вони стали головними.
8. Визначити головні центральні моменти інерції перерізу.
9. Перевірити правильність розв’язання.

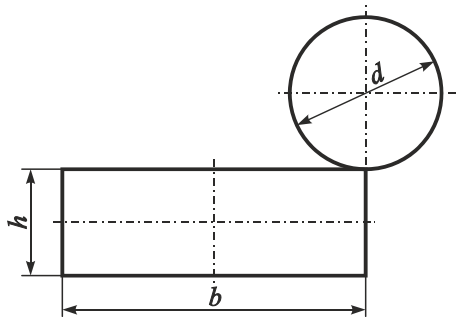
Варіант 1

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ ⊏	14	14а	16	16а	18	18а	20	20а
№ I	10	12	14	16	18	20	20а	22

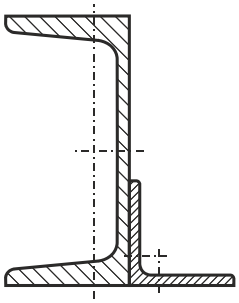
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
b	20	16	12	10	8	14	18	24
h	4	6	4	2	3	4	5	6
d	6	5	6	4	5	8	10	8

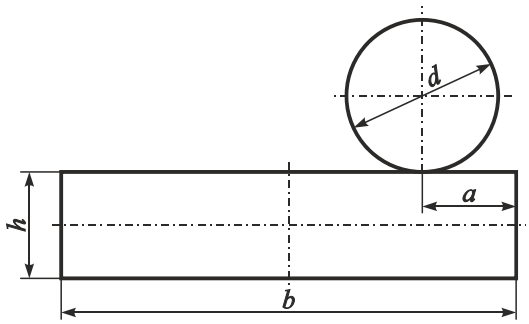
Варіант 2

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ ⊏	5	6,5	8	10	12	14	14а	16
№ ∟	2	3	3,5	4	4,5	5	6,5	7,5

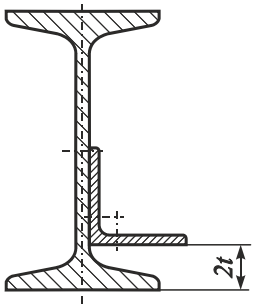
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
b	24	20	10	14	12	16	18	12
h	6	5	3	4	3	6	4	6
d	8	10	6	5	8	7	8	6
a	3	2	1	2	1	2	2	3

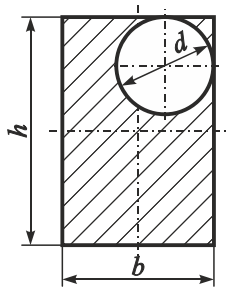
Варіант 3

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20а	22
№ ∟	3,5	4	4,5	5	6	6,5	7,5	8

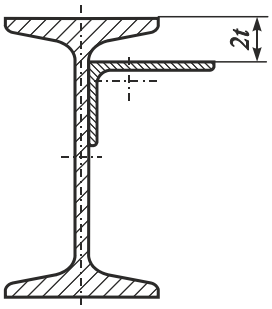
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
b	8	10	14	16	12	18	15	20
h	12	5	16	16	16	24	20	30
d	4	4	6	5	8	10	8	12

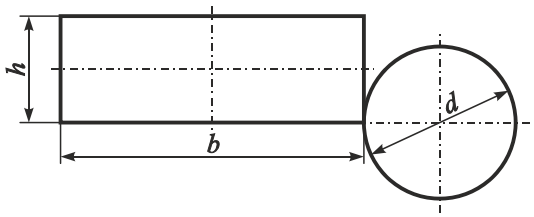
Варіант 4

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ L	5 / 3,2	6,3 / 4	7 / 4,5	7,5 / 5	8/5	9 / 5,6	11/7	14/9

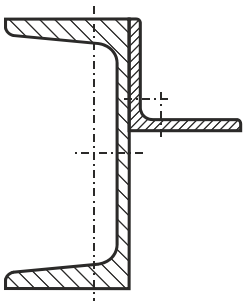
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
b	10	12	9	18	15	8	10	20
h	4	3	5	4	6	2	3	6
d	6	5	7	8	10	5	8	10

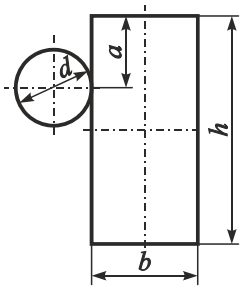
Варіант 5

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ C	5	6,5	8	10	12	14	14a	18
№ L	2	2,5	3,5	4,5	5	6	6,5	7,5

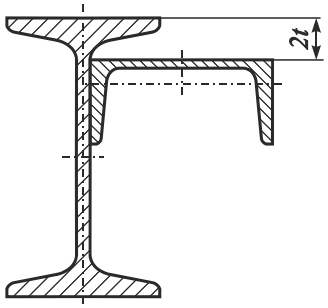
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
b	2	6	4	3	5	4	5	6
h	8	10	9	10	12	14	16	15
d	6	8	7	6	8	6	6	8
a	1	2	3	1	1	2	4	2

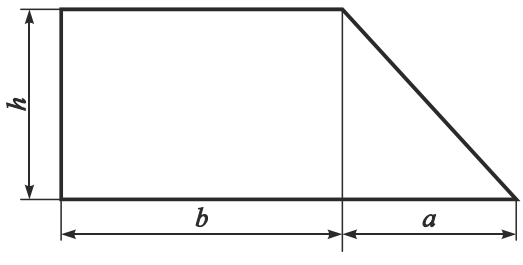
Варіант 6

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ C	5	6,5	8	10	12	14	14a	16
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22

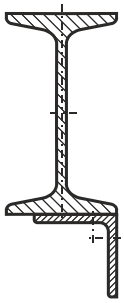
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
b	8	10	14	7	12	10	11	16
h	9	12	9	6	12	15	15	18
a	6	9	9	7,5	6	9	7,5	15

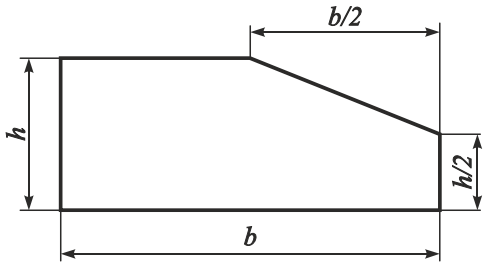
Варіант 7

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ ∟	4	4,5	5	6	7	7,5	8	9

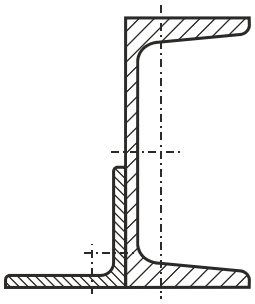
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	6	12	15	24	15	12	18	24
b	9	9	18	18	12	6	12	15

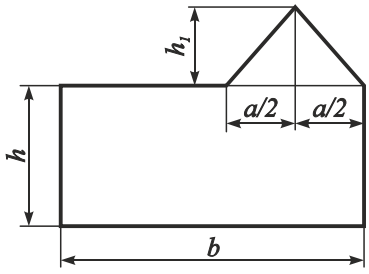
Варіант 8

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ [	8	10	12	14	14a	16	16a	18
№ ∟	4	4,5	6	6,3	7,5	8	9	10

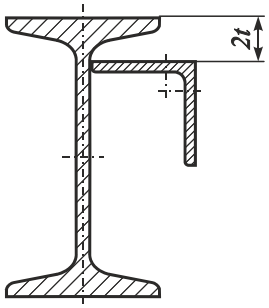
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
a	8	4	5	6	8	6	10	12
b	10	8	12	14	12	12	19	20
h	6	3	4	4	3	5	6	5
h1	6	6	9	9	6	12	12	15

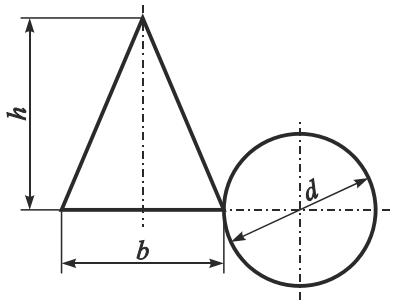
Варіант 9

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ ∟	3,5	4,5	5	6	6,3	7,5	8	9

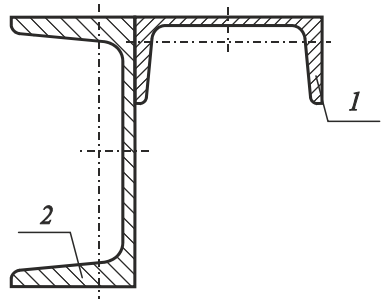
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	10	12	9	9	6	15	18	21
b	8	10	9	8	4	10	12	15
d	8	6	7	8	5	8	10	14

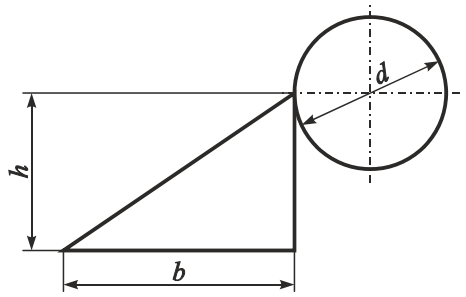
Варіант 10

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1[	5	6,5	8	10	12	14	14а	16
№2[	6,5	8	10	12	14	14а	16	16а

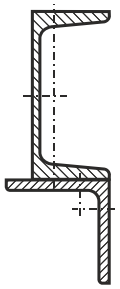
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	6	9	12	15	12	18	6	18
b	9	6	9	9	15	12	6	15
d	8	6	8	10	9	14	5	10

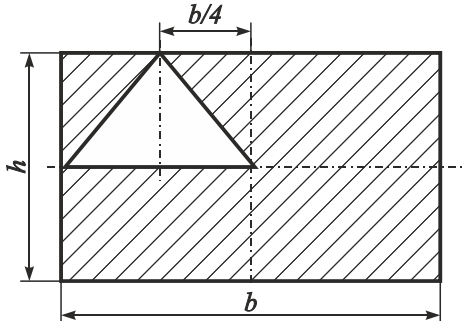
Варіант 11

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ [	5	6,5	8	10	12	14	14а	16
№ ∟	3,5	4	4,5	5	6	6,3	7,5	8

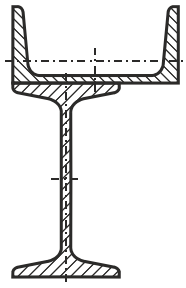
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	9	12	12	15	18	18	6	24
b	8	12	16	10	16	20	8	18

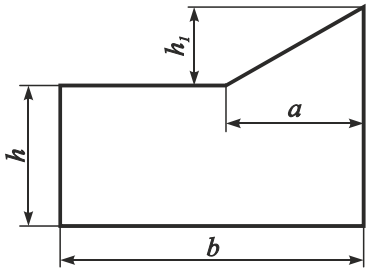
Варіант 12

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ [	10	12	14	14а	16	16а	18	18а
№ I	10	12	14	16	18	20	20а	22

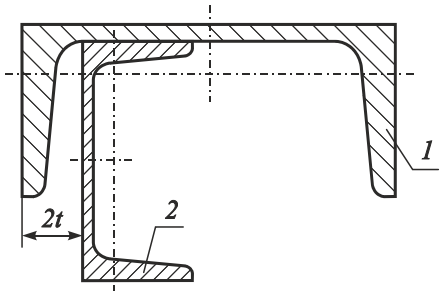
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	2	4	3	5	4	3	5	6
b	8	10	8	12	14	10	15	17
a	6	6	9	9	7,5	7,5	9	12
h1	6	9	6	9	9	7,5	12	9

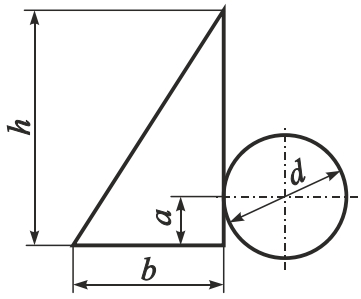
Варіант 13

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1[	8	10	12	14	14а	16	16а	18
№2[	6,5	8	10	12	5	14	14а	16

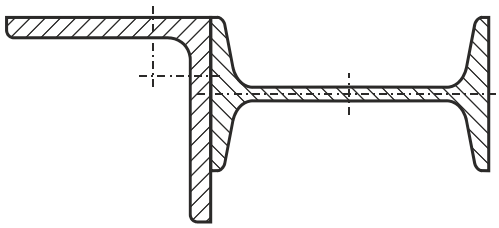
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	6	15	12	9	7,5	15	18	21
b	6	9	15	6	6	12	9	15
a	1	3	2	2	1	3	4	3
d	5	7	8	6	4	6	10	10

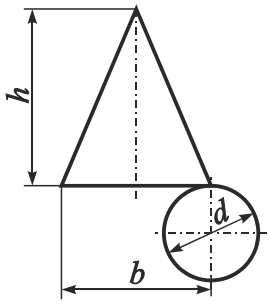
Варіант 14

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20а	22
№ L	7,5	8	9	10	12,5	14	16	18

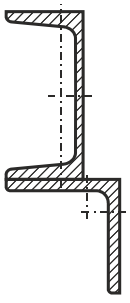
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	18	16	15	10	12	14	20	10
b	12	8	10	10	9	8	8	14
d	10	10	12	8	9	6	10	6

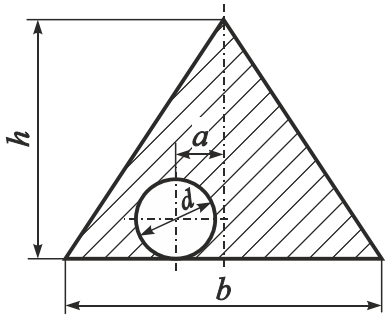
Варіант 15

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ [	5	6,5	8	10	12	14	14а	16
№ L	4,5	5	6	6,3	7,5	8	9	10

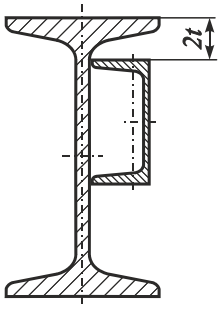
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	8	10	12	14	15	16	9	18
b	6	12	8	12	10	12	9	12
a	1	1	1	2	1	1	1,5	2
d	2	4	3	4	4	5	3	5

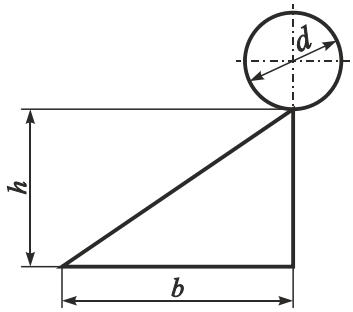
Варіант 16

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20а	22
№ [	5	6,5	8	10	12	14	14а	16

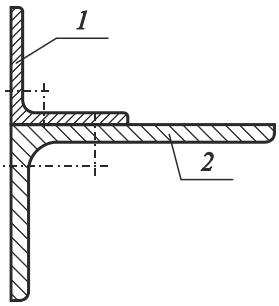
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
b	9	6	9	7,5	9	12	15	18
h	6	6	9	6	7,5	6	9	12
d	6	8	8	7	5	8	10	10

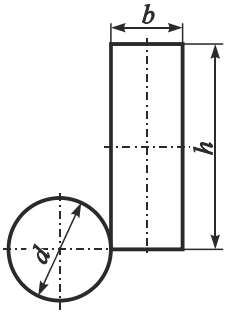
Варіант 17

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1 ∟	3	3,5	4	4,5	5	6	6,3	7,5
№2 L	3,2 / 2	4 / 2,5	5 / 3,2	6,3 / 4	7 / 4,5	8/5	9 / 5,6	11/7

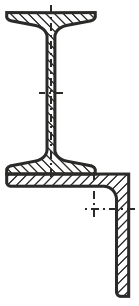
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
b	8	10	8	12	14	14	15	16
h	4	4	2	5	6	4	6	5
d	8	6	6	10	8	9	12	8

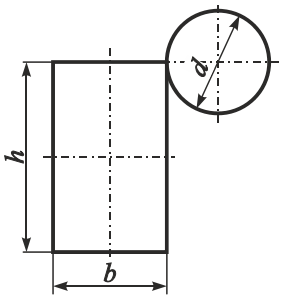
Варіант 18

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20а	22
№ ∟	7,5	8	9	10	12,5	14	16	18

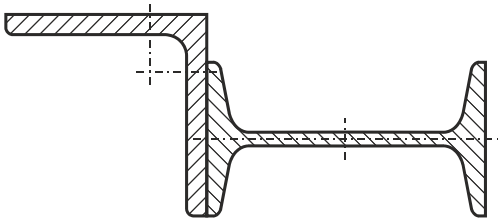
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	6	8	10	14	12	16	18	20
b	4	3	4	6	4	5	6	8
d	6	6	8	8	6	10	8	10

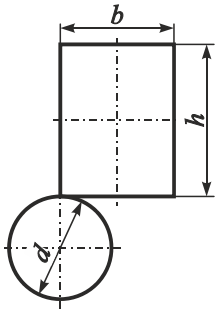
Варіант 19

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ ⊏	10	12	14	16	18	20	20а	22
№ I	7,5	8	9	10	12,5	14	16	18

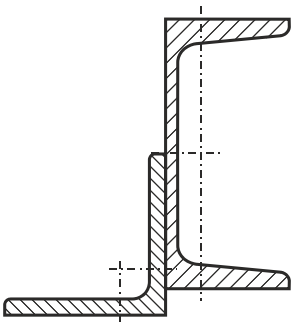
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	10	8	12	14	6	6	8	18
b	4	2	4	5	8	4	8	8
d	6	5	6	8	6	8	6	12

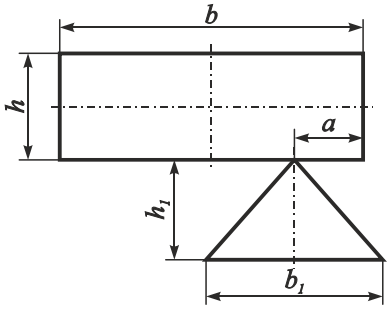
Варіант 20

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ ⊏	5	6,5	8	10	12	14	14а	18
№ ∟	2,5	3	3,5	4	4,5	5	6	6,3

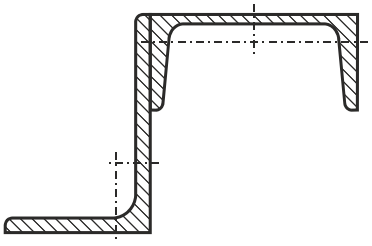
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	2	3	4	6	5	4	8	3
b	10	8	14	10	12	12	10	10
h1	6	3	6	9	7,5	7,5	12	6
b1	4	6	8	6	8	6	8	6
a	2	1	3	2	3	1	2	1

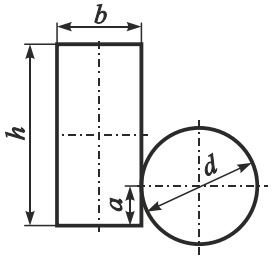
Варіант 21

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ ⊏	5	6,5	8	10	12	14	14а	16
№ L	4 / 2,5	5 / 3,2	6,3 / 4	7 / 4,5	7,5 / 5	8/5	9 / 5,6	11/7

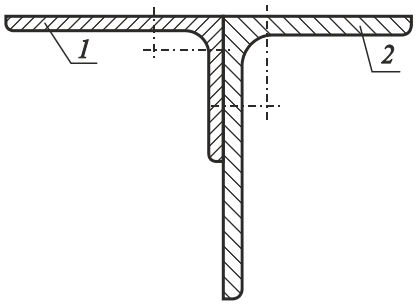
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	10	12	12	8	6	14	15	18
b	6	4	7	5	8	6	4	6
d	4	6	5	6	8	6	8	10
a	1	2	3	2	1	3	2	4

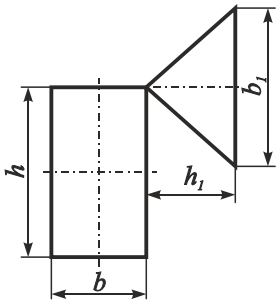
Варіант 22

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1	3,2 / 2	4 / 2,5	5 / 3,2	6,3 / 4	7 / 4,5	8/5	9 / 5,6	11/7
№2	5 / 3,2	6,3 / 4	7 / 4,5	7,5 / 5	8/5	9 / 5,6	11/7	14/9

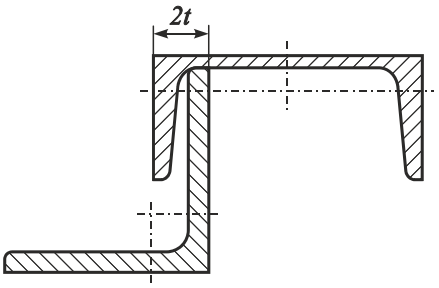
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	6	8	10	9	12	10	7	16
b	6	4	5	4	5	10	4	6
h1	6	6	7,5	9	9	6	6	9
b1	6	8	8	10	6	12	8	12

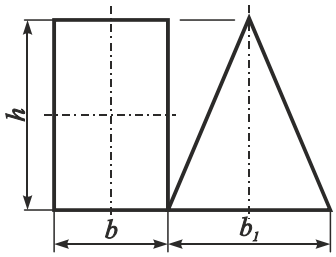
Варіант 23

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№	5	6,5	8	10	12	14	14а	16
№	5	6	6,3	7,5	8	9	10	12

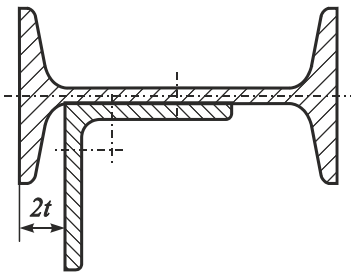
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	6	9	12	6	15	18	21	24
b	4	8	5	8	4	6	10	8
b1	6	6	8	10	10	12	10	12

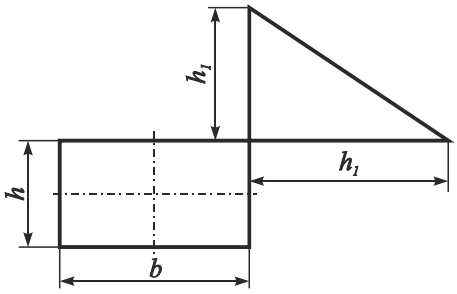
Варіант 24

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№	10	12	14	16	18	20	20а	22
№	4	4,5	5	6	6,3	7,5	8	9

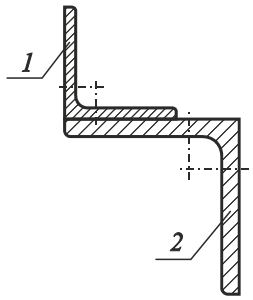
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	4	5	6	4	3	2	6	8
b	10	10	14	8	10	8	16	20
h1	6	9	9	6	6	3	9	12
b1	6	6	12	3	9	6	9	15

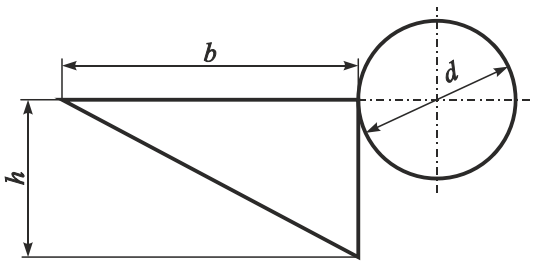
Варіант 25

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№1 ∟	4	4,5	5	6	6,3	7,5	8	9
№2 ∟	6	6,3	7,5	8	9	10	12,5	14

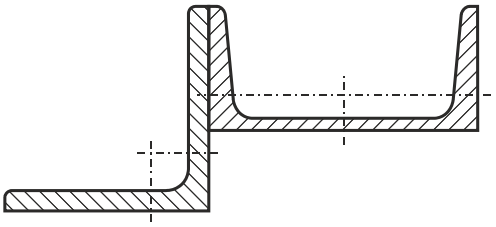
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	12	15	9	12	15	18	24	6
b	9	9	6	18	12	15	15	9
d	8	8	6	14	10	12	16	8

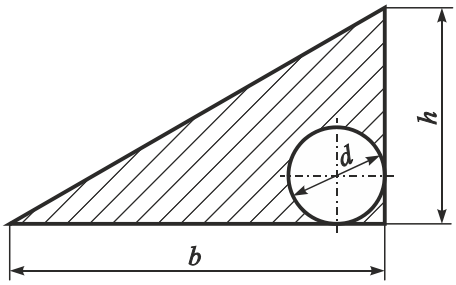
Варіант 26

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ ⊏	5	6,5	8	10	12	14	14а	16
№ ∟	5	6	6,3	7,5	8	9	10	12,5

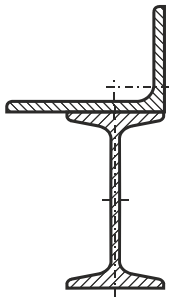
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	6	9	9	12	15	18	9	15
b	9	9	12	6	12	12	15	18
d	3	4	5	4	5	7	5	9

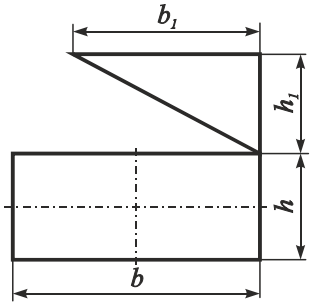
Варіант 27

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20а	22
№ ∟	6,3 / 4	7 / 4,5	7,5 / 5	8/5	9 / 5,6	11/7	14/9	19/10

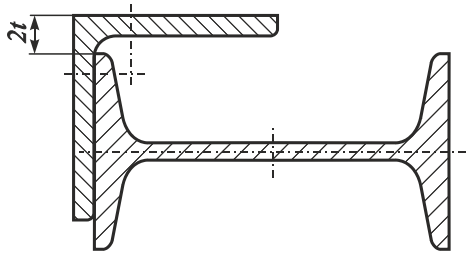
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	4	4	5	8	6	5	6	8
b	10	8	9	12	12	10	10	16
h1	6	5	6	12	9	5	6	9
b1	6	6	9	12	9	6	12	12

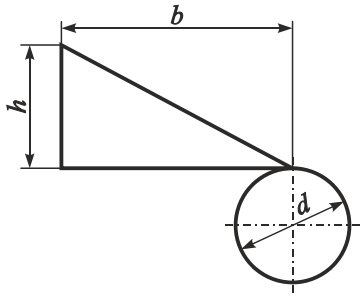
Варіант 28

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ ∟	8	9	10	12,5	14	16	18	20

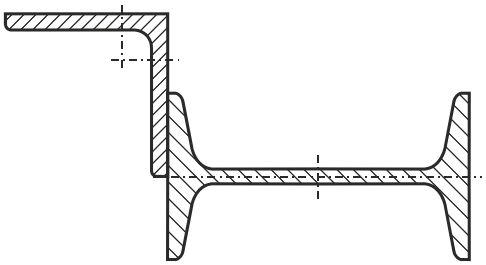
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	12	12	9	9	6	12	12	15
b	18	15	12	9	9	6	9	9
d	8	10	8	6	8	8	10	10

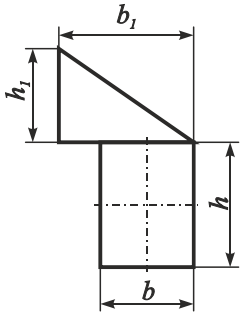
Варіант 29

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ I	10	12	14	16	18	20	20a	22
№ ∟	7,5	8	9	10	12,5	14	16	18

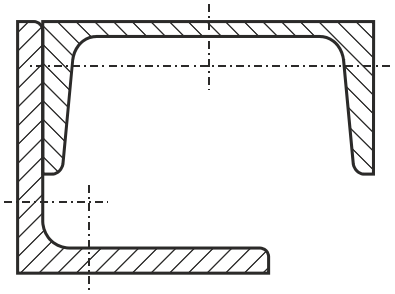
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	6	5	7	8	10	9	12	16
b	4	5	5	6	4	8	8	10
h1	3	6	6	6	9	9	9	15
b1	6	7	9	12	9	15	12	18

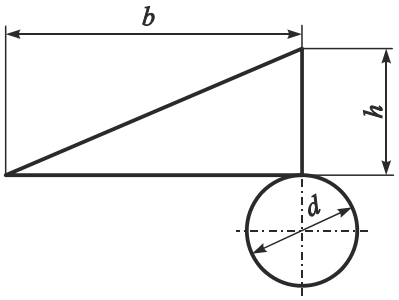
Варіант 30

Задача 1



№	1	2	3	4	5	6	7	8
№ [	5	6,5	8	10	12	14	14a	16
№ ∟	5	6	6,3	7,5	8	9	10	12,5

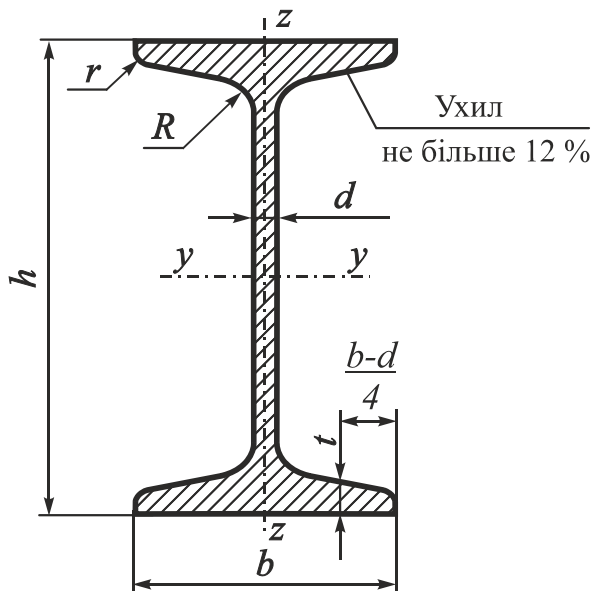
Задача 2



№	1	2	3	4	5	6	7	8
h	6	6	3	9	9	6	6	9
b	6	3	6	6	9	9	12	12
d	4	5	4	5	8	7	8	9

Додаток 1

Сортамент гарячекатаної сталі.
Балки двотаврові. ГОСТ 8239-89



Примітки:

1. Площу поперечного перерізу і масу 1 *м* двотавру обчислено за номінальними розмірами; щільність сталі прийнята такою, що дорівнює 7,85 *г/см*^{3}.

2. Величини радіусів заокруглення, ухилу внутрішніх граней полиць, товщини полиць, що зазначені на рисунку і в табл. Д.1, наведено для побудови калібрів і на готовому прокаті не контролюються.

3. У таблиці використано позначення:

h – висота балки;
b – ширина полиці;
d – товщина стінки;
t – середня товщина полиці;
R – радіус внутрішнього заокруглення;
F – площа поперечного перерізу;
r – радіус заокруглення полиці;
I – момент інерції;
W –- момент опору;
S – статичний момент півперерізу;
i – радіус інерції.

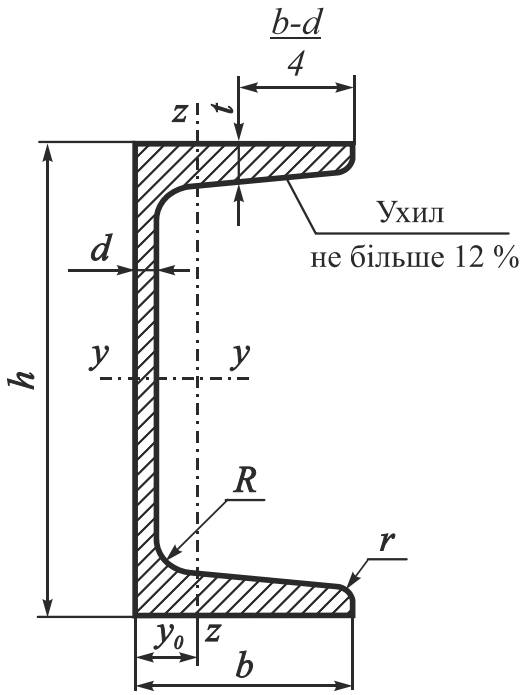
4. Двотаври від № 24 до № 60 не рекомендується застосовувати в нових розробленнях.

Таблиця Д.1.1

Номер	Розміри, *мм*						F, $см^2$	Маса 1 м, *кг*	Довідкові дані для осей						
									$y-y$				$z-z$		
	h	b	d	t	R	r			I_y, $см^4$	W_y, $см^3$	i_y, *см*	S_y, $см^3$	I_z, $см^4$	W_z, $см^3$	i_z, *см*
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	12,0	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	14,7	11,5	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	17,4	13,7	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	20,2	15,9	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	23,4	18,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
18а	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	25,4	19,9	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,8	2,12
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	26,8	21,0	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,1	2,07
20а	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,7	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,2	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,0	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,6	2,27
22а	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,8	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,3	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,3	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,5	2,37
24а	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,4	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,6	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,5	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,5	2,54
27а	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,9	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,0	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,9	2,69
30а	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,2	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,1	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,2	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,9	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,6	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,1	2,89
40	400	155	8,5	13,0	15,0	6,0	72,6	57,0	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,1	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,5	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,0	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,5	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,0	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,6	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,0	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,0	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,0	3,54

Додаток 2

Сортамент гарячекатаної сталі.
Швелери з ухилом внутрішніх граней полиць. ГОСТ 8240-89



Примітки:

1. Площу поперечного перерізу і масу 1 *м* швелера обчислено за номінальними розмірами; щільність сталі прийнята такою, що дорівнює 7,85 *г/см*^{3}.

2. Величини радіусів заокруглення, ухилу внутрішніх граней полиць, товщини полиць, що зазначені на рисунку і в табл. Д.2, наведено для побудови калібрів і на готовому прокаті не контролюються.

3. У таблиці використано позначення:

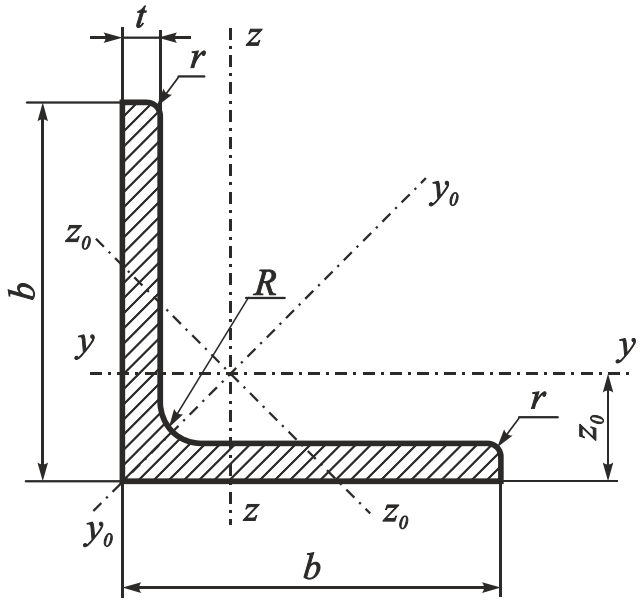
- $\boldsymbol{h}$ – висота балки;
- $\boldsymbol{b}$ – ширина полиці;
- $\boldsymbol{d}$ – товщина стінки;
- $\boldsymbol{t}$ – середня товщина полиці;
- $\boldsymbol{R}$ – радіус внутрішнього заокруглення;
- $\boldsymbol{r}$ – радіус заокруглення полиці;
- $\boldsymbol{F}$ – площа поперечного перерізу;
- $\boldsymbol{I}$ – момент інерції;
- $\boldsymbol{W}$ – момент опору;
- $\boldsymbol{i}$ – радіус інерції;
- $\boldsymbol{S}$ – статичний момент півперерізу;
- $\boldsymbol{y_0}$ – відстань від осі $\boldsymbol{z-z}$ до зовнішньої межі стінки**.**

Таблиця Д.2.1

Номер	Розміри, *мм*						F, $см^2$	Маса 1 м, *кг*	Довідкові дані для осей							y_0, *см*
									$y-y$				$z-z$			
	h	b	d	t	R	r			I_y, $см^4$	W_y, $см^3$	i_y, *см*	S_y, $см^3$	I_z, $см^4$	W_z, $см^3$	i_z, *см*	
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,0	8,7	3,68	1,08	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,9	8,59	174,0	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,3	10,4	304,0	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,6	12,3	491,0	70,2	5,6	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,0	13,3	545,0	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,1	14,2	747,0	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,8
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,5	15,3	823,0	103,0	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,0
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,7	16,3	1090,0	121,0	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,2	17,4	1190,0	132,0	7,32	76,1	105,0	20,0	2,18	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,4	18,4	1520,0	152,0	8,07	87,8	113,0	20,5	2,20	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,2	19,8	1670,0	167,0	8,15	95,9	139,0	24,2	2,35	2,28
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,7	21,0	2110,0	192,0	8,89	110,0	151,0	25,1	2,37	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,8	22,6	2330,0	212,0	8,99	121,0	187,0	30,0	2,55	2,46
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,6	24,0	2900,0	242,0	9,73	139,0	208,0	31,6	2,6	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,9	25,8	3180,0	265,0	9,84	151,0	254,0	37,2	2,78	2,67
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,2	27,7	4160,0	308,0	10,9	178,0	262,0	37,3	2,73	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,5	31,8	5810,0	387,0	12,0	224,0	327,0	43,6	2,84	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,5	36,5	7980,0	484,0	13,1	281,0	410,0	51,8	2,97	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,4	41,9	10820,0	601,0	14,2	350,0	513,0	61,7	3,1	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,5	48,3	15220,0	761,0	15,7	444,0	642,0	73,4	3,23	2,75

Додаток 3

Сортамент гарячекатаної сталі.
Сталь прокатна кутова рівнополочна. ДСТУ 2251-93 (ГОСТ 8509-93)



Примітки:

1. Площу поперечного перерізу і масу 1 *м* кутика обчислено за номінальними розмірами; щільність сталі прийнята такою, що дорівнює 7,85 *г/см*^{3}.

2. Величини радіусів заокруглення, ухилу внутрішніх граней полиць, товщини полиць, що зазначені на рисунку і в табл. Д.3, наведено для побудови калібрів і на готовому прокаті не контролюються.

3. У таблицях використано позначення:

- $\boldsymbol{b}$ – ширина полиці;
- $\boldsymbol{t}$ – товщина полиці;
- $\boldsymbol{R}$ – радіус внутрішнього заокруглення;
- $\boldsymbol{r}$ – радіус заокруглення полиці;
- $\boldsymbol{F}$ – площа поперечного перерізу;
- $\boldsymbol{I}$ – момент інерції;
- $\boldsymbol{W}$ – момент опору;
- $\boldsymbol{i}$ – радіус інерції;
- $\boldsymbol{z_0}$ – відстань від центра ваги до зовнішньої межі полиці.

Таблиця Д.3.1

Номер	Розміри, *мм*				F, $см^2$	Маса 1 м, *кг*	Довідкові дані для осей								I_{yz}, $см^4$	z_0, *см*
							$y-y$			y_0-y_0		z_0-z_0				
	b	t	R	r			I_y, $см^4$	W_y, $см^3$	i_y, *см*	I_{y_0max}, $см^4$	i_{y_0max}, *см*	I_{z_0min}, $см^4$	W_z, $см^3$	i_{z_0min}, *см*		
2	20	3 4	3,5	1,2	1,13 1,46	0,89 1,15	0,40 0,50	0,28 0,37	0,59 0,58	0,63 0,78	0,75 0,73	0,17 0,22	0,20 0,24	0,39 0,38	0,23 0,28	0,60 0,64
2,5	25	3 4	3,5	1,2	1,43 1,86	1,12 1,46	0,81 1,03	0,46 0,59	0,75 0,74	1,29 1,62	0,95 0,93	0,34 0,44	0,33 0,41	0,49 0,48	0,47 0,59	0,73 0,76
2,8	28	3	4,0	1,3	1,62	1,27	1,16	0,58	0,85	1,84	1,07	0,48	0,42	0,55	0,68	0,80
3	30	3 4	4,0	1,3	1,74 2,27	1,36 1,78	1,45 1,84	0,67 0,87	0,91 0,80	2,30 2,92	1,15 1,13	0,60 0,77	0,53 0,61	0,59 0,58	0,85 1,08	0,85 0,89
3,2	32	3 4	4,5	1,5	1,86 2,43	1,46 1,91	1,77 2,26	0,77 1,00	0,97 0,96	2,80 3,58	1,23 1,21	0,74 0,94	0,59 0,71	0,63 0,62	1,03 1,32	0,89 0,94
3,5	35	3 4 5	4,5	1,5	2,04 2,17 3,28	1,60 2,10 2,58	2,35 3,01 3,61	0,93 1,21 1,47	1,07 1,06 1,05	3,72 4,76 5,71	1,35 1,33 1,32	0,97 1,25 1,52	0,71 0,88 1,02	0,69 0,68 0,68	1,37 1,75 2,10	0,97 1,01 1,05
4	40	3 4 5	5,0	1,7	2,35 3,08 3,79	1,85 2,42 2,98	3,55 4,58 5,53	1,22 1,60 1,95	1,23 1,22 1,21	5,63 7,26 8,75	1,55 1,53 1,52	1,47 1,90 2,30	0,95 1,19 1,39	0,79 0,78 0,78	2,08 2,68 3,22	1,09 1,13 1,17
4,5	45	3 4 5	5,0	1,7	2,65 3,48 4,29	2,08 2,73 3,37	5,13 6,63 8,03	1,56 2,04 2,51	1,39 1,38 1,37	8,13 10,52 12,74	1,75 1,74 1,72	2,12 2,74 3,33	1,24 1,54 1,81	0,89 0,89 0,88	3,00 3,89 4,71	1,21 1,26 1,30
5	50	3 4 5 6	5,5	1,8	2,96 3,89 4,80 5,69	2,32 3,05 3,77 4,47	7,11 9,21 11,20 13,07	1,94 2,54 3,13 3,69	1,55 1,54 1,53 1,52	11,27 14,63 17,77 20,72	1,95 1,94 1,92 1,91	2,95 3,80 4,63 5,43	1,57 1,95 2,30 2,63	1,00 0,99 0,98 0,98	4,16 5,42 6,57 7,65	1,33 1,38 1,42 1,46
5,6	56	4 5	6,0	2,0	4,38 5,41	3,44 4,25	13,10 15,97	3,21 3,96	1,73 1,72	20,79 25,36	2,18 2,16	5,41 6,59	2,52 2,97	1,11 1,10	7,69 9,41	1,52 1,57

Продовження табл. Д.3.1

Номер	Розміри, *мм*				F, *см*^{2}	Маса 1 м, *кг*	Довідкові дані для осей								I_{yz}, *см*^{4}	z_0, *см*
							$y-y$			y_0-y_0		z_0-z_0				
	b	t	R	r			I_y, *см*^{4}	W_y, *см*^{3}	i_y, *см*	I_{y_0max}, *см*^{4}	i_{y_0max}, *см*	I_{z_0min}, *см*^{4}	W_z, *см*^{3}	i_{z_0min}, *см*		
6	60	4	7,0	2,3	4,72	3,71	16,21	3,70	1,85	25,69	2,33	6,72	2,93	1,19	9,48	1,62
		5			5,83	4,58	19,79	4,56	1,84	31,40	2,32	8,18	3,49	1,18	11,61	1,66
		6			6,92	5,43	23,21	5,40	1,83	36,81	2,31	9,60	3,99	1,18	13,60	1,70
		8			9,40	7,10	29,55	7,00	1,81	46,77	2,27	12,34	4,90	1,17	17,22	1,78
		10			11,08	8,70	35,32	8,52	1,79	55,64	2,24	15,00	5,70	1,16	20,32	1,85
6,3	63	4	7,0	2,3	4,69	3,90	18,86	4,09	1,95	29,90	2,45	7,81	3,26	1,25	11,00	1,69
		5			6,13	4,81	23,10	5,05	1,94	36,80	2,44	9,52	3,87	1,25	13,70	1,74
		6			7,28	5,72	27,06	5,98	1,93	42,91	2,43	11,18	4,44	1,24	15,90	1,78
7	70	4,5	8,0	2,7	6,20	4,87	29,04	5,67	2,16	46,03	2,72	12,04	4,53	1,39	17,00	1,88
		5			6,86	5,38	31,94	6,27	2,16	50,67	2,72	13,22	4,92	1,39	18,70	1,90
		6			8,15	6,39	37,58	7,43	2,15	59,64	2,71	15,52	5,66	1,38	22,10	1,94
		7			9,42	7,39	42,98	8,57	2,14	68,19	2,69	17,77	6,31	1,37	25,20	1,99
		8			10,67	8,37	48,16	9,68	2,12	76,35	2,68	19,97	6,99	1,37	28,20	2,02
7,5	75	5	9,0	3,0	7,39	5,80	39,53	7,21	2,31	62,65	2,91	16,41	5,74	1,49	23,10	2,02
		6			8,78	6,89	46,57	8,57	2,30	73,87	2,90	19,28	6,62	1,48	27,30	2,06
		7			10,15	7,96	53,34	9,89	2,29	84,61	2,89	22,07	7,43	1,47	31,20	2,10
		8			11,50	9,02	59,84	11,18	2,28	94,89	2,87	24,80	8,16	1,47	35,00	2,15
		9			12,83	10,07	66,10	12,43	2,27	104,72	2,86	27,48	8,91	1,46	38,60	2,188
8	80	5,5	9,0	3,0	8,63	6,78	52,68	9,03	2,47	83,56	3,11	21,80	7,10	1,59	30,90	2,17
		6			9,38	7,36	56,97	9,80	2,47	90,40	3,11	23,54	7,60	1,58	33,40	2,19
		7			10,85	8,51	65,31	11,32	2,45	103,60	3,09	26,97	8,55	1,58	38,30	2,23
		8			12,30	9,65	73,36	12,80	2,44	116,39	3,08	30,32	9,44	1,57	43,00	2,27

Продовження табл. Д.3.1

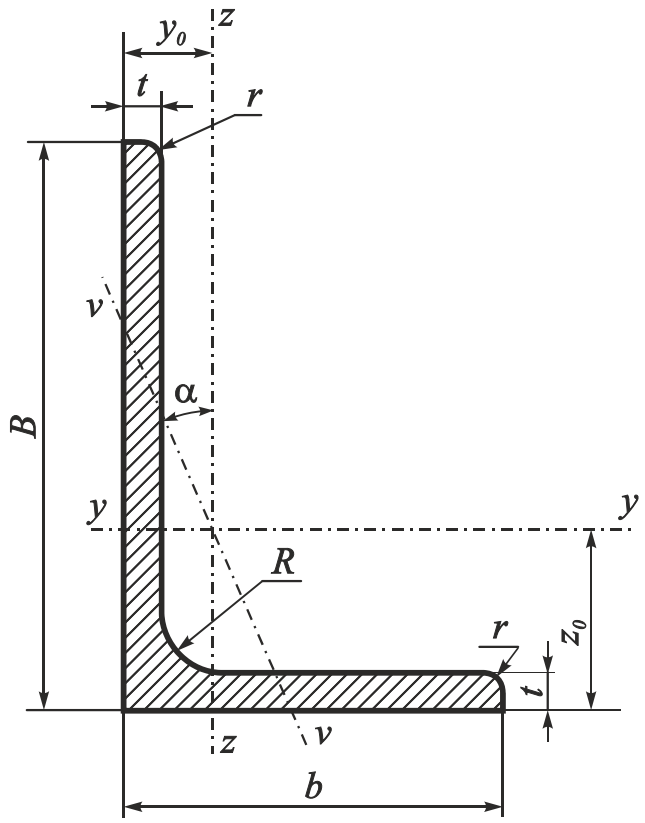
Номер	Розміри, *мм*				F, *см*^{2}	Маса 1 м, *кг*	Довідкові дані для осей								I_{yz}, *см*^{4}	z_0, *см*
							$y-y$			y_0-y_0		z_0-z_0				
	b	t	R	r			I_y, *см*^{4}	W_y, *см*^{3}	i_y, *см*	I_{y_0max}, *см*^{4}	i_{y_0max}, *см*	I_{z_0min}, *см*^{4}	W_z, *см*^{3}	i_{z_0min}, *см*		
9	90	6	10,0	3,3	10,61	8,33	82,10	12,49	2,78	130,00	3,50	33,97	9,88	1,79	48,10	2,43
		7			12,28	9,64	94,30	14,45	2,77	149,67	3,49	38,94	11,15	1,78	55,40	2,47
		8			13,93	10,93	106,11	16,36	2,76	168,42	3,48	43,80	12,34	1,77	62,30	2,51
		9			15,60	12,20	118,00	18,29	2,75	186,00	3,46	48,60	13,48	1,77	68,00	2,55
10	100	6,5	12,0	4,0	12,82	10,06	122,10	16,69	3,09	193,46	3,89	50,73	13,38	1,99	71,40	2,68
		7			13,75	10,79	130,59	17,90	3,08	207,01	3,88	54,16	14,13	1,98	76,40	2,71
		8			15,60	12,25	147,19	20,30	3,07	233,46	3,87	60,92	15,66	1,98	86,30	2,75
		10			19,24	15,10	178,95	24,97	3,05	283,83	3,84	74,08	18,51	1,96	110,00	2,83
		12			22,80	17,90	208,90	29,47	3,03	330,95	3,81	86,84	21,10	1,95	122,00	2,91
		14			26,28	20,63	237,15	33,83	3,00	374,98	3,78	99,32	23,49	1,94	138,00	2,99
		16			29,68	23,30	263,82	38,04	2,98	416,04	3,74	111,61	25,79	1,94	152,00	3,06
11	110	7	12,0	4,0	15,15	11,89	175,61	21,83	3,40	278,54	4,29	72,68	17,36	2,19	106,00	2,96
		8			17,20	13,50	198,17	24,77	3,39	314,51	4,28	81,83	19,29	2,18	116,00	3,00
12,5	125	8	14,0	4,6	19,69	15,46	294,36	32,20	3,87	466,76	4,87	121,98	25,67	2,49	172,00	3,36
		9			22,00	17,30	327,48	36,00	3,86	520,00	4,86	135,88	28,26	2,48	192,00	3,40
		10			24,33	19,10	359,82	39,74	3,85	571,04	4,84	148,59	30,45	2,47	211,00	3,45
		12			28,89	22,68	422,23	47,06	3,82	670,02	4,82	174,43	34,94	2,46	248,00	3,53
		14			33,37	26,20	481,76	54,17	3,80	763,90	4,78	199,62	39,10	2,45	282,00	3,61
		16			37,77	29,65	538,56	61,09	3,78	852,84	4,75	224,29	43,10	2,44	315,00	3,68
14	140	9	14,0	4,6	24,72	19,41	465,72	45,55	4,34	739,42	5,47	192,03	35,92	2,79	274,00	3,78
		10			27,33	21,45	512,29	50,32	4,33	813,62	5,46	210,96	39,05	2,78	301,00	3,82
		12			32,49	25,50	602,49	59,66	4,31	956,98	5,43	248,01	44,97	2,76	354,00	3,90

Закінчення табл. Д.3.1

Номер	Розміри, *мм*				F, *см*^{2}	Маса 1 м, *кг*	Довідкові дані для осей								I_{yz}, *см*^{4}	z_0, *см*
							$y-y$			y_0-y_0		z_0-z_0				
	b	t	R	r			I_y, *см*^{4}	W_y, *см*^{3}	i_y, *см*	I_{y_0max}, *см*^{4}	i_{y_0max}, *см*	I_{z_0min}, *см*^{4}	W_z, *см*^{3}	i_{z_0min}, *см*		
16	160	10	16,0	5,3	31,43	24,67	774,24	66,19	4,96	1229,10	6,25	319,38	52,52	3,19	455,00	4,30
		11			34,42	27,02	844,21	72,44	4,95	1340,06	6,24	347,77	56,53	3,18	496,00	4,35
		12			37,39	28,35	912,89	78,62	4,94	1450,00	6,23	375,78	60,53	3,17	537,00	4,39
		14			43,57	33,97	1046,47	90,77	4,92	1662,13	6,20	430,81	68,15	3,16	615,00	4,47
		16			49,07	38,52	1175,19	102,64	4,89	1865,73	6,17	484,64	75,92	3,14	690,00	4,55
		18			54,79	43,01	1290,24	114,24	4,87	2061,03	6,13	537,46	82,08	3,13	771,00	4,63
		20			60,40	47,44	1418,85	125,60	4,85	2248,26	6,10	589,43	90,02	3,12	830,00	4,70
18	180	11	16,0	5,3	38,80	30,47	1216,44	92,47	5,60	1933,10	7,06	499,78	72,86	3,59	716,00	4,85
		12			42,19	33,12	1316,62	100,41	5,59	2092,78	7,04	540,45	78,15	3,58	776,00	4,89
20	200	12	18,0	6,0	47,10	36,97	1822,78	124,61	6,22	2896,16	7,84	749,40	98,68	3,99	1073,00	5,37
		13			50,85	39,92	1960,77	134,44	6,21	3116,18	7,83	805,35	105,07	3,98	1156,00	5,42
		14			54,60	42,80	2097,00	144,17	6,20	3333,00	7,81	861,00	111,50	3,97	1236,00	5,46
		16			61,98	48,65	2362,57	163,37	6,17	37,55,39	7,78	969,74	123,77	3,96	1393,00	5,54
		20			76,54	60,08	2871,47	200,73	6,12	4560,42	7,72	1181,92	146,62	3,93	1689,00	5,70
		25			94,29	74,02	3466,21	245,59	6,06	5494,04	7,63	1438,38	172,68	3,91	2028,00	5,89
		30			111,54	87,56	4019,60	288,57	6,00	63,51,05	7,55	1698,16	193,06	3,89	2332,00	6,07
22	220	14	21,0	7,0	60,38	47,40	2814,36	175,18	6,83	4470,15	8,60	1158,56	138,62	4,38	1655,00	5,91
		16			68,58	53,83	3175,44	198,71	6,80	5045,37	8,58	1305,52	153,34	4,36	1869,00	53,83
25	250	16	24,0	8,0	78,40	61,55	4717,10	258,43	7,76	7492,10	9,78	1942,09	203,45	4,98	2775,00	6,75
		18			87,72	68,86	5247,24	288,82	7,73	8336,69	9,75	2157,78	233,39	4,96	3089,00	6,83
		20			96,96	76,11	5764,87	318,76	7,71	9159,73	9,72	2370,01	242,52	4,94	3395,00	6,91
		22			106,12	83,31	6270,32	348,26	7,69	9961,60	9,69	2579,04	260,52	4,93	3691,00	7,00
		25			119,71	93,97	7006,39	391,72	7,65	11125,52	9,64	2887,26	287,14	4,91	4119,00	7,11
		28			133,12	104,50	7713,86	434,25	7,61	12243,84	9,59	3189,89	311,98	4,90	4527,00	7,23
		30			141,96	111,44	8176,52	462,11	7,59	12964,66	9,56	3388,98	327,82	4,89	4788,00	7,31

Додаток 4

Сортамент гарячекатаної сталі.
Сталь прокатна кутова нерівнополочна. ГОСТ 8510-86



Примітки:

1. Площу поперечного перерізу і масу 1 *м* кутика обчислено за номінальними розмірами; щільність сталі прийнята такою, що дорівнює 7,85 *г/см*^{3}.

2. Величини радіусів заокруглення, ухилу внутрішніх граней полиць, товщини полиць, що зазначені на рисунку і в табл. П.4, наведено для побудови калібрів і на готовому прокаті не контролюються.

3. У таблицях використано позначення:

$\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{b}$ – ширина більшої і меншої полиці;

$\boldsymbol{t}$ – товщина полиці;

$\boldsymbol{R}$ – радіус внутрішнього заокруглення;

$\boldsymbol{r}$ – радіус заокруглення полки;

$\boldsymbol{F}$ – площа поперечного перерізу;

$\boldsymbol{I}$ – момент інерції;

$\boldsymbol{W}$ – момент опору;

$\boldsymbol{i}$ – радіус інерції;

$\boldsymbol{z_0}$, $\boldsymbol{y_0}$ – відстань від центра ваги до зовнішніх граней полиць;

$\mathbf{tg}\,\boldsymbol{\alpha}$ – кут нахилу осі.

Таблиця Д.4.1

Номер	Розміри, *мм*					F, $см^2$	Маса 1 м, *кг*	Довідкові дані для осей									y_0, *см*	z_0, *см*	I_{yz}, $см^4$	tg α
								$y-y$			$z-z$			$v-v$						
	B	b	t	R	r			I_y, $см^4$	W_y, $см^3$	i_y, *см*	I_z, $см^4$	W_z, $см^3$	i_z, *см*	$I_{v\,min}$, $см^4$	W_v, $см^3$	$i_{v\,min}$, *см*				
2,5 / 1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,43	0,78	0,22	0,19	0,44	0,13	0,16	0,34	0,42	0,86	0,22	0,392
3,2 / 2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,17	1,52	0,72	1,01	0,46	0,30	0,55	0,28	0,25	0,43	0,49	1,08	0,47	0,382
			4			1,94	1,52	1,93	0,93	1,00	0,57	0,39	0,54	0,35	0,33	0,43	0,53	1,12	0,59	0,374
4 / 2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	1,48	3,06	1,14	1,27	0,93	0,49	0,70	0,56	0,41	0,54	0,59	1,32	0,96	0,385
			4			2,47	1,94	3,93	1,49	1,26	1,18	0,63	0,69	0,71	0,52	0,54	0,63	1,37	1,22	0,281
			5			3,03	2,37	4,73	1,82	1,25	1,41	0,77	0,68	0,86	0,64	0,53	0,66	1,41	1,44	0,374
4,5 / 2,8	45	28	3	5,0	1,7	2,14	1,68	4,41	1,45	1,48	1,32	0,61	0,79	0,79	0,52	0,61	0,64	1,47	1,38	0,382
			4			2,80	2,20	5,68	1,90	1,42	1,69	0,80	0,78	1,02	0,67	0,60	0,68	1,51	1,77	0,379
5 / 3,2	50	32	3	5,5	1,8	2,42	1,90	6,18	1,82	1,60	1,99	0,81	0,91	1,18	0,68	0,70	0,72	1,60	2,01	0,403
			4			3,17	2,40	7,98	2,38	1,59	2,56	1,05	0,90	1,52	0,88	0,69	0,76	1,65	2,59	0,401
5,6 / 3,6	56	36	4	6,0	2,0	3,58	2,81	11,37	3,01	1,78	3,70	1,34	1,02	2,19	1,13	0,78	0,84	1,82	3,74	0,406
			5			4,41	3,46	13,82	3,70	1,77	4,48	1,65	1,01	2,65	1,37	0,78	0,88	1,87	4,50	0,404
6,3 / 4	63	40	4	7,0	2,3	4,04	3,17	16,33	3,83	2,01	5,16	1,67	1,13	3,07	1,41	0,87	0,91	2,03	5,25	0,397
			5			4,98	3,91	19,91	4,72	2,00	6,26	2,05	1,12	3,73	1,72	0,86	0,95	2,08	6,41	0,396
			6			5,90	4,63	23,31	5,58	1,99	7,29	2,42	1,11	4,36	2,02	0,86	0,99	2,12	7,44	0,393
			8			7,68	6,03	29,60	7,22	1,96	9,15	3,12	1,09	5,58	2,60	0,85	1,07	2,20	9,27	0,386
7 / 4,5	70	45	5	7,5	2,5	5,59	4,39	27,76	5,88	2,23	9,05	2,62	1,27	5,34	2,20	0,98	1,05	2,28	9,12	0,406
7,5 / 5	75	50	5	8,0	2,7	6,11	4,79	34,81	6,81	2,39	12,47	3,25	1,43	7,24	2,73	1,09	1,17	2,39	12,00	0,436
			6			7,25	5,69	40,92	8,08	2,38	14,60	3,85	1,42	8,48	3,21	1,08	1,21	2,44	14,10	0,435
			8			9,47	7,43	52,38	10,52	2,35	18,52	4,88	1,40	10,87	4,14	1,07	1,29	2,52	17,80	0,430
8/5	80	50	5	8,0	2,7	6,36	4,49	41,64	7,71	2,56	12,68	3,28	1,41	7,57	2,75	1,00	1,13	2,60	13,20	0,387
			6			7,55	5,92	48,98	9,15	2,55	14,85	3,88	1,40	8,88	3,24	1,08	1,17	2,65	15,50	0,386

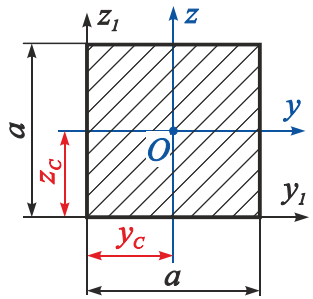
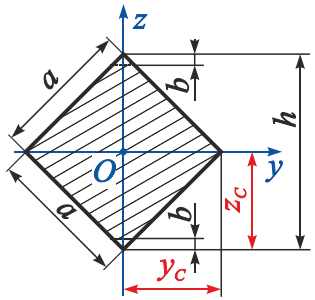
Закінчення табл. Д.4.1

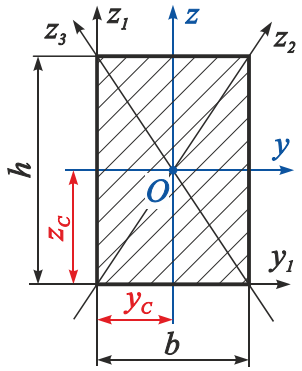
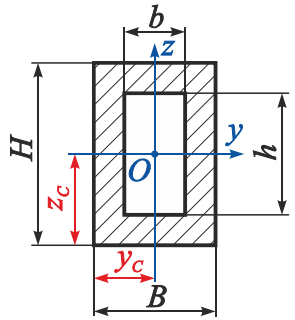
Номер	Розміри, *мм*					F, $см^2$	маса 1 м, *кг*	Довідкові дані для осей									y_0, *см*	z_0, *см*	I_{yz}, $см^4$	tg α
								$y-y$			$z-z$			$v-v$						
	B	b	t	R	r			I_y, $см^4$	W_y, $см^3$	i_y, *см*	I_z, $см^4$	W_z, $см^3$	i_z, *см*	$I_{v\,min}$, $см^4$	W_v, $см^3$	$i_{v\,min}$, *см*				
9 / 5,6	90	56	5,5	9,0	3,0	7,86	6,17	65,28	10,74	2,88	19,67	4,53	1,58	11,77	3,81	1,22	1,26	2,92	20,54	0,384
			6			8,54	6,70	70,58	11,66	2,88	21,22	4,91	1,58	12,70	4,12	1,22	1,28	2,95	22,23	0,384
			8			11,18	8,77	90,87	15,24	2,85	27,08	6,39	1,56	16,29	5,32	1,21	1,36	3,04	28,33	0,380
10 / 6,3	100	63	6	10,0	3,3	9,58	7,53	98,29	14,52	3,20	30,58	6,27	1,79	18,20	5,27	1,38	1,42	3,23	31,50	0,393
			7			11,09	8,70	112,86	16,78	3,19	34,99	7,23	1,78	20,83	6,06	1,37	1,46	3,28	36,10	0,392
			8			12,57	9,87	126,96	19,01	3,18	39,21	8,17	1,77	23,38	6,82	1,36	1,50	3,32	40,50	0,391
			10			15,47	12,14	153,95	23,32	3,15	47,18	9,99	1,75	28,34	8,31	1,35	1,58	3,40	48,60	0,387
11/7	110	70	6,5	10,0	3,3	11,45	8,98	142,42	19,11	3,53	45,61	8,42	2,00	26,94	7,05	1,53	1,58	3,55	46,80	0,402
			8			13,93	10,93	171,54	23,22	3,51	54,64	10,20	1,98	32,31	8,50	1,52	1,64	3,61	55,90	0,400
12,5 / 8	125	80	7	11,0	3,7	14,06	11,04	226,53	26,67	4,01	73,73	11,89	2,29	43,40	9,96	1,76	1,80	4,01	74,70	0,407
			8			15,98	12,58	225,98	30,26	4,00	80,95	13,47	2,28	48,82	11,25	1,75	1,84	4,05	84,10	0,406
			10			19,70	15,47	311,61	37,27	3,98	100,47	16,52	2,26	59,33	13,74	1,74	1,92	4,14	102,00	0,404
			12			23,36	18,34	364,79	44,07	3,95	116,84	19,46	2,24	69,47	16,11	1,72	2,00	4,22	118,00	0,400
14/9	140	90	8	12,0	4,0	18,00	14,13	363,68	38,25	4,49	119,79	17,19	2,58	70,27	14,39	1,58	2,03	4,49	121,00	0,411
			10			22,24	17,46	444,45	47,19	4,47	145,54	21,14	2,58	85,51	17,58	1,96	2,12	4,58	147,00	0,409
16/10	160	100	9	13,0	4,3	22,87	17,96	605,97	56,04	5,15	186,03	23,96	2,85	110,40	20,01	2,20	2,24	5,19	194,00	0,391
			10			25,28	19,85	666,59	61,91	5,13	204,09	26,42	2,84	121,16	22,02	2,19	2,28	5,23	213,00	0,390
			12			30,04	23,58	784,22	73,42	5,11	238,75	31,23	2,82	142,14	25,93	2,18	2,36	5,32	249,00	0,388
			14			34,72	27,26	897,19	84,65	5,08	271,60	35,89	2,80	162,49	29,75	2,16	2,43	5,40	282,00	0,385
18/11	180	110	10	14	4,7	28,33	22,20	952,28	78,59	5,80	276,37	32,27	3,12	165,44	26,96	2,42	2,44	5,88	295,00	0,376
			12			33,69	26,40	1122,56	93,33	5,77	324,09	38,20	3,10	194,28	31,83	2,40	2,52	5,97	348,00	0,374
20 / 12,5	200	125	11	14,0	4,7	34,87	27,37	1449,02	107,31	6,45	446,36	45,98	3,58	263,84	38,27	2,75	2,79	6,50	465,00	0,392
			12			37,89	29,74	1568,19	116,51	6,43	481,93	49,85	3,57	285,04	41,45	2,74	2,83	6,54	503,00	0,392
			14			43,87	34,43	1800,83	134,64	6,41	550,77	57,43	3,54	326,54	47,57	2,73	2,91	6,62	575,00	0,390
			16			49,77	39,07	2026,08	152,41	6,38	616,66	64,83	3,52	366,99	53,56	2,72	2,99	6,71	643,00	0,388

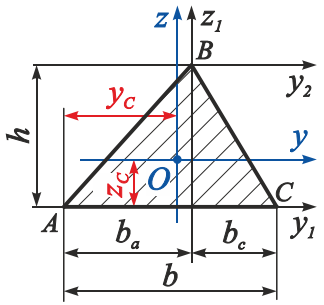
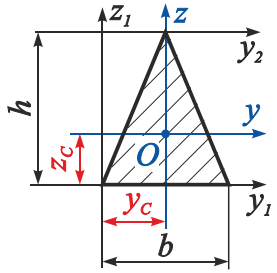
Додаток 5

Геометричні характеристики плоских фігур

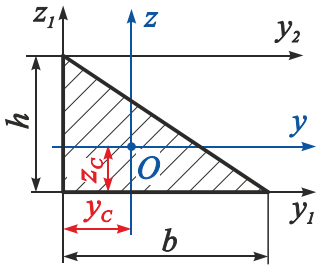
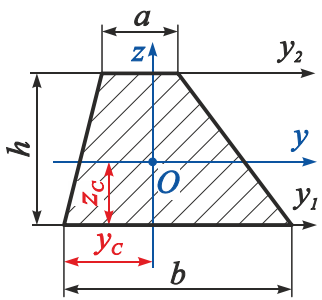
Таблиця Д.5.1

Форма поперечного перерізу	Площа перерізу	Положення центра ваги	Моменти інерції	Моменти опору	Радіуси інерції
Квадрат  Осі y і z – головні центральні	$F = a^2$	$y_c = z_c = \frac{a}{2}$	$I_y = I_z = \frac{a^4}{12}$; $I_{yz} = 0$; $I_{y_1} = I_{z_1} = \frac{a^4}{3}$; $I_{y_1z_1} = \frac{a^4}{4}$; $I_{\rho_O} = \frac{a^4}{6}$; $I_K = 0{,}1406a^4$	$W_y = W_z = \frac{a^3}{6}$; $W_K = 0{,}208a^3$	$i_x = i_y = \frac{a}{\sqrt{12}} =$ $= 0{,}289a$
Квадрат, поставлений на ребро  Осі y і z – головні центральні	$F = a^2$	$y_c = z_c = \frac{h}{2} =$ $= \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a}{\sqrt{2}} =$ $= 0{,}71a$	$I_y = I_z = \frac{a^4}{12} = \frac{h^4}{48}$; $I_{yz} = 0$	$W_y = W_z = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$ При зрізі верхнього і нижнього кутів на $b = \frac{1}{18}h$ W_y досягає максимуму: $W_{y_{\text{зріз}}} = 0{,}124a^3 =$ $= 0{,}044h^3$	$i_x = i_y = \frac{a}{\sqrt{12}} =$ $= 0{,}289a$

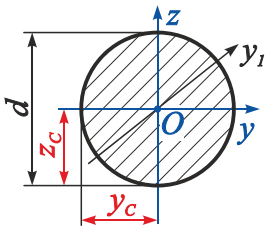
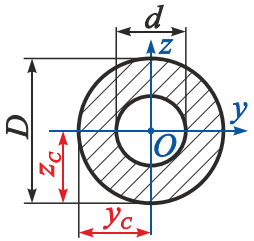
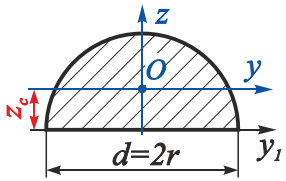
Форма поперечного перерізу	Площа перерізу	Положення центра ваги	Моменти інерції	Моменти опору	Радіуси інерції
Прямокутник  Осі y і z – головні центральні	$F = bh$	$y_c = \frac{b}{2};$ $z_c = \frac{h}{2}$	$I_y = \frac{bh^3}{12};\quad I_z = \frac{hb^3}{12};\quad I_{yz} = 0;$ $I_{y_1} = \frac{bh^3}{3};\qquad I_{z_1} = \frac{hb^3}{3};$ $I_{y_1 z_1} = \frac{b^2h^2}{4};$ $I_{\rho_O} = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2);$ $I_{z_2} = I_{z_3} = \frac{b^3h^3}{6(b^2 + h^2)}$	$W_y = \frac{bh^3}{6};$ $W_z = \frac{hb^3}{6}$	$i_y = 0{,}289h;$ $i_z = 0{,}289b$
Порожнистий прямокутник  Осі y і z – головні центральні	$F = BH - bh$	$y_c = \frac{B}{2};$ $z_c = \frac{H}{2}$	$I_y = \frac{BH^3}{12} - \frac{bh^3}{12};$ $I_z = \frac{HB^3}{12} - \frac{hb^3}{12};$ $I_{yz} = 0;$ $I_{\rho_O} = I_y + I_z$	$W_y = \frac{BH^3 - bh^3}{6H};$ $W_z = \frac{HB^3 - hb^3}{6B}$	$i_y = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}};$ $i_z = \sqrt{\frac{HB^3 - hb^3}{12(BH - bh)}}$

Форма поперечного перерізу	Площа перерізу	Положення центра ваги	Моменти інерції	Моменти опору	Радіуси інерції
Трикутник  Осі y і z –центральні	$F = \frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{b + b_a}{3};$ $z_c = \frac{h}{3}$	$I_y = \frac{bh^3}{36};\ I_z = \frac{bh}{36}(b^2 - b_a b_c);$ $I_{yz} = \frac{bh^2}{72}(b - 2b_c);$ $I_{y_1} = \frac{bh^3}{12};\quad I_{y_2} = \frac{bh^3}{4};$ $I_{z_1} = \frac{h}{12}(b_a^3 + b_c^3);$ $I_{y_1 z_1} = \frac{bh^2}{24}(3b - 2b_c);$ $I_{\rho_O} = \frac{bh}{36}(h^2 + b_a^2 + b_a b_c + b_c^2);$ $I_{\rho_B} = \frac{h}{12}(3bh^2 + b_a^3 + b_c^3)$	Для верхніх волокон $W_y = \frac{bh^2}{24};$ для нижніх волокон $W_y = \frac{hb^2}{12}$	$i_y = \frac{h}{3\sqrt{2}};$ $i_z = \frac{1}{3\sqrt{2}}\sqrt{b^2 - b_a b_c}$
Рівнобедрений трикутник  Осі y і z – головні центральні	$F = \frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{b}{2};$ $z_c = \frac{h}{3}$	$I_y = \frac{bh^3}{36};\quad I_z = \frac{hb^3}{48};$ $I_{yz} = 0;\quad I_{\rho_O} = \frac{bh}{12}\left(\frac{h^2}{3} + \frac{b^2}{4}\right);$ $I_{y_1} = \frac{bh^3}{12};\quad I_{z_1} = \frac{hb^3}{12};$ $I_{y_1 z_1} = \frac{b^2 h^2}{12};\quad I_{y_2} = \frac{bh^3}{4}$ (в рівносторонньому трикутнику $h = b\sqrt{3}/2$)	Для верхніх волокон $W_y = \frac{bh^2}{24};$ для нижніх волокон $W_y = \frac{hb^2}{12}$	$i_y = \frac{h}{3\sqrt{2}};$ $i_z = \frac{b}{2\sqrt{6}}$

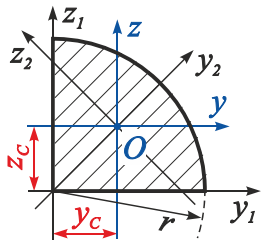
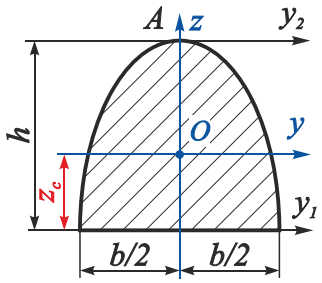
Продовження табл. Д.5.1

Форма поперечного перерізу	Площа перерізу	Положення центра ваги	Моменти інерції	Моменти опору	Радіуси інерції
Прямокутний трикутник  Осі y і z –центральні	$F = \frac{bh}{2}$	$y_c = \frac{b}{3};$ $z_c = \frac{h}{3}$	$I_y = \frac{bh^3}{36};\quad I_z = \frac{hb^3}{36};$ $I_{yz} = -\frac{b^2h^2}{72};\quad I_{\rho_O} = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2);$ $I_{y_1} = \frac{bh^3}{12};\quad I_{z_1} = \frac{hb^3}{12};$ $I_{yz} = \frac{b^2h^2}{24};\quad I_{\rho_O} = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2);$ $I_{y_2} = \frac{bh^3}{4}$	Для верхніх волокон $W_y = \frac{bh^2}{24};$ для нижніх волокон $W_y = \frac{hb^2}{12}$	$i_y = \frac{h}{3\sqrt{2}};$ $i_z = \frac{b}{3\sqrt{2}}$
Трапеція  Осі y і z –центральні	$F = \frac{(a+b)}{2}h$	$y_c = \frac{h(2b+a)}{3(a+b)};$ $z_c = \frac{h(b+2a)}{3(a+b)}$	$I_y = \frac{h^3(b^2+4ab+a^2)}{36(a+b)};$ $I_{y_1} = \frac{h^3(b+3a)}{12};$ $I_{y_2} = \frac{h^3(3b+a)}{12}$	Для верхніх волокон $W_y = \frac{h^2}{12} \times \frac{(b^2+4ab+a^2)}{(2b+a)};$ для нижніх волокон $W_y = \frac{h^2}{12} \times \frac{(b^2+4ab+a^2)}{(b+2a)}$	$i_y = \frac{h}{6(a+b)} \times \sqrt{2(b^2+4ab+a^2)}$

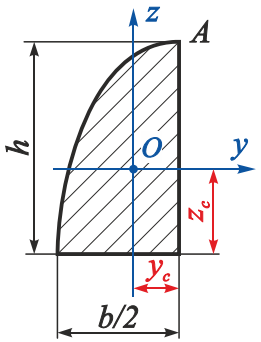
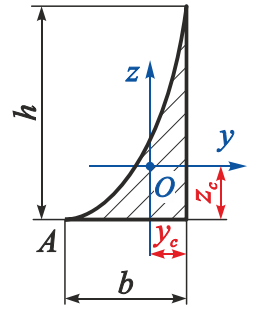
Продовження табл. Д.5.1

Форма поперечного перерізу	Площа перерізу	Положення центра ваги	Моменти інерції	Моменти опору	Радіуси інерції
Круг  Осі y і z – головні центральні	$F = \frac{\pi d^2}{4}$	$y_c = z_c = \frac{d}{2}$	$I_y = I_z = I_{y_1} = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4};$ $I_{yz} = 0;$ $I_{\rho_O} = I_y + I_z = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2}$	$W_y = W_z = W_{y_1} = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4};$ $W_{\rho_O} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2}$	$i_y = i_z = i_{y_1} = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}$
Кільце  Осі y і z – головні центральні	$F = \frac{\pi D^2}{4} \times (1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D}$	$y_c = z_c = \frac{D}{2}$	$I_y = I_z = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4);$ $I_{yz} = 0;$ $I_{\rho_O} = I_y + I_z = \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4)$	$W_y = W_z = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4);$ $W_{\rho_O} = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4)$	$i_y = i_z = \frac{1}{4}\sqrt{D^2 + d^2} = \frac{D}{4}\sqrt{1 + \alpha^2}$
Півкруг  Осі y і z – головні центральні	$F = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2}$	$y_c = \frac{d}{2} = r;$ $z_c = \frac{2}{3} \cdot \frac{d}{\pi} = \frac{4}{3} \cdot \frac{r}{\pi}$	$I_y = \frac{d^4}{16}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right);$ $I_{y_1} = I_z = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8};$ $I_{yz} = I_{y_1 z} = 0$	Для верхніх волокон $W_y \approx 0{,}0239 d^3;$ для нижніх волокон $W_y \approx 0{,}0324 d^3;$ $W_z = \frac{\pi d^3}{64} = \frac{\pi r^3}{8}$	$i_y \approx 0{,}132 d;$ $i_z = \frac{d}{4}$

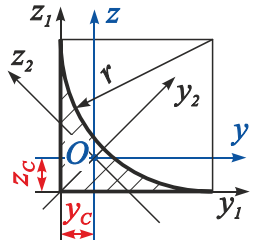
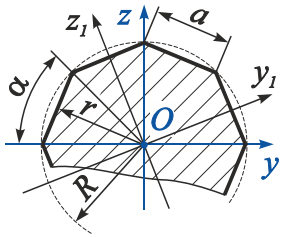
Продовження табл. Д.5.1

Форма поперечного перерізу	Площа перерізу	Положення центра ваги	Моменти інерції	Моменти опору	Радіуси інерції
Чверть круга  Осі y_2 і z_2 – головні центральні;	$F = \frac{\pi r^2}{4}$	$y_c = z_c = \frac{4r}{3\pi}$	$I_{y_2\,max} \approx 0{,}0714r^4;$ $I_{z_2\,min} \approx 0{,}0384r^4;$ $I_y = I_z \approx 0{,}0549r^4;$ $I_{yz} = -0{,}0165r^4;$ $I_{y_1} = I_{z_1} = \frac{\pi r^4}{16} \approx 0{,}196r^4;$ $I_{y_1 z_1} = \frac{r^4}{8}$	Для верхніх і правих волокон $W_y = W_z \approx 0{,}923r^3;$ для нижніх і лівих волокон $W_y = W_z \approx 1{,}245r^3$	$i_{y\,max} \approx 0{,}302r;$ $i_{z\,max} \approx 0{,}221r$
Параболічний сегмент  Осі y і z – головні центральні; ***A*** – вершина параболи	$F = \frac{2}{3}bh$	$z_c = \frac{2}{5}h$	$I_y = \frac{8}{175}bh^3;$ $I_{y_1} = \frac{16}{105}bh^3;$ $I_{y_2} = \frac{2}{7}bh^3;$ $I_z = \frac{1}{30}bh^3$	Для верхніх волокон $W_y = \frac{8}{105}bh^2;$ для нижніх волокон $W_y = \frac{4}{35}bh^2;$ $W_z = \frac{1}{15}bh^2$	$i_y = \frac{2}{5}h\sqrt{\frac{3}{7}};$ $i_z = \frac{b}{2\sqrt{5}}$

Продовження табл. Д.5.1

Форма поперечного перерізу	Площа перерізу	Положення центра ваги	Моменти інерції	Моменти опору	Радіуси інерції
Параболічний півсегмент  Осі y і z – центральні; ***A*** – вершина параболи	$F = \frac{bh}{3}$	$y_c = \frac{3}{16}b;$ $z_c = \frac{2}{5}h$	$I_y = \frac{4}{175}bh^3;$ $I_z = \frac{19}{3840}hb^3$	Для нижніх і правих волокон $W_{y_{min}} = \frac{2}{35}bh^2;$ $W_{z_{min}} = \frac{19}{48}hb^2$	$i_y = \frac{2}{5}h\sqrt{\frac{3}{7}}$
Параболічний трикутник  Осі y і z – центральні; ***A*** – вершина параболи	$F = \frac{bh}{3}$	$y_c = \frac{1}{4}b;$ $z_c = \frac{3}{10}h$	$I_y = \frac{1}{21}bh^3;$ $I_z = \frac{1}{5}hb^3$	Для нижніх і правих волокон $W_{y_{min}} = \frac{10}{63}bh^2;$ $W_{z_{min}} = \frac{4}{5}hb^2$	$i_y = h\sqrt{\frac{1}{7}}$

Закінчення табл. Д.5.1

Форма поперечного перерізу	**Площа перерізу**	**Положення центра ваги**	**Моменти інерції**	**Моменти опору**	**Радіуси інерції**
Круговий трикутник  Осі y_2 і z_2 – головні центральні	$F = 0{,}215r^2$	$y_c = z_c = 0{,}223r$	$I_y = I_z = 0{,}00755r^4;$ $I_{y_1} = I_{z_1} = 0{,}0181r^4;$ $I_{y_2} = 0{,}003r^4;$ $I_{z_2} = 0{,}0121r^4$	$W_{z_2\,min} = 0{,}0097r^3$	$i_{z_2\,min} = 0{,}187r$
Правильний багатокутник зі сторонами n  Осі y, y_1, z і z_1 – головні центральні	$F = \frac{1}{4}na^2 \times$ $\times ctg\,\alpha =$ $= nr^2\,tg\,\alpha =$ $= \frac{nar}{2}$	$R = \frac{2}{2\,sin\,\alpha};$ $r = \frac{2}{2\,tg\,\alpha}$	$I_y = I_z = I_{y_1} = I_{z_1} =$ $= \frac{nar}{48}(6R^2 - a^2) =$ $= \frac{nar}{96}(12r^2 + a^2)$	–	$i_y = i_z =$ $= \sqrt{\frac{12r^2 + a^2}{48}};$ $i_{y_1} = i_{z_1} =$ $= \sqrt{\frac{6R^2 - a^2}{24}}$

Примітка. Радіус інерції $i = \sqrt{I/F}$

Бібліографічний список

Тимошенко, С. П. Сопротивление материалов. В 2 т. Т. 1. Элементарная теория и задачи / С. П. Тимошенко. – М.: Физматгиз, 1960. – 379 с.

Писаренко, Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – 2-ге вид., допов. і переробл. – Київ: Вища шк., 2004. – 655 с.

Сопротивление материалов / Г. С. Писаренко, В. А. Агарев, А. Л. Квитка и др. – Киев: Вища шк., 1986. – 775 с.

Ободовский, Б. А. Сопротивление материалов в примерах и задачах / Б. А. Ободовский, С. Е. Ханин. – Харьков: Вища шк., 1981. – 344 с.

Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов / В. И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.

Работнов, Ю. Н. Сопротивление материалов / Ю. Н. Работнов. – М.: Физматгиз, 1962. – 455 с.

Беляев, Н. М. Сопротивление материалов / Н. М. Беляев. – М.: Гостехиздат, 1953. – 856 с.

Сборник задач по сопротивлению материалов / Н. М. Беляев, Л. А. Белявский, Я. И. Кипнис и др.; под ред. В. К. Качурина. – М.: Наука, 1970. – 432 с.

Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И. Н. Миролюбов, С. А. Енгалычев, Н. Д. Сергиевский и др. – М.: Высш. шк., 1967. – 484 с.

Справочник по сопротивлению материалов / Е. Ф. Винокуров, М. К. Балыкин, И. А. Голубев и др. – Мн.: Наука и техника, 1988. – 464 с.

Сборник задач по сопротивлению материалов / А. С. Вольмир, Ю. П. Григорьев, А. И. Коданев, В. А. Марьин, В. В. Новицкий; под ред. А. С. Вольмира. – М.: Наука, 1984. – 408 с.

Кривцов, В. С. Сопротивление материалов / В. С. Кривцов, С. А. Полтарушников. – Харьков: Торнадо, 1999. – 359 с.

Зміст

Вступ 3
Основні позначення 3
1. Статичні моменти перерізу 4
2. Центральні осі і центр ваги перерізу 4
3. Приклади визначення координат центра ваги простих перерізів 7
4. Осьові, полярний і відцентровий моменти інерції перерізу 12
5. Зв'язок між величинами I_ρ, I_y і I_z 13
6. Приклади визначення моментів інерції найпростіших геометричних фігур 14
7. Зміна осьових і відцентрових моментів інерції перерізу при паралельному перенесенні осей 20
8. Зміна осьових і відцентрових моментів інерції перерізу при повороті осей 22
9. Інваріантність суми осьових моментів інерції перерізу відносно повороту осей 24
10. Головні осі й головні моменти інерції перерізу 24
11. Приклади розв'язання типових задач 28
Запитання для самоперевірки 58
Порядок виконання завдання і варіанти 59
Додаток 1. Сортамент гарячекатаної сталі. Балки двотаврові. ГОСТ 8239-89 70
Додаток 2. Сортамент гарячекатаної сталі. Швелери з ухилом внутрішніх граней полиць. ГОСТ 8240-89 72
Додаток 3. Сортамент гарячекатаної сталі. Сталь прокатна кутова рівнополочна. ДСТУ 2251-93 (ГОСТ 8509-93) 74
Додаток 4. Сортамент гарячекатаної сталі. Сталь прокатна кутова нерівнополочна. ГОСТ 8510-86 79
Додаток 5. Геометричні характеристики плоских фігур 82
Бібліографічний список 90

Навчальне видання

Гребенніков Михайло Миколайович
Пекельний Микола Іванович

ГЕОМЕТРИЧНІ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ ПЕРЕРІЗІВ

Редактор В. М. Коваль

Зв. план, 2018
Підписано до видання 14.12.2018
Ум. друк. арк. 5,1. Обл.-вид. арк. 5,75. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu

Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ЦЕНТР
E-mail: izdat@khai.edu