

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА
В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2016

УДК 51(075.3)
ББК 22.1
Е50

Колектив авторів:

К. П. Барахов, І. В. Брисіна, О. В. Головченко, Н. В. Драшпуль,
О. Г. Ніколаєв, Т. В. Рвачова, Є. П. Томілова, В. В. Хоменко,
Ю. А. Щербакова

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. В. А. Ванін,
д-р фіз.-мат. наук, проф. В. О. Дорошенко

Елементарна математика в прикладах і задачах [Текст]:
Е50 навч. посіб./ К. П. Барахов, І. В. Брисіна, О. В. Головченко та
ін.– Х.: Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харк. авіац.
ін-т», 2016. – 196 с.
ISBN 978-966-662-494-2

Наведено методику підготовки до складання ЗНО з усіх розділів шкільної програми з математики (базовий і поглиблений рівні). Подано зведений теоретичний матеріал, методичний розбір розв'язань типових задач, велику кількість задач для самостійної роботи різного рівня складності.

Для учнів випускних класів середніх шкіл України, випускників технікумів, вступників до вузів.

Іл. 129. Табл. 7. Бібліогр.: 6 назв

УДК 51(075.3)
ББК 22.1

ISBN 978-966-662-494-2

© Колектив авторів, 2016
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2016

ПЕРЕДМОВА

Це видання адресовано учням випускних класів середніх шкіл України, які хочуть поліпшити свої знання з елементарної математики з метою успішного складання державної підсумкової атестації (ДПА) і зовнішнього незалежного оцінювання (ЗНО). Метою посібника є методичне забезпечення якісної підготовки з усіх тем шкільної програми з математики (базовий і поглиблений рівні). Для цього книгу певним чином структуровано. Кожний розділ починається з теоретичного матеріалу, що містить основні означення, формули і теореми, які має знати школяр для розв'язання задач з цього розділу. Зауважимо, що теоретичні відомості наведено компактно у вигляді зведення результатів. Перед тим, як приступити до розв'язання задач, школяр повинен уважно ознайомитися зі змістом теоретичного мінімуму. Якщо якісь твердження йому не знайомі, то необхідно їх більш глибоко проробити, використовуючи книги, наведені в бібліографічному списку. Після теоретичної частини кожна тема містить розбір усіх типових задач з методичними вказівками, які акцентують увагу на основні способи і методи їх аналізу і розв'язання. Кожний розділ завершується завданнями для самостійної роботи. Пропоновані для розв'язання задачі зазвичай наведено в порядку збільшення їхньої складності. При роботі з книгою школяру рекомендується добре вивчити теоретичний матеріал до теми, що розглядається, з папером і ручкою уважно простежити методику розв'язання типових задач за наведеними в посібнику прикладами і, на завершення, закріпити свої знання і розвинути практичні вміння і навички, розв'язуючи задачі для самостійної роботи. Важливими також є уважний розгляд численних рисунків, які ілюструють теоретичний матеріал, і методичний розбір прикладів розв'язання задач. Починати розв'язання задач слід з простих, поступово збільшуючи їхню складність. Якщо в розділі передбачено задачі на доведення, то до них треба поставитися з підвищеною увагою, оскільки саме цей клас задач розвиває логічне мислення і здібності до аналізу. Геометричні задачі необхідно розв'язувати, починаючи із зображення креслення, на якому необхідно зв'язати всі елементи геометричних фігур, задані за умовою. Якщо складна задача відразу не виходить, то можна зазирнути у відповідь, де в деяких випадках наведено вказівки до розв'язання задачі. Якщо і при цьому задача не виходить, рекомендується відкласти розв'язання задачі й повернутися до неї через деякий час. У цілому школяр повинен пам'ятати, що навчитися математиці можна, тільки розв'язуючи велику кількість різноманітних задач.

При написанні посібника було використано багаторічний досвід викладання елементарної математики в ліцеї Національного аерокосмічного університету ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», фізико-математичній школі й довузівській підготовці ХАІ.

Посібник містить такі розділи: алгебраїчні перетворення, тригонометричні перетворення, перетворення логарифмічних виразів, функції і графіки, рівняння і нерівності, планіметрія, стереометрія, векторна алгебра, початки аналізу, прогресії, метод математичної індукції, елементи комбінаторики, біном Ньютона, елементи теорії ймовірностей.

Розділ 1. АЛГЕБРАЇЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

1.1. Многочлени від однієї змінної. Ділення многочленів з остачею.

Теорема Безу

Загальний вигляд многочлена:

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n,$$

де P – ім'я; n – степінь; x – аргумент; $a_i (i = \overline{0, n})$ – коефіцієнт; a_0 – старший коефіцієнт (якщо $a_0 = 1$, то многочлен є зведеним); a_0x^n – старший член; a_n – вільний член.

Зв'язок між компонентами при діленні многочленів:

$$\underbrace{P_n(x)}_{\text{ділене}} = \underbrace{\overline{P_k(x)}}_{\text{дільник}} \cdot \underbrace{Q_{n-k}(x)}_{\text{частка}} + \underbrace{R_s(x)}_{\text{остача}}.$$

Завжди $s < k$; якщо $R_s(x) = 0$, то многочлен $P_n(x)$ ділиться на многочлен $\overline{P_k(x)}$, тобто $P_n(x) : \overline{P_k(x)}$. Зокрема, $P_n(x) = (x - a)Q_{n-1}(x) + R$, де R – число; якщо $R = 0$, то $P_n(x) : (x - a)$.

Теорема Безу. Остача від ділення многочлена $P_n(x)$ на $x - a$ дорівнює значенню многочлена при $x = a$ ($R = P_n(a)$).

Теорема (ознака подільності многочлена на $x - a$). Для подільності многочлена $P_n(x)$ на $x - a$ необхідно і достатньо, щоб a було коренем многочлена $P_n(x)$, тобто $P_n(a) = 0$.

Висновок. Якщо $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($k < n$) – корені многочлена $P_n(x)$ кратності $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ відповідно, то $P_n(x) = (x - x_1)^{\alpha_1} (x - x_2)^{\alpha_2} \dots (x - x_k)^{\alpha_k} Q_{n-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k)}(x)$, де $Q_{n-(\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k)}(x)$ – многочлен степеня $n - (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k)$, який не має коренів.

Приклад 1.1. Розділити многочлен $P_4(x) = 3x^4 - 2x + 3 - 4x^2 + x^3$ на многочлен $P_2(x) = 5 - 2x + x^2$.

Розв'язання. Зобразимо ці многочлени в канонічних формах:

$$P_4(x) = 3x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 3, \quad P_2(x) = x^2 - 2x + 5.$$

Виконаємо ділення стовпчиком:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 3 & x^2 - 2x + 5 \\ - 3x^4 - 6x^3 + 15x^2 & 3x^2 + 7x - 5 \\ \hline 7x^3 - 19x^2 - 2x + 3 & \\ - 7x^3 - 14x^2 + 35x & \\ \hline -5x^2 - 37x + 3 & \\ - -5x^2 + 10x - 25 & \\ \hline -47x + 28 & \end{array}$$

Частка – $Q_2(x) = 3x^2 + 7x - 5$, остача – $R_1(x) = -47x + 28$.

Зауваження. Справедливими є рівності

$$3x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 3 = (x^2 - 2x + 5)(3x^2 + 7x - 5) - 47x + 28,$$

$$\frac{3x^4 + x^3 - 4x^2 - 2x + 3}{x^2 - 2x + 5} = 3x^2 + 7x - 5 + \frac{-47x + 28}{x^2 - 2x + 5}.$$

Розглянемо ділення многочленів від декількох аргументів. Виберемо один із цих аргументів і умовно будемо вважати многочлени такими, що залежать тільки від цього аргументу, інші аргументи умовно вважатимемо параметрами. Запишемо многочлени у канонічних формах і виконаємо ділення стовпчиком.

Приклад 1.2. Розділити многочлен $P'(x, y, z) = x^2y + xy^2 + x^2z + xz^2 + y^2z + yz^2 + 3xyz$ на многочлен $P''(x, y, z) = xy + xz + yz$.

Розв'язання. Будемо вважати ці многочлени многочленами відносно аргументу x . Запишемо їх в канонічних формах:

$$P'(x, y, z) = P_2(x) = (y + z)x^2 + (y^2 + 3yz + z^2)x + y^2z + yz^2,$$

$$P''(x, y, z) = P_1(x) = (y + z)x + yz;$$

$$\begin{array}{r|l} \begin{array}{r} (y + z)x^2 + (y^2 + 3yz + z^2)x + y^2z + yz^2 \\ - (y + z)x^2 + xyz \end{array} & \begin{array}{r} (y + z)x + yz \\ \hline x + y + z \end{array} \\ \hline \begin{array}{r} (y^2 + 2yz + z^2)x + y^2z + yz^2 \\ - (y^2 + 2yz + z^2)x + y^2z + yz^2 \end{array} & \\ \hline 0. & \end{array}$$

Частка – $Q(x, y, z) = x + y + z$, остача – $R(x, y, z) = 0$.

Розглянемо ділення многочлена на двочлен $x - a$.

Приклад 1.3. Знайти остачу від ділення многочлена $P_3(x) = 4x^3 + 5x - 36$ на $x - 2$.

Розв'язання. За теоремою Безу $R = P_3(2) = 32 + 10 - 36 = 6$.

Приклад 1.4. Перевірити подільність многочлена $P_3(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ на $x - 1$, $x + 1$, $x - 2$, $x + 2$, $x + 3$.

Розв'язання. Оскільки $P_3(1) = -6 \neq 0$, то $P_3(x)$ не ділиться на $x - 1$. Далі $P_3(-1) = 0 \Rightarrow P_3(x) : (x + 1)$, $P_3(2) = 0 \Rightarrow P_3(x) : (x - 2)$, $P_3(-2) = 0 \Rightarrow P_3(x) : (x + 2)$, $P_3(-3) = -10 \neq 0 \Rightarrow P_3(x)$ не ділиться на $x + 3$.

Зауваження. Справедливою є рівність $P_3(x) = (x + 1)(x - 2)(x + 2)$.

Завдання для самостійної роботи

Розділити многочлен $P_n(x)$ на многочлен $Q_m(x)$.

1.01. $P_5(x) = 5x^4 - 3x^5 + 3x - 1$, $Q_2(x) = 1 + x - x^2$.

1.02. $P_4(x) = 1 - x - 5x^2 + x^3 + 2x^4$, $Q_2(x) = x^2 - x$.

1.03. $P_3(x) = x^3 - 9x^2 + 27x - 27$, $Q_2(x) = x^2 - 2x + 4$.

При $n=2$ одержимо многочлен $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, і для його коренів x_1, x_2 справедливо, що

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \frac{c}{a}. \end{cases}$$

Для зведеного многочлена $P_2(x) = x^2 + px + q$ будемо мати

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

Приклад 1.5. Знайти корені многочлена $P_4(x) = 2x^4 + x^3 + 9x^2 + 5x - 5$.

Розв'язання. Знайдемо спочатку раціональні корені. Оскільки $-5: \pm 1, \pm 5; 2: \pm 1, \pm 2$, то раціональними коренями можуть бути тільки числа $\pm 1, \pm 5, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{5}{2}$.

Одержані числа перевіряємо на можливість бути коренями многочлена: $P_4(1) = 12, P_4(-1) = 0$, отже, $x = 1$ не є коренем, а $x = -1$ – корінь многочлена.

Розділимо многочлен на $x + 1$ (тобто виділимо корінь $x = -1$):

$$\begin{array}{r|l} 2x^4 + x^3 + 9x^2 + 5x - 5 & x + 1 \\ \hline -2x^4 + 2x^3 & \\ \hline -x^3 + 9x^2 + 5x - 5 & \\ -x^3 - x^2 & \\ \hline 10x^2 + 5x - 5 & \\ -10x^2 + 10x & \\ \hline -5x - 5 & \\ -5x - 5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Задачу зведено до знаходження коренів многочлена $\overline{P}_3(x) = 2x^3 - x^2 + 10x - 5$. Якщо крайні коефіцієнти одержаного многочлена прості, то складають нову послідовність чисел, які можуть бути коренями. Одне й те ж число може бути коренем декілька разів, тому перевіримо: $\overline{P}_3(-1) = -18$, отже, $x = -1$ є коренем тільки один раз.

Продовжимо перевірку інших чисел: $\overline{P}_3(5) = 260, \overline{P}_3(-5) = -320, \overline{P}_3(\frac{1}{2}) = 0$. Виділимо

знайдений корінь $x = \frac{1}{2}$:

$$\begin{array}{r|l}
 -\frac{2x^3 - x^2 + 10x - 5}{2x^3 - x^2} & x - \frac{1}{2} \\
 \hline
 & 2x^2 + 10 \\
 \hline
 & 10x - 5 \\
 & -10x - 5 \\
 \hline
 & 0.
 \end{array}$$

Одержаний многочлен $\overline{P}_2(x) = 2x^2 + 10$ коренів не має. Коренями цього многочлена є -1 і $\frac{1}{2}$.

Приклад 1.6. Знайти корені многочлена $x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36$.

Розв'язання. Оскільки многочлен зведений, то його раціональні корені – цілі. Цілі корені – дільники вільного члена, а саме: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 9, \pm 12, \pm 18, \pm 36$.
Маємо:

$$P_4(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36, \quad P_4(1) = 36, \quad P_4(-1) = 16, \quad P_4(2) = 16, \quad P_4(-2) = 0;$$

$$\begin{array}{r|l}
 -\frac{x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 12x + 36}{x^4 + 2x^3} & x + 2 \\
 \hline
 & x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \\
 \hline
 & -4x^3 - 11x^2 + 12x + 36 \\
 & -4x^3 - 8x^2 \\
 \hline
 & -3x^2 + 12x + 36 \\
 & -3x^2 - 6x \\
 \hline
 & 18x + 36 \\
 & -18x + 36 \\
 \hline
 & 0.
 \end{array}$$

$\overline{P}_3(x) = x^3 - 4x^2 - 3x + 18$, претендентів бути коренями стало менше: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm 18$.

Виділені раніше числа перевіряти не треба, а $x = -2$ необхідно перевірити ще раз: $\overline{P}_3(-2) = 0$,

$$\begin{array}{r|l}
 -\frac{x^3 - 4x^2 - 3x + 18}{x^3 + 2x^2} & x + 2 \\
 \hline
 & x^2 - 6x + 9 \\
 \hline
 & -6x^2 - 3x + 18 \\
 & -6x^2 - 12x \\
 \hline
 & 9x + 18 \\
 & -9x + 18 \\
 \hline
 & 0.
 \end{array}$$

Отже, $x_1 = -2, x_2 = -2$.

Після знаходження кратного кореня -2 одержимо рівняння $x^2 - 6x + 9 = 0$. Розв'язуючи його, знаходимо $x_3 = x_4 = 3$.

Теорема. Будь-який многочлен $P_n(x)$ степеня $n \geq 2$ можна подати у вигляді добутку многочленів не вище другого степеня.

$P_n(x) = a_0(x-x_1)^{\alpha_1}(x-x_2)^{\alpha_2} \dots (x-x_k)^{\alpha_k} (x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} (x^2+b_2x+c_2)^{\beta_2} \dots (x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}$,
де $x_1, x_2, \dots, x_k$ ($k < n$) – корені многочлена $P_n(x)$ кратності $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$,
 $n = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k + 2(\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_m)$.

Приклад 1.7. Розкласти многочлен $P_4(x) = x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20$ на множники.

Розв'язання. Оскільки $P_4(2) = 0$ і $P_4(-1) = 0$, то многочлен ділиться на $(x+1)(x-2) = x^2 - x - 2$. Виконаємо ділення стовпчиком:

$$\begin{array}{r|l} x^4 - 8x^3 + 15x^2 + 4x - 20 & x^2 - x - 2 \\ \underline{x^4 - x^3 - 2x^2} & \\ -7x^3 + 17x^2 + 4x - 20 & \\ \underline{-7x^3 + 7x^2 + 14x} & \\ 10x^2 - 10x - 20 & \\ \underline{10x^2 - 10x - 20} & \\ 0 & \end{array}$$

Таким чином, $P_4(x) = (x+1)(x-2)(x^2 - 7x + 10)$. Коренями многочлена $x^2 - 7x + 10$ є -2 і 5 . Остаточо отримуємо $P_4(x) = (x+1)(x-2)^2(x-5)$.

Завдання для самостійної роботи

1.19. Розв'язати квадратні рівняння за теоремою Вієта:

- 1) $x^2 - x - 6 = 0$; 2) $x^2 + 3x - 10 = 0$; 3) $x^2 - 8x + 15 = 0$; 4) $x^2 + 6x + 8 = 0$;
5) $x^2 - x - 2 = 0$; 6) $x^2 - 2x - 15 = 0$; 7) $x^2 - 10x + 21 = 0$; 8) $x^2 + 11x + 18 = 0$.

1.20. Знайти дійсні корені многочленів:

- 1) $P_3(x) = 2x^3 + 3x^2 - 11x - 6$; 2) $P_4(x) = 2x^4 + 5x^3 - 13x^2 - 25x + 15$;
3) $P_3(x) = 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6$; 4) $P_4(x) = 2x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 9x + 6$.

1.21. Розкласти многочлени на множники:

- 1) $P_3(x) = 8x^3 - 5x^2 + 5x + 3$; 2) $P_3(x) = 4x^3 - 12x^2 - 25x + 75$;
3) $P_3(x) = 8x^3 + 42x^2 + 37x - 12$; 4) $P_4(x) = 12x^4 - 5x^3 - 51x^2 + 20x + 12$;
5) $P_4(x) = 6x^4 + 5x^3 - 12x^2 - 5x + 6$; 6) $P_4(x) = 14x^4 - 37x^3 - 72x^2 - 17x + 4$;
7) $P_2(x) = 3x^2 - 2x - 7$; 8) $P_3(x) = 8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$; 9) $P_3(x) = x^3 - 19x - 30$;
10) $P_3(x) = x^3 + 2x^2 - 3$; 11) $P_4(x) = x^4 - x^3 - x + 1$;
12) $P_4(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$; 13) $P_4(x) = x^4 + 3x^2 + 2$;
14) $P_4(x) = x^4 - 4x^3 + 8x^2 - 16x + 16$.

1.22. Розв'язати рівняння в області дійсних чисел:

- 1) $x^4 + 2x^3 - 25x^2 - 26x + 120 = 0$; 2) $x^5 - 4x^4 + 4x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$;

- 3) $x^4 + x^3 - 16x^2 - 4x + 48 = 0$; 4) $6x^5 + 11x^4 + 20x^3 + 40x^2 - 16x - 16 = 0$;
 5) $x^3 + 9x^2 + 23x + 15 = 0$; 6) $2x^4 - 21x^3 + 74x^2 - 105x + 50 = 0$;
 7) $16x^3 - 28x^2 + 4x + 3 = 0$; 8) $x^3 - 4x^2 + x + 6 = 0$;
 9) $x^4 + 5x^3 + 4x^2 - 24x - 24 = 0$; 10) $x^5 + 4x^4 - 6x^3 - 24x^2 - 27x - 108 = 0$.

1.3. Елементарні формули алгебри. Спрощення алгебраїчних виразів. Раціональні дробі. Розкладання правильних раціональних дробів на прості дробі

Означення 1. Дріб вигляду $\frac{P_m(x)}{\bar{P}_n(x)}$, де $P_m(x)$, $\bar{P}_n(x)$ – многочлени, називається раціональним; якщо $m < n$, то раціональний дріб є правильним.

Означення 2. Раціональні дробі $\frac{A}{x-a}$, $\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$, $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$,

де $A, B, a, p, q \in R$, $k \in N$, $p^2 - 4q < 0$, називаються елементарними.

Має місце твердження: правильний раціональний дріб можна зобразити у вигляді суми елементарних дробів. Зокрема, справедливо, що

$$\frac{P_l(x)}{(x-a)^k(x^2+px+q)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{Bx+C}{x^2+px+q}, \quad l < k+2.$$

Для знаходження коефіцієнтів $A_1, A_2, \dots, A_k, B, C$ праву частину зводять до спільного знаменника і порівнюють чисельники дробів у лівій і правій частинах одержаної рівності. Потім комбінують методи:

1) підставляють ліворуч і праворуч одні й ті ж самі числа (зазвичай корені знаменника);

2) прирівнюють коефіцієнти при однакових степенях x ліворуч і праворуч рівності й розв'язують отриману систему.

Формули скороченого множення:

$$\begin{aligned} a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b), & a^3 - b^3 &= (a-b)(a^2 + ab + b^2); \\ a^3 + b^3 &= (a+b)(a^2 - ab + b^2), & a^{2n+1} + b^{2n+1} &= (a+b)(a^{2n} - ba^{2n-1} + b^2a^{2n-2} - \dots + b^{2n}); \\ a^{2n+1} - b^{2n+1} &= (a-b)(a^{2n} + ba^{2n-1} + b^2a^{2n-2} + \dots + b^{2n}), & a^{2n} - b^{2n} &= (a^n - b^n)(a^n + b^n); \\ a^{2n} - b^{2n} &= (a-b)(a^{2n-1} + ba^{2n-2} + b^2a^{2n-3} + \dots + b^{2n-1}); \\ a^{2n} - b^{2n} &= (a+b)(a^{2n-1} - ba^{2n-2} + b^2a^{2n-3} - \dots - b^{2n-1}); \\ (a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n)^2 &= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2 + 2a_1a_2 + 2a_1a_3 + \dots + 2a_1a_n + \dots + 2a_{n-1}a_n; \\ (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2, & (a-b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2; \\ (a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b); \\ (a-b)^3 &= a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b). \end{aligned}$$

Формула бінома Ньютона:

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \dots + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2b^{n-2} + nab^{n-1} + b^n,$$

$$(a-b)^n = a^n - na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2}b^2 + \dots + (-1)^{n-2} \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^2b^{n-2} + (-1)^{n-1} nab^{n-1} + (-1)^n b^n,$$

де $1, n, \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}, \dots$ – біномні коефіцієнти, які знаходяться в n -му рядку трикутника Паскаля.

Алгоритм побудови трикутника Паскаля (табл. 1.1): кожний елемент наступного рядка, окрім його крайніх елементів, дорівнює сумі двох сусідніх з ним елементів попереднього рядка; крайні елементи кожного рядка – одиниці.

Таблиця 1.1

Номер рядка	Біномні коефіцієнти										
0	1										
1	1		1								
2	1		2		1						
3	1		3		3		1				
4	1		4		6		4	1			
5	1		5		10		10	5	1		
6	1		6		15		20		15	6	1

Приклад 1.8. Знайти $(a-b)^5$.

Розв'язання. Коефіцієнти беремо із 5-го рядка, знаки “+”, “–” чергуємо:
 $(a-b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$.

Формула виділення повного квадрата:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(x^2 + 2 \frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \right) = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Приклад 1.9. Спростити $\frac{(x+1)^2 - 4x}{x^2 - 1}$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \neq \pm 1$.

$$\frac{(x+1)^2 - 4x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 + 2x + 1 - 4x}{x^2 - 1} = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}, \text{ якщо } x \neq \pm 1.$$

Приклад 1.10. Спростити вираз $f(a;b;x) = \frac{2x^2 + ax + 4bx + 2ab}{3x^2 + 2ax + 6bx + 4ab}$.

$$\begin{aligned} \text{Розв'язання. } f(a;b;x) &= \frac{(2x^2 + 4bx) + (ax + 2ab)}{(3x^2 + 6bx) + (2ax + 4ab)} = \\ &= \frac{2x(x + 2b) + a(x + 2b)}{3x(x + 2b) + 2a(x + 2b)} = \frac{(x + 2b)(2x + a)}{(x + 2b)(3x + 2a)} = \frac{2x + a}{3x + 2a}. \end{aligned}$$

$$\text{ОДЗ: } x \neq -2b, \quad x \neq -\frac{2a}{3}. \quad f(a;b;x) = \frac{2x + a}{3x + 2a}, \text{ якщо } x \neq -2b, \quad x \neq -\frac{2a}{3}.$$

Приклад 1.11. Спростити $\frac{\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c}} \cdot \left(1 + \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right) : \frac{(a-b-c)^2}{bc}$.

Розв'язання. Позначимо цей вираз через $f(a;b;c)$:

$$f(a;b;c) = \frac{b+c-a}{b+c+a} \cdot \frac{(b+c)^2 - a^2}{2bc} \cdot \frac{\cancel{bc}}{(a-b-c)^2} = \frac{b+c-a}{b+c+a} \cdot \frac{(b+c-a)(b+c+a)}{2(a-b-c)^2} = \frac{1}{2}.$$

ОДЗ перетворень:
$$\begin{cases} a \neq 0, \\ b+c \neq 0, \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \neq 0, \\ b \neq 0, \\ c \neq 0, \\ a-b-c \neq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} abc \neq 0, \\ b+c \neq 0, \\ a \neq \pm(b+c). \end{cases}$$

Приклад 1.12. Спростити вираз $\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} - \frac{x\sqrt{x}-y^{\frac{3}{2}}}{x-y}$.

Розв'язання.
$$f(x;y) = \frac{(\cancel{\sqrt{x}} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{\cancel{\sqrt{x}} - \sqrt{y}} - \frac{\sqrt{x^3} - \sqrt{y^3}}{x-y} =$$

$$= \sqrt{x} + \sqrt{y} - \frac{(\cancel{\sqrt{x}} - \sqrt{y})(x + \sqrt{xy} + y)}{(\cancel{\sqrt{x}} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})} = \frac{x + 2\sqrt{xy} + y - x - \sqrt{xy} - y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x} + \sqrt{y}},$$

якщо $x \geq 0 \cap y \geq 0 \cap x \neq y$ (це ОДЗ перетворень).

Приклад 1.13. Спростити вираз

$$f(a) = \left(\frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} + \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}} \right) : \left(1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} \right).$$

Розв'язання. ОДЗ: $\begin{cases} a > 1, \\ \sqrt{a} \neq \sqrt{a-1}, \end{cases} \quad \begin{cases} a > 1, \\ a \neq a-1, \end{cases} \quad a > 1.$

Звільнимися від ірраціональності в знаменнику спочатку першого, а потім другого дробу. Маємо:

$$\begin{aligned} 1) \frac{1}{\sqrt{a} + \sqrt{a+1}} &= \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a+1}}{(\sqrt{a} + \sqrt{a+1})(\sqrt{a} - \sqrt{a+1})} = \frac{\sqrt{a} - \sqrt{a+1}}{a - (a+1)} = \sqrt{a+1} - \sqrt{a}; \\ 2) \frac{1}{\sqrt{a} - \sqrt{a-1}} &= \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}}{(\sqrt{a} - \sqrt{a-1})(\sqrt{a} + \sqrt{a-1})} = \frac{\sqrt{a} + \sqrt{a-1}}{a - (a-1)} = \sqrt{a} + \sqrt{a-1}; \\ 3) (\sqrt{a+1} - \sqrt{a}) + (\sqrt{a} + \sqrt{a-1}) &= \sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}; \end{aligned}$$

$$4) 1 + \sqrt{\frac{a+1}{a-1}} = \frac{\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}};$$

$$5) (\sqrt{a+1} + \sqrt{a-1}) : \frac{\sqrt{a-1} + \sqrt{a+1}}{\sqrt{a-1}} = \sqrt{a-1}.$$

Отже, $f(a) = \sqrt{a-1}$, якщо $a > 1$.

Приклад 1.14. Знаючи табличні інтеграли

$$\int \frac{dx}{x-a} = \ln|x-a| + c, \quad \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctg \frac{x}{a} + c, \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c,$$

знайти інтеграл $J = \int \frac{2x^2 - 7}{(x+1)(x^2+4)} dx$.

Розв'язання. Розкладемо підінтегральний дріб на елементарні дроби:

$$\frac{2x^2 - 7}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+4}.$$

Маємо $2x^2 - 7 = A(x^2 + 4) + (Bx + C)(x + 1)$. Припустимо, що $x = -1$, тоді $2 - 7 = 5A$ і $A = -1$.

Порівняємо коефіцієнти при однакових степенях:

$$\begin{aligned} x^2 & \left| \begin{aligned} 2 &= A + B, & B &= 2 - A = 3, \\ -7 &= 4A + C, & C &= -7 - 4A = -3. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } J &= \int \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{3x-3}{x^2+4} \right) dx = -\int \frac{dx}{x+1} + \frac{3}{2} \int \frac{2xdx}{x^2+4} - 3 \int \frac{dx}{x^2+4} = -\ln|x+1| + \\ &+ \frac{3}{2} \ln(x^2+4) - \frac{3}{2} \arctg \frac{x}{2} + c. \end{aligned}$$

Завдання для самостійної роботи

1.23. Спростити:

$$1) \frac{x^2 - (x-1)^2}{2x^2 + x - 1}; \quad 2) \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 3x + 2}; \quad 3) \frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{y(x-y)^2}{x^4 - y^4}; \quad 4) \frac{a^2 - b^2}{a-b} - \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2};$$

$$5) \frac{x^2 - ax + 3bx - 3ab}{2x^2 + ax + 6bx + 3ab}; \quad 6) \frac{2x^2 + 3xy - 2y^2}{4x^2 + 4xy - 3y^2}; \quad 7) \left(a + \frac{ab}{a-b} \right) \left(\frac{ab}{a+b} - a \right) : \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2};$$

$$8) \left(\frac{x}{y} + y^{\frac{1}{2}} x^{-\frac{1}{2}} \right) : \left(x^{\frac{1}{2}} y^{-1} - y^{\frac{1}{2}} + x^{-\frac{1}{2}} \right);$$

$$9) \left(\frac{\sqrt[4]{ab} - \sqrt{ab}}{1 - \sqrt{ab}} + \frac{1 - \sqrt[4]{ab}}{\sqrt[4]{ab}} \right) : \frac{\sqrt[4]{ab}}{1 + \sqrt[4]{a^3 b^3}} - \frac{1 - \sqrt[4]{ab} - \sqrt{ab}}{\sqrt{ab}};$$

$$10) \frac{a+b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} : \left(\frac{a+b}{\sqrt{ab}} + \frac{b}{a - \sqrt{ab}} - \frac{a}{\sqrt{ab} + b} \right).$$

1.24. Спростити:

- 1) $\frac{a^2-1}{n^2+an} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{n}} - 1 \right) \cdot \frac{a-an^3-n^4+n}{1-a^2};$
- 2) $\left(m+n - \frac{4mn}{m+n} \right) : \left(\frac{m}{m+n} - \frac{n}{n-m} - \frac{2mn}{m^2-n^2} \right);$
- 3) $\left(\frac{1}{(m+n)^2} \left(\frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{2}{(m+n)^3} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right) \right) m^2 n^2;$ 4) $\left(\frac{a\sqrt{2}}{(1+a^2)^{-1}} - \frac{2\sqrt{2}}{a^{-1}} \right) \frac{a^{-3}}{1-a^{-2}};$
- 5) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \right) : \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} \right) \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right) (a+b+c)^{-2};$
- 6) $\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b+c} \right) : \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b+c} \right) \left(1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \right) : \frac{a-b-c}{abc};$
- 7) $\frac{x^3+y^3}{x+y} : (x^2-y^2) + \frac{2y}{x+y} - \frac{xy}{x^2-y^2};$ 8) $\left(\left(\frac{y}{y-x} \right)^{-2} - \frac{(x+y)^2-4xy}{x^2-xy} \right) \frac{x^4}{x^2y^2-y^4};$
- 9) $\left[\left(\left(\frac{a+1}{a-1} \right)^2 + 3 \right) : \left(\left(\frac{a-1}{a+1} \right)^2 + 3 \right) \right] : \frac{a^3+1}{a^3-1} - \frac{2a}{a-1}.$

1.25. Спростити:

- 1) $\left(6a^2+5a-1 + \frac{a+4}{a+1} \right) : \left(3a-2 + \frac{3}{a+1} \right);$
- 2) $\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} - \frac{2c}{ab} \right) (a+b+2c) : \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{2}{ab} - \frac{4c^2}{a^2b^2} \right);$
- 3) $\left(2b+a - \frac{4a^2-b^2}{a} \right) : (b^3+2ab^2-3a^2b) \cdot \frac{a^3b-2a^2b^2+ab^3}{a^2-b^2};$
- 4) $\left(\frac{1}{a-\sqrt{2}} - \frac{a^2+4}{a^3-\sqrt{8}} \right) : \left(\frac{a}{\sqrt{2}} + 1 + \frac{\sqrt{2}}{a} \right);$ 5) $\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}} + \frac{1}{2-2\sqrt{a}} - \frac{a^2+1}{1-a^2} \right) \left(1 + \frac{1}{a} \right);$
- 6) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} - \sqrt{ab} \right) \left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b} \right)^2;$ 7) $\frac{x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{2}}}{1-x} + \frac{1-x^{-\frac{1}{2}}}{1+\sqrt{x}};$
- 8) $\left(\frac{1}{m-\sqrt{mn}} + \frac{1}{m+\sqrt{mn}} \right) \cdot \frac{m^3-n^3}{m^2+mn+n^2};$ 9) $\frac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}} - \frac{2}{a^{\frac{3}{2}}} + \frac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}.$

1.26. Розкласти дріб $\frac{x+3}{(x+1)^2(x^2+1)}$ на суму елементарних дробів.

1.27. Розкласти дріб $\frac{3x^2 - 1}{(2x - 1)(x^2 + x + 1)}$ на суму елементарних дробів.

1.4. Розкладання многочлена на множники

Розкласти многочлен на множники означає виразити многочлен у вигляді добутку двох і більше многочленів, який є тотожним заданому многочлену.

Існує декілька способів розкладання многочлена на множники:

- винесення за дужки спільного множника;
- метод групування;
- використання формул скороченого множення;
- комбінація різних прийомів.

Алгоритм знаходження спільного множника декількох одночленів:

1. Знайти найбільший спільний дільник (НСД) коефіцієнтів усіх одночленів, що входять в многочлен, – він і буде спільним числовим множником (зрозуміло, це стосується тільки цілочислових коефіцієнтів).

2. Знайти змінні, які входять у кожен член многочлена, і вибрати для кожної з них найменший (з наявних) показник ступеня.

3. Винести за дужки спільний множник, який являє собою добуток знайдених коефіцієнта і змінної.

Добуток коефіцієнта і змінної, знайдених на першому і другому кроках, є загальним множником, який доцільно винести за дужки.

Приклад 1.15. Розкласти многочлен $16x^3 - 20x^2$ на множники.

Розв'язання. НСД $(16; 20) = 4$. Найменший показник ступеня x дорівнює 2. Тому маємо $16x^3 - 20x^2 = 4x^2(4x - 5)$.

Метод групування. Із кількох одночленів, об'єднавши їх у групи, треба винести спільний множник для кожної групи таким чином, щоб многочлени із остач були однаковими.

Однакові многочлени-множники в групах будуть спільним множником для заданого многочлена.

Приклад 1.16. Розкласти многочлен $x^3y^2 + 5x + 5xy^2 + x^3$ на множники.

Розв'язання. $x^3y^2 + 5x + 5xy^2 + x^3 = x(x^2y^2 + 5 + 5y^2 + x^2) =$
 $= x(y^2(x^2 + 5) + (x^2 + 5)) = x(x^2 + 5)(y^2 + 1)$.

Використання формул скороченого множення. Попереднє оцінювання многочлена має показати, що заданий многочлен подібний до многочлена однієї з формул скороченого множення. Заданий многочлен може відразу бути многочленом формули (навіть, якщо одночлени зображено алгебраїчними виразами) або потребує перетворень (групування, винесення спільного множника, зведення подібних одночленів).

Приклад 1.17. Розкласти многочлен $27x^3 - 27yx^2 + 9xy^2 - y^3$ на множники.

Розв'язання. $27x^3 - 27yx^2 + 9xy^2 - y^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(y) + 3(3x)(y)^2 - (y)^3 = (3x - y)^3$.

Не часто буває, щоб при розв'язанні задачі застосовувався тільки один спосіб. Зазвичай мають місце комбіновані задачі, де спочатку використовується один спосіб, потім інший і т. д. Щоб успішно розв'язувати такі задачі, мало знати самі способи, потрібно ще й уміти будувати план їх послідовного застосування. Іншими словами, тут потрібні не лише знання, але й досвід. Ось такі комбіновані задачі й розглянемо.

Приклад 1.18. Розкласти многочлен $a^3 - 5a^2 + 10a - 8$ на множники.

Розв'язання. $a^3 - 5a^2 + 10a - 8 = a^3 - 6a^2 + 12a - 8 + a^2 - 2a =$
 $= (a - 2)^3 + a(a - 2) = (a - 2)((a - 2)^2 + a) = (a - 2)(a^2 - 4a + 4 + a) =$
 $= (a - 2)(a^2 - 3a + 4).$

Завдання для самостійної роботи

1.28. Розкласти многочлени на множники:

- 1) $3x - 6x^2 - 10xy + 5y$; 2) $35ab - 42ac + 20b - 24c$; 3) $15y^2 + 12xy - 8x - 10y$;
- 4) $3x^3 - 21x^2 + 4x - 28$; 5) $y^3 + 11y^2 + 5y + 55$; 6) $4x^3 - 48x^2 + 5x - 60$;
- 7) $35a^2 + 7a^2b^2 + 5b + b^3$; 8) $10ab^2 - 15b^2 - 8ab + 12b + 6a - 9$; 9) $15a^2 - 13a - 20$;
- 10) $2a^2 + a + ab + 3b$; 11) $21a^2b - 4b - 12a + 7ab^2$; 12) $x^3 - 3x^2 + 5x - 15$;
- 13) $a^2 - 7ab + 12b^2$; 14) $a^2 - 2ab + b^2 - ac + bc$; 15) $m^2 + 6mn + 9n^2 - m - 3n$;
- 16) $x^3 - 3x^2y - 4xy + 12y^2$; 17) $8x^4 + x^3 + 64x + 8$; 18) $9 - 25x^2 + 30xy - 9y^2$;
- 19) $12 + x^3 - 4x - 3x^2$; 20) $20x^2 + 3yz - 15xy - 4xz$; 21) $5b^2c^2 - 7bck + 2k^2$;
- 22) $x^4 - 3x^2 + 4x - 3$; 23) $x^4 + 5x^2 + 9$; 24) $x^4 + 3x^2 + 4$.

Розділ 2. ТРИГОНОМЕТРИЧНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ

2.1. Тригонометричні функції числового аргументу

Наведемо означення тригонометричних функцій числового аргументу (рис. 2.1).

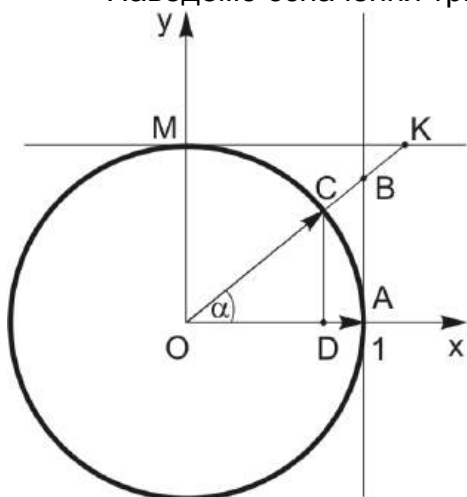


Рис. 2.1

Синусом числа α ($\sin \alpha$) називається ордината точки С, яка утворюється внаслідок повороту радіуса-вектора $\overrightarrow{OA} = \{0,1\}$ на кут α радіан. Якщо $\alpha > 0$, то поворот здійснюється проти годинникової стрілки і вважається додатним, а якщо $\alpha < 0$, то поворот – від'ємний і здійснюється за годинниковою стрілкою.

Косинусом числа α ($\cos \alpha$) називається абсциса точки С.

Тангенсом числа α ($\operatorname{tg} \alpha$) називається ордината точки В, яка розташована на перетині продовження радіуса-вектора $\overrightarrow{OC}$ з віссю тангенсів (пряма, проведена через точку А(1,0) перпендикулярно до осі Ох).

Котангенсом числа α ($\operatorname{ctg} \alpha$) називається абсциса точки К, яка лежить на перетині продовження радіуса-вектора $\overrightarrow{OC}$ з віссю котангенсів (пряма, проведена через точку М(0,1) перпендикулярно до осі Оу).

Іноді використовуються ще дві тригонометричні функції: **секанс** числа α ($\sec \alpha$) і **косеканс** числа α ($\operatorname{cosec} \alpha$). Ці функції вводяться таким чином:

$$\sec \alpha = 1/\cos \alpha, \operatorname{cosec} \alpha = 1/\sin \alpha.$$

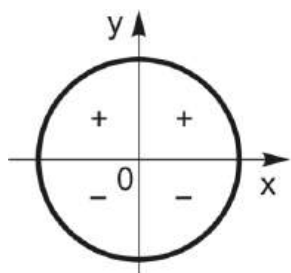
Між тригонометричними функціями кута α існують прості співвідношення:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \pm \pi n;$$

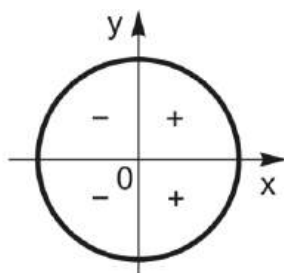
$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n; \quad \operatorname{ctg}^2 \alpha = 1/(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha), \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} \pm \pi n;$$

$$\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi n}{2}; \quad \sin^2 \alpha = 1/(1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha), \quad \alpha \neq \pi n.$$

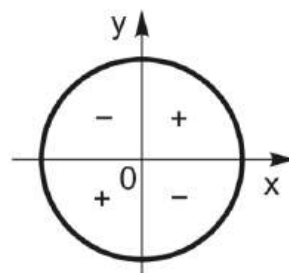
$\sin \alpha$ набуває додатних значень у першій ($\alpha \in (0; \pi/2)$) та другій ($\alpha \in (\pi/2; \pi)$) чвертях і від'ємних – у третій ($\alpha \in (\pi; 3\pi/2)$) та четвертій ($\alpha \in (3\pi/2; 2\pi)$); $\cos \alpha$ набуває додатних значень у першій та четвертій чвертях і від'ємних – у другій та третій; $\operatorname{tg} \alpha$ і $\operatorname{ctg} \alpha$ набувають додатних значень у першій та третій чвертях і від'ємних – у другій та четвертій (рис. 2.2).



знаки синуса



знаки косинуса



знаки тангенса й котангенса

Рис. 2.2

Згідно з означенням тригонометричних функцій мають місце такі формули:

– для будь-якого значення α

$$\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin \alpha, \quad \cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos \alpha, \quad \sin(-\alpha) = -\sin \alpha,$$

$$\sin(\alpha \pm \pi) = -\sin \alpha, \quad \cos(\alpha \pm \pi) = -\cos \alpha, \quad \cos(-\alpha) = \cos \alpha;$$

– для будь-якого допустимого значення α

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg} \alpha, \quad \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha, \quad \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha.$$

Табличні значення тригонометричних функцій гострих кутів наведено в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Функція	Кут α : радіани (градуси)				
	$0(0^\circ)$	$\frac{\pi}{6}(30^\circ)$	$\frac{\pi}{4}(45^\circ)$	$\frac{\pi}{3}(60^\circ)$	$\frac{\pi}{2}(90^\circ)$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{ctg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

Приклад 2.1. Визначити знаки таких виразів: а) $\sin(4\pi/5)$; б) $\cos(34^\circ)$; в) $\operatorname{tg}(3\pi/2 - \alpha)$, де $\alpha \in (0; \pi/2)$.

Розв'язання: а) кут $4\pi/5$ належить другій чверті, тому $\sin(4\pi/5) > 0$; б) кут 34° належить першій чверті, тому $\cos(34^\circ) > 0$; в) значення кута α не перевищує $\pi/2$, тому вираз $3\pi/2 - \alpha$ належить другій чверті. Синус і косинус кутів другої чверті мають різні знаки, тому $\operatorname{tg}(3\pi/2 - \alpha) < 0$.

Приклад 2.2. Обчислити $\cos^2(\pi/3)(3\sin^2(\pi/4) + 1)\operatorname{ctg}(\pi/6)$.

Розв'язання. Аргументи тригонометричних функцій – табличні. Значення тригонометричних функцій від цих аргументів – відомі, а саме:

$$\cos(\pi/3) = 1/2, \quad \sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2, \quad \operatorname{ctg}(\pi/6) = \sqrt{3}.$$

$$\text{Тому } \cos^2(\pi/3)(3\sin^2(\pi/4) + 1)\operatorname{ctg}(\pi/6) = \frac{1}{4} \cdot \left(3 \cdot \frac{1}{2} + 1\right) \cdot \sqrt{3} = \frac{5\sqrt{3}}{8}.$$

Приклад 2.3. Обчислити $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = -3/4$ і $\alpha \in (\pi/2; \pi)$.

Розв'язання. Оскільки $\cos^2 \alpha = 1/(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 16/25$, то $\cos \alpha = 4/5$ або $\cos \alpha = -4/5$. Оскільки $\alpha \in (\pi/2; \pi)$, то $\cos \alpha = -4/5$, $\sin \alpha = \cos \alpha \operatorname{tg} \alpha = 3/5$, $\operatorname{ctg} \alpha = 1/\operatorname{tg} \alpha = -4/3$.

Завдання для самостійної роботи

2.01. Побудувати кут: 1) синус якого дорівнює: а) $1/2$; б) $-1/2$; в) $2/5$; 2) косинус якого дорівнює: а) $-1/2$; б) $\sqrt{2}/2$; в) $\sqrt{3}/2$; 3) тангенс якого дорівнює: а) 1 ; б) -1 ; в) $1/\sqrt{3}$; котангенс якого дорівнює: а) -1 ; б) $-1/\sqrt{3}$; в) $\sqrt{3}$.

2.02. Визначити знаки таких виразів: 1) $\sin(6\pi/5)$; 2) $\operatorname{tg}(95^\circ)$; 3) $\operatorname{tg}(3\pi/5)$; 4) $\cos(155^\circ)$; 5) $\cos(\pi/2 + \alpha)$, де $\alpha \in (\pi/2; \pi)$; 6) $\sin(3\pi/2 + \alpha)$, де $\alpha \in (0; \pi/2)$; 7) $\sin 200^\circ \cos 300^\circ$; 8) $\sin 3 \cos 2 \operatorname{tg} 5$.

2.03. Обчислити: 1) $\cos(4\pi/3)(2\sin^2(\pi/3) - 1)\operatorname{tg}(\pi/6)$; 2) $\cos 45^\circ \operatorname{ctg} 135^\circ$; 3) $\sin 135^\circ \operatorname{ctg} 60^\circ$; 4) $2\sin(3\pi/2) + 3\cos(2\pi) - 4\operatorname{tg}(\pi/4) + \operatorname{ctg}(5\pi/4)$; 5) $3\cos(3\pi/2) + 5\sin(3\pi/2) + 4\operatorname{tg} \pi + \operatorname{ctg}(\pi/2)$; 6) $\operatorname{tg}(4\pi/3)(3\operatorname{ctg}^2(\pi/3) - 1)\sin(\pi/6)$.

2.04. Для яких чвертей проміжку $(0; 2\pi)$ виконуються нерівності:

1) $\operatorname{ctg} x \cos x > 0$; 2) $\sin x \cos x < 0$; 3) $\operatorname{tg} x \sin x > 0$; 4) $\operatorname{ctg} x / \sin x > 0$;
5) $\cos x / \operatorname{tg} x < 0$?

2.05. До яких чвертей належить кут, якщо:

1) $\operatorname{tg} \alpha > 0$; 2) $0 < \cos \alpha < 1$; 3) $\operatorname{ctg} \alpha < 0$; 4) $-1 < \sin \alpha < 0$?

2.06. Чи існує таке значення $x \in [0; 2\pi]$, щоб:

1) $3\sin(\pi/2 - x) + 2\cos x = 5$; 2) $2\sin x + 3\cos(\pi/2 - x) = 5$; 3) $4\sin x + \cos x = 5$;
4) $\sin x + 4\cos x = 5$?

2.07. Обчислити: 1) $\sin \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = -1/2$ і $\alpha \in (\pi/2; \pi)$; 2) $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\sin \alpha = -\sqrt{3}/2$ і $\alpha \in (3\pi/2; 2\pi)$; 3) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{3}$ і $\alpha \in (\pi; 3\pi/2)$; 4) $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\operatorname{ctg} \alpha = 1$ і $\alpha \in (0; \pi/2)$.

2.2. Основні формули тригонометрії. Формули зведення. Перетворення тригонометричних виразів

У процесі перетворення тригонометричних виразів широко застосовують такі формули:

1. Формули додавання:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta; \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta;$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \alpha \pm \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi m; n, k, m \in \mathbb{Z}.$$

2. Формули кратних аргументів:

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cos \alpha; \quad \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha;$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, n, k \in \mathbb{Z};$$

$$\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha; \quad \cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha.$$

3. Формули половинного аргументу:

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}; \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2};$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \alpha \neq \pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

4. Формули перетворення суми і різниці на добуток:

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2\sin \frac{\alpha \pm \beta}{2} \cos \frac{\alpha \mp \beta}{2}; \quad \cos \alpha + \cos \beta = 2\cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2};$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2\sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}.$$

5. Формули перетворення добутку на суму і різницю:

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)); \quad \sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta));$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)).$$

6. Співвідношення між $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$:

$$\sin \alpha = \frac{2tg \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}}; \quad \cos \alpha = \frac{1 - tg^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2 \frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}.$$

Мають місце також формули зведення. За допомогою формул зведення перетворюють тригонометричні функції від аргументів $\frac{\pi n}{2} \pm \alpha, n \in \mathbb{N}$ на функції з аргументом α .

Для зручності використання формул зведення застосовують такі правила:

- а) кут α завжди вважається гострим;
- б) ціле число періодів завжди можна відкинути;
- в) якщо кут α відкладається від горизонтального діаметра ($\pi \pm \alpha, 2\pi \pm \alpha$), то назва функції зберігається; якщо кут α відкладається від вертикального діаметра ($\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha$), то назва функції змінюється (синус – на косинус, косинус – на синус, тангенс – на котангенс, котангенс – на тангенс).

Приклад 2.4. Спростити вираз $f(\alpha) = \frac{\sin^3(\alpha - 270^\circ) \cos(360^\circ - \alpha)}{tg^3(\alpha - 90^\circ) \cos^3(270^\circ - \alpha)}$.

Розв'язання. Для отримання розв'язку скористаємося формулами зведення (див. табл. 2.1) та властивостями парності й непарності тригонометричних функцій. Маємо

$$f(\alpha) = \frac{-\sin^3(270^\circ - \alpha) \cos(360^\circ - \alpha)}{-tg^3(90^\circ - \alpha) \cos^3(270^\circ - \alpha)} = \frac{\cos^3 \alpha \cos \alpha}{-ctg^3 \alpha (-\sin^3 \alpha)} = \cos \alpha.$$

Приклад 2.5. Обчислити число $A = \frac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ}$.

Розв'язання. Для отримання розв'язку скористаємося формулами зведення (див. табл. 2.1) і додавання. Маємо

$$A = \frac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + \cos 158^\circ \cos 98^\circ}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + \cos 157^\circ \cos 97^\circ} = \frac{\sin 22^\circ \cos 8^\circ + (-\cos 22^\circ)(-\sin 8^\circ)}{\sin 23^\circ \cos 7^\circ + (-\cos 23^\circ)(-\sin 7^\circ)} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 30^\circ} = 1.$$

Приклад 2.6. Обчислити $tg(\beta/4)$, якщо $\cos \beta = -0,6$ і $\beta \in (\pi, 3\pi/2)$.

Розв'язання. Скористаємося формулами $1 - \cos \alpha = 2\sin^2(\alpha/2)$, $1 + \cos \alpha = 2\cos^2(\alpha/2)$ і візьмемо $\beta = \alpha/2$. Маємо $tg^2 \frac{\beta}{4} = \frac{1 - \cos(\beta/2)}{1 + \cos(\beta/2)}$, задача зводиться до обчислення $\cos(\beta/2)$. Проведемо ці обчислення:

$$\cos^2(\beta/2) = \frac{1 + \cos \beta}{2} = \frac{1 - 0,6}{2} = \frac{1}{5}; \quad \text{оскільки} \quad \beta \in (\pi, 3\pi/2), \quad \text{то}$$

$\beta/2 \in (\pi/2, 3\pi/4)$, і тому $\cos(\beta/2) < 0$. Отже, $\cos(\beta/2) = -\sqrt{5}/5$. Таким чином,

$$tg^2 \frac{\beta}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}/5}{1 - \sqrt{5}/5} = \frac{(5 + \sqrt{5})^2}{20}. \quad \text{Кут } \beta/4 \in (\pi/4, 3\pi/8), \text{ тому } tg \frac{\beta}{4} > 0 \text{ і } tg \frac{\beta}{4} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Приклад 2.7. Обчислити $16\sin(\alpha/2)\sin(3\alpha/2)$, якщо $\cos\alpha = 3/4$.

Розв'язання. Скористаємося формулою перетворення добутку тригонометричних функцій $\sin\alpha\sin\beta$ на суму і формулою подвійного аргументу для $\cos 2\alpha$. Маємо
 $16\sin(\alpha/2)\sin(3\alpha/2) = 8(\cos\alpha - \cos 2\alpha) = 8(\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1) = 8(3/4 - 9/8 + 1) = 5$.

Приклад 2.8. Довести рівність $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = \cos 7^\circ$.

Розв'язання. Скористаємося формулами для перетворення суми і різниці синусів $\sin\alpha \pm \sin\beta$ на добуток, а також формулами подвійного аргументу для $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$. Маємо

$$\begin{aligned}(\sin 47^\circ + \sin 61^\circ) - (\sin 11^\circ \sin 25^\circ) &= 2\sin 54^\circ \cos 7^\circ - 2\sin 18^\circ \cos 7^\circ = \\&= 2\cos 7^\circ (\sin 54^\circ - \sin 18^\circ) = 4\cos 7^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ = \\&= \frac{4\cos 7^\circ \sin 18^\circ \cos 36^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{2\cos 7^\circ \sin 36^\circ \cos 36^\circ}{\cos 18^\circ} = \\&= \frac{\cos 7^\circ \sin 72^\circ}{\cos 18^\circ} = \frac{\cos 7^\circ \cos 18^\circ}{\cos 18^\circ} = \cos 7^\circ.\end{aligned}$$

Приклад 2.9. Обчислити $\sin 75^\circ$.

Розв'язання. Скористаємося формулою для синуса суми двох аргументів і табличними значеннями тригонометричних функцій. Маємо

$$\begin{aligned}\sin 75^\circ &= \sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 30^\circ = \\&= \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)}{4}.\end{aligned}$$

Приклад 2.10. Довести тотожність $2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1 = 0$.

Розв'язання. У лівій частині наведеної рівності виділимо повний куб і квадрат. Маємо

$$\begin{aligned}2(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha) - 3(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha) + 1 &= 2[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^3 - 3\sin^4\alpha\cos^2\alpha - \\&\quad - 3\sin^2\alpha\cos^4\alpha] - 3[(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha] + 1 = \\&= 2 - 6\sin^4\alpha\cos^2\alpha - 6\sin^2\alpha\cos^4\alpha - 3 + 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 1 = 6\sin^2\alpha\cos^2\alpha(1 - 1) = 0.\end{aligned}$$

Приклад 2.11. Довести тотожність $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha = \sqrt{2}\cos(2\alpha - \frac{\pi}{4})$.

Розв'язання. До лівої частини рівності застосуємо формулу різниці квадратів, а до правої – формулу косинуса різниці двох аргументів. Маємо

$$\begin{aligned}\cos^4\alpha - \sin^4\alpha + \sin 2\alpha &= (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + \sin 2\alpha = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha, \\ \sqrt{2}\cos(2\alpha - \frac{\pi}{4}) &= \sqrt{2}(\cos 2\alpha \cos \frac{\pi}{4} + \sin 2\alpha \sin \frac{\pi}{4}) = \cos 2\alpha + \sin 2\alpha.\end{aligned}$$

Ліву й праву частини запропонованої рівності зведено до однакового вигляду, тому вони є рівними.

Приклад 2.12. Довести тотожність $\frac{\cos^2 2\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{4}\sin 4\alpha$.

Розв'язання.

$$\frac{\cos^2 2\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{tg} \alpha} = \frac{\cos^2 2\alpha}{\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos^2 2\alpha}{\frac{\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \cos \alpha}} =$$

$$= \frac{\cos^2 2\alpha \sin \alpha \cos \alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha \sin 2\alpha}{2} = \frac{1}{4} \sin 4\alpha.$$

У перетвореннях тригонометричних виразів застосовувалися формули подвійного аргументу для $\sin 2\alpha$ і $\cos 2\alpha$. Слід звернути увагу на те, що наведені дії можливі лише тоді, коли $\cos \alpha \neq 0$, $\sin \alpha \neq 0$, $\cos 2\alpha \neq 0$, тобто $\alpha \neq \pi n/2$, $\alpha \neq \pi/4 + \pi k/2$, $n, k \in \mathbb{Z}$, або $\alpha \neq \pi n/4$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.13. Довести тотожність $\frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha \operatorname{tg}^2 \alpha} = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} \alpha$.

Розв'язання. Розкладемо на множники ліву частину рівності й застосуємо формули тангенса суми і різниці двох аргументів. Маємо

$$\frac{\operatorname{tg}^2 2\alpha - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha \operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{(\operatorname{tg} 2\alpha - \operatorname{tg} \alpha)(\operatorname{tg} 2\alpha + \operatorname{tg} \alpha)}{(1 - \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha)(1 + \operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha)} = \operatorname{tg}(2\alpha - \alpha) \operatorname{tg}(2\alpha + \alpha) = \operatorname{tg} 3\alpha \operatorname{tg} \alpha.$$

Доведена тотожність виконується, якщо $\cos \alpha \neq 0$, $\cos 2\alpha \neq 0$, $\cos 3\alpha \neq 0$, $\operatorname{tg} 2\alpha \operatorname{tg} \alpha \neq \pm 1$, тобто $\alpha \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n$, $\alpha \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Приклад 2.14. Довести числову рівність $\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{8}$.

Розв'язання. Помножимо й розділимо ліву частину рівності на $2 \sin \frac{\pi}{9}$ і скористаємося формулами подвійного аргументу. Маємо

$$\cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9} = \frac{2 \sin \frac{\pi}{9} \cos \frac{\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}}{2 \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{2\pi}{9} \cos \frac{2\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}}{2 \sin \frac{\pi}{9}} =$$

$$= \frac{\sin \frac{4\pi}{9} \cos \frac{4\pi}{9}}{4 \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{8\pi}{9}}{8 \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin(\pi - \frac{\pi}{9})}{8 \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{\sin \frac{\pi}{9}}{8 \sin \frac{\pi}{9}} = \frac{1}{8}.$$

Завдання для самостійної роботи

Обчислити значення тригонометричних виразів:

2.08. $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = -2$. **2.09.** $\frac{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}$, якщо $\cos \alpha = \frac{1}{5}$.

2.10. $\operatorname{ctg} \alpha - 2 \operatorname{ctg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 5$. **2.11.** $\operatorname{ctg} \alpha$, якщо $\cos \alpha = \frac{12}{13}$ і $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

2.12. $\frac{\sin^2 \alpha - 3 \cos^2 \alpha}{2 \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 3$. **2.13.** $\frac{\sin \alpha}{2 - 5 \cos \alpha}$, якщо $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$.

2.14. $\operatorname{tg} \alpha$, якщо $\sin(\alpha + 30^\circ) + \sin(\alpha - 30^\circ) = 2\sqrt{3} \cos \alpha$.

2.15. $1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha - 2 \operatorname{ctg} 2\alpha$, якщо $\operatorname{tg} \alpha = 1$.

2.16. $\left| \frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha} \right|$, якщо $\sin \alpha \cos \alpha = 0,4$ і $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Спростити:

2.17. $\frac{(\sin 10^\circ + \sin 80^\circ)(\cos 80^\circ - \cos 10^\circ)}{\sin 70^\circ}$. **2.18.** $\frac{\sin(2\pi + \frac{\alpha}{4}) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{8} - \cos(2\pi + \frac{\alpha}{4})}{\cos(\frac{\alpha}{4} - 3\pi) \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{8} + \cos(\frac{7\pi}{2} - \frac{\alpha}{4})}$.

2.19. $4 \cos \alpha \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(a + \frac{2\pi}{3}\right) + \cos 3a$.

2.20. $\cos^{-2} 4\alpha - \operatorname{tg}^2(3\pi + 4\alpha) - 2 \cos^2 \alpha - \sqrt{3} \cos\left(\frac{3\pi}{2} - 2a\right)$.

2.21. $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta - \cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta)$. **2.22.** $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{a}{2}\right) \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{a}{2}\right) \sin \frac{a}{2}$.

2.23. $\frac{1 - \sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha}{1 - \sin^6 \alpha - \cos^6 \alpha}$. **2.24.** $\frac{\sin^3 \alpha + \sin 3\alpha}{\sin \alpha} + \frac{\cos^3 \alpha - \cos 3\alpha}{\cos \alpha}$.

Перетворити на добуток:

2.25. $1 - \sqrt{2} \cos \alpha + \cos 2\alpha$. **2.26.** $1 + \sin \alpha + \cos \alpha + \operatorname{tg} \alpha$.

2.27. $1 - \operatorname{tg} \alpha + \sec \alpha$. **2.28.** $\cos \alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha$.

2.29. $\frac{2 \sin \alpha - \sin 2\alpha}{2 \sin \alpha + \sin 2\alpha}$. **2.30.** $\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{ctg} 2\alpha + \operatorname{cosec} 2\alpha$.

2.31. $\frac{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{\operatorname{ctg} \alpha + \operatorname{tg} \alpha}$. **2.32.** $2 \sin^2 \alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha - 1$.

Довести тотожності:

2.33. $\frac{\cos \alpha + \cos 3\alpha + \cos 5\alpha}{\sin \alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha} = \operatorname{ctg} 3\alpha$. **2.34.** $\frac{\sin(\pi - \alpha)}{\sin \alpha - \cos \alpha \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} + \cos(\pi - \alpha) = 1$.

2.35. $\cos^2 \alpha - \sin^2 2\alpha = \cos^2 \alpha \cos 2\alpha - 2 \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$.

2.36. $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin \alpha + \cos \alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} = \sin \alpha$. **2.37.** $\sin 4\alpha + \cos 4\alpha \operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{2 \operatorname{tg} \alpha}$.

2.38. $\operatorname{tg} 3\alpha = \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} + a\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - a\right)$. **2.39.** $\operatorname{tg} \alpha + \frac{1 - \cos \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\sqrt{2} \sin \frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}$.

2.40. $\cos^2 \alpha + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} + a\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3} - a\right) = \frac{3}{2}$. **2.41.** $\sin \alpha \left(1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \frac{a}{2}\right) = \operatorname{tg} a$.

2.42. $\frac{2 \cos^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1}{2 \sin^2 2\alpha + \sqrt{3} \sin 4\alpha - 1} = \frac{\sin\left(4\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(4\alpha - \frac{\pi}{6}\right)}$.

$$2.43. 4\cos\left(\frac{\pi}{6} - \alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{\sin 3\alpha}{\sin \alpha}.$$

$$2.44. \sin^2 \alpha \cos^4 \alpha = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \cos 2\alpha - \frac{1}{16} \cos 4\alpha - \frac{1}{32} \cos 6\alpha.$$

$$2.45. \sqrt{1 + \sin \alpha} - \sqrt{1 - \sin \alpha} = 2 \sin \frac{\alpha}{2}, \text{ якщо } \alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

$$2.46. \operatorname{tg} 4\alpha + \sec 4\alpha = \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

$$2.47. \operatorname{tg}(35^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(25^\circ - \alpha) = \frac{2\cos(10^\circ + 2\alpha) - 1}{2\cos(10^\circ + 2\alpha) + 1}.$$

$$2.48. \sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}, \text{ якщо } \alpha + \beta + \gamma = \pi.$$

$$2.49. \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \beta \operatorname{tg} \gamma + \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \alpha = 1, \text{ якщо } \alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}.$$

Довести справедливості числових рівностей:

$$2.50. \sin \frac{\pi}{9} \sin \frac{2\pi}{9} \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{\sqrt{3}}{8}. \quad 2.51. \sin \frac{3\pi}{10} - \sin \frac{\pi}{10} = \frac{1}{2}.$$

$$2.52. \cos \frac{\pi}{30} \cos \frac{11\pi}{30} \cos \frac{7\pi}{30} \sin \frac{\pi}{15} = \frac{1}{16}.$$

$$2.53. \cos \frac{\pi}{15} \cos \frac{2\pi}{15} \cos \frac{3\pi}{15} \cos \frac{4\pi}{15} \cos \frac{5\pi}{15} \cos \frac{6\pi}{15} \cos \frac{7\pi}{15} = \frac{1}{128}.$$

$$2.54. \sin^4 \frac{\pi}{16} + \sin^4 \frac{3\pi}{16} + \sin^4 \frac{5\pi}{16} + \sin^4 \frac{7\pi}{16} = \frac{3}{2}.$$

З'ясувати, для яких значень α мають місце рівності:

$$2.55. \sqrt{1 + \sin 2\alpha} = \sin \alpha + \cos \alpha. \quad 2.56. \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha + 2} = \sec \alpha \operatorname{cosec} \alpha.$$

$$2.57. \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \operatorname{ctg} \alpha - \operatorname{cosec} \alpha. \quad 2.58. \sqrt{\frac{\operatorname{tg} \alpha - \sin \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \sin \alpha}} = \operatorname{cosec} \alpha - \operatorname{ctg} \alpha.$$

Наведемо означення ще чотирьох функцій числового аргументу.

Нехай число x належить проміжку $[-1, 1]$. Арксинусом числа x ($\arcsin x$)

називається таке число α (або така дуга α , або такий кут α) із відрізка $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

синус якого дорівнює x .

Таким чином, запис $\alpha = \arcsin x$ означає, що

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ \alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \\ \sin \alpha = x. \end{cases}$$

Арккосинусом числа x ($\arccos x$) називається таке число α (або така дуга α , або такий кут α) із відрізка $[0, \pi]$, косинус якого дорівнює x .

$$\text{Отже, запис } \alpha = \arccos x \text{ означає, що } \begin{cases} -1 \leq x \leq 1, \\ \alpha \in [0, \pi], \\ \cos \alpha = x. \end{cases}$$

Нехай $x \in (-\infty, \infty)$. Арктангенсом числа x називається таке число α (або така дуга α , або такий кут α) із інтервалу $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс якого дорівнює числу x .

$$\text{Отже, } \alpha = \operatorname{arctg} x \text{ означає, що } \begin{cases} -\infty < x < \infty, \\ \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ \operatorname{tg} \alpha = x. \end{cases}$$

Арккотангенсом числа x називається таке число α (або така дуга α , або такий кут α) із інтервалу $(0, \pi)$, котангенс якого дорівнює x .

$$\text{Отже, } \alpha = \operatorname{arcctg} x \text{ означає, що } \begin{cases} -\infty < x < \infty, \\ \alpha \in (0, \pi), \\ \operatorname{ctg} \alpha = x. \end{cases}$$

Корисною є табл. 2.2 найпростіших значень функцій.

Таблиця 2.2

Функція	Аргумент						
	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\sqrt{3}$
$\arcsin x$	0	$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	—
$\arccos x$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	0	—
$\operatorname{arctg} x$	0		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\operatorname{arcctg} x$	$\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{3}$			$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

Зауваження. Позначення функцій пов'язано зі змістом слова «*arc*» – «арка», або «дуга».

Наведемо деякі тотожності для функцій $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$:

- 1) $\arcsin(-x) = -\arcsin x, |x| \leq 1$; 2) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x, |x| \leq 1$;
- 3) $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, x \in (-\infty, +\infty)$; 4) $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, x \in (-\infty, +\infty)$;
- 5) $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, |x| \leq 1$; 6) $\operatorname{arcctg} x + \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}$.

Приклад 2.15. Обчислити $\cos\left(\arcsin \frac{1}{7}\right)$.

Розв'язання. Треба знайти $\cos \alpha$, якщо відомо, що $\sin \alpha = \frac{1}{7}$. Кут $\arcsin \frac{1}{7}$ розташований у першій чверті й має додатний косинус. Тому $\cos \alpha = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = \frac{\sqrt{48}}{7}$.

Приклад 2.16. Обчислити $\cos(\arctg x)$.

Розв'язання. За формулою $1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$ знайдемо $\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + x^2}$. Зауважимо, що за означенням арктангенса цей кут розташований у першій або четвертій чверті й має додатне значення косинуса, тобто $\cos \alpha = 1 / \sqrt{1 + x^2}$.

Приклад 2.17. Обчислити $\arcsin\left(\sin \frac{13\pi}{6}\right)$.

Розв'язання. Оскільки $\frac{13\pi}{6} \notin \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$, то $\arcsin\left(\sin \frac{13\pi}{6}\right) \neq \frac{13\pi}{6}$. За допомогою формул зведення $\sin \frac{13\pi}{6}$ перетворюється на $\sin \frac{13\pi}{6} = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin \frac{\pi}{6}$. Аргумент $\frac{\pi}{6} \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. Остаточно $\arcsin\left(\sin \frac{13\pi}{6}\right) = \arcsin\left(\sin \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Завдання для самостійної роботи

2.59. Обчислити значення: 1) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; 2) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$; 3) $\arctg(-\sqrt{3})$;

5) $\operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; 6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 7) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 8) $\arctg 1$; 9) $\operatorname{arcctg} 0$.

2.60. Катети прямокутного трикутника дорівнюють a і b . Знайти один із його гострих кутів, користуючись по черзі чотирма оберненими тригонометричними функціями.

Спростити вирази:

2.61. 1) $\arccos(-\sqrt{2}/2) + \arctg 1$; 2) $2 \arcsin(-\sqrt{2}/2) + \arctg(-1) - \pi$;

3) $2 \arcsin(-\frac{\sqrt{3}}{2}) + \arctg(-1) + \arccos \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \arccos(-1)$;

4) $\operatorname{tg}(5 \arctg \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{4} \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2})$; 5) $\cos\left(3 \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$.

2.62. 1) $\sin(2 \arctg x)$; 2) $\operatorname{tg}(\arctg x + \arctg y)$; 3) $\cos\left(\frac{1}{2} \arccos x\right)$.

2.63. Обчислити: 1) $\arccos\left(\cos \frac{15\pi}{4}\right)$; 2) $\arcsin(\sin 4)$; 3) $\arctg(\operatorname{tg} 6)$.

2.64. Обчислити: 1) $\cos(\operatorname{arctg} 8)$; 2) $\operatorname{tg}(\operatorname{arccotg}(-4))$; 3) $\operatorname{tg}(\arcsin 0,2)$; 4) $\sin(\operatorname{arctg} 5)$; 5) $\operatorname{ctg}(\arccos 0,6)$; 6) $\cos\left(\arcsin \frac{1}{7}\right)$; 7) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{7}\right)\right)$.

2.65. Довести тотожності:

- 1) $\arcsin x = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, якщо $x \in (-1,1)$; 2) $\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;
 3) $\arccos x = \begin{cases} \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{якщо } x \in [0,1], \\ \pi - \arcsin \sqrt{1-x^2}, & \text{якщо } x \in [-1,0); \end{cases}$ 4) $2 \arccos \sqrt{\frac{1+x}{2}} = \arccos x$;
 5) $\operatorname{arctg} x = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{якщо } x > 0, \\ \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \pi, & \text{якщо } x < 0; \end{cases}$ 6) $\frac{1}{2} \arccos(2x^2 - 1) = \arccos x$, якщо $x \geq 0$;
 7) $\operatorname{arctg} \frac{2}{3} + \operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \frac{\pi}{4}$; 8) $\arcsin \frac{7}{25} + \frac{1}{2} \arccos \frac{7}{25} = \arccos \frac{3}{5}$.

Розділ 3. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛОГАРИФМІЧНИХ ВИРАЗІВ

3.1. Означення логарифма числа

Означення. Нехай $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$. **Логарифмом** числа b за основою a називається показник степеня, до якого потрібно піднести число a , щоб одержати число b , тобто

$$a^{\log_a b} = b.$$

Таке співвідношення має назву "основна логарифмічна тотожність".

Приклад 3.1. Із рівності $2^3 = 8$ випливає $\log_2 8 = 3$; із рівності $(0,25)^{-2} = 16$ маємо $\log_{0,25} 16 = -2$.

3.2. Властивості логарифмів. Логарифмічні перетворення

При перетворенні логарифмічних виразів треба враховувати властивості показникової та логарифмічної функцій:

- 1) $\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N$ ($M > 0$, $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$);
 2) $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$ ($M > 0$, $N > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$);
 3) $\log_{a^\beta} N^\alpha = \frac{\alpha}{\beta} \log_a N$ ($N > 0$, $\beta \neq 0$, $a > 0$, $a \neq 1$);
 4) $\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$ ($N > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$);
 5) $\log_b a \cdot \log_a b = 1$; 6) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; 7) $a^x \cdot b^x = (ab)^x$; 8) $(a^x)^y = a^{xy}$.

Приклад 3.2. Провести перетворення виразів за допомогою перших трьох властивостей:

а) $\log_5(375 \cdot 23)$; б) $\log_7(135/15,4)$; в) $\log_{13} 47^9$.

Розв'язання: а) $\log_5(375 \cdot 23) = \log_5 375 + \log_5 23$;

б) $\log_7(135/15,4) = \log_7 135 - \log_7 15,4$; в) $\log_{13} 47^9 = 9 \log_{13} 47$.

Приклад 3.3. Знайти логарифм за основою 10 числа $x = \frac{ab^3}{c\sqrt[3]{d^2}}$.

Розв'язання. Використовуючи властивості логарифмів, знайдемо

$$\begin{aligned} \lg \frac{ab^3}{c\sqrt[3]{d^2}} &= \lg(ab^3) - \lg(c\sqrt[3]{d^2}) = \lg a + \lg b^3 - (\lg c + \lg \sqrt[3]{d^2}) = \\ &= \lg a + 3 \lg b - \lg c - \lg d^{\frac{2}{3}} = \lg a + 3 \lg b - \lg c - \frac{2}{3} \lg d. \end{aligned}$$

Приклад 3.4. Обчислити $10^{0,5 - \lg 0,375\sqrt{10}} - \log_{2\sqrt{2}} 0,0625$.

Розв'язання. Використовуючи основну логарифмічну тотожність і ураховуючи третю властивість, одержимо

$$\begin{aligned} 10^{0,5 - \lg 0,375\sqrt{10}} - \log_{2\sqrt{2}} 0,0625 &= 10^{0,5} \cdot 10^{\lg(0,375\sqrt{10})^{-1}} - \log_{2^{\frac{3}{2}}} 2^{-4} = \\ &= \sqrt{10} \frac{1}{0,375\sqrt{10}} + \frac{4 \cdot 2}{3} = \frac{8}{3} + \frac{8}{3} = \frac{16}{3}. \end{aligned}$$

Приклад 3.5. Обчислити $\left(7\sqrt{\frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3} + \log_9 \sqrt{3}} 125$.

Розв'язання. За допомогою п'ятої формули отримаємо $\frac{1}{5\log_5 3} = \frac{1}{5} \log_3 5$.

Використовуючи третю властивість, знаходимо $\log_9 \sqrt{3} 125 = \log_{\frac{3}{2}} 5^3 = \frac{6}{5} \log_3 5$. Далі

скористаємося основною логарифмічною тотожністю і остаточно запишемо:

$$\begin{aligned} \left(7\sqrt{\frac{1}{27}}\right)^{\frac{1}{5\log_5 3} + \log_9 \sqrt{3}} 125 &= \left(3^{\frac{-3}{7}}\right)^{\frac{1}{5} \log_3 5 + \frac{6}{5} \log_3 5} = 3^{-\frac{3}{7} \log_3 5} = 3^{\frac{-3}{5} \log_3 5} = \\ &= \left(3^{\log_3 5}\right)^{\frac{-3}{5}} = 5^{\frac{-3}{5}} = 5 \sqrt[5]{\frac{1}{5^3}}. \end{aligned}$$

Приклад 3.6. Спростити вираз $64^{\frac{1}{\log_3 2}} + 32^{\frac{1}{\log_5 2}} + 16^{\frac{1}{\log_6 2}} + 8^{\frac{1}{\log_7 2}}$.

Розв'язання. $(2^6)^{\log_2 3} + (2^5)^{\log_2 5} + (2^4)^{\log_2 6} + (2^3)^{\log_2 7} =$
 $= 2^{6 \log_2 3} + 2^{5 \log_2 5} + 2^{4 \log_2 6} + 2^{3 \log_2 7} =$

$$= 2^{\log_2 3^6} + 2^{\log_2 5^5} + 2^{\log_2 6^4} + 2^{\log_2 7^3} = 3^6 + 5^5 + 6^4 + 7^3 = 5493.$$

Завдання для самостійної роботи

3.1. Знайти логарифми за основою 10 таких виразів:

$$1) x = \frac{a^2 b^5}{c^3}; \quad 2) x = \frac{25 \cdot \sqrt[3]{12}}{\sqrt{0,35}}; \quad 3) x = \frac{a^2 \sqrt{gc}}{3 \cdot \sqrt[5]{(a+b)^3}}; \quad 4) \frac{21^{3/4} \cdot \sqrt[3]{124}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt[7]{24}};$$

$$5) \frac{(5 \cdot 3^{1/2})^4}{2^{1/2} \cdot 3^{1/3} \cdot 6^{-3/5}}; \quad 6) \sqrt{5\sqrt{3}/(2\sqrt{7})}; \quad 7) \sqrt{\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{3}/\sqrt{2}}.$$

3.2. Спростити вирази:

$$1) 2^{-5\log_2 5}; \quad 2) 7^{\frac{1}{3}\log_7 27}; \quad 3) \left(\frac{1}{9}\right)^{-\log_3 7}; \quad 4) 8^{-\frac{1}{\log_3 2}}; \quad 5) \log_{\frac{1}{27}} \frac{\sqrt[3]{3}}{3};$$

$$6) \log_{\frac{1}{5}}(25 \cdot \sqrt{5}); \quad 7) \frac{1}{\log_3 2} + \frac{2}{\log_9 4} - \frac{3}{\log_{27} 8}; \quad 8) \frac{\log_3 12}{\log_{36} 3} - \frac{\log_3 4}{\log_{108} 3};$$

$$9) \left(\frac{1}{7}\right)^{\log_{49} 4+2} + 3; \quad 10) 3 \sqrt{\left(\frac{1}{243}\right)^{3 - \frac{\log_4 19}{3\log_4 27}}}; \quad 11) 5^{\log_{\sqrt{125}} 17} + 2^{\frac{1}{\log_7 4}}.$$

3.3. Визначити знаки чисел:

$$1) \log_{\frac{1}{5}} 2; \quad 2) \log_2 \sqrt{3}; \quad 3) \log_{\sqrt{3}} 2; \quad 4) \log_{\frac{1}{2}} \sqrt{2}; \quad 5) \log_{\pi}(\sqrt{49} - 6).$$

3.4. Обчислити:

$$1) \sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 16}}; \quad 2) 9^{\log_3(\frac{1}{3}\log_{\sqrt{3}} 9)}; \quad 3) \left(25^{\frac{1}{\log_6 5}} + 49^{\frac{1}{\log_8 7}}\right)^{\frac{1}{2}};$$

$$4) -\log_5 \log_3 \sqrt[5]{5\sqrt{3}}; \quad 5) \left(\operatorname{tg} \frac{\pi}{3}\right)^{2 + \frac{\log_7 \cos \frac{\pi}{3}}{\log_7 \sqrt{3}}}; \quad 6) \lg \operatorname{tg} 1^0 \cdot \lg \operatorname{tg} 2^0 \cdot \dots \cdot \lg \operatorname{tg} 89^0;$$

$$7) 5^{\log_{\sqrt[3]{5}} 4 + 2\log_{25} 3}; \quad 8) 4^{\frac{1}{4}\log_2 3 + 2\log_{16} 4}; \quad 9) -\log_2 \frac{1}{\log_{\sqrt[4]{2}} 2}.$$

3.5. Дано $\lg 64 = a$. Знайти $\lg \sqrt[3]{25}$.

3.6. Дано $\lg 3 = a, \lg 2 = b$. Знайти $\log_5 6$.

Розділ 4. ФУНКЦІЇ ТА ГРАФІКИ

4.1. Означення функції та її властивості

Означення функції. Правило (закон) відповідності між множинами X і Y , за яким для кожного елемента x з множини X можна знайти один і тільки один елемент y з множини Y , називається функцією.

При цьому x називається незалежною змінною, або аргументом, а y – залежною змінною, або функцією. Позначення: $y = f(x)$. Множина X всіх допустимих значень аргументу x , при яких функція $y = f(x)$ є визначеною, називається *областю визначення функції*. Множина Y всіх значень y , яких набуває функція, називається *областю значень функції*.

Приклад 4.1. Знайти область визначення й область значень функцій:

- 1) $y = x^3 + 1$ – область визначення функції $-\infty < x < +\infty$, область значень функції $-\infty < y < +\infty$;
- 2) $y = \sqrt{x-5}$ – область визначення функції $x \geq 5$, область значень функції $y \geq 0$;
- 3) $y = \frac{\sin^2 x}{|x-4|}$ – область визначення функції $x \neq 4$, область значень функції $y \geq 0$.

Щоб задати функцію, необхідно вказати її область визначення та правило, за яким кожному значенню x з області визначення відповідає значення $y = f(x)$. Розрізняють такі способи задання функції:

1. Табличний, який полягає в тому, що функцію можна задати за допомогою таблиці (табл. 4.1), в якій в одному рядку (або стовпчику) записано всі значення аргументу, а в іншому – відповідні значення функції.

Таблиця 4.1

X	x_1	x_2	$\dots$	x_n
Y	y_1	y_2	$\dots$	y_n

Табличний спосіб виявляється зручним, коли область визначення функції складається із скінченної кількості точок. Але при розгляді теоретичних питань, вивченні якісної поведінки функції не можна обмежуватися функціями, які визначено лише в скінченній кількості точок.

2. Графічний, який полягає в тому, що подається графік цієї функції. Графік дає просте і наочне уявлення про якісну поведінку функції, але точність обчислення значень функції за допомогою графіка є досить низькою внаслідок похибок при проведенні перпендикулярів і вимірюванні довжин.

3. Аналітичний, який полягає в тому, що y виражають через x за допомогою формули, що показує, які дії треба виконати з аргументом x , щоб отримати значення y . Аналітичний спосіб дає можливість обчислити значення функції при довільному значенні аргументу, при якому її визначено точно або з довільною точністю.

4. Словесне задання функції, яке полягає в тому, що закон, за яким обчислюється y , виражається словами.

Нулі функції. Значення аргументу, при якому функція дорівнює 0, називається нулем функції. Функція може мати декілька нулів. Наприклад, функція $y = x(x+1)(x-3)$ має три нулі: $x = 0$, $x = -1$, $x = 3$. Геометрично нуль функції – це абсциса точки перетину графіка функції з віссю Ox . На рис. 4.1 зображено графік функції з нулями $x = a$, $x = b$ і $x = c$.

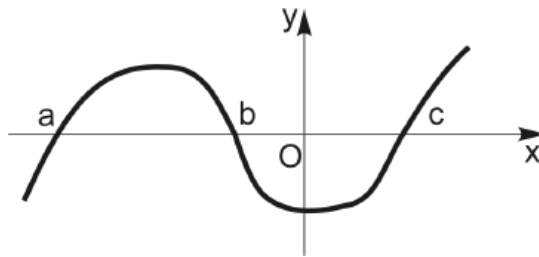


Рис. 4.1

Монотонна функція. Функція $f(x)$ *зростає* на деякому проміжку, якщо для всіх x_1 і x_2 з цього проміжку з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Функція $f(x)$ *спадає* на деякому проміжку, якщо для всіх x_1 і x_2 з цього проміжку з нерівності $x_1 < x_2$ випливає нерівність $f(x_1) > f(x_2)$. Функція, яка спадає або зростає на певному проміжку, називається монотонною на цьому проміжку.

Обмежена і необмежена функції. Функція називається обмеженою, якщо існує таке додатне число M , що $|f(x)| \leq M$ для всіх значень x . Якщо такого числа не існує, то функція є необмеженою. Так, наприклад, функція на рис. 4.2 є обмеженою, але немонотонною, а на рис. 4.3 – монотонною, але необмеженою.

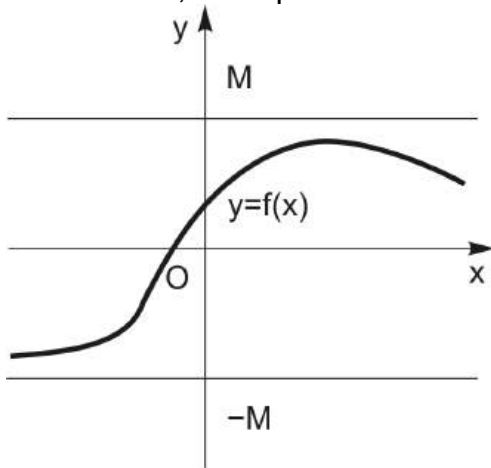


Рис. 4.2

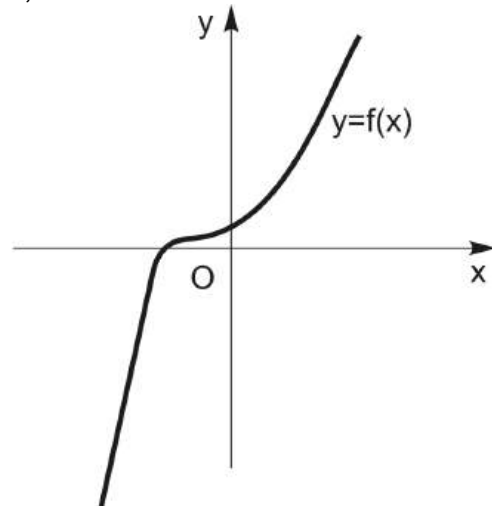


Рис. 4.3

Неперервна і розривна функції. Функція $y = f(x)$ називається неперервною в точці $x = a$, якщо:

- 1) функцію визначено при $x = a$, тобто $f(a)$ існує;
- 2) існує скінченна границя $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Якщо хоч одна з цих умов не виконується, то функція називається розривною в точці $x = a$. Якщо функція неперервна в кожній точці області визначення, то вона називається неперервною. Функція $y = \frac{3x}{x-5}$, графік якої наведено на рис. 4.4, розривна при $x = 5$, оскільки не визначена при $x = 5$. В усіх інших точках вона неперервна. Функція $y = \frac{|x|}{x}$ (рис. 4.5) розривна при $x = 0$.

Асимптота. Якщо графік функції необмежено наближається до деякої прямої при віддаленні від початку координат, то ця пряма називається асимптотою.

Парна і непарна функції. Якщо для будь-якого x з області визначення функції виконується $f(-x) = f(x)$, то функція називається парною; якщо $f(-x) = -f(x)$, то функція називається непарною. Графік парної функції симетричний відносно осі Oy (рис. 4.6), а графік непарної функції – відносно початку координат (рис. 4.7).

Періодична функція. Функція $f(x)$ – періодична, якщо існує таке відмінне від нуля число T , що для будь-якого x з області визначення функції виконується рівність $f(x + T) = f(x)$. Таке найменше число називається періодом функції.

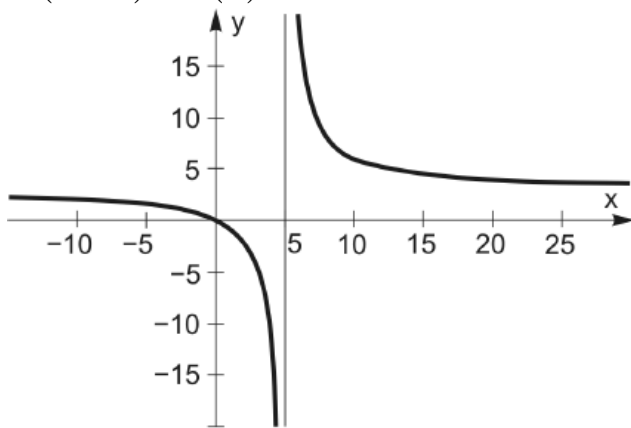


Рис. 4.4

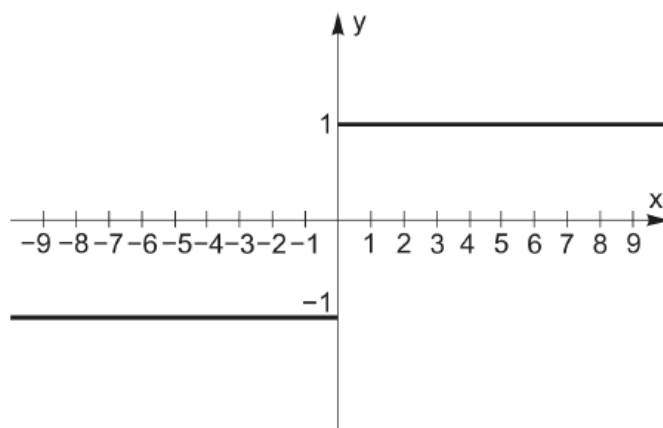


Рис. 4.5

Приклад 4.2. Довести, що $\sin x$ має період 2π .

Розв'язання. Відомо, що $\sin(x + 2\pi n) = \sin x$, де $n = 0, 1, 2, \dots$, тому додавання

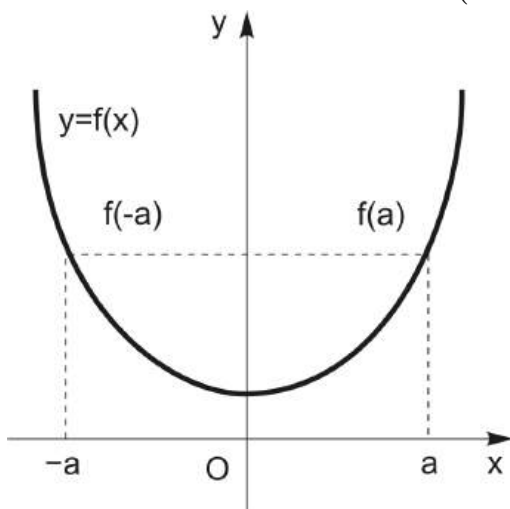


Рис. 4.6

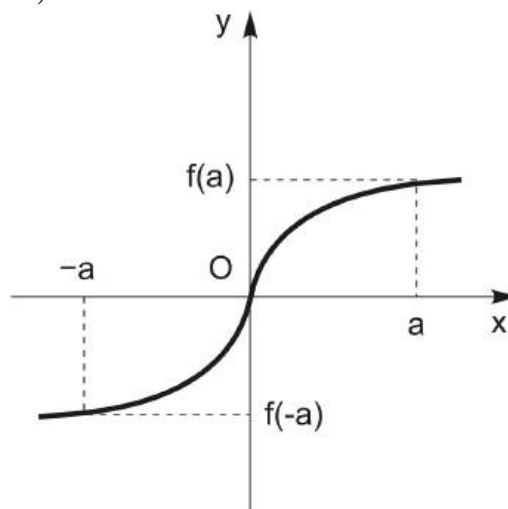


Рис. 4.7

$2\pi n$ до аргументу синуса не змінює його значення. Чи є інше число з такою властивістю? Припустимо, що P – таке число, тобто рівність $\sin(x + P) = \sin x$ виконується для будь-якого значення x . Але тоді воно має місце і при $x = \frac{\pi}{2}$, тобто $\sin\left(\frac{\pi}{2} + P\right) = \sin \frac{\pi}{2} = 1$. Однак за формулою зведення $\sin\left(\frac{\pi}{2} + P\right) = \cos P$. Тоді з двох останніх рівностей випливає, що $\cos P = 1$. Але це правильно лише при $P = 2\pi n$.

Оскільки найменшим відмінним від нуля числом з $2\pi n \in 2\pi$, то це число і є періодом $\sin x$. Аналогічно можна довести, що 2π є періодом і для $\cos x$.

Приклад 4.3. Яке число є періодом функції $\sin 2x$?

Розв'язання. Оскільки $\sin 2x = \sin(2x + 2\pi n) = \sin(2(x + \pi n))$, то додавання πn до аргументу x не змінює значення функції. Найменше відмінне від нуля число з $\pi n \in \pi$. Таким чином, воно і є періодом $\sin 2x$.

Обернена функція. Припустимо, що на проміжку $\langle a; b \rangle$ визначено функцію $y = f(x)$. Нехай область зміни цієї функції – проміжок $\langle c; d \rangle$. Якщо для всіх $y \in \langle c; d \rangle$ рівняння $f(x) = y$ має лише один розв'язок, який належить проміжку $\langle a; b \rangle$, то на проміжку $\langle c; d \rangle$ можна розглянути таку функцію φ : для кожного z позначимо через $\varphi(z)$ корінь рівняння $f(x) = z$, тобто $f(\varphi(z)) = z$ для всіх z з проміжку $\langle c; d \rangle$. Визначена таким чином функція φ називається оберненою f на проміжку $\langle a; b \rangle$.

Якщо функція визначена на довільній множині X і кожного свого значення набуває тільки раз, то існує обернена f функція φ , визначена на всій області зміни функції $f - Y$; областю зміни φ є множина X .

Знаходження оберненої функції зводиться до розв'язування рівняння $y = f(x)$ відносно x .

Якщо одному значенню y з області зміни f відповідають кілька значень x , то обернена функція для f на всій області визначення не існує, але f має обернену функцію на кожному інтервалі монотонності.

Якщо функція φ є оберненою до функції f і $y = f(x)$, то $x = \varphi(y)$. Отже, якщо точка $M(a; f(a))$ належить графіку функції f , то точка $N(f(a); a)$ належить графіку функції φ . Але ці дві точки симетричні відносно прямої $y = x$. Тому, щоб побудувати графік функції $y = \varphi(x)$, оберненої до функції $f(x)$, треба графік функції $y = f(x)$ симетрично відобразити відносно бісектриси першого і третього координатних кутів. На рис. 4.8 зображено графіки обернених функцій $y = f(x)$ і $y = \varphi(x)$.

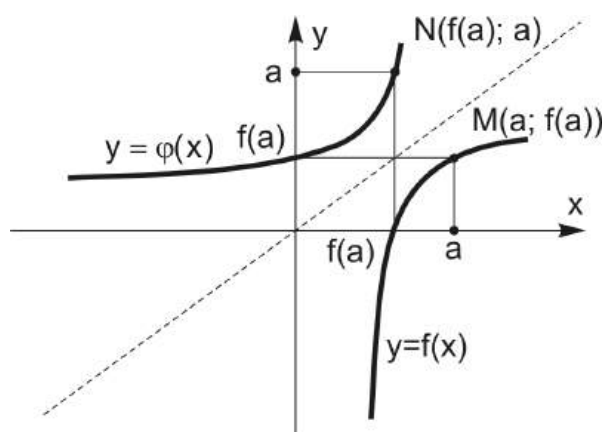


Рис. 4.8

Приклад 4.4. Записати функцію, обернену до функції $y = 2x^3 + 1$, і побудувати її графік.

Розв'язання. Функція монотонна, а тому обернена на всій області визначення, якою є множина дійсних чисел. Щоб скласти формулу оберненої функції, розв'яжемо

рівняння $y = 2x^3 + 1$ відносно змінної x : $x = \sqrt[3]{\frac{y-1}{2}}$. Оскільки зазвичай незалежну змінну позначаємо як x , а функцію – як y , то в отриманому виразі слід поміняти місцями змінні. Функція $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{2}}$ і є оберненою до даної. Графіки цих функцій наведено на рис. 4.9.

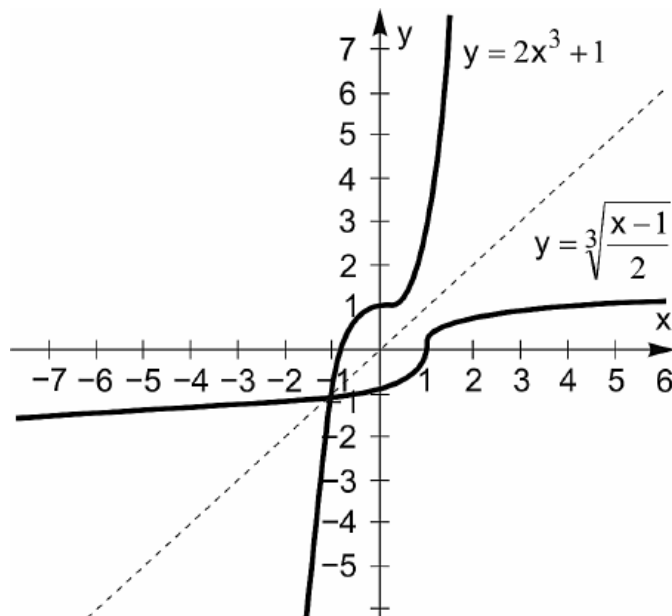


Рис. 4.9

Складена функція. Розглянемо функцію $y = \sin(2x)$. Фактично цей запис означає такий ланцюжок функціональних перетворень:

$$u = 2x \rightarrow y = \sin u.$$

У загальному вигляді останні перетворення можна записати так:

$$u = f_1(x), y = f_2(u) \text{ або } y = f[u(x)].$$

Маємо два послідовних правила відповідності (тобто функції), використовуючи які, отримаємо y як функцію від x . У цьому випадку говоримо, що y – складена функція від x .

Приклад 4.5. Записати ланцюжок перетворень для наступних складених функцій:
 $y = \sqrt{|\sin x|}$, $y = \cos \frac{1}{x}$, $y = \log_a(x^3 + 1)$.

Розв'язання. Ланцюжок перетворень такий: для першої – $u = \sin x \rightarrow v = |u| \rightarrow y = \sqrt{v}$; для другої – $u = \frac{1}{x} \rightarrow y = \cos u$; для третьої – $u = x^3 + 1 \rightarrow y = \log_a u$.

Графік функції. Графіком функції називається множина точок координатної площини, абсцисами яких є значення аргументу x з області визначення функції, а ординатами – значення функції y з області значень.

4.2. Графіки алгебраїчних функцій

Лінійна функція. Функція вигляду $y = kx + b$ називається *лінійною функцією*. Графіком функції є *пряма лінія*, яку можна побудувати за двома точками. Наприклад, якщо $x = 0$, то $y = b$, отже, $M_1(0; b)$ – точка перетину з віссю Oy ; якщо $y = 0$, то $x = -\frac{b}{k}$, маємо точку $M_2(-\frac{b}{k}; 0)$ – точку перетину з віссю Ox .

Множник k називається *кутовим коефіцієнтом*. Його геометричний зміст – $k = \operatorname{tg} \alpha$, де α – кут нахилу прямої до додатного напрямку осі Ox ($\alpha \in [0; \pi)$) (рис. 4.10).

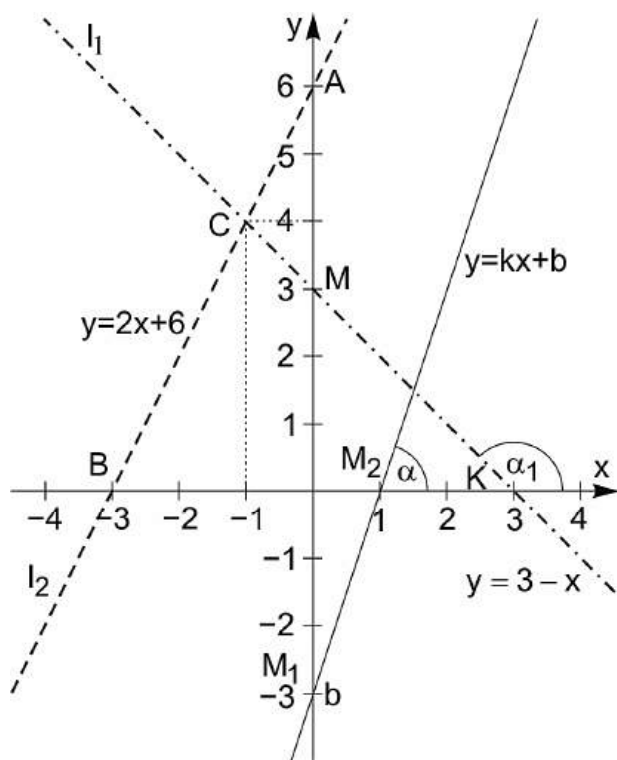


Рис. 4.10

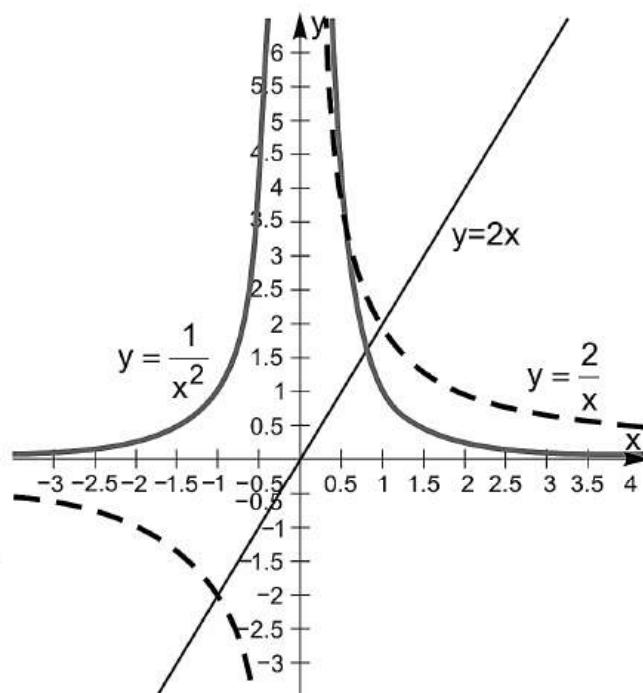


Рис. 4.11

Приклад 4.6. Побудувати прямі $l_1: y = 3 - x$ і $l_2: y = 2x + 6$. Знайти точку перетину прямих і кут нахилу прямої l_1 до осі Ox .

Розв'язання:

1. На l_1 : якщо $x = 0$, то $y = 3$, отже, $M(0; 3)$ – точка перетину з віссю Oy ; якщо $y = 0$, то $x = 3$, отже, $K(3; 0)$ – точка перетину з віссю Ox . Таким чином, якщо відмітити точки M і K і провести через них пряму, то одержимо графік заданої функції l_1 . Аналогічно на l_2 маємо $A(0; 6)$ і $B(-3; 0)$ – точки перетину з осями Oy і Ox відповідно. Отже, з'єднуючи точки A і B , одержимо пряму l_2 (див. рис. 4.10).

2. Щоб знайти точку перетину двох графіків, треба прирівняти обидві функції: $3 - x = 2x + 6$. Розв'язком рівняння є $x = -1$. Підставимо -1 у будь-яке з рівнянь заданих прямих і одержимо ординату точки перетину $y = 4$. Отже, $C(-1; 4)$ – шукана точка.

3. Оскільки $k = \operatorname{tg} \alpha_1 = -1$, то $\alpha_1 = 3\pi/4$.

Пряма і обернена пропорційність. Найпростіший вигляд має рівняння прямої, яка проходить через початок координат: $y = kx$. Таке співвідношення між змінними x і y називається *прямою пропорційністю*, а число k – *коефіцієнтом пропорційності* (рис. 4.11, $k=2$).

Співвідношення $y = \frac{k}{x}$ називається *оберненою пропорційністю*. Графіком

функції є *гіпербола*. Зазвичай гіперболу будують за точками. Оскільки функція $y = \frac{k}{x}$ є непарною, то спочатку будують одну гілку (для $x > 0$), а другу будують симетрично початку координат. Прямі $x = 0$, $y = 0$ є асимптотами графіка (див. рис. 4.11, $k=2$).

Приклад 4.7. Побудувати графік функції $y = \frac{2}{x}$.

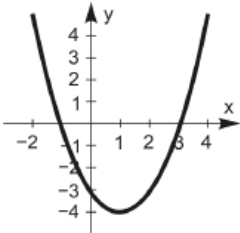
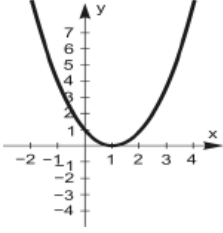
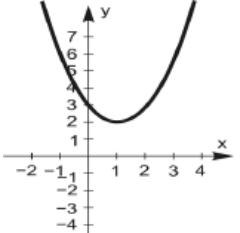
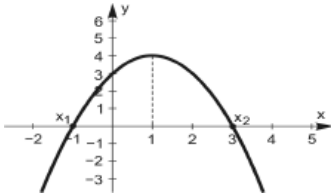
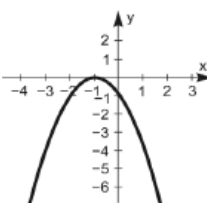
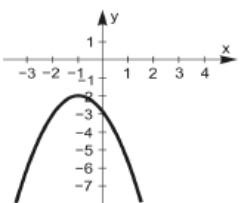
Розв'язання. Обчислимо кілька значень функції і запишемо їх для зручності у табл. 4.2. З урахуванням симетрії та наявності асимптот будують за точками задану криву (див. рис. 4.11).

Таблиця 4.2

x	0,5	1	2	4
y	4	2	1	0,5

Квадратична функція. Функція вигляду $y = ax^2 + bx + c$ називається *квадратичною функцією*. Її графіком є *парабола*. Залежно від коефіцієнта a та дискримінанта $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$ графік цієї функції може мати вигляд, наведений у табл. 4.3.

Таблиця 4.3

$a \backslash D$	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			
Абсциси вершин	$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ $x_1 \neq x_2, x_0 = -\frac{b}{2a}$	$x_1 = x_2 = x_0 = -\frac{b}{2a}$	$x_0 = -\frac{b}{2a}$

Степенева функція. Функція вигляду $y = x^\alpha$, де $\alpha \in R$ (довільна стала) – показник степеня, називається *степеневією функцією* від незалежної змінної x . На рис. 4.12 показано графіки степеневих функцій для деяких додатних значень α , на рис. 4.11 – для від'ємних.

Аналізуючи графіки, які наведено на рис. 4.11 і 4.12, можна зазначити таке:

- 1) функції $y = kx$, $y = k/x$, $y = kx^2$ є окремими випадками степеневієї функції;
- 2) коли $\alpha > 0$, усі графіки проходять через точки (0;0) і (1;1);
- 3) якщо $x > 1$, то більшому значенню α відповідає більше значення y ;

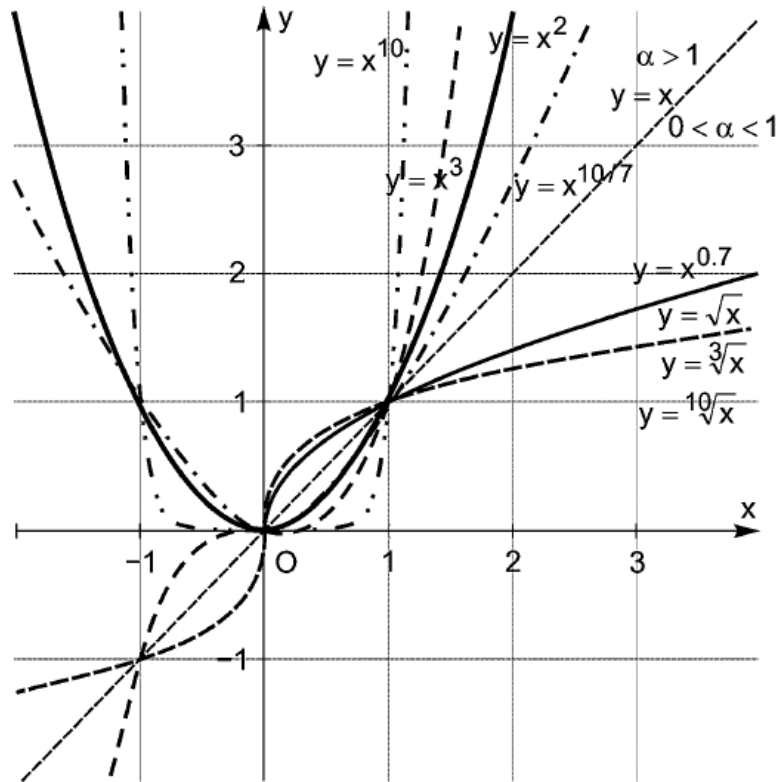


Рис. 4.12

- 4) коли $\alpha < 0$, то $x \neq 0$ і лінії $x = 0$ і $y = 0$ є асимптотами графіка функції;
- 5) якщо α – парне, то графік розташовано у I і II чвертях, а якщо непарне – у I і III чвертях.

4.3. Графіки тригонометричних функцій

Основними тригонометричними функціями є функції $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. Графіки цих функцій зображено на рис. 4.13 – 4.16.

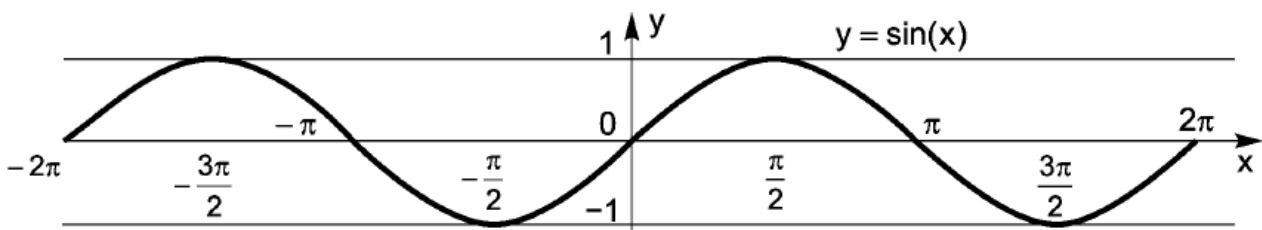


Рис. 4.13

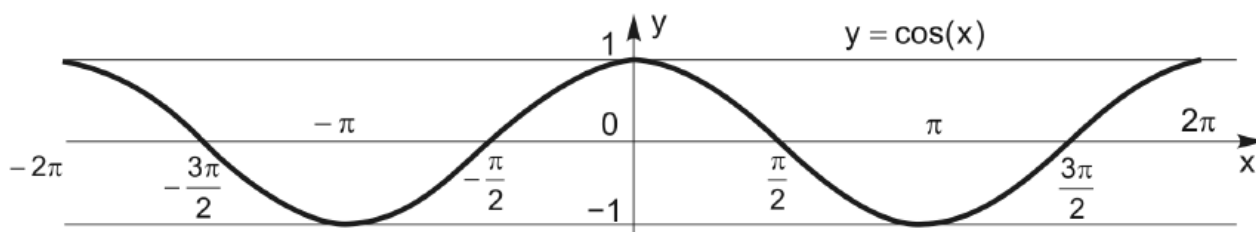


Рис. 4.14

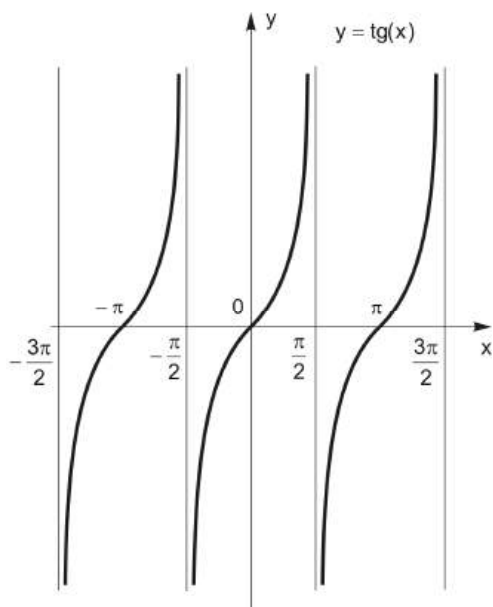


Рис. 4.15

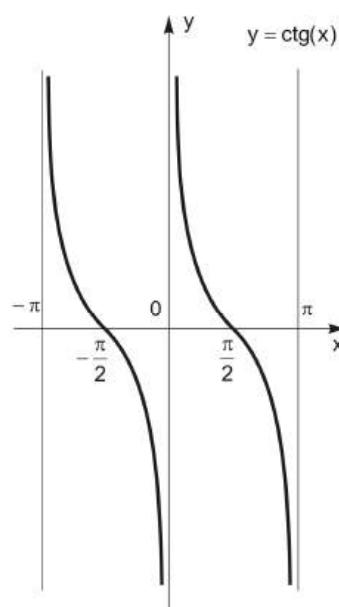


Рис. 4.16

4.4. Графіки показникової і логарифмічної функцій

Означення. Функція вигляду $y = a^x$, де a – будь-яке додатне число, що не дорівнює 1, а x – будь-яке дійсне число, називається **показниковою**. Графіки показникової функції для значень $a = 2 > 1$ і $0 < a = 1/2 < 1$ наведено на рис. 4.17.

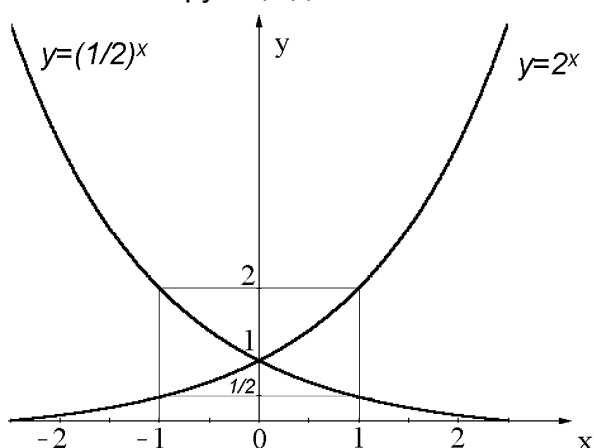


Рис. 4.17

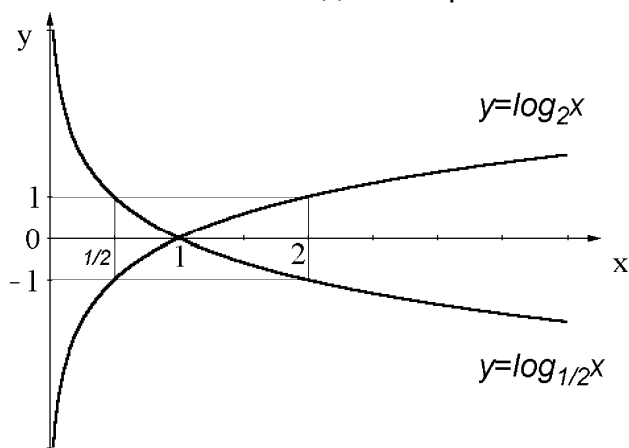


Рис. 4.18

Означення. Функція вигляду $y = \log_a x$, де $a > 0$ і $a \neq 1$, називається **логарифмічною**. Графіки логарифмічної функції для значень $a = 2 > 1$ і $0 < a = 1/2 < 1$ подано на рис. 4.18.

4.5. Графіки обернених тригонометричних функцій

Оберненими тригонометричними функціями називаються функції $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$.

1. $y = \arcsin x$. Область визначення функції – $D(y) = x, x \in [-1, 1]$, область змінення функції – $E(y) = y, y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Ця функція є оберненою до функції

$y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. Графік функції наведено на рис. 4.19. Основні тотожності:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x, |x| \leq 1; \quad \sin(\arcsin x) = x, |x| \leq 1; \quad \arcsin(\sin x) = x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right].$$

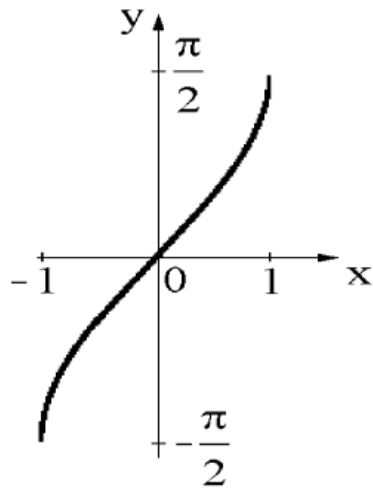


Рис. 4.19

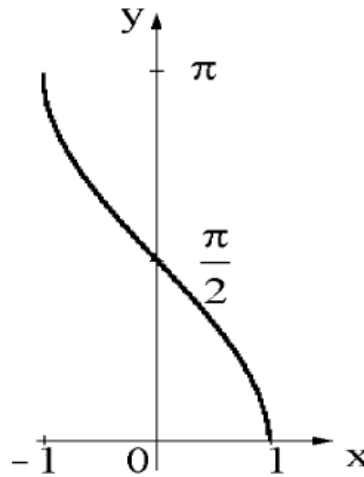


Рис. 4.20

2. $y = \arccos x$. Область визначення функції – $D(y) = x, x \in [-1, 1]$, область змінення функції – $E(y) = y, y \in [0, \pi]$. Ця функція є оберненою до функції $y = \cos x, x \in [0, \pi]$. Графік функції показано на рис. 4.20. Основні тотожності:

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, |x| \leq 1; \quad \cos(\arccos x) = x, |x| \leq 1;$$

$$\arccos(\cos x) = x, x \in [0, \pi]; \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, |x| \leq 1.$$

3. $y = \operatorname{arctg} x$. Область визначення функції – $D(y) = x, x \in (-\infty, +\infty)$, область змінення функції – $E(y) = y, y \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$; $y = \pm \frac{\pi}{2}$ – горизонтальні асимптоти при $x \rightarrow \pm\infty$. Ця функція є оберненою до функції $y = \operatorname{tg} x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right)$. Графік функції зображено на рис. 4.21. Основні тотожності:

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, x \in (-\infty, +\infty); \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x, x \in \left(-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right).$$

4. $y = \operatorname{arcctg} x$. Область визначення функції – $D(y) = x, x \in (-\infty, +\infty)$, область

змінення функції – $E(y) = y$, $y \in (0, \pi)$; $y = 0$ і $y = \pi$ – горизонтальні асимптоти при $x \rightarrow +\infty$ і $x \rightarrow -\infty$ відповідно. Ця функція є оберненою до функції $y = \operatorname{ctg} x$, $x \in (0, \pi)$.

Графік функції наведено на рис. 4.22. Основні тотожності:

$$\operatorname{arccctg}(-x) = \pi - \operatorname{arccctg} x, x \in (-\infty, +\infty); \quad \operatorname{ctg}(\operatorname{arccctg} x) = x, x \in (-\infty, +\infty);$$

$$\operatorname{arccctg}(\operatorname{ctg} x) = x, x \in (0, \pi).$$

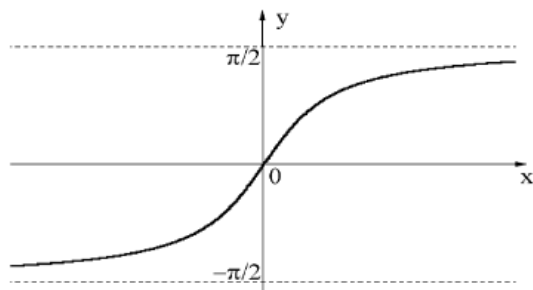


Рис. 4.21

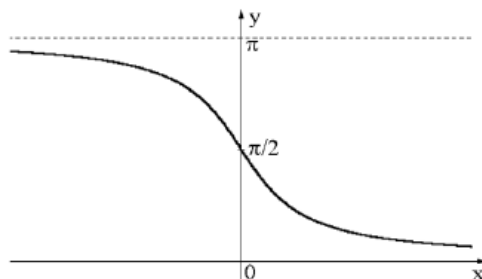


Рис. 4.22

Приклад 4.8. Побудувати графік функції $y = \sin(\arccos x)$.

Розв'язання. Оскільки $\arccos x \in [0, \pi]$, то

$$\sin(\arccos x) = \sqrt{1 - \cos^2(\arccos x)} = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1, 1].$$

Таким чином, $y = \sqrt{1 - x^2}$, $x \in [-1, 1]$. Графіком цієї функції є півколо одиничним радіусом, розташоване у верхній півплощині (рис. 4.23).

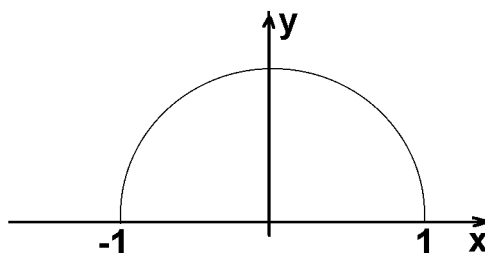


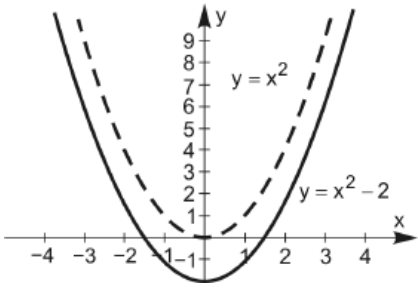
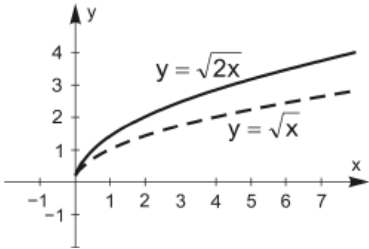
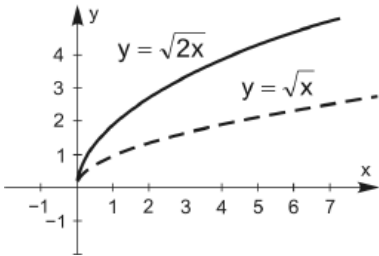
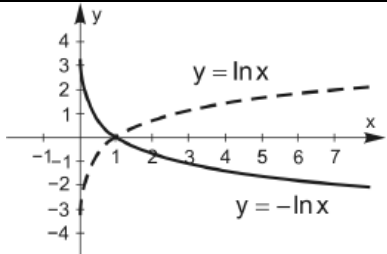
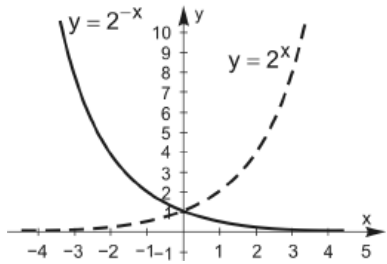
Рис. 4.23

4.6. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень

У табл. 4.4 показано, як за допомогою геометричних перетворень (паралельне перенесення, симетрія, стиснення й розтягнення) можна отримати графіки відповідних функцій з графіка функції $y = f(x)$.

Таблиця 4.4

Функція	Перетворення	Приклад
$y = f(x \pm a)$	Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ на a одиниць вправо (якщо знак «-») або вліво (якщо знак «+»)	

Функція	Перетворення	Приклад
$y = f(x) \pm b$	Паралельне перенесення графіка функції $y = f(x)$ на b одиниць вниз (якщо знак « $-$ ») або вгору (якщо знак « $+$ »)	
$y = f(mx)$	Стиснення або розтягнення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Ox (розтягнення – якщо $0 < m < 1$, стиснення – якщо $m > 1$)	
$y = kf(x)$	Стиснення або розтягнення графіка функції $y = f(x)$ уздовж осі Oy (стиснення – якщо $0 < k < 1$, розтягнення – якщо $k > 1$)	
$y = -f(x)$	Симетрія графіка функції $y = f(x)$ відносно осі Ox	
$y = f(-x)$	Симетрія графіка функції $y = f(x)$ відносно осі Oy	

Приклад 4.9. Побудувати графік дробово-лінійної функції $y = \frac{2x+7}{x+1}$.

Розв'язання. Виділимо цілу частину: $\frac{2x+7}{x+1} = \frac{2x+2+5}{x+1} = 2 + \frac{5}{x+1}$. Отже,

функція набуває вигляду $y = 2 + \frac{3}{x+1}$. Графік (рис. 4.24) цієї функції можна побудувати із графіка $y = \frac{1}{x}$ за допомогою ланцюжка елементарних перетворень (див. табл. 4.2), а саме:

$$y_1 = \frac{1}{x} \Rightarrow y_2 = 3y_1 = \frac{3}{x} \Rightarrow y_3 = y_2(x+1) = \frac{3}{x+1} \Rightarrow y_4 = y_3 + 2 = \frac{3}{x+1} + 2.$$

Зауваження. Під час останніх двох перетворень треба перенести асимптоти $x=0 \Rightarrow x=-1$, $y=0 \Rightarrow y=2$ і центр симетрії $O(0; 0) \Rightarrow O(-1; 2)$.

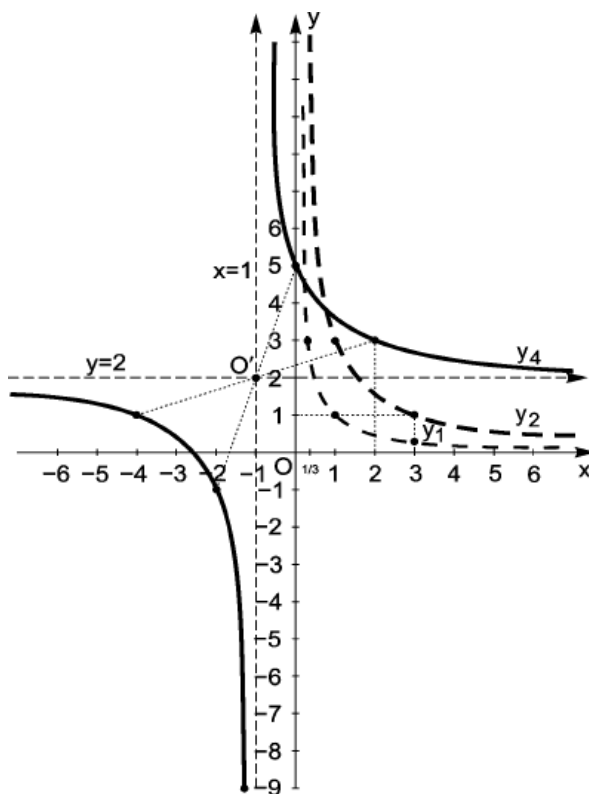


Рис. 4.24

Приклад 4.10. Побудувати графік функції $y = 2\sin \frac{x}{2}$.

Розв'язання. Графік цієї функції (рис. 4.25) можна отримати із графіка функції $y = \sin x$ (див. рис. 4.13) внаслідок розтягнення останнього в два рази вздовж осей Ox і Oy .

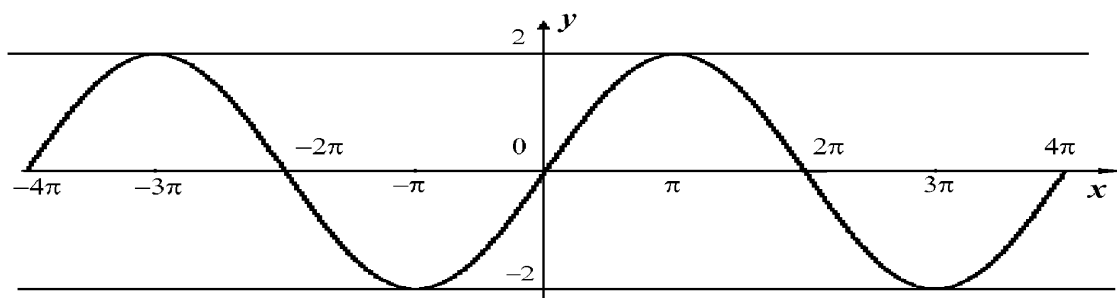


Рис. 4.25

Приклад 4.11. Побудувати графік функції $y = 3\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$.

Розв'язання. Перепишемо функцію у вигляді $y = 3\cos 2\left(x - \frac{\pi}{6}\right) + 1$. У системі координат $X_1O_1Y_1$ (пунктирні лінії) побудуємо графік функції $y_1 = 3\cos 2x_1$, а потім вісь O_1X_1 перенесемо на одиницю вниз (вісь Ox), а вісь O_1Y_1 – на $\frac{\pi}{6}$ ліворуч (рис. 4.26).

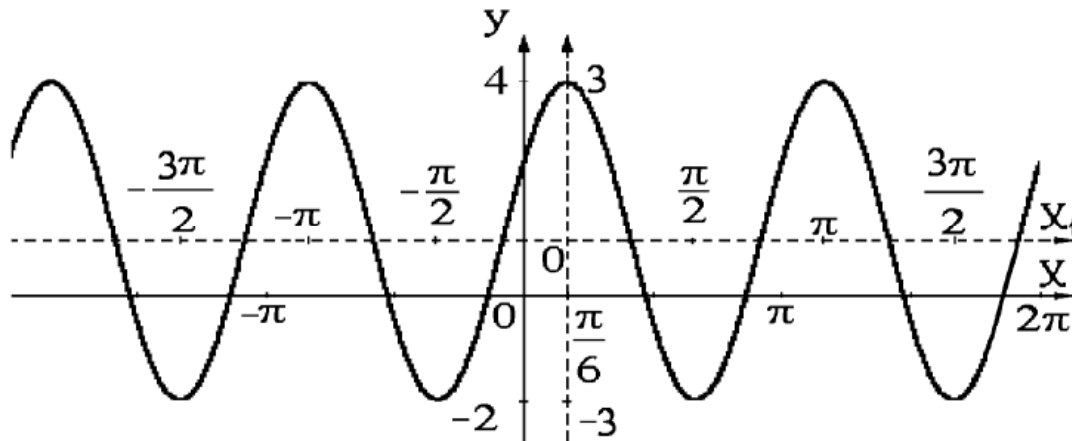


Рис. 4.26

Приклад 4.12. Побудувати графік функції $y = 2^{x+1}$.

Розв'язання. Отримаємо цей графік із графіка $y = 2^x$ перенесенням уздовж осі x на одиницю вліво (рис. 4.27).

Приклад 4.13. Побудувати графік функції $y = \log_2(x - 1)$.

Розв'язання. Графік цієї функції отримаємо із графіка функції $y = \log_2 x$ перенесенням на одиницю вправо вздовж осі x . Пряма $x = 1$ – вертикальна асимптота (рис. 4.28).

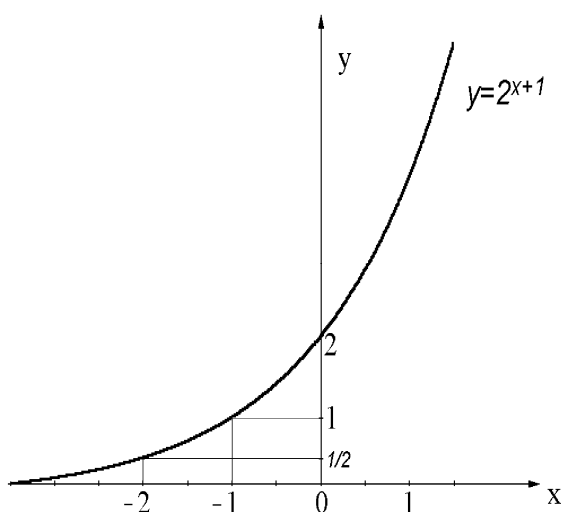


Рис. 4.27

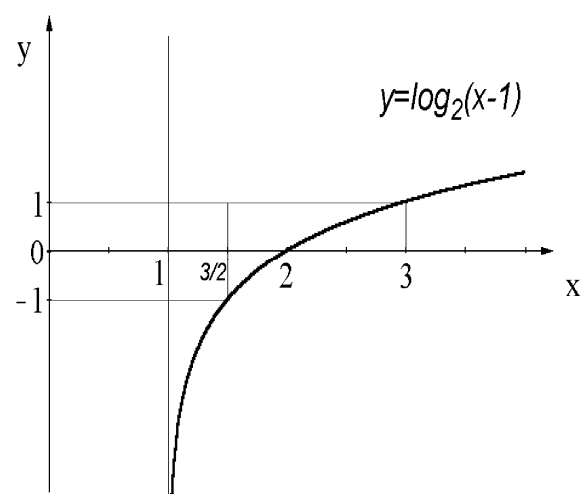


Рис. 4.28

Завдання для самостійної роботи

4.1. Знайти область визначення функції:

$$1) y = \sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{2+x}}; \quad 2) y = \frac{x}{\sqrt{3x^2-1}} + \frac{1}{x-2}; \quad 3) y = \frac{x^2-5}{2x^2-1} + \sqrt{x};$$

$$4) y = 2 \operatorname{ctg} 3x; \quad 5) y = 3 \operatorname{tg} 2x; \quad 6) y = \frac{1}{\cos x}; \quad 7) y = \frac{1}{2 \sin x + 3}.$$

4.2. Дослідити функцію на парність або непарність:

$$1) y = x^3 + 2x; \quad 2) y = \sqrt[3]{(x+1)^2}; \quad 3) f(x) = x^3 - 3x + \operatorname{tg} 3x; \quad 4) f(x) = \frac{3x^2}{4 \cos x};$$

$$5) f(x) = x^4 - 2x^2 - \sin^2 3x; \quad 6) y = \sin 2x + \sin 3x + \sin x (\cos x + \cos 3x).$$

4.3. Побудувати графіки функцій:

$$1) y = -x^2 - 4x + 3; \quad 2) y = x^2 + 4x - 5; \quad 3) y = x^2 - 4|x| + 3; \quad 4) y = x^2 + 3|x| - 4.$$

4.4. Побудувати графіки функцій:

$$1) y = 3^x; \quad 2) y = \left(\frac{1}{3}\right)^x - 1; \quad 3) y = 3^{|x|+1}; \quad 4) y = -\frac{1}{2} \cdot 3^x; \quad 5) y = 3^{x+1};$$

$$6) y = 2^{x-1}; \quad 7) y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}; \quad 8) y = 2^{x+|x|}; \quad 9) y = \log_{\frac{1}{3}}(-x); \quad 10) y = \log_3(2-x);$$

$$11) y = \log_3|x-1|; \quad 12) y = \log_2 x - 2; \quad 13) y = \log_{\frac{1}{3}} x - 3; \quad 14) y = 2 + \log_2 x.$$

4.5. Побудувати графіки функцій:

$$1) y = \cos 2x; \quad 2) y = \sin 2x; \quad 3) y = 2 \cos 4x; \quad 4) y = -2 \cos \frac{x}{3}; \quad 5) y = -2 \sin \frac{x}{4};$$

$$6) y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right); \quad 7) y = 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right); \quad 8) y = 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - 2;$$

$$9) y = \frac{1}{2} \sin\left(3x - \frac{3\pi}{4}\right) + 2; \quad 10) y = 2 \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right); \quad 11) y = -2 \operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right);$$

$$12) y = \frac{1}{3} \operatorname{ctg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) - 1; \quad 13) y = \operatorname{tg} x \operatorname{ctg} x; \quad 14) y = \operatorname{cosec} x; \quad 15) y = 3 \sin x + 4 \cos x;$$

$$16) y = \sin|x| + 1; \quad 17) y = \cos x + |\cos x|; \quad 18) y = |\sin x|; \quad 19) y = \frac{|\sin x|}{\sin x}.$$

4.6. Побудувати графіки функцій:

$$1) y = \sin(\arcsin x); \quad 2) y = \cos(\arcsin x); \quad 3) y = \operatorname{tg}(\arccos x);$$

$$4) y = \arccos(x - \pi); \quad 5) y = 2 \arcsin(x + \pi) + 1; \quad 6) y = x^2 - 3x - \sin(\arcsin x) + 1.$$

Розділ 5. РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ

5.1. Рівняння і нерівності. Основні означення

Рівнянням з однією змінною називається рівність, що містить цю змінну, яка є невідомою.

Розв'язком (або коренем) рівняння називається таке значення змінної, яке при підстановці його у рівняння перетворює його на правильну числову рівність.

Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені або довести, що коренів немає.

Два рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ і $f_2(x) = g_2(x)$ називаються **рівносильними**, якщо множини їх розв'язків збігаються.

Якщо всі корені рівняння $f_1(x) = g_1(x)$ є коренями рівняння $f_2(x) = g_2(x)$, то друге рівняння називають наслідком першого.

Для пошуку коренів рівняння над його частинами здійснюють деякі перетворення з метою спрощення, наприклад:

1. Додавання до обох частин одного й того ж виразу.
2. Множення обох частин на один і той же вираз.
3. Скорочення обох частин на один і той же вираз.
4. Піднесення обох частин до одного степеня.
5. Логарифмування або потенціювання обох частин за однаковою основою та ін.

Зауважимо, що при перетвореннях рівняння **не завжди зберігається рівносильність**, тобто у процесі перетворення можна як втратити корені, так і придбати так звані зайві.

Проілюструємо сказане на прикладах рівнянь різного вигляду.

Приклад 5.1. Розв'язати ірраціональне рівняння $\sqrt{x-7} = x-13$.

Розв'язання. Після визначення ОДЗ рівняння $x \geq 7$ піднесемо обидві його частини до квадрата і отримаємо $x-7 = x^2 - 26x + 169$ або $x^2 - 27x + 176 = 0$. Корені квадратного рівняння – $x_1 = 11$, $x_2 = 16$. Шляхом перевірки легко переконатись у тому, що число 16 дійсно задовольняє рівнянню, а ось число 11 – ні. Справа в тому, що при піднесенні обох частин до **парного** степеня неправильна рівність $2 = -2$ перетворилася на правильну $4 = 4$.

Приклад 5.2. Розв'язати рівняння $\frac{4}{(x+1)(2-x)} + \frac{1}{x+1} + \frac{2x}{x^2-x-2} = 1$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \neq -1, x \neq 2$. Спільний знаменник ліворуч дорівнює добутку $(x+1)(x-2)$ і рівняння перетворюється на $\frac{-4+x-2+2x}{(x-2)(x+1)} = 1$ або $\frac{3(x-2)}{(x-2)(x+1)} = 1$.

Після скорочення маємо $\frac{3}{x+1} = 1$, звідки $x = 2$. Але це число не є розв'язком, тому що не задовольняє ОДЗ.

Подальший пошук розв'язків для різноманітних класів рівнянь здійснюється різними методами, серед яких слід звернути увагу на метод заміни змінної і метод факторизації (тобто розкладання на множники, від слова «factor» – множник).

Метод факторизації можна застосувати для розв'язання кубічних, тригонометричних та інших рівнянь.

Приклад 5.3. Знайти корені рівняння $2x^3 + x^2 - 13x + 6 = 0$.

Розв'язання. Можна спробувати знайти корені спочатку серед чисел $\pm 1, \pm 2$. Число $x = 2$ перетворює рівняння на тотожність. Тому ліва частина є добутком виразу $(x - 2)$ і полінома другого степеня, а саме $2x^2 + 5x - 3$. Рівняння перетворилося на $(x - 2)(2x^2 + 5x - 3) = 0$, яке має корені $x_1 = 2$, $x_2 = -3$, $x_3 = \frac{1}{2}$.

Приклад 5.4. Знайти корені рівняння $(1 + \cos 4x) \sin 4x = \cos^2 2x$.

Розв'язання. Перепишемо рівняння у вигляді $2\cos^2 2x \sin 4x = \cos^2 2x$, $\cos^2 2x(2\sin 4x - 1) = 0$, що дає дві серії розв'язків: $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$ і $x = (-1)^k \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{4}$.

Зауваження. Не можна скорочувати обидві частини рівняння на спільний множник $\cos 2x$, бо це призводить до втрати першої серії розв'язків.

Приклад 5.5. Знайти функцію, що є оберненою до функції $y = shx$.

Розв'язання. У цьому прикладі фактично потрібно розв'язати відносно x показникові рівняння $\frac{e^x - e^{-x}}{2} = y$. Це є ілюстрацією методу заміни змінної, а саме: позначимо $t = e^x$, $t > 0$. Маємо рівняння $t - \frac{1}{t} = 2y$, або $t^2 - 2yt - 1 = 0$. Його додатний корінь $t = y + \sqrt{y^2 + 1}$, звідки $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right)$.

Дві нерівності $f_1(x) < g_1(x)$ і $f_2(x) < g_2(x)$ називаються рівносильними, якщо множини їх розв'язків збігаються, наприклад:

1. Нерівності $f(x) < g(x)$ і $f(x) + \phi(x) < g(x) + \phi(x)$ є рівносильними, якщо $\phi(x)$ визначена на ОДЗ.
2. Нерівності $f(x) < g(x)$ і $af(x) < ag(x)$ є рівносильними, якщо $a > 0$.
3. Нерівності $f(x) < g(x)$ і $af(x) > ag(x)$ є рівносильними, якщо $a < 0$.
4. Якщо обидві частини нерівності є додатними, то їх можна підносити до степеня.

Приклад 5.6. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 - 24} \leq x - 2$.

Розв'язання. Визначимо ОДЗ: $x \in (-\infty, -\sqrt{24}] \cup [\sqrt{24}, +\infty)$. Якщо права частина нерівності є невід'ємною, тобто виконано умову $x \geq 2$, то маємо право піднести до квадрата $x^2 - 24 \leq x^2 - 4x + 4$, або $x \leq 7$. Узгодження із ОДЗ дає відповідь $x \in [2; 7]$. У випадку, коли права частина від'ємна, ця нерівність не може бути виконана, тому що невід'ємне число (ліворуч) не може бути меншим за від'ємне (праворуч).

Приклад 5.7. Розв'язати нерівність $\sqrt{x^2 + 7} > 7 - x$.

Розв'язання. На відміну від попереднього прикладу випадок $7 - x < 0$ є розв'язком, бо додатне число автоматично буде більшим за від'ємне. Якщо ж $7 - x \geq 0$,

то піднесемо обидві частини до квадрата і отримаємо $x^2 + 7 > x^2 - 14x + 49$, або $x > 3$. Дві частини відповіді $x > 7$ і $\begin{cases} x \leq 7, \\ x > 3 \end{cases}$ можна об'єднати у множину $x \in (3, +\infty)$.

Завдання для самостійної роботи

5.1. Переконайтесь у тому, що рівняння не є рівносильними, і визначити причини:

1) $\frac{(x-9)(x+2)}{x+2} = -11$ і $x-9 = -11$; 2) $5^{\log_5(x^2-5x+6)} = x-3$ і $x^2-5x+6 = x-3$;

3) $\sqrt{x+5} = \sqrt{2x+12}$ і $x+5 = 2x+12$; 4) $\sin^2 x - \sin x \cos x = 0$ і $\sin x - \cos x = 0$;

5) $\log_7(x+2) = \log_7(3x+12)$ і $x+2 = 3x+12$.

5.2. Розв'язати кубічні рівняння:

1) $x^3 + 4x^2 + 3x - 8 = 0$; 2) $x^3 - 3x^2 - x + 3 = 0$; 3) $3x^3 + x^2 - 22x - 24 = 0$;

4) $5x^3 - 26x^2 + 35x - 6 = 0$.

5.3. Розв'язати ірраціональні рівняння:

1) $\sqrt{5-2x} = 1-x$; 2) $\sqrt{5+2x} = x-5$; 3) $\sqrt{3-4x+x^2} = 1-x$; 4) $(x^2-25)\sqrt{3-x} = 0$.

5.4. Розв'язати рівняння методом заміни:

1) $\frac{x^2+2x+1}{x^2} + \frac{2x^2}{x^2+2x+1} = 3$; 2) $x^2 + 5x - 3\sqrt{x^2+5x-2} = 0$.

5.5. Розв'язати нерівності:

1) $\sqrt{x+7} > 13-x$; 2) $\sqrt{x-1} \leq 7-x$.

5.2. Метод інтервалів. Раціональні нерівності

Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{(x-a_1)^{n_1} \cdot (x-a_2)^{n_2} \cdot \dots \cdot (x-a_{n_k})^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1} \cdot (x-b_2)^{m_2} \cdot \dots \cdot (x-b_{m_l})^{m_l}}$$

$$(n_1, n_2, \dots, n_k, m_1, \dots, m_l \in \mathbb{N}, a_i \neq a_j, b_i \neq b_j \quad \forall i \neq j, a_i \neq b_j \quad \forall i, j).$$

Якщо всі нулі чисельника й знаменника відмітити на числовій прямій, то вони розбіють її на $k+l+1$ проміжків. У середині кожного з них функція $f(x)$ неперервна і зберігає знак. Для визначення цього знака достатньо взяти будь-яку точку з цього проміжку й знайти знак функції в цій точці. На практиці для розв'язання нерівності $f(x) \geq 0$ (≤ 0) застосовують метод інтервалів.

В основу методу інтервалів покладено такі твердження:

1. Якщо x_i – така точка, що показник степеня h_i для виразу $(x - x_i)^{h_i}$ є числом непарним, то праворуч і ліворуч від x_i (на сусідніх проміжках) функція має різні знаки.

Наприклад, маємо функцію $y = (x + 1)(x - 4)^3$. При переході через точки $x = -1$, $x = 4$ функція змінює знак.

2. Якщо a_i – така точка, що показник степеня h_i для виразу $(x - a_i)^{h_i}$ є числом парним, то праворуч і ліворуч від a_i (на сусідніх проміжках) функція має однакові знаки.

Наприклад, маємо функцію $y = (x + 5)^2$. При переході через точку $a = -5$ функція не змінює знака.

Алгоритм розв'язання нерівностей методом інтервалів

1. На числовій прямій позначають всі нулі чисельника і знаменника (критичні точки) заданої функції.

2. Визначають знак нерівності на кожному з числових проміжків. Обов'язково враховують парність або непарність відповідного показника степеня.

3. Вибирають проміжки згідно зі знаком нерівності:

- якщо функція має знак "+", то на цьому проміжку $y > 0$;
- якщо функція має знак "-", то на цьому проміжку $y < 0$.

Приклад 5.8. Розв'язати нерівність $(x - 3)(x - 5) > 0$.

Розв'язання:

1. Нулі заданої функції – $x_1 = 3$ і $x_2 = 5$. Позначимо ці точки на числовій прямій (рис. 5.1). Оскільки нерівність строга, то точки 3 і 5 виключаємо із розв'язку.

2. Точки 3 і 5 розбивають числову пряму на три інтервали: $(-\infty; 3)$; $(3; 5)$; $(5; +\infty)$.

3. Визначимо знак нерівності на проміжку $(5; +\infty)$: нехай $x = 6 > 5$, тоді маємо нерівність $(6 - 3)(6 - 5) > 0$. Скористаємося правилом зміни знака: на проміжку $(3; 5)$

знак "-"; на проміжку $(-\infty; 3)$ – "+". Виберемо проміжки зі знаком нерівності "+". Тоді $x \in (-\infty; 3) \cup (5; +\infty)$.

Рис. 5.1

Розв'язання:

1. Розкладемо квадратний тричлен $y = x^2 - 7x + 12$. Для цього розв'яжемо квадратне рівняння $x^2 - 7x + 12 = 0$:

$$D = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \cdot 12 = 1 > 0, \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 - \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 3, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + \sqrt{1}}{2 \cdot 1} = 4.$$

Нерівність $x^2 - 7x + 12 < 0$ запишемо у вигляді $(x - 3)(x - 4) < 0$ і застосуємо метод інтервалів.

2. $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ – нулі функції (рис. 5.2).

3. Визначимо знак нерівності на кожному інтервалі:

$(4; +\infty)$: нехай $x = 5$, $5 > 4$, тоді $(5-3)(5-4) > 0$;

$(3; 4)$: нехай $x = 3,5$, $3,5 > 3$, тоді $(3,5-3)(3,5-4) < 0$;

$(-\infty; 3)$: нехай $x = 2$, $2 < 3$, тоді $(2-3)(2-4) > 0$.

Виберемо проміжки зі знаком нерівності "-".

Маємо $x \in (3; 4)$.



Рис. 5.2

Приклад 5.10. Розв'язати нерівність $(x-3)(5-x)(x+7) \leq 0$.

Розв'язання:

1. Нулі заданої функції – $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $x_3 = -7$. Вони розбивають числовий інтервал на чотири проміжки (рис. 5.3). Оскільки нерівність нестрога, то точки (-7) , 3 і 5 включаємо до розв'язку.



Рис. 5.3

2. Визначаємо знак нерівності на інтервалі $[5; +\infty)$: візьмемо $x = 6 > 5$, тоді $(6-3)(5-6)(6+7) \leq 0$.

3. Подвійних точок нерівність не має. Тому скористаємося умовою зміни знака: $[3; 5]$ – "+"; $[-7; 3]$ – "-"; $(-\infty; -7]$ – "+". Маємо $x \in [-7; 3] \cup [5; +\infty)$.

Приклад 5.11. Розв'язати нерівність $\frac{(x-2)(x+3)}{(x-5)(x-3)} > 0$.

Розв'язання. ОДЗ: $x \neq 5, x \neq 3$. Відмітимо на числовій прямій точки $x = 2$, $x = -3$ (нулі чисельника) і $x = 5$, $x = 3$ (нулі знаменника). Нерівність записано в стандартному вигляді, тому праворуч від точки $x = 5$ функція додатна. Усі показники степеня непарні, тому при переході через них знак лівої частини нерівності буде змінюватися (рис. 5.4). Маємо $x \in (-\infty, -3) \cup (2, 3) \cup (5, +\infty)$.

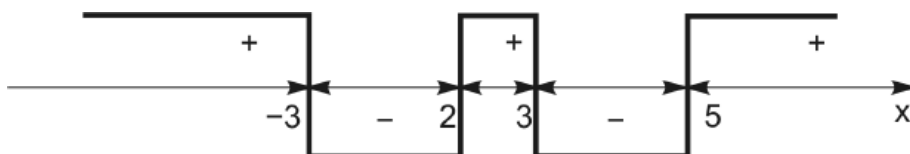


Рис. 5.4

Завдання для самостійної роботи

5.6. Розв'язати нерівності:

$$1) (x-1)(x-2)^3(x^2-4x+3) \geq 0; \quad 2) (x+5)(x-6)^4(x-8) < 0; \quad 3) \frac{x^2-5x+6}{x^2-13x+42} > 0;$$

$$\begin{aligned}
 &4) \frac{4x^2 - 5x - 1}{2x^2 - 5x + 3} > 1; \quad 5) (3x - 1)(x - 2)^3(x + 2)^4(x - 5) < 0; \quad 6) \frac{(x - 1)(5x - 2)}{3 - x} > 0; \\
 &7) (x + 6)^3(x - 1)^2(x - 3)^{12}(x - 10)^3 < 0; \quad 8) 1 + \frac{2}{x - 1} > \frac{6}{x}; \\
 &9) \frac{x^2 - 4x - 2}{9 - x^2} > 0; \quad 10) \frac{7x - 4}{x + 2} \geq 1; \quad 11) \frac{1}{2 - x} + \frac{5}{2 + x} < 1; \quad 12) \frac{3 - x}{x - 4} > \frac{1}{1 - x}.
 \end{aligned}$$

5.3. Рівняння і нерівності, що містять x під знаком абсолютної величини

Нагадаємо означення модуля, або абсолютної величини числа: модулем $|x|$ називається само число x , якщо $x \geq 0$, і $(-x)$, якщо $x < 0$:

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Наприклад, якщо $x \geq 6$, то $|x - 6| = x - 6$. А у випадку $x < 6$ значення модуля таке: $|x - 6| = -(x - 6) = 6 - x$.

Геометричний зміст модуля: $|x|$ – це відстань від точки x до точки 0 на числовій прямій. Отже, для $R \geq 0$ маємо:

а) $|x| < R \Leftrightarrow -R < x < R$ (рис. 5.5); б) $|x| > R \Leftrightarrow x > R$ або $x < -R$ (рис. 5.6);

в) $x^2 \leq R^2 \Leftrightarrow |x| \leq R$.

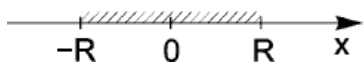


Рис. 5.5

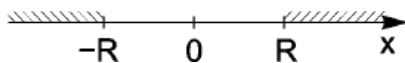


Рис. 5.6

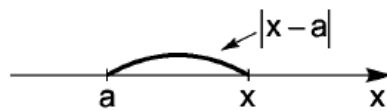


Рис. 5.7

Слід також запам'ятати, що $|x - a|$ є відстанню на числовій прямій від точки x до точки a (рис. 5.7).

Наприклад, на числовій прямій множина точок, що задовольняє умову $|x + 3| < 5$, є інтервалом із центром у точці (-3) і радіусом 5 , тобто інтервалом від точки -8 до точки 2 .

Приклад 5.12. Розв'язати рівняння $|2 - 3x| + 2x = 4$.

Розв'язання. Точка $x = \frac{2}{3}$ розбиває числову вісь на два проміжки, а саме якщо $x < \frac{2}{3}$, то вираз під знаком модуля додатний, тому модуль збігається із самим

виразом, і маємо систему $\begin{cases} x < \frac{2}{3}, \\ (2 - 3x) + 2x = 4, \end{cases}$ або $\begin{cases} x < \frac{2}{3}, \\ -x = 2, \end{cases}$ та її розв'язок $x = -2$. У

протилежному випадку після розкриття знака модуля $\begin{cases} x \geq \frac{2}{3}, \\ -(2-3x) + 2x = 4 \end{cases}$ отримаємо

$$x = \frac{6}{5}. \text{ Відповідь: } x_1 = -2, x_2 = \frac{6}{5}.$$

Приклад 5.13. Розв'язати рівняння $|2 - 5x - x^2| = 4$.

Розв'язання. Для розв'язання цього рівняння краще безпосередньо проаналізувати означення модуля. Модуль числа дорівнює 4, якщо це число 4 або (-4) . Рівняння можна замінити на два окремих рівняння, які часто записують у вигляді

сукупності $\begin{cases} 2 - 5x - x^2 = 4, \\ 2 - 5x - x^2 = -4. \end{cases}$ Кожне рівняння розглянемо окремо і отримаємо

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}, x_3 = 1, x_4 = -6.$$

Приклад 5.14. Розв'язати рівняння $x^2 + 9|x| - 10 = 0$.

Розв'язання. Перший спосіб – використання заміни змінної, а саме: позначимо $|x| = t$ і підкреслимо, що $t \geq 0$. Розв'язками отриманого квадратного рівняння $t^2 + 9t - 10 = 0$ є числа $t = 1$ і $t = -10$, друге із яких відкидаємо. Рівняння $|x| = 1$ має два корені: $x = \pm 1$.

Рівняння можна було розв'язати інакше, а саме розглянути окремо два випадки:

$x \geq 0$ і $x < 0$. Відповідно маємо $\begin{cases} x \geq 0, \\ x^2 + 9x - 10 = 0 \end{cases}$ і $\begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 9(-x) - 10 = 0 \end{cases}$. Першу

систему задовольняє число 1, а другу – (-1) .

Приклад 5.15. Розв'язати нерівність $|x^2 - 8| \leq 1$.

Розв'язання. Нерівність одразу замінимо на $-1 \leq x^2 - 8 \leq 1$ або $7 \leq x^2 \leq 9$.

Відповідь: $\sqrt{7} \leq |x| \leq 3$ або $x \in [-3, -\sqrt{7}] \cup [\sqrt{7}, 3]$.

Приклад 5. 16. Розв'язати нерівність $|2x - 8| > 7 - x$.

Розв'язання. Щоб позбавитися знака модуля, розглянемо окремо два випадки: $x \geq 4$ і $x < 4$, які приводять до двох окремих систем:

$\begin{cases} x \geq 4, \\ (2x - 8) > 7 - x \end{cases}$ і $\begin{cases} x < 4, \\ -(2x - 8) > 7 - x \end{cases}$. Перша має розв'язок $x > 5$, а друга – $x < 1$.

Тому $x \in (-\infty, 1) \cup (5, +\infty)$.

Зауваження. Розглянуті приклади здаються занадто простими, але у подальшому вони можуть змінювати своє “обличчя” і виникати у досить серйозному вигляді, а тоді має неабияке значення вміння розв'язувати їх швидко і правильно (див. завдання 5.10).

Завдання для самостійної роботи

5.7. Розв'язати рівняння:

1) $|x+9|=7$; 2) $|9-2x|=3$; 3) $11-x=|3x-2|$; 4) $|x+1|-2x=1$.

5.8. Розв'язати рівняння $\sqrt{4x^2+4x+1}=7$.

5.9. Зобразити на числовій осі точки, що задовольняють нерівності:

1) $|x-2|<3$; 2) $|x-2|\geq 3$; 3) $|x+13|<1$; 4) $|x+12|\geq 3$; 5) $2<|x-5|\leq 6$; 6) $|x-7|>0$;
7) $0<|x+1|\leq 3$.

5.10. Визначити, для яких значень x геометрична прогресія із знаменником

$q = \frac{x^2+2x-4}{4}$ буде нескінченно спадною, тобто $|q|<1$.

5.11. Розв'язати нерівності: 1) $|x^2-2|\leq 1$; 2) $|x^2-2x|\leq 6$.

5.12. Розв'язати рівняння:

1) $|x-2|=3|3-x|$; 2) $2|x+1|=|x-3|$; 3) $|x-1|-|x-2|=1$.

5.13. Розв'язати нерівності:

1) $|2x+1|>x$; 2) $|2x+3|\leq 4x$; 3) $2x^2\leq|x-2|$; 4) $x^2+2|x|-3\leq 0$.

5.4. Показникові й логарифмічні рівняння

Рівняння, що містять невідому в показнику степеня, мають назву “показникові рівняння”.

Основні види показникових рівнянь :

1. $a^{f(x)}=1$ ($a>0, a\neq 1$).

За означенням нульового показника $f(x)=0$.

2. $a^x=a^y$ ($a>0, a\neq 1$).

Якщо розділити обидві частини рівняння на a^y ($a^y\neq 0$), то одержимо рівняння $a^{f(x)}=1$.

3. $a^x=b$ ($a>0, a\neq 1, b>0$).

За означенням логарифма $x=\log_a b$.

4. $A_0a^{mx+k_0}+A_1a^{mx+k_1}=B$.

Винесемо за дужки a^{mx+k_i} , де $k_i=\min(k_0, k_1)$. Маємо

$$a^{mx+k_i}(A_0a^{k_0-k_i}+A_1a^{k_1-k_i})=B, \text{ або } a^{mx+k_i}\cdot C=B \Rightarrow a^{mx+k_i}=\frac{B}{C} \quad (C\neq 0).$$

Рівняння має розв'язок, якщо $\frac{B}{C}>0$.

5. $A_0a^{2x}+A_1a^x+A_2=0$.

Позначимо $a^x=y$, тоді одержимо квадратне рівняння відносно y , оскільки

$$a^{2x} = (a^x)^2 = y^2.$$

$$6. A_0 a^x + A_1 a^{\frac{x}{2}} \cdot b^{\frac{x}{2}} + A_2 b^x = 0.$$

Розділивши обидві частини на $b^x \neq 0$, отримаємо рівняння, що має вигляд рівняння 5.

Приклад 5.17. Розв'язати рівняння $3^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sqrt{27}}.$

Розв'язання. Праву частину $\frac{1}{\sqrt{27}}$ перетворимо на число з основою 3:

$$\frac{1}{\sqrt{27}} = \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 3 \cdot 3}} = \frac{1}{\sqrt{3^3}} = \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}} = 3^{-\frac{3}{2}}. \text{ Тепер підставимо } 3^{-\frac{3}{2}} \text{ у рівняння. Маємо}$$

$$3^{\frac{1}{2}x} = 3^{-\frac{3}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2}x = -\frac{3}{2}, x = -\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = -3.$$

Приклад 5.18. Розв'язати рівняння $5^{x+1} + 5^x = 750.$

Розв'язання. Оскільки $5^{x+1} = 5^x \cdot 5$, то рівняння матиме вигляд $5 \cdot 5^x + 5^x = 750$. Внесемо 5^x за дужки: $5^x(5+1) = 750 \Rightarrow 6 \cdot 5^x = 750 \Rightarrow 5^x = \frac{750}{6} = 125$. Таким чином, $5^x = 125$, але $125 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3 \Rightarrow 5^x = 5^3 \Rightarrow x = 3$.

Приклад 5.19. Розв'язати рівняння $4 \cdot 2^{2x} + 16 = 65 \cdot 2^x.$

Розв'язання. Позначимо $2^x = y$, тоді $2^{2x} = (2^x)^2 = y^2$. Підставимо y і y^2 в задане рівняння. Отримаємо квадратне рівняння $4y^2 - 65y + 16 = 0$. Розв'яжемо це рівняння. Маємо: $D = b^2 - 4ac = 4225 - 256 = 3969 = (63)^2 \Rightarrow y_1 = 16; y_2 = \frac{1}{4}$. Звідси $y = 2^x = 16, 2^x = 16, 2^x = 2^4, x = 4$ і $y = 2^x = \frac{1}{4}, 2^x = \frac{1}{4}, 2^x = 2^{-2}, x = -2$.

Приклад 5.20. Розв'язати рівняння $2^{x^2-40x+300} = 1.$

Розв'язання. $x^2 - 40x + 300 = 0, x_1 = 10, x_2 = 30.$

Приклад 5.21. Розв'язати рівняння $8^{x-3} = 9^{x-3}.$

Розв'язання. $\left(\frac{8}{9}\right)^{x-3} = 1; x-3 = 0, x = 3.$

Приклад 5.22. Розв'язати рівняння $3^{2x+2} + 3^{2x} = 30.$

Розв'язання. Внесемо за дужки 3^{2x} . Отримаємо:

$$3^{2x}(9+1)=30, \quad 3^{2x}=3 \Rightarrow 2x=1, \quad x=\frac{1}{2}.$$

Приклад 5.23. Розв'язати рівняння $5^{2x+1} - 5^{x+2} = 250$.

Розв'язання. Позначимо $5^x = y$. Маємо $y^2 - 5y - 50 = 0$. Корені квадратного рівняння: -5 і 10 . Оскільки $y > 0$, то беремо тільки корінь 10 . Тоді $5^x = 10 \Rightarrow x = \frac{1}{\lg 5}$.

Якщо невідома змінна міститься під знаком логарифма або в його основі, то таке рівняння називається логарифмічним. При розв'язанні логарифмічних рівнянь обов'язково потрібно враховувати властивості логарифмічної функції $y = \log_a x$: $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$.

Приклад 5.24. Розв'язати рівняння $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 10) = 2$.

Розв'язання. Для цього рівняння ОДЗ така:
$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x^2 - 5x + 10 > 0, \\ x-1 \neq 1. \end{cases}$$

Розв'яжемо нерівність $x^2 - 5x + 10 > 0$: $D = b^2 - 4ac = 25 - 40 = -15 < 0$. Парабола $y = x^2 - 5x + 10$ не має точок перетину з віссю Ox . Отже, $x^2 - 5x + 10 > 0$ для будь-яких $x \in (-\infty; +\infty)$. Тоді $\begin{cases} x > 1, x \neq 2, \\ -\infty < x < +\infty \end{cases} \Rightarrow x > 1, x \neq 2$. За означенням логарифма $\log_a c = b$ маємо

$$a^b = c \Rightarrow (x-1)^2 = x^2 - 5x + 10 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x^2 - 5x + 10 \Rightarrow 3x = 9, \quad x = 3.$$

Приклад 5.25. Розв'язати рівняння $\log_2(2x+1) - \log_2 x = \log_4 64$.

Розв'язання. Визначимо ОДЗ цього рівняння:
$$\begin{cases} 2x+1 > 0, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2}, \\ x > 0 \end{cases} \Rightarrow x > 0.$$

До лівої частини рівняння застосуємо властивість $\log_2\left(\frac{a}{b}\right) = \log_2 a - \log_2 b$, тобто ліва частина дорівнює логарифму дробу $\log_2\left(\frac{2x+1}{x}\right)$. У правій частині рівняння $\log_4 64 = 3$. Тоді початкове рівняння набуде вигляду $\log_2\left(\frac{2x+1}{x}\right) = 3$. За означенням логарифма $2^3 = \left(\frac{2x+1}{x}\right) \Rightarrow \left(\frac{2x+1}{x}\right) = 8$. Оскільки $x \neq 0$, то $2x+1 = 8x \Rightarrow 6x = 1 \Rightarrow x = 1/6$.

Приклад 5.26. Розв'язати рівняння $\lg(x+3) + \lg x = 1$.

Розв'язання. Для цього рівняння ОДЗ така: $\begin{cases} x > 0, \\ x+3 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x > -3 \end{cases} \Rightarrow x > 0$. До

лівої частини рівняння застосуємо властивість $\lg(a \cdot b) = \lg a + \lg b \Rightarrow \lg[x(x+3)] = 1$.

За означенням десяткового логарифма $x(x+3) = 10$, $x^2 + 3x - 10 = 0$, $x_1 = -5$, $x_2 = 2$.

Урахуємо, що $x > 0$, тоді $x_1 = -5$ не є коренем цього рівняння.

Завдання для самостійної роботи

5.14. Розв'язати рівняння:

- 1) $3^{x-5} = 7$; 2) $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = \frac{1}{64}$; 3) $3^{2x+2} + 3^{2x} = 30$; 4) $2^{2x-3} = 4^{x^2-3x-1}$;
- 5) $3^x \cdot 8^{\frac{x}{x+1}} = 36$; 6) $7^{x+2} - \frac{1}{7}7^{x+1} - 14 \cdot 7^{x-1} + 2 \cdot 7^x = 48$; 7) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$;
- 8) $9^{x^2-1} - 36 \cdot 3^{x^2-3} + 3 = 0$; 9) $\log_{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{x}\right) = 3$; 10) $\log_5(1-2x) = 1$;
- 11) $\log_3 x + \log_9 x + \log_{27} x = 5,5$; 12) $\lg(x-3) + \lg(x+6) = \lg 2 + \lg 5$;
- 13) $\log_{16} x + \log_4 x + \log_2 x = 7$; 14) $\log_x 3 - \log_x 2 = \frac{1}{2}$;
- 15) $2 \log_8(2x) + \log_8(x^2 - 2x + 1) = \frac{4}{3}$; 16) $\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3$.

5.15. Розв'язати рівняння:

- 1) $\frac{2^{5\sqrt[3]{x}}}{2^{\sqrt[3]{x^2+2,6}}} = 8 \cdot \sqrt[5]{4}$; 2) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \dots \cdot 2^{2x-1} = 512$; 3) $\sqrt{3}^{4+\log_{\sqrt{5}} x} = \frac{1}{3}$;
- 4) $3^{\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1} - 3\frac{1}{3}} = 1$; 5) $6^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 2^{x+8}$; 6) $3^{2(2x+5)} \cdot 5^{2(3x+1)} = 15^{5x+6}$;
- 7) $2^{12x-1} - 4^{6x-1} + 8^{4x-1} - 16^{3x-1} = 1280$; 8) $5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} = 56$;
- 9) $5^x \cdot x + 1\sqrt{8^x} = 100$; 10) $3^{2\sqrt{x}} + 3^{2\sqrt{x}-1} - 3^{2\sqrt{x}-2} = 11$;
- 11) $5^{x+2} + 5^{x+1} - 5 \cdot 5^{x-2} + 5 \cdot 5^{x-3} - 5 \cdot 5^{x-4} = 18645$; 12) $4^{x+1} + 4^x = 320$;
- 13) $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$; 14) $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x} + 3^{x-3} = 99 + \sqrt{\left(\frac{1}{9}\right)^{4-x}}$;
- 15) $5^{x-4} - 5^{x-5} = 2 \cdot 5^{x-6} + 2 \cdot 3^{x-4}$; 16) $x-7\sqrt{8^{\frac{x+3}{3}}} - x-3\sqrt{2^{x+8}} = 0$;
- 17) $9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$; 18) $25^{x^3+x-10} + 5^{x^3+x-10} - 2 = 0$; 19) $5^{2x+1} + 5^{x+2} = 250$;
- 20) $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$; 21) $5 \cdot 3^x - \frac{3456}{3^x} = 7$; 22) $\sqrt[3]{64} - 2^{\frac{3x+3}{x}} + 12 = 0$;
- 23) $x + 1\sqrt{32} \cdot x^2 - 1\sqrt{16} - x - 1\sqrt{8} = 0$; 24) $\frac{9}{4} \cdot 4^{2x} - \frac{1}{2} \cdot 4^{4x} = 1$; 25) $2^x + 12 \cdot 2^{-x} = 9,5$;
- 26) $2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} = -288$; 27) $5^{2+4+6+\dots+2x} = 0,04^{-28}$, $x > 0$;
- 28) $3 \cdot 2^x = 4 \cdot x \sqrt{9}$; 29) $2 \cdot 2^3 \cdot 2^5 \cdot \dots \cdot 2^{2x-1} = 512$; 30) $3\sqrt{x-1}\sqrt[3]{3^{3x-1}} = 3^{x-7}\sqrt{27^{x-3}}$;

31) $15^{2x+4} = 3^{3x} \cdot 5^{4x-4}$; 32) $5^{x-4} - 5^{x-5} = 2 \cdot 5^{x-6} + 2 \cdot 3^{x-4}$; 33) $2^{\log_6(-4x)} = \log_3 81$;
34) $\log_x 8 \cdot \sqrt[5]{0,25} = \frac{13}{5}$; 35) $\log_{13} \log_2 \log_3 \frac{2}{1-x} = 0$; 36) $10^{\frac{3}{\lg x}} = 0,001$;
37) $\log_2^2(x-1)^2 - \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = 5$; 38) $\log_2(3-x) + \log_2(1-x) = 3$;
39) $\lg(x-4) + \lg(x+3) = \lg(5x+4)$; 40) $\log_5 \log_4 \log_3 \log_2(2x-1) = 0$;
41) $8^{\log_8^2 x} + x^{\log_8 x} = 16$; 42) $\log_2 \log_5 x^4 - \log_2 \log_5(26x-25) = 1$;
43) $\lg(3x-2) - 2 = \frac{1}{2} \lg(x+2) - \lg 50$; 44) $\lg 3 + \frac{1}{2} \lg(y-22) = \lg \sqrt{y+10}$;
45) $\lg(x-4) + \lg(x-19) = 3 - 2 \lg 2$; 46) $\log_2 \frac{x-2}{x-1} - 1 = \log_2 \frac{3x-7}{3x-1}$;
47) $\log_2(x^2 - 3x - 4) + \log_2(x^2 + 11x + 40) = \log_2(x-4)$;
48) $1 - \lg 2 = \frac{1}{2}(\lg \frac{1}{3} + \lg x + \frac{1}{2} \lg 3)$; 49) $\frac{\lg(35-x^3)}{\lg(5-x)} = 3$; 50) $3^{\log_7(3x+1)} = \log_2 512$;
51) $\log_2(9-2^x) = 3-x$; 52) $\log_{10} \sqrt{y-9} + 0,5 \cdot \lg(2y-1) = 1$;
53) $3^{\lg(x+9) - \lg(x-12)} = 27 \lg 2$; 54) $3^{\lg(x+4,8) + \lg 5} = 27^2 \lg 2$; 55) $(\lg x)^2 - \lg x^3 + 2 = 0$;
56) $\frac{\lg(x-9)}{6} = \frac{3}{\lg(x-9)^2}$; 57) $3 \lg^2(x-1) - 10 \lg(x-1) + 3 = 0$;
58) $\log_5(x-2) + \log_{\sqrt{5}}(x^3-2) + \log_{0,2}(x-2) = 4$; 59) $\frac{\lg 8 - \lg(x-5)}{\lg \sqrt{x+7} - \lg 2} = -1$;
60) $\log_2^2(2x) + \log_2 x - 5 = 0$; 61) $2 \log_x 27 - 3 \log_{27} x = 1$; 62) $x^{\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \lg x} = \sqrt{x}$;
63) $x^{\log_2 x + 2} = 8$; 64) $x^{1+\lg x} = 100$; 65) $\frac{1}{5-4 \lg(x+1)} + \frac{5}{1+4 \lg(x+1)} = 2$;
66) $\log_{x-1} 9 + \log_{(x-1)^2} 9 + \log_{(x-1)^3} 27 + \log_{(x-1)^4} 81 = 5$; 67) $x^{2 \lg^3 x - 1,5 \lg x} = \sqrt{10}$;
68) $x^{3 - \lg \frac{x}{3}} = 900$; 69) $\lg \sqrt{x} = 10x^4$; 70) $x^{\frac{1}{10} + \frac{1}{5} \lg x} = \sqrt{x}$; 71) $\sqrt{x^{\lg \sqrt{x}}} = 10$;
72) $x^{\log_{\sqrt{x}} 2x} = 4$; 73) $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}$; 74) $x^{\log_2 x^3 - \log_2^2 x + 3} - \frac{1}{x} = 0$;
75) $x^{\log_3(3x)} = 9$; 76) $7^{\log_7^2 x} + x^{\log_7 x} = 14$.

5.5. Системи показникових і логарифмічних рівнянь

Розглянемо декілька прикладів розв'язання систем показникових і логарифмічних рівнянь.

Приклад 5.27. Розв'язати систему
$$\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 75, \\ 3^y \cdot 5^x = 45. \end{cases}$$

Розв'язання. Цю систему можна переписати у такому вигляді:

$$\begin{cases} 3^x \cdot 5^y = 3^1 \cdot 5^2, \\ 3^y \cdot 5^x = 3^2 \cdot 5^1. \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 3^y \cdot 5^x = 3^2 \cdot 5^1. \end{cases} \quad (2)$$

Перемноживши рівняння (1) і (2), отримаємо

$$3^{x+y} \cdot 5^{x+y} = 3^3 \cdot 5^3,$$

або

$$(15)^{x+y} = (15)^3 \Rightarrow x + y = 3.$$

Разділивши рівняння (1) на рівняння (2), одержимо

$$3^{x-y} \cdot 5^{y-x} = 3^{-1} \cdot 5^1, \text{ або } \left(\frac{5}{3}\right)^{y-x} = \frac{5}{3} \Rightarrow y - x = 1.$$

Маємо систему, еквівалентну заданій:

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ y - x = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 1, y = 2$.

Зауваження: можна систему розв'язати логарифмуванням.

Приклад 5.28. Розв'язати систему
$$\begin{cases} 3 \cdot 2^x - 2^{x+y} + 2 = 0, \\ 10 \cdot 2^x - 2^{x+y-1} - 16 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Із першого рівняння системи отримаємо

$$2^{x+y} = 3 \cdot 2^x + 2.$$

Підставимо 2^{x+y} в друге рівняння, яке записано у вигляді $20 \cdot 2^x - 2^{x+y} - 32 = 0$.

Отримаємо $17 \cdot 2^x - 34 = 0$. Звідки $x = 1$. Тоді $2 \cdot 2^y = 3 \cdot 2 + 2$ або $2^y = 4 \Rightarrow y = 2$.

Відповідь: $x = 1, y = 2$.

Приклад 5.29. Розв'язати систему
$$\begin{cases} x^{\lg y} = \lg 4, \\ xy = 40. \end{cases}$$

Розв'язання. Прологарифмуємо рівняння за умов: $x > 0; y > 0; x \neq 1; y \neq 1$;

$$\begin{cases} \lg y \cdot \lg x = \lg 4, \\ \lg x + \lg y = \lg 40. \end{cases}$$

Тоді $\lg y$ і $\lg x$ є коренями квадратного рівняння $z^2 - z \cdot \lg 40 + \lg 4 = 0$.
Ураховуючи, що $\lg 40 = 1 + \lg 4$, отримаємо

$$z = \frac{1 + \lg 4 \pm \sqrt{(1 + \lg 4)^2 - 4 \lg 4}}{2} = \frac{1 + \lg 4 \pm (1 - \lg 4)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \lg 4, \\ z_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lg x = \lg 4, \\ \lg y = 1 \end{cases} \quad i \quad \begin{cases} \lg y = \lg 4, \\ \lg x = 1. \end{cases}$$

Відповідь: $x = 4, y = 10$ і $x = 10, y = 4$.

Приклад 5.30. Розв'язати систему
$$\begin{cases} 3^y \cdot \sqrt[3]{64} = 36, \\ 5^y \cdot \sqrt[3]{512} = 200. \end{cases}$$

Розв'язання. Розділимо друге рівняння системи на перше:

$$\left(\frac{5}{3}\right)^y \cdot 2^{\frac{3}{x}} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 \cdot 2 \Rightarrow 2^{\frac{3}{x}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{2-y} \cdot 2 \Rightarrow 2^{\frac{6}{x}} = \left(\frac{5}{3}\right)^{4-2y} \cdot 4.$$

Підставивши в перше рівняння $2^{\frac{6}{x}}$, одержимо

$$3^y \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^{4-2y} \cdot 4 = 36 \text{ або } \left(\frac{27}{25}\right)^{y-2} = 1 \Rightarrow y = 2, x = 3.$$

Відповідь: $x = 3, y = 2$.

Приклад 5.31. Розв'язати систему
$$\begin{cases} \log_x \log_2 \log_x y = 0, \\ \log_y 9 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. ОДЗ: $x > 0, x \neq 1$ $y > 0, y \neq 1$. Із другого рівняння $y = 9$. Підставимо цей вираз у перше рівняння:

$$\log_x \log_2 \log_x 9 = 0 \Rightarrow \log_2 \log_x 9 = 1 \Rightarrow \log_x 9 = 2 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3.$$

Ураховуючи ОДЗ, одержимо $x = 3, y = 9$.

Відповідь: $x = 3, y = 9$.

Приклад 5.32. Розв'язати систему
$$\begin{cases} \log_y x = 2, \\ y^2 + x^2 = 272. \end{cases}$$

Розв'язання. ОДЗ: $x > 0, y > 0, y \neq 1$.

Із першого рівняння $x = y^2$. Підставляючи цей вираз у друге рівняння, отримаємо $x^2 + x - 272 = 0$. Корені рівняння – $x_1 = -17, x_2 = 16$. З урахуванням ОДЗ $x = 16 \Rightarrow y = \sqrt{x} = 4$.

Відповідь: $x = 16, y = 4$.

Завдання для самостійної роботи

5.16. Розв'язати системи рівнянь:

$$1) \begin{cases} 4^x \cdot 5^y = 16, \\ 2 \cdot 3^x = 18; \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x^y = 5x - 4, \\ \log_x 16 = y; \end{cases} \quad 3) \begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 3125, \\ 5^x + 5^y = 150; \end{cases} \quad 4) \begin{cases} \log_y x + \log_x y = 2, \\ x^2 + y = 12; \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll}
5) \begin{cases} 5^{\sqrt[3]{x}} \cdot 2^{\sqrt{y}} = 200, \\ 5^{2\sqrt[3]{x}} + 2^{2\sqrt{y}} = 689; \end{cases} & 6) \begin{cases} \log_{xy}(x-y) = 1, \\ \log_{xy}(x+y) = 0; \end{cases} & 7) \begin{cases} \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[4]{1,5} = 0,25, \\ \sqrt[3]{5} : \sqrt[4]{0,2} = 1; \end{cases} \\
8) \begin{cases} x^{\log_x 2} = \log_3(x+y), \\ x^2 + y^2 = 65; \end{cases} & 9) \begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 18, \\ 4^x \cdot 5^z = 500, \\ 6^y \cdot 7^z = 12348; \end{cases} & 10) \begin{cases} \log_4 x + \log_4 y = 1 + \log_4 9, \\ x + y = 20; \end{cases} \\
11) \begin{cases} x^{\lg y} = 100, \\ \log_y x = 2; \end{cases} & 12) \begin{cases} (3y^2 + 1)\log_3 x = 1, \\ x^{2y^2+10} = 27; \end{cases} & 13) \begin{cases} 2^x \cdot 9^y = 1296, \\ x + y = 6; \end{cases} \\
14) \begin{cases} 9 \cdot 5^x + 7 \cdot 2^{x+y} = 457, \\ 6 \cdot 5^x - 14 \cdot 2^{x+y} = -890; \end{cases} & 15) \begin{cases} 3^x \cdot 7^y = 63, \\ 3^x + 7^y = 16; \end{cases} & 16) \begin{cases} 3^x \cdot \sqrt[4]{64} = 36, \\ 5^x \cdot \sqrt[4]{1728} = 300; \end{cases} \\
17) \begin{cases} 3^x - 5 \cdot 2^y = 4001, \\ 3 \cdot 2^y + 3^x = 8097; \end{cases} & 18) \begin{cases} x^{2y} = 16 + 6x^y, \\ x^{2y} + 5 = yx^y + 5y^2; \end{cases} & 19) \begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(x-y) = 2, \\ 3^x \cdot 2^y = 972; \end{cases} \\
20) \begin{cases} 3^y \cdot 9^x = 81, \\ \lg(x+y)^2 - \lg x = 2 \lg 3; \end{cases} & 21) \begin{cases} \log_2 x + 2 \log_2 y = 3, \\ x^2 + y^4 = 16; \end{cases} & 22) \begin{cases} 3^{\log_3 x} - 2^{\log_4 y} = 77, \\ 3^{\log_3 \sqrt{x}} - 2^{\log_{16} y} = 7; \end{cases} \\
23) \begin{cases} x^{\lg y} = 2, \\ xy = 20; \end{cases} & 24) \begin{cases} 3^x \cdot 2^y = 576, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 4. \end{cases}
\end{array}$$

5.6. Показникові й логарифмічні нерівності

При розв'язанні нерівностей, що містять показникову або логарифмічну функцію, треба пам'ятати властивості цих функцій, а саме те, що $y = a^x$, $y = \log_a x$ при $a > 1$ є монотонно зростаючими, а при $0 < a < 1$ – монотонно спадними. Таким чином, маємо нерівності

$$a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2 \quad (a > 1), \quad a^{x_1} > a^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2 \quad (0 < a < 1).$$

Аналогічно:

$$\log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2 \quad (a > 1); \quad \log_a x_1 > \log_a x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2 \quad (0 < a < 1).$$

При розв'язанні логарифмічних нерівностей також треба пам'ятати, що функція $y = \log_a x$ є визначеною тільки при $x > 0$.

Приклад 5.33 . Розв'язати нерівність $5^{x^2+3x} \leq 125 \cdot 5^x$.

Розв'язання. Оскільки функція $y = 5^x$ – монотонно зростаюча і $125 = 5^3$, то нерівність, задана за умовою, еквівалентна таким нерівностям:

$$5^{x^2+3x} \leq 5^{x+3}, \quad x^2 + 3x \leq x + 3 \Rightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0 \Rightarrow (x+3)(x-1) \leq 0 \Rightarrow -3 \leq x \leq 1$$

(для розв'язання нерівностей застосовано метод інтервалів).

Приклад 5.34 . Розв'язати нерівність $4^x - 2^{x+1} \geq 3$.

Розв'язання. Нехай $2^x = y > 0$. Тоді $y^2 - 2y - 3 \geq 0$. Ураховуючи, що $y > 0$, одержимо $2^x \geq 3 \Rightarrow x \geq \log_2 3$.

Приклад 5.35 . Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_3(x^2-2x-3)} > 1$.

Розв'язання. ОДЗ цієї нерівності така: $x^2 - 2x - 3 > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$.

Оскільки $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ – монотонно спадна функція, то задана нерівність еквівалентна нерівності $\log_3(x^2 - 2x - 3) < 0$. Остання нерівність з урахуванням того, що $y = \log_3 x$ – монотонно зростаюча функція, рівносильна нерівності $x^2 - 2x - 3 < 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 4 < 0$. З урахуванням ОДЗ одержимо відповідь: $x \in (1 - \sqrt{5}, -1) \cup (3, 1 + \sqrt{5})$ (рис. 5.8).

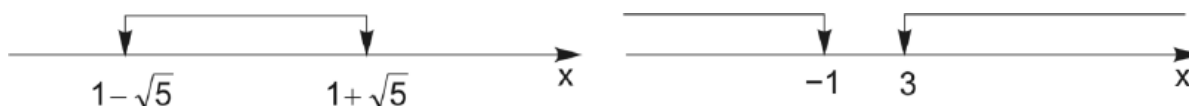


Рис. 5.8

Приклад 5.36. Розв'язати нерівність $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6x-2,5} > 16\sqrt{2}$.

Розв'язання. Зведемо праву частину до основи $\frac{1}{2}$:

$16\sqrt{2} = 2^4 \cdot 2^{\frac{1}{2}} = 2^{4\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4\frac{1}{2}}$. Одержимо $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6x-2,5} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-4\frac{1}{2}}$. Функція $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

є монотонно спадною. Тому якщо $y_1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_1}$, а $y_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2}$ і $y_1 > y_2$, то $x_1 < x_2$. Отже,

з нерівності $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-6x-2,5} > \left(\frac{1}{2}\right)^{-4\frac{1}{2}}$ випливає $x^2 - 6x - 2,5 > -4,5$, або

$x^2 - 6x + 2 > 0$. Розв'яжемо квадратну нерівність:

$$D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 2 = 28 = (\sqrt{28})^2 = (\sqrt{7 \cdot 4})^2 = (2\sqrt{7})^2,$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{6 + 2\sqrt{7}}{2} = 3 + \sqrt{7}; \\ x_2 = \frac{6 - 2\sqrt{7}}{2} = 3 - \sqrt{7}. \end{cases}$$

Таким чином, $(x + (3 + \sqrt{7}))(x + (3 - \sqrt{7})) < 0 \Rightarrow 3 - \sqrt{7} < x < 3 + \sqrt{7}$ (рис. 5.9).

Приклад 5.37. Розв'язати нерівність $\lg(x^2 - 6x + 18) < 1$.

Розв'язання. Урахуємо, що $\lg 10 = 1$. Тоді $\lg(x^2 - 6x + 18) < \lg 10$, а функція $y = \lg x$ монотонно зростає. Це означає, що для будь-яких x_1 і x_2 (при $x_1 < x_2$), які належать області допустимих значень функції, $y_1 < y_2$. Тоді якщо $\lg(x^2 - 6x + 18) < \lg 10$, то $x^2 - 6x + 18 < 10$, $x^2 - 6x + 8 < 0$. Розв'яжемо квадратну нерівність: $D = b^2 - 4ac = 36 - 4 \cdot 8 = 4 = (2)^2$, $x_1 = \frac{6+2}{2} = 4$, $x_2 = \frac{6-2}{2} = 3$. Тоді $(x-2)(x-4) < 0 \Rightarrow x \in (2; 4)$ (рис. 5.10).

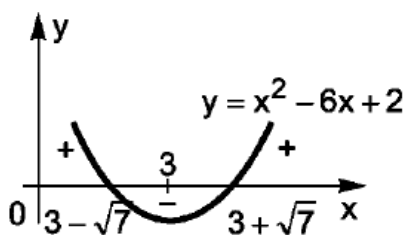


Рис. 5.9

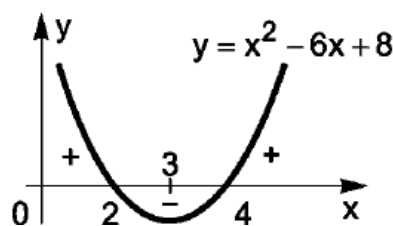


Рис. 5.10

Завдання для самостійної роботи

5.17. Розв'язати нерівності:

- 1) $5^x > 3125$; 2) $\left(\frac{1}{0,125}\right)^x \leq 128$; 3) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \geq 1$; 4) $3^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}+3} > 84$; 5) $2^{\sqrt{x-5}} > \sqrt[5]{8}$;
- 6) $(0,1)^{4x^2-2x-2} \leq 0,1^{2x-3}$; 7) $\log_{1,5} \frac{2x-8}{x-2} < 0$; 8) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{x+1} > -1$;
- 9) $2 \log_8(x-2) - \log_8(x-3) > \frac{2}{3}$; 10) $25^x - 6 \cdot 5^x < -5$; 11) $2^x + 2^{-x} - 3 < 0$;
- 12) $4^{-x+0,5} - 7 \cdot 2^{-x} - 4 < 0$; 13) $\lg(x^2 - 2x - 2) \leq 0$; 14) $\log_5(x^2 - 11x + 43) > 2$;
- 15) $2^{x+3} - 5^x < 7 \cdot 2^{x-2} - 3 \cdot 5^{x-1}$; 16) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{3x-1}{x+2} < 1$; 17) $\log_{\frac{1}{7}}(x^2 + 2x - 1) \leq -1$.

5.18. Розв'язати нерівності :

- 1) $\left(\frac{2}{7}\right)^{2x} \left(\frac{147}{20}\right)^x < \left(\frac{81}{625}\right)^x$; 2) $3^{\frac{x-3}{3x-2}} < \frac{1}{3}$; 3) $\log_{\frac{1}{3}}(5x-1) \geq 0$; 4) $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} > 29$;
- 5) $3^{x-1} > \frac{2-3^x}{3^x-4}$; 6) $2^{|x|} < 1024$; 7) $0,5^{\sqrt[3]{2}} < 0,0625$; 8) $\left(\frac{3}{7}\right)^{\frac{x^2-2x}{x^2}} \geq 1$;
- 9) $(0,3)^{x^2-3x+6} < 0,00243$; 10) $x + \sqrt[3]{3} > 9$; 11) $8^{\sqrt{8^x}} > 4096$;
- 12) $x-3 \sqrt[3]{6^{(x+3)/3}} - x-3 \sqrt[3]{6^{2x-9}} > 0$; 13) $x^2 \cdot 5^x - 5^{2+x} < 0$;

- 14) $4^{x+1} - 16^x < 2 \cdot \log_4 8$; 15) $(\sqrt{3})^{(\sqrt{2})^x} \geq 3$; 16) $3^{x-10} - 2^{x-9} - 3^{x-11} - 2^{x-12} < 0$;
 17) $2^{5x-1} + 2^{5x-2} + 2^{5x-3} - 896 < 0$; 18) $2^{x+2} - 2^{x+3} - 2^{x+4} > 5^{x+1} - 5^{x+2}$;
 19) $3^{\sqrt{x}} + 3^{\sqrt{x}-1} - 3^{\sqrt{x}-2} < 11$; 20) $3^{2x-1} + 3^{2x-2} - 3^{2x-4} \leq 315$;
 21) $6^{2x+3} < 2^{x+7} \cdot 3^{3x-1}$; 22) $\log_{0,5} \frac{x-4}{x+3} \leq -2$; 23) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{3x+1}{x+1} > -1$;
 24) $\log_{0,5 \cdot \sin \frac{\pi}{4}} (4x^2 - 16x + 15) \geq -2$; 25) $\log_{0,3} (3x - 8) > \log_{0,3} (x^2 + 4)$;
 26) $\log_8 (x^2 - 4x + 3) < 1$; 27) $\log_{\frac{1}{2}} \frac{2x^2 - 4x - 6}{4x - 11} \leq -1$;
 28) $\log_{\frac{1}{2}} (5x + 10) < \log_{\frac{1}{2}} (x^2 + 6x + 8)$; 29) $\lg \frac{x+1}{2x-3} \geq 0$; 30) $\log_{\frac{1}{3}} \log_4 (x^2 - 5) > 0$;
 31) $\log_{\pi} (x + 27) - \log_{\pi} (16 - 2x) < \log_{\pi} x$; 32) $\log_{\sin \frac{\pi}{3}} (x^2 - 3x + 2) \geq 2$;
 33) $(0,7)^{2-\frac{x-3}{x-2}} > (0,7)^{\frac{x-2}{x-1}}$; 34) $\log_2 \log_{\frac{1}{2}} (2^x - 4^x) \leq 1$; 35) $x^2 \cdot 3^x - 3^{x+1} \leq 0$.

5.7. Тригонометричні рівняння

Не існує єдиного методу розв'язання тригонометричних рівнянь. Можна лише зазначити, що перетворення тригонометричних виразів має бути спрямовано на те, щоб рівняння набувало стандартного вигляду або «розпадалося» на кілька стандартних (простіших) рівнянь. Наведемо лише кілька методів побудови розв'язків тригонометричних рівнянь, оскільки це буде корисним при подальшому вивченні курсу вищої математики.

1. Введення додаткового аргументу за формулою

$$a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \varphi).$$

Оскільки $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$, то величини $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ і $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ можуть бути косинусом і синусом деякого кута φ . Якщо, наприклад, позначити $\cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, а $\sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, то отримаємо наведену вище формулу.

2. Зведення рівняння до алгебраїчного після заміни тригонометричної функції.

3. Розкладання на множники.

Слід також запам'ятати розв'язки так званих найпростіших тригонометричних рівнянь:

$$\sin x = a, \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad |a| \leq 1;$$

$$\cos x = a, \quad x = \pm \arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad |a| \leq 1;$$

$$\operatorname{tg} x = a, \quad x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{R};$$

$$\operatorname{ctgx} = a, \quad x = \operatorname{arccctga} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

Окрім загальних формул для розв'язання найпростіших тригонометричних рівнянь корисно знати формули розв'язань так званих «окремих випадків» найпростіших тригонометричних рівнянь:

$$\sin x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \sin x = \pm 1, \quad x = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \quad \operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctgx} = 0, \quad x = \pm \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 5.38. Розв'язати рівняння $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. Задано рівняння $\cos x = a$. Його розв'язок
 $- x = \pm \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, або $x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5.39. Розв'язати рівняння $\sin 3x - \sqrt{3} \cos 3x = 2$.

Розв'язання. Якщо розділити обидві частини на 2, то можна записати рівняння у вигляді $\frac{1}{2} \sin 3x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 3x = 1$, або $\cos \frac{\pi}{3} \sin 3x - \sin \frac{\pi}{3} \cos 3x = 1$, $\sin \left(3x - \frac{\pi}{3} \right) = 1$.

Звідси $3x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $x = \frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5.40. Розв'язати рівняння $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x$.

Розв'язання. Розкладемо ліву частину рівняння на множники, використовуючи формулу суми кубів:

$$(\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 1 - \frac{1}{2} \sin 2x,$$

$$(\sin x + \cos x) \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x \right) - \left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x \right) = 0,$$

$$\left(1 - \frac{1}{2} \sin 2x \right) (\sin x + \cos x - 1) = 0.$$

Це рівняння є рівносильним сукупності рівнянь

$$\begin{cases} \sin 2x = 2, \\ \sin x + \cos x = 1. \end{cases}$$

Перше з них розв'язків не має ($\sin 2x \in [-1, 1]$), а до другого застосуємо такі перетворення:

$$\sin x + \cos x = \sqrt{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \sin x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos x \right) = \sqrt{2} \sin \left(x + \frac{\pi}{4} \right).$$

Таким чином,

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad x + \frac{\pi}{4} = (-1)^n \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x = 2\pi m, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k, m \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Приклад 5.41. Розв'язати рівняння $\sin 3x + \cos 2x - \sin x = 0$.

Розв'язання. До лівої частини рівняння застосуємо формулу різниці синусів, а далі отриманий вираз розкладемо на множники. Маємо:

$$2 \sin x \cos 2x + \cos 2x = 0; \quad \cos 2x(2 \sin x + 1) = 0;$$

$$\begin{cases} \cos 2x = 0, \\ \sin x = -\frac{1}{2}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ x = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Приклад 5.41. Розв'язати рівняння $\frac{\sin^4 x - 1}{\cos^4 x} = 1$.

Розв'язання. ОДЗ цього рівняння знаходиться з умови $\cos x \neq 0$, тобто $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Звільнившись від знаменника, отримаємо $\sin^4 x - 1 = \cos^4 x$,

$$(\sin^2 x - \cos^2 x)(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1, \quad \cos 2x = -1, \quad 2x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Остання множина при $k = n$ збігається з множиною $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$, яка не належить ОДЗ. Тому наведене рівняння розв'язків не має.

Приклад 5.43. Розв'язати рівняння $\sin^2 x + \cos x - \frac{1}{4} = 0$.

Розв'язання. Скористаємося основною тригонометричною тотожністю і перепишемо рівняння у вигляді

$$1 - \cos^2 x + \cos x - \frac{1}{4} = 0, \quad 4\cos^2 x - 4\cos x - 3 = 0.$$

Візьмемо $\cos x = t, |t| \leq 1$ і розв'яжемо квадратне рівняння $4t^2 - 4t - 3 = 0$, де $t_1 = -\frac{1}{2}, t_2 = \frac{3}{2}, t_2 > 1$. Оскільки $t_2 > 1$, то рівняння $\cos x = \frac{3}{2}$ розв'язків не має.

Розв'язком рівняння $\cos x = -\frac{1}{2}$, а отже, і всього рівняння є множина

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 5.44. Розв'язати рівняння $4\cos 3x - 3\sin 3x = 0$.

Розв'язання. Оскільки для будь-якого розв'язку цього рівняння $\cos 3x \neq 0$, то розділимо це рівняння на $\cos 3x$. Отримаємо рівняння $\tan 3x = \frac{4}{3}$. Звідси

$$3x = \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \pi n, n \in Z, \text{ або } x = \frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{4}{3} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$$

Приклад 5.45. Розв'язати рівняння $4\sin^2 x + \cos^2 x = \frac{5}{2} \sin 2x$.

Розв'язання. Використовуючи формулу подвійного кута, перепишемо рівняння у вигляді $4\sin^2 x - 5\sin x \cos x + \cos^2 x = 0$, а потім розділимо його на $\cos^2 x \neq 0$. Отримаємо $4\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 1 = 0$. Останнє рівняння є алгебраїчним рівнянням відносно $y = \operatorname{tg} x$, а саме $4y^2 - 5y + 1 = 0$. Розв'язок цього рівняння такий: $y_1 = 1, y_2 = \frac{1}{4}$. Маємо:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x = 1, \\ \operatorname{tg} x = \frac{1}{4}; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z, \\ x = \operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi m, m \in Z; \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} x = 2\pi m, m \in Z, \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z. \end{array} \right.$$

Завдання для самостійної роботи

5.19. Розв'язати найпростіші тригонометричні рівняння:

1) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) $\sin x = -\frac{2}{3}$; 4) $\cos x = -\frac{1}{2}$; 5) $\operatorname{ctg} x = -1$;

6) $\frac{1}{\operatorname{tg} x} = \sqrt{7} - \sqrt{2}$; 7) $\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{7}\right) = -1$; 8) $\operatorname{tg}^2 x = 5$; 9) $\cos^2 2x = 1$;

10) $\cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; 11) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 12) $\operatorname{tg}^2(45^\circ - x) = 1$.

Розв'язати тригонометричні рівняння:

5.20. 1) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$; 2) $\cos x - \sin x = \sqrt{2}$; 3) $5\sin x + 12\cos x = 13$.

5.21. 1) $\cos x(2\cos x + 1) = 0$; 2) $(4\sin^2 x - 3)\sin x = 0$; 3) $\operatorname{tg}^2 2x + 3\operatorname{tg} 2x = 0$.

5.22. 1) $\cos^2 x - 2\cos x = 3$; 2) $4\sin x + 4\cos^2 x = 1$; 3) $6\cos^2 x + 13\sin x = 12$;

4) $3\cos^2 x - 4\cos x - \sin^2 x - 2 = 0$; 5) $\frac{\sqrt{3}}{\cos^2 x} = 4\operatorname{tg} x$; 6) $3\cos 2x = 2\sin^2 2x$;

7) $3 + 2\sin 2x = \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 8) $\cos(10x + 12) + 4\sqrt{2} \sin(5x + 6) = 4$;

9) $\cos 4x + 2\cos^2 x = 1$; 10) $\sqrt{2} \sin 2x + 3(\sin x + \cos x) = 4\sqrt{2}$;

11) $2\sin 2x = 1 + \sin x - \cos x$; 12) $\sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0$.

5.23. 1) $\sin x - \cos x = 0$; 2) $\sin x - \sqrt{3} \cos x = 0$; 3) $\sin 2x = 5\cos 2x$;

4) $2\cos^2 x - \cos x \sin x = 0$; 5) $\sin x(\sin x + \cos x) = 1$; 6) $\frac{1}{\cos x} = 4\sin x + \cos x$;

7) $\sin^2 x + 3\sin x \cos x + 2\cos^2 x = 0$; 8) $2\cos^2 x + 3\sin 2x - 8\sin^2 x = 0$;

9) $\sin^3 x + 4\cos^3 x = 0$; 10) $\cos^2 x + 3\sin^2 x + \sqrt{3} \sin 2x = 1$;

- 11) $\cos^3 2x \sin 2x - 3\sqrt{3} \sin^4 2x = 0$; 12) $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x - 8\cos^2 x = -2$;
 13) $3\cos^2 x + 2\sin x \cos x + 5\sin^2 x = 2$;
 14) $3\sin^2 x + 5\cos^2 x - 2\cos 2x - 4\sin 2x = 0$;
 15) $\sin^5 x - \sin^3 x \cos^2 x + 27\sin^2 x \cos^3 x - 27\cos^5 x = 0$;
 16) $\sin^4 x + \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x + \sin x \cos^3 x + \cos^4 x = 1$.

- 5.24.** 1) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$; 2) $\cos 8x - \cos 6x + \cos 4x - \cos 2x = 0$;
 3) $\cos 9x - \cos 7x + \cos 3x - \cos x = 0$; 4) $\sin x \cos 3x = \sin 5x \cos 7x$;
 5) $\cos 3x \cos 6x = \cos 4x \cos 7x$; 6) $\cos 3x \sin 7x = \cos 2x \sin 8x$;
 7) $4\sin x \sin 2x \sin 3x = \sin 4x$; 8) $\sin 5x + \sin x - 1 = -2\sin^2 x$;
 9) $\cos 5x - \sin 5x = \sin 7x - \cos 7x$; 10) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 1 + \cos x + \cos 2x$;
 11) $\cos 7x + \sin^2 2x = \cos^2 2x - \cos x$; 12) $\sin^7 x \cos^3 x - \cos^7 x \sin^3 x = \cos 2x$;
 13) $\sin x \cos x \cos 2x \cos 8x = \frac{1}{4} \sin 12x$; 14) $\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = \frac{1}{16}$;
 15) $\cos^2 \frac{3}{2}x + \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 2x - \sin^2 4x = 0$.

- 5.25.** 1) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} 3x$; 2) $1 + \operatorname{tg} x = 2\sqrt{2} \sin x$; 3) $\operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} 7x = 1$;
 4) $\cos x + \sin x = \frac{\cos 2x}{1 - \sin 2x}$; 5) $\frac{\operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} 2x \cdot \operatorname{tg} x} = -1$; 6) $8\sin x = \frac{\sqrt{3}}{\cos x} + \frac{1}{\sin x}$;
 7) $\operatorname{tg} 2x \cos 3x + \sin 3x + \sqrt{2} \sin 5x = 0$; 8) $\frac{2}{\sqrt{3}} (\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x) = \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 2$;
 9) $\frac{1 + \sin 2x}{1 - \sin 2x} + 7 \cdot \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} - 8 = 0$; 10) $8\cos x \cos 2x \cos 4x = \frac{\sin 6x}{\sin x}$;
 11) $4(\cos^6 x - \sin^6 x) - 3(\cos^4 x - \sin^4 x) - 2(\cos^2 x - \sin^2 x) + 1 = 0$;
 12) $\sin^2 x \operatorname{tg} x + \cos^2 x \operatorname{ctg} x - \sin 2x = 1 + \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x$; 13) $(\cos 6x - 1) \operatorname{ctg} 3x = \sin 3x$;
 14) $\sec x + \operatorname{cosec} x = 2\sqrt{2}$; 15) $\sqrt{13 - 18\operatorname{tg} x} = 6\operatorname{tg} x - 3$;
 16) $4\sin 3x + 3 = \sqrt{2\sin 3x + 2}$.

- 5.26.** 1) $81^{\sin^2 x} + 81^{\cos^2 x} = 30$; 2) $\cos^4 (\operatorname{arctg} x) + \sin^4 (\operatorname{arctg} x) = \operatorname{cosec}^2 (\operatorname{arctg} x)$;

$$3) \left| 10\sin \frac{x}{2} - 6 + \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \right|^{\sqrt{11x - x^2 - 10}} = 1; \quad 4) \cos 2x + a \sin x = 2a - 7;$$

5) $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx$;

6) $\sin \frac{x}{2} (\sin x + \sin 2x + \dots + \sin 100x) - \frac{1}{2} \sin \frac{101x}{2} = 0$.

5.8. Системи тригонометричних рівнянь

Для розв'язання систем тригонометричних рівнянь використовують такі ж самі способи і методи, що й для розв'язання алгебраїчних систем. Відмінність полягає в тому, що тригонометричні системи мають зазвичай нескінченну множину розв'язків, які залежать від цілочислових параметрів. Розглянемо деякі методи розв'язання систем.

Метод підстановки

Приклад 5.46. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{4}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{1}{6}. \end{cases}$$

Розв'язання. Із першого рівняння знаходимо $y = \frac{\pi}{4} - x$. Після підстановки у друге рівняння системи $\frac{\pi}{4} - x$ замість y отримаємо тригонометричне рівняння відносно x :

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \frac{1}{6}.$$

Ліву частину рівняння перетворимо за формулою $\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$.

Маємо

$$\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) = \operatorname{tg} x \frac{1 - \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x}.$$

Саме рівняння набуває вигляду $6 \operatorname{tg}^2 x - 5 \operatorname{tg} x + 1 = 0$. Звідси знаходимо $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ і $\operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$. Отже, $x_1 = \operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$, $x_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{3} + \pi k, k \in Z$. Відповідні значення y становитимуть

$$y_1 = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{2} - \pi n,$$

$$y_2 = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \frac{1}{3} - \pi k, n, k \in Z.$$

Відповідь:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2} + \pi n, \\ y_1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \pi n; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_2 = \frac{1}{3} + \pi k, \\ y_2 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{3} - \pi k, n, k \in Z. \end{cases}$$

Введення нових змінних

Приклад 5.47. Розв'язати систему рівнянь
$$\begin{cases} 2\sqrt{3} \cos x + 6 \sin y = 3 + 12 \sin^2 x, \\ 4\sqrt{3} \cos x + 2 \sin y = 7. \end{cases}$$

Розв'язання. Позначимо $\cos x = U$, $\sin y = V$. Тоді $\sin^2 x = 1 - U^2$, і цю систему можна переписати у вигляді

$$\begin{cases} 2\sqrt{3}U + 6V = 15 - 12U^2, \\ 4\sqrt{3}U + 2V = 7. \end{cases}$$

Від першого рівняння віднімемо потроєне друге:

$$-10\sqrt{3}U = -6 - 12U^2; \quad 6U^2 - 5\sqrt{3}U + 3 = 0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння, знаходимо $U_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $U_2 = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Далі, підставляючи отримані значення U_1 і U_2 у друге рівняння алгебраїчної системи, знаходимо $V_1 = \frac{1}{2}$, $V_2 = \frac{3}{2}$. Другий розв'язок не належить області значень функції $V = \sin y$, оскільки $|\sin y| \leq 1$. Тому множина розв'язків заданої системи збігається з множиною розв'язків системи

$$\begin{cases} \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}, \\ \sin y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Відповідь:
$$\begin{cases} x = \pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ y = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Зауваження. При запису розв'язків першого рівняння останньої системи слід використовувати параметр n , а для запису розв'язків другого – параметр k . Застосування лише одного параметра n або k призводить до втрати розв'язків.

Застосування тригонометричних тотожностей

Приклад 5.48. Розв'язати систему рівнянь

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = 0,25, \\ \sin y \cdot \cos x = 0,75. \end{cases}$$

Розв'язання. Додамо рівняння системи і віднімемо від першого рівняння друге:

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = 1, \\ \sin x \cdot \cos y - \sin y \cdot \cos x = -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

Ліві частини отриманої системи перетворимо за формулами $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$. Маємо

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 1, \\ \sin(x-y) = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x+y = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, \\ x-y = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Відповідь:
$$\begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2n+k), \\ y = \frac{\pi}{4} - (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}(2n-k), \quad n, k \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Для запису розв'язків системи необхідно врахувати зауваження до прикладу 5.47 цього підрозділу.

Завдання для самостійної роботи

5.27. Розв'язати тригонометричні системи:

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} \cos 4x - \sin 2y = -2, \\ x - y = 2\pi; \end{cases} & 2) \begin{cases} \sin x \cdot \sin y = \frac{1}{4\sqrt{2}}, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = \frac{1}{3}; \end{cases} & 3) \begin{cases} \cos^2 x + \cos^2 y = \frac{3}{4}, \\ x + y = \frac{2\pi}{3}; \end{cases} \\ 4) \begin{cases} \sin^2 x = \cos x \cdot \cos y, \\ \cos^2 x = \sin x \cdot \sin y; \end{cases} & 5) \begin{cases} \sin x + \cos y = 0, \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \frac{1}{2}; \end{cases} & 6) \begin{cases} 4\operatorname{tg} 3y = 3\operatorname{tg} 2x, \\ 2\sin x \cdot \cos(x - y) = \sin y; \end{cases} \\ 7) \begin{cases} \cos x + \cos y = \frac{1}{2}, \\ \sin^2 x + \sin^2 y = \frac{7}{4}; \end{cases} & 8) \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{x}{2} + \operatorname{tg} y = \frac{4}{\sqrt{3}}, \\ \operatorname{ctg} \frac{x}{2} + \operatorname{ctg} y = \frac{4}{\sqrt{3}}; \end{cases} & 9) \begin{cases} \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = \frac{1}{2}, \\ \cos x \cdot \cos y = \frac{1}{4}; \end{cases} \\ 10) \begin{cases} (\cos x)^{\sin y} = (\sin y)^{\cos x}, \\ (\cos x)^{\cos x} = (\sin y)^{\sin y}. \end{cases} & & \end{array}$$

5.9. Тригонометричні нерівності

Розв'язання тригонометричних нерівностей зводиться зазвичай до розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей вигляду $\sin x > a$, $\operatorname{tg} x < b$ тощо, а також до розв'язання сукупностей або систем тригонометричних нерівностей.

Для розв'язання найпростіших тригонометричних нерівностей зручно користуватися тригонометричним колом. Множину значень змінної величини, яка задовольняє найпростішу нерівність, зображують на тригонометричному колі у вигляді однієї або кількох дуг. При цьому зазначимо, що якщо точка кола відповідає числу x , то вона відповідає і всім числам вигляду $x + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.

Приклад 5.49. Розв'язати нерівність $\cos 2x \leq -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Розв'язання. За означенням $\cos 2x$ – це абсциса точки на тригонометричному колі (рис. 5.11), яка відповідає числу $2x$. Відкладемо на колі точки, які мають абсциси, що дорівнюють $(-\frac{\sqrt{3}}{2})$. Це точки $A(\frac{5\pi}{6})$ і $B(\frac{7\pi}{6})$. Геометричним розв'язком наведеної нерівності буде замкнена дуга AmB тому, що

$$\frac{5\pi}{6} + 2\pi n \leq 2x \leq \frac{7\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad \frac{5\pi}{12} + \pi n \leq x \leq \frac{7\pi}{12} + \pi n, n \in \mathbb{Z},$$

або

$$x \in \left[\frac{5\pi}{12} + \pi n, \frac{7\pi}{12} + \pi n \right], n \in \mathbb{Z}.$$

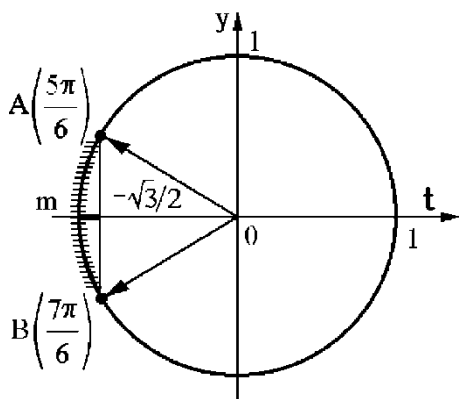


Рис. 5.11

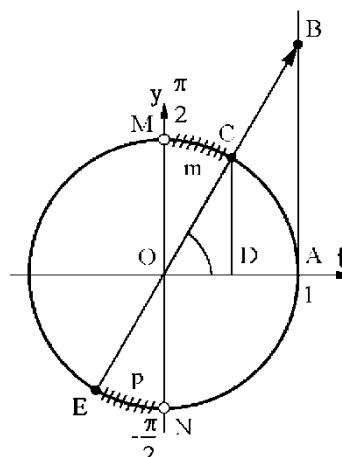


Рис. 5.12

Приклад 5.50. Розв'язати нерівність $\operatorname{tg} x > 2$.

Розв'язання. Функція $\operatorname{tg} x$ не визначена в точках M і N при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ (рис. 5.12). Проведемо вісь тангенсів AB перпендикулярно до осі абсцис ($|AB| = 2$). Промінь OB перетинає одиничне коло в точці C ($\operatorname{arctg} 2$):

$$\left(\frac{|CD|}{|OD|} = \frac{|AB|}{|OA|} = \operatorname{tg} x = 2 \right).$$

Функція $y = \operatorname{tg} x$ монотонно зростає при $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right)$, тому нерівність $\operatorname{tg} x > 2$

буде виконуватися для всіх точок відкритої дуги CmM . Оскільки головний період функції $\operatorname{tg} x$ дорівнює π , то наведена нерівність буде виконуватися для всіх точок дуги EpN .

Складемо аналітичний запис указаних дуг:

$$\operatorname{arctg} 2 + \pi n < x < \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \left(\operatorname{arctg} 2 + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n \right), n \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 5.51. Розв'язати нерівність $\sin 2x > \cos x$.

Розв'язання. Перепишемо нерівність у вигляді

$$2\sin x \cos x - \cos x > 0, \quad \cos x(2\sin x - 1) > 0.$$

Остання нерівність рівносильна системам нерівностей

$$\begin{cases} \cos x > 0, \\ \sin x > \frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{і} \quad \begin{cases} \cos x < 0, \\ \sin x < \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Геометричні розв'язки цих систем подано на рис. 5.13 і 5.14 відповідно. Це будуть дуги AmC і FpM . Об'єднуючи ці дуги, запишемо їх аналітично:

$$x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n \right) \cup \left(\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \right), \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Приклад 5.52. Розв'язати нерівність $\sin^2 x - \sin 2x - 3\cos^2 x > 0$.

Розв'язання. Запропоновану тригонометричну нерівність перетворимо на алгебраїчну нерівність відносно величини $y = \operatorname{tg} x$:

$$\sin^2 x - 2 \sin x \cdot \cos x - 3 \cos^2 x > 0 \mid : \cos^2 x > 0,$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 2 \operatorname{tg} x - 3 > 0, \quad y^2 - 2y - 3 > 0.$$

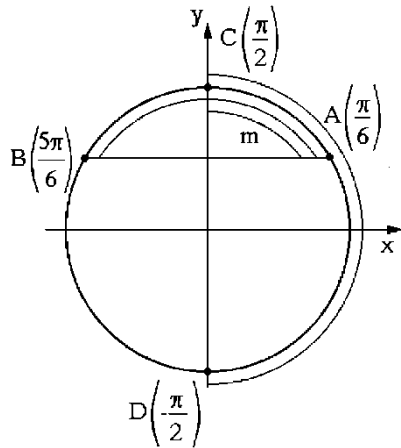


Рис. 5.13

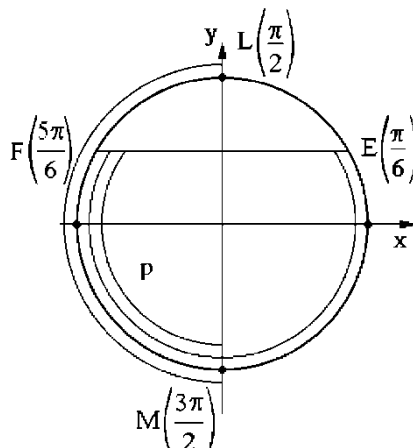


Рис. 5.14

Розв'язком останньої нерівності є сукупність множин

$$\begin{cases} y < -1, \\ y > 3, \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} \operatorname{tg} x < -1, \\ \operatorname{tg} x > 3. \end{cases}$$

Геометричні розв'язки тригонометричних нерівностей зображено на рис. 5.15 і 5.16. Це дуги DmC, EpF, SpR і PmQ.

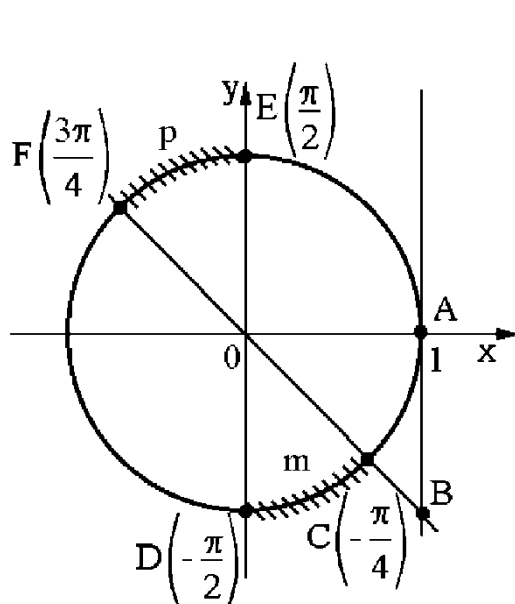


Рис. 5.15

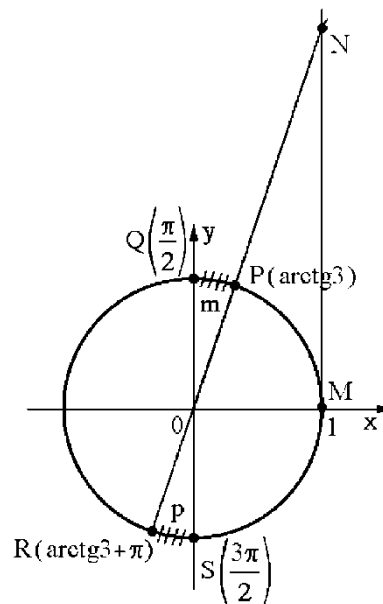


Рис. 5.16

Аналітичним розв'язком наведеної нерівності буде множина

$$x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, -\frac{\pi}{4} + \pi n \right) \cup \left(\arctg 3 + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k \right), \quad n, k \in \mathbb{Z}.$$

Завдання для самостійної роботи

Розв'язати тригонометричні нерівності:

5.28. 1) $\sin x \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\cos x \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $\operatorname{tg} x \leq 1$; 4) $\operatorname{ctg} x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$; 5) $\sin(3x+1) < \frac{1}{2}$.

5.29. 1) $2\sin^2 x + \sin x > 0$; 2) $\sin x + \cos x + \sin 3x + \cos 3x > 0$;

3) $\sin x + \cos x < \sqrt{2}$; 4) $3\sin^2 x + 2\cos x + 4\cos^2 x > 0$; 5) $\cos^2 x + 2\cos x < 0$;

6) $\sin 2x < 1 + \cos x - \sin x$; 7) $2\sin^2 \frac{x}{2} + \cos^2 x < 1$; 8) $\operatorname{tg} x + \sin 2x < 2$;

9) $\sin^2 x \cos x + \sin x \cdot \cos^2 x < \frac{1}{\sqrt{2}}$; 10) $\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x - 7\cos^2 x < 2$.

5.30. 1) $|\cos x| + 3\cos x < 1$; 2) $|\sin x| \cos x > \frac{1}{4}$; 3) $\left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| < 1$;

4) $\arcsin x - 2\arccos x > \frac{\pi}{3}$; 5) $\sqrt{1-2\sin x} \geq \sin x + 1$.

5.10. Рівняння, нерівності й системи з параметрами

У цьому підрозділі розглянемо рівняння, нерівності й системи, які містять так звані параметри. У таких задачах мають місце два види символів: невідомі, або змінні (зазвичай позначають буквами $x, y, z, \dots$), і параметри ($a, b, c, \dots$). Можна сказати, що параметр – це змінна, значення якої вважається фіксованим, і кожне значення параметра визначає відносно заданого невідомого відповідне рівняння (нерівність, систему). Інакше кажучи, рівняння з параметром фактично є сім'єю рівнянь, які розглядаємо при фіксованому значенні параметра. Під час розв'язання рівнянь, нерівностей або систем з параметрами використовують вже відомі методи розв'язання лінійних, квадратних, раціональних, ірраціональних, тригонометричних, показникових, логарифмічних та інших видів рівнянь і нерівностей. Головне, що треба пам'ятати під час розв'язання задач з параметрами: необхідно обережно поводитись з фіксованим, але невідомим числом. Зазначимо, що важливим етапом розв'язання задач з параметром є запис відповіді. Потрібно отримані під час розв'язання результати зібрати воедино. І тут дуже важливо врахувати всі можливі значення параметрів і відобразити у відповіді всі етапи розв'язання.

Крім аналітичних методів розв'язання задач з параметрами існує досить ефективний графічний спосіб. Нагадаємо два характерних методи.

Перший метод. На площині (x, y) розглядається сім'я кривих, що залежать від значення параметра. Потім у цій сім'ї виділяється множина кривих, для яких є характерною певна властивість. При цьому досить часто діють таким чином: вивчають, як переміщується крива сім'ї за умови зміни параметра, і знаходять граничні значення параметра, що розділяють множину значень параметра, яким відповідають криві з певною властивістю.

Другий метод. Розглядається площина (x, a) , на якій позначено множину точок, координати яких задовольняють рівнянню або нерівності. Після цього, проводячи прямі, паралельні осі x , отримують розв'язки цього рівняння або нерівності при відповідному значенні параметра.

Розглянемо декілька прикладів розв'язання рівнянь, нерівностей і систем з параметрами різних типів.

Приклад 5.53. Розв'язати рівняння $(a^2 - 1) \cdot x = a^2 + 3a - 4$.

Розв'язання

Подано рівняння в такому вигляді: $(a - 1)(a + 1) \cdot x = (a - 1)(a + 4)$.

Якщо $a = 1$, то рівняння має вигляд $0 \cdot x = 0$, для якого розв'язком є будь-яке дійсне число x .

Якщо $a = -1$, то рівняння має вигляд $0 \cdot x = -6$, яке не має коренів.

Якщо $a \neq 1$ і $a \neq -1$, тобто $a^2 - 1 \neq 0$, то $x = \frac{a^2 + 3a - 4}{a^2 - 1}$, $x = \frac{(a - 1)(a + 4)}{(a - 1)(a + 1)}$, $x = \frac{a + 4}{a + 1}$.

Відповідь: $x = \frac{a + 4}{a + 1}$, якщо $|a| \neq 1$;

x – будь-яке дійсне число, якщо $a = 1$;
коренів немає, якщо $a = -1$.

Приклад 5.54. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{3x^2 + 5 - ax}{3x - a} = \frac{3 + ax^2 - 4x}{ax - 4}$ має додатні розв'язки?

Розв'язання

Розв'яжемо систему $\begin{cases} \frac{3x^2 + 5 - ax}{3x - a} = \frac{3 + ax^2 - 4x}{ax - 4}, \\ x > 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} (3x^2 + 5 - ax)(ax - 4) = (3 + ax^2 - 4x)(3x - a), \\ x > 0, \\ x \neq \frac{a}{3}, x \neq \frac{4}{a}. \end{cases}$$

Після перетворення першого рівняння отримаємо:

$$\begin{cases} x(5a - 9) = 20 - 3a, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{a}{3}, \\ x \neq \frac{4}{a}; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{20 - 3a}{5a - 9}, \\ x > 0, \\ x \neq \frac{a}{3}, \\ x \neq \frac{4}{a}; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{20 - 3a}{5a - 9} > 0, \\ \frac{20 - 3a}{5a - 9} \neq \frac{a}{3}, \\ \frac{20 - 3a}{5a - 9} \neq \frac{4}{a}; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 6\frac{2}{3}, \\ a > 1,8, \\ a \neq \pm\sqrt{12}. \end{cases}$$

З останньої системи $a \in (1,8; 2\sqrt{3}) \cup \left(2\sqrt{3}; 6\frac{2}{3}\right)$.

Відповідь: при $a \in (1,8; 2\sqrt{3}) \cup \left(2\sqrt{3}; 6\frac{2}{3}\right)$.

Приклад 5.55. Скільки розв'язків має рівняння $\sqrt{x - 2}(x^2 - (5 + a)x + 5a) = 0$ залежно від значення параметра a ?

Розв'язання

Це рівняння є рівносильним системі
$$\begin{cases} x-2 \geq 0, \\ \sqrt{x-2} = 0, \\ x^2 - (5+a)x + 5a = 0. \end{cases}$$

Після розв'язання дістанемо
$$\begin{cases} x \geq 2, \\ \begin{cases} x = 2, \\ x = 5, \\ x = a. \end{cases} \end{cases}$$
 Очевидно, що при $a > 2$ і $a \neq 5$ рівняння

має три розв'язки, а при $a \leq 2$ або $a = 5$ – два.

Відповідь: два розв'язки, якщо $a \in (-\infty; 2] \cup \{5\}$;

три розв'язки, якщо $a \in (2; 5) \cup (5; +\infty)$.

Приклад 5.56. При яких значеннях параметра a рівняння $x^2 + (2a-1)x + a^2 - 3a = 0$ має два різних додатних корені?

Розв'язання

Для того, щоб квадратне рівняння мало два різних дійсних корені, необхідно, щоб дискримінант $D = (2a-1)^2 - 4(a^2 - 3a) = 8a + 1 > 0$.

За теоремою Вієта
$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 - 2a, \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 - 3a. \end{cases}$$

Таким чином, маємо систему нерівностей:

$$\begin{cases} 8a + 1 > 0, \\ 1 - 2a > 0, \\ a^2 - 3a > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -\frac{1}{8}, \\ a < \frac{1}{2}, \\ a(a-3) > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a > -\frac{1}{8}, \\ a < \frac{1}{2}, \\ \begin{cases} a > 3, \\ a < 0; \end{cases} \end{cases} \Rightarrow -\frac{1}{8} < a < 0,$$

Відповідь: рівняння має два різних додатних корені, якщо $a \in \left(-\frac{1}{8}; 0\right)$.

Під час розв'язання квадратних рівнянь з параметрами часто користуються умовами розташування його коренів.

Нехай $f(x) = ax^2 + bx + c$ – деякий квадратний тричлен, x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) – його корені, m, n – задані дійсні числа. Тоді:

1. Для того, щоб обидва корені були меншими від m , необхідно й достатньо

виконання умов
$$\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} < m, \text{ (рис. 5.17).} \\ af(m) > 0 \end{cases}$$

2. Для того, щоб один із коренів був меншим від m , необхідно й достатньо

виконання умов
$$\begin{cases} D > 0, \\ af(m) < 0 \end{cases} \text{ (рис. 5.18).}$$

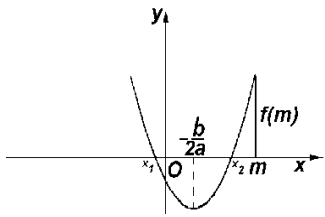


Рис. 5.17

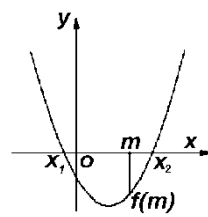
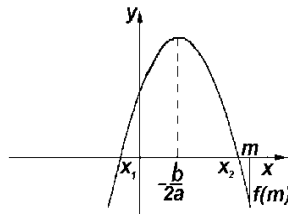
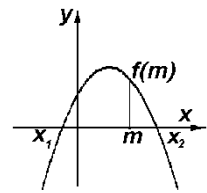


Рис. 5.18



3. Для того, щоб обидва корені були більшими від m , необхідно й достатньо виконання умов $\begin{cases} D \geq 0, \\ -\frac{b}{2a} > m, \\ af(m) > 0 \end{cases}$ (рис. 5.19).

4. Для того, щоб обидва корені були більшими від m , але меншими від n ($m < n$), необхідно й достатньо виконання умов $\begin{cases} D \geq 0, \\ m < -\frac{b}{2a} < n, \\ af(m) > 0, \\ af(n) > 0 \end{cases}$ (рис. 5.20).

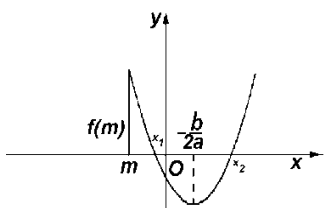


Рис. 5.19

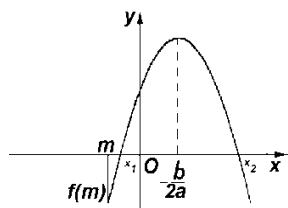
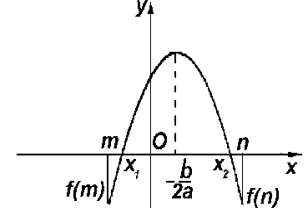
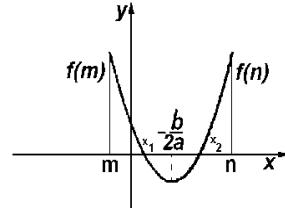


Рис. 5.20



5. Для того, щоб тільки більший корінь належав інтервалу $(m; n)$ ($m < n$), необхідно й достатньо виконання умов $\begin{cases} D > 0, \\ af(m) < 0, \\ af(n) > 0 \end{cases}$ (рис. 5.21).

6. Для того, щоб тільки менший корінь належав інтервалу $(m; n)$ ($m < n$), необхідно й достатньо виконання умов $\begin{cases} D > 0, \\ af(m) > 0, \\ af(n) < 0 \end{cases}$ (рис. 5.22).

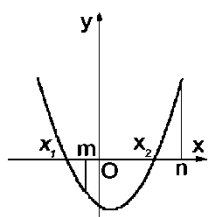


Рис. 5.21

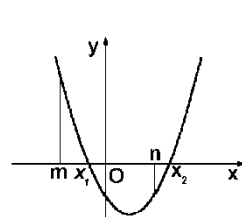
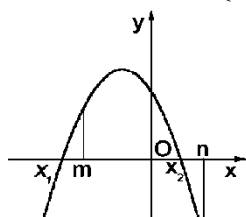
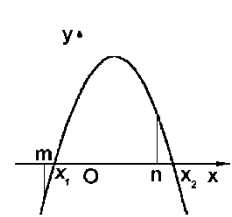


Рис. 5.22



7. Для того, щоб один із коренів був меншим від m , а другий – більшим від n

($m < n$), необхідно й достатньо виконання умов $\begin{cases} D > 0, \\ af(m) < 0, \\ af(n) < 0 \end{cases}$ (рис. 5.23).

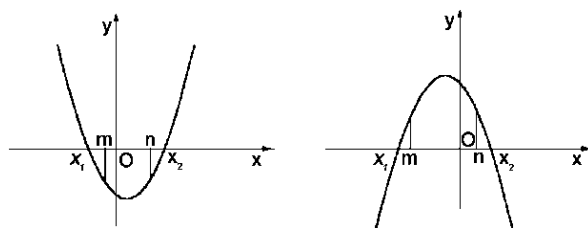


Рис. 5.23

Приклад 5.57. При яких значеннях a корені квадратного рівняння $(2-a)x^2 - 3ax + 2a = 0$ є більшими від $\frac{1}{2}$?

Розв'язання

Для того, щоб це рівняння було квадратним, має виконуватись умова $a \neq 2$. Згідно з третьою умовою розташування коренів маємо таку систему:

$$\begin{cases} 9a^2 - 8a(2-a) \geq 0, \\ \frac{3a}{2(2-a)} > \frac{1}{2}, \\ (2-a)\left((2-a) \cdot \frac{1}{4} - \frac{3a}{2} + 2a\right) > 0. \end{cases}$$

Розв'яжемо цю систему: $\begin{cases} a(17a-16) \geq 0, \\ \frac{2a-1}{a-2} < 0, \\ (a-2)(a+2) < 0; \end{cases} \begin{cases} a \in (-\infty, 0] \cup [16/17, \infty), \\ \frac{1}{2} < a < 2, \\ -2 < a < 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{16}{17} \leq a < 2.$

Відповідь: при $a \in \left[\frac{16}{17}, 2\right)$ корені рівняння є більшими від $\frac{1}{2}$.

Приклад 5.58. При яких раціональних значеннях параметрів a і b один із коренів рівняння $x^3 + ax^2 + bx - 17 = 0$ дорівнює $\sqrt{2} - 1$?

Розв'язання

Оскільки a і b – раціональні числа, а $x_1 = -1 + \sqrt{2}$ – корінь рівняння, то $x_2 = -1 - \sqrt{2}$ також є коренем цього рівняння.

За теоремою Вієта

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -a, \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 17; \end{cases} \begin{cases} -1 + \sqrt{2} + (-1 - \sqrt{2}) + x_3 = -a, \\ (-1 + \sqrt{2}) \cdot (-1 - \sqrt{2}) \cdot x_3 = 17; \end{cases} \begin{cases} -2 + x_3 = -a, \\ (-1) \cdot x_3 = 17; \end{cases} \begin{cases} x_3 = 2 - a, \\ x_3 = -17; \end{cases} \quad 2 - a = -17;$$

$a = 19$.

Уважаючи те, що $x_3 = -17$ – корінь рівняння $x^3 + ax^2 + bx - 17 = 0$, підстановкою $(-17)^3 + 19(-17)^2 + b(-17) - 17 = 0$ отримаємо $b = 33$.

Відповідь: $a = 19$, $b = 33$.

Приклад 5.59. Знайти всі значення параметра a , при яких рівняння $|x+1| + |x-a| = 3$ має безліч розв'язків.

Розв'язання

Розглянемо декілька способів розв'язання цього рівняння.

Спосіб 1 (аналітичний)

I. $a \leq -1$

$x+1$	-	-	+
$x-a$	-	+	+
	a	-1	x

$$1. \begin{cases} x < a, \\ -x-1-x+a=3; \end{cases} \begin{cases} x < a, \\ x = \frac{a-4}{2}. \end{cases}$$

Якщо $a < -4$, то рівняння не має коренів, якщо $-4 < a \leq -1$, то рівняння має один корінь.

$$2. \begin{cases} a \leq x \leq -1, \\ -x-1+x-a=3; \end{cases} \begin{cases} a \leq x \leq -1, \\ a = -4. \end{cases}$$

У цьому випадку рівняння має безліч розв'язків: $[-4; -1]$.

$$3. \begin{cases} x > -1, \\ x+1+x-a=3; \end{cases} \begin{cases} x > -1, \\ x = \frac{2+a}{2}. \end{cases}$$

Рівняння має не більш ніж один корінь.

II. $a > -1$

$x+1$	-	+	+
$x-a$	-	-	+
	-1	a	x

$$1. \begin{cases} x < -1, \\ -x-1-x+a=3; \end{cases} \begin{cases} x < -1, \\ x = \frac{a-4}{2}. \end{cases}$$

Рівняння має не більш ніж один корінь.

$$2. \begin{cases} a \leq x \leq -1, \\ x+1-x+a=3; \end{cases} \begin{cases} a \leq x \leq -1, \\ a = 2. \end{cases}$$

Рівняння має безліч розв'язків: $[-1; 2]$.

$$3. \begin{cases} x > a, \\ x+1+x-a=3; \end{cases} \begin{cases} x > a, \\ x = \frac{2+a}{2}. \end{cases}$$

Рівняння має не більш ніж один корінь.

Спосіб 2 (графічний)

Перепишемо рівняння $|x+1| + |x-a| = 3$ у вигляді $|x-a| = 3 - |x+1|$. Побудуємо в одній системі координат графіки функцій $y = 3 - |x+1|$ і $y = |x-a|$ (рис. 5.24). Очевидно, що графіки цих функцій будуть мати безліч спільних точок, якщо $a = -4$ або $a = 2$.

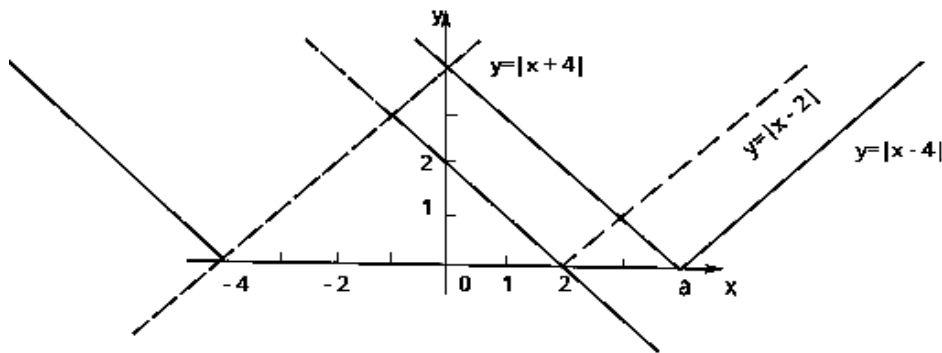


Рис. 5.24

Спосіб 3

Як відомо, рівняння вигляду $|x - m| + |x - n| = p$ має безліч розв'язків, якщо $|m - n| = p$.

Для наведеного рівняння $|-1 - a| = 3$, тобто $a + 1 = 3$ або $a + 1 = -3$, звідки одержимо $a = 2$ або $a = -4$.

Відповідь: рівняння має безліч коренів при $a = -4$ або $a = 2$.

Приклад 5.60. Розв'язати рівняння $\sqrt{a - \sqrt{x + a}} = x$.

Розв'язання

Це рівняння є еквівалентним такій системі:

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ a - \sqrt{x + a} \geq 0, \\ a - \sqrt{x + a} = x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ a - \sqrt{x + a} = x^2; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ a - x^2 = \sqrt{x + a}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ a - x^2 \geq 0, \\ x + a \geq 0, \\ (a - x^2)^2 = x + a; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0, \\ a - x^2 \geq 0, \\ a^2 - 2ax^2 + x^4 = x + a. \end{cases}$$

Розв'яжемо останнє рівняння відносно a :

$$a^2 - 2ax^2 + x^4 = x + a \Leftrightarrow a^2 - a(2x^2 + 1) + x^4 - x = 0.$$

Отримаємо $a = x^2 + x + 1$ або $a = x^2 - x$.

У системі координат (x, a) побудуємо графіки функцій $a = x^2$, $a = x^2 - x$, $a = x^2 + x + 1$. Виділимо штрихуванням область, яка задовольняє систему $\begin{cases} x \geq 0, \\ a - x^2 \geq 0 \end{cases}$ (рис. 5.25).

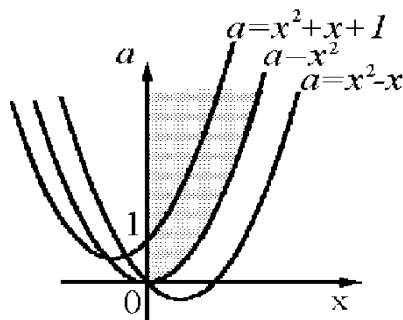


Рис. 5.25

Розв'язком цього рівняння є такі точки (x, a) парабол $a = x^2 - x$ і $a = x^2 + x + 1$, які належать заштрихованій області. Іншими словами, якщо $a = 0$, то $x = 0$, якщо $a \geq 1$, то, розв'язуючи рівняння $a = x^2 + x + 1$ відносно x , отримаємо $x_1 = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$, $x_2 = \frac{-1 - \sqrt{4a - 3}}{2}$, але x_2 відповідає лівій частині параболи, яка не належить заштрихованій області. Для інших значень параметра a рівняння коренів не має.

Відповідь: коренів немає, якщо $a < 0$ і $0 < a < 1$; $x = 0$, якщо $a = 0$; $x = \frac{-1 + \sqrt{4a - 3}}{2}$, якщо $a \geq 1$.

Приклад 5.61. Знайти всі значення параметра a , при яких існує єдина пара (x, y) , яка задовольняє рівнянню $2^{\frac{1}{2}a+1} x^2 - x^4 = y^2 - 2\sqrt{a}y + 6$.

Розв'язання

Виділивши повні квадрати в лівій і правій частинах рівняння, отримаємо

$$-\left(x^2 - 2^{\frac{a}{2}}\right)^2 + 2^a = (y - \sqrt{a})^2 + 6 - a.$$

Зазначимо, що функція від x у лівій частині рівняння обмежена зверху, найбільше значення дорівнює 2^a , а функція від y в правій частині обмежена знизу, найменше значення якої дорівнює $6 - a$.

Зрозуміло, що для існування єдиної пари (x, y) , яка задовольняє цьому рівнянню, необхідно й достатньо, щоб виконувалася рівність $2^a = 6 - a$, в лівій частині якої зростаюча функція, а в правій – спадна. Тому остання рівність виконується тільки при єдиному значенні $a = 2$.

Відповідь: $a = 2$.

Приклад 5.62. Розв'язати нерівність $(a - 2)x^2 - x - 1 \geq 0$.

Розв'язання

Якщо $a = 2$, то нерівність має вигляд $-x - 1 \geq 0$, звідки $x \leq -1$.

Розглянемо випадок, коли $a \neq 2$. Тоді маємо квадратне рівняння, для якого $D = 1 + 4(a - 2) = 4a - 7$.

Якщо $a < \frac{7}{4}$, то $D < 0$ і $a - 2 < 0$, і ця нерівність не має розв'язків.

Якщо $a = \frac{7}{4}$, то $D = 0$ і $a - 2 < 0$, і нерівність має тільки один розв'язок

$$x = \frac{1}{2(a - 2)} = -2.$$

Якщо $\frac{7}{4} < a < 2$, то $D > 0$ і $a - 2 < 0$, і розв'язком нерівності є $x \in [x_1; x_2]$, де

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{4a - 7}}{2(a - 2)}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{4a - 7}}{2(a - 2)}.$$

Якщо $a > 2$, то $D > 0$ і $a - 2 > 0$, і розв'язком нерівності є $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$, де

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{4a - 7}}{2(a - 2)}, \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{4a - 7}}{2(a - 2)}.$$

Відповідь: розв'язків немає, якщо $a < \frac{7}{4}$;

$$x = -2, \text{ якщо } a = \frac{7}{4};$$

$$x \in \left[\frac{1 - \sqrt{4a - 7}}{2(a - 2)}; \frac{1 + \sqrt{4a - 7}}{2(a - 2)} \right], \text{ якщо } \frac{7}{4} < a < 2;$$

$$x \in (-\infty; -1], \text{ якщо } a = 2;$$

$$x \in \left(-\infty; \frac{1 - \sqrt{4a - 7}}{2(a - 2)} \right] \cup \left[\frac{1 + \sqrt{4a - 7}}{2(a - 2)}; +\infty \right), \text{ якщо } a > 2.$$

Приклад 5.63. Розв'язати нерівність $\sqrt{2x + a} \geq x$.

Розв'язання

Ця нерівність є рівносильною сукупності систем

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ 2x + a \geq x^2, \end{cases} \quad \begin{cases} x < 0, \\ 2x + a \geq 0. \end{cases}$$

На площині (x, a) побудуємо графіки функцій $a = x^2 - 2x$ і $a = -2x$ (рис. 5.26). Важливо знати взаємне розташування параболи і прямої. Знайдемо точки їх перетину, розв'язавши рівняння $x^2 - 2x = -2x$. Після розв'язання отримаємо $x = 0$, тобто парабола і пряма дотикаються в точці $(0, 0)$.

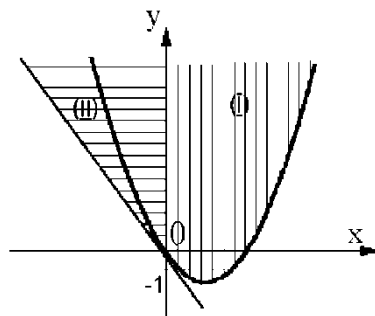


Рис. 5.26

Для системи $\begin{cases} x < 0, \\ a \geq -2x \end{cases}$ заштриховано область (II), для системи $\begin{cases} x \geq 0, \\ a \geq x^2 - 2x \end{cases}$ —

область (I). Вершина параболи знаходиться в точці $(1, -1)$. Тоді якщо $a < -1$, то розв'язків немає; якщо $-1 \leq a \leq 0$, то заштрихована область відносно x обмежена лівою і правою вітками параболи, тобто $1 - \sqrt{a + 1} \leq x \leq 1 + \sqrt{a + 1}$; якщо $a > 0$, то заштрихована область відносно x обмежена прямою і правою віткою параболи, тобто $-\frac{a}{2} \leq x \leq 1 + \sqrt{a + 1}$.

Відповідь: розв'язків немає, якщо $a < -1$;

$$x \in [1 - \sqrt{a + 1}; 1 + \sqrt{a + 1}], \text{ якщо } -1 \leq a \leq 0;$$

$$x \in \left[-\frac{a}{2}; 1 + \sqrt{a + 1} \right], \text{ якщо } a > 0.$$

Приклад 5.64. Розв'язати нерівність $\log_a (x-1) + \log_a x > 2$.

Розв'язання

Ця нерівність є рівносильною системі
$$\begin{cases} x-1 > 0, \\ x > 0, \\ \log_a (x^2 - x) > 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ \log_a (x^2 - x) > 2. \end{cases}$$

Якщо $a > 1$, то система набуває вигляду
$$\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - x - a^2 > 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ \begin{cases} x > \frac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}, \\ x < \frac{1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2}, \end{cases} \end{cases}$$

звідки $x \in \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}; +\infty \right)$.

Якщо $0 < a < 1$, то маємо систему
$$\begin{cases} x > 1, \\ x^2 - x - a^2 < 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x > 1, \\ \begin{cases} x < \frac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}, \\ x > \frac{1 - \sqrt{1 + 4a^2}}{2}, \end{cases} \end{cases} \quad \text{звідки}$$

$x \in \left(1; \frac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2} \right)$.

Відповідь: система не має розв'язків, якщо $a \leq 0$ і $a = 1$;

$x \in \left(1; \frac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2} \right)$, якщо $0 < a < 1$;

$x \in \left(\frac{1 + \sqrt{1 + 4a^2}}{2}; +\infty \right)$, якщо $a > 1$.

Приклад 5.65. Знайти всі значення параметра a , при яких нерівність $|3 \sin^2 x + 2a \sin x \cos x + \cos^2 x + a| \leq 3$ виконується для будь-яких значень x .

Розв'язання

Спочатку виконаємо перетворення підмодульного виразу:
 $|a \sin 2x - \cos 2x + 2 + a| \leq 3$.

Далі для перетворення застосуємо метод допоміжного кута:

$$\left| \sqrt{1 + a^2} \left(\frac{a}{\sqrt{1 + a^2}} \sin 2x - \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \cos 2x \right) + 2 + a \right| \leq 3, \quad \left| \sqrt{1 + a^2} \sin(2x - \varphi) + 2 + a \right| \leq 3,$$

де $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{1 + a^2}}$ (існує для будь-якого a).

Оскільки остання нерівність повинна виконуватися для будь-якого значення x , то найбільше значення виразу $\left| \sqrt{1 + a^2} \sin(2x - \varphi) + 2 + a \right|$ має бути не більшим за 3.

Найбільше значення вираз набуває при $\sin(2x - \varphi) = 1$. Тоді маємо нерівність $|\sqrt{1+a^2} + 2 + a| \leq 3$, після розв'язання якої отримаємо $a \in [-2, 4; 0]$.

Відповідь: $a \in [-2, 4; 0]$.

Приклад 5.66. При яких значеннях параметра a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ |x| + y = a \end{cases}$ має два розв'язки?

Розв'язання

Спосіб 1 (аналітичний)

Розв'яжемо цю систему методом підстановки:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ 2x^2 - 2a|x| + a^2 - 1 = 0, \\ y = a - |x|; \\ y = a - |x|. \end{cases}$$

Очевидно, що ця система має два розв'язки, коли рівняння $2t^2 - 2at + a^2 - 1 = 0$, де $t = |x|$, має один додатний корінь другої кратності або два корені різних знаків, що є

рівносильним сукупності $\begin{cases} D = 0, \\ t > 0, \\ D > 0, \\ t_1 \cdot t_2 < 0, \end{cases}$ тобто $\begin{cases} 2 - a^2 = 0, \\ \frac{a}{2} > 0, \\ 2 - a^2 > 0, \\ \frac{a^2 - 1}{2} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = \sqrt{2} \\ |a| < \sqrt{2}, \\ |a| < 1. \end{cases}$ Звідси маємо

$$a \in (-1; 1) \cup \{\sqrt{2}\}.$$

Спосіб 2 (графічний)

Графіком рівняння $x^2 + y^2 = 1$ є коло з центром у початку координат і радіусом 1.

Графіком функції $y = a - |x|$ є прямий кут з вершиною в точці $(0; a)$, який залежно від a переміщується вздовж осі y .

Сторони кута можуть перетинати коло в двох точках, якщо $a \in (-1; 1)$, або дотикатися його при $a = \sqrt{2}$ (рис. 5.27).

Відповідь: система має два розв'язки при $a \in (-1; 1) \cup \{\sqrt{2}\}$.

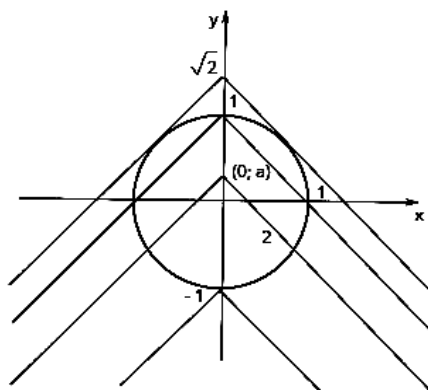


Рис. 5.27

Завдання для самостійної роботи

5.31. При якому значенні параметра a корені $x_1, x_2 (x_1 \leq x_2)$ наведених рівнянь задовольняють задані умови:

1) $f(a-1)x^2 - x + 1 = 0, x_1 < 2, x_2 < 2;$ 2) $(ax^2 - 2x - a + 1) = 0, x_1 > -1, x_2 > -1;$

3) $-x^2 + (a+1)x - 2a = 0, -1 < x_1 < 2, -1 < x_2 < 2;$

4) $x^2 - ax + 3a - 5 = 0, x_1 < 1, 1 < x_2 < 3.$

Розв'язати рівняння:

5.32. $\frac{x+2}{a+1} = \frac{2x-a-1}{x-2}.$

5.33. $\frac{x}{2m} + \frac{2}{x-2} = \frac{3x-2m}{2(x-2)}.$

5.34. $\sqrt{x-a} = a.$

5.35. $x+1 = \sqrt{x^2+2x+a}.$

5.36. Скільки розв'язків має рівняння $\sqrt{x-1}(x^2 - (3+a)x + 3a) = 0$ залежно від значення параметра a ?

5.37. При якому найбільшому від'ємному значенні параметра a рівняння $\sqrt[4]{|x|-1} - 2x = a$ має один корінь?

5.38. При якому найменшому цілому значенні параметра a рівняння $\sqrt{2x+15} \cdot (\sqrt{x^2+18x+81} - \sqrt{x^2-10x+25}) = a\sqrt{2x+15}$ має лише два різні корені?

5.39. При якому найменшому значенні параметра a рівняння $\sqrt{x-2} + 2\sqrt{x-3} + (14-2a) \cdot \sqrt[4]{x-3} + 32 = 6a$ має хоча б один корінь?

5.40. При яких значеннях параметра a рівняння $\frac{(x^2 - 2(a+1)x + 6a - 3)(\operatorname{tg} \pi x - 1)}{\sqrt[4]{49x^2 - 84xa + 36a^2}} = 0$

на проміжку $[0;1]$ має рівно два різні корені?

5.41. При якому значенні параметра a рівняння $|x^2 - 5x + 6| + |x^2 - 5x + 4| = a$ має рівно чотири корені?

5.42. Знайти всі значення параметра a , при яких рівняння $8x^6 + (a - |x|)^3 + |x|\sqrt{2} - \sqrt{|x|} - a = 0$ має більше трьох різних коренів.

5.43. Розв'язати рівняння $x^2 - 4x \cdot \cos(x-a) + 4 = 0$ при всіх можливих значеннях параметра a .

5.44. Скільки коренів має рівняння $|x^2 - 2|x| - 3| = a$ залежно від значення параметра a ?

5.45. Знайти всі значення параметра a , при кожному з яких рівняння $\cos(\sqrt{a^2 - x^2}) = 1$ має рівно вісім розв'язків.

5.46. Знайти значення параметра a , при якому корінь рівняння $\lg(\sin 5\pi x) = \sqrt{16+a-x}$ належить проміжку $\left(\frac{3}{2}; 2\right).$

5.47. Розв'язати рівняння $2(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x + 2) + a^2 = 3a(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$, якщо $x \neq \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}.$

5.48. Розв'язати рівняння $3^{2x + \sqrt{2 \lg 2 + \lg(a-a^2)}} - 8 \cdot 9^{ax} - 18a = 0.$

5.49. Розв'язати нерівність $3(2a - x) < ax + 1$.

5.50. Розв'язати нерівність $\frac{(a+2)x}{a-1} - \frac{2}{3} < 2x - 1$.

5.51. При яких значеннях параметрів кожна з наведених нерівностей виконується при будь-яких дійсних значеннях x : 1) $ax^2 + (a-1)x - 2 < 0$; 2) $(b^2 - 1)x^2 + 2(b-1)x + 1 < 0$;

3) $(m-2)x^2 - mx - 1 < 0$?

5.52. Знайти всі значення параметра a , при яких для будь-яких x , що задовольняють умову $|x| \leq 1$, виконується нерівність $\frac{2x+a+9}{x^2+(2-a)x-2a} < 0$.

Розв'язати нерівності:

5.53. $x + \sqrt{a^2 - x^2} \geq 0$. **5.54.** $\sqrt{x+a} < a - \sqrt{x}$. **5.55.** $\sqrt{2ax - x^2} \geq a - x$.

5.56. Знайти всі значення a , при яких нерівність $\sqrt{x^2 - x - 2} + \sqrt{\frac{2-x}{x+4}} \geq ax + 2 - \sqrt{\frac{x-1}{5-x}}$ має розв'язки.

5.57. Розв'язати нерівність $(x^2 - 2\sqrt{ax} + 1)(2^x + \lg a) < 0$.

5.58. Визначити кількість розв'язків системи $\begin{cases} 3x + y - 2 = 0, \\ y = a + \sqrt{x} \end{cases}$ залежно від значення параметра a .

5.59. Знайти суму всіх від'ємних значень параметра a , при яких система рівнянь $\begin{cases} 2\sqrt{y^2 - 4y + 4} + 3|x| = 11 - y, \\ 25x^2 - 20ax = y^2 - 4a^2 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

5.60. Знайти всі значення параметра a , при яких система $\begin{cases} |x-12| + |y| = 1, \\ (x-a)^2 + y^2 = 4 \end{cases}$ має єдиний розв'язок.

5.61. При яких значеннях a система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(1+a), \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases}$ має рівно два розв'язки?

5.62. При яких значеннях параметрів a і b система рівнянь $\begin{cases} x^2 + y^2 + bxy = 1, \\ x^2 - y^2 + a(x+y) = x - y + a \end{cases}$ має не менш ніж п'ять розв'язків?

5.63. При яких значеннях параметра a система рівнянь $\begin{cases} \log_3(y-3) - \log_3 x = 0, \\ (x+a)^2 - 2y - 5a = 0 \end{cases}$ має хоча б один розв'язок?

5.64. При яких значеннях параметра a система нерівностей $\begin{cases} (y-x)^2 - 3y + 2x + a \leq x, \\ y \geq (x+y)^2 - x - 2y + a \end{cases}$ має єдиний розв'язок?

5.65. Знайти всі значення параметра a , при яких система нерівностей $\begin{cases} (x-a)(ax-2a-3) \geq 0, \\ ax \geq 4 \end{cases}$ не має розв'язків.

Розділ 6. ПЛАНІМЕТРІЯ

Кожна планіметрична задача зазвичай має геометричний вузловий момент, подолання якого зводить задачу лише до обчислювальних процедур. Для його виявлення при розв'язанні задачі необхідно:

1. Побудувати наочне креслення до задачі із зображенням усіх елементів.
2. Залежно від умов задачі спробувати виявити на кресленні паралельні або перпендикулярні прямі, рівні або подібні фігури, вписані кути, які спираються на рівні дуги кола, визначити місцезнаходження центрів вписаних або описаних кіл, використати умови вписання (опису) багатокутників у коло (навколо кола).
3. Спробувати зв'язати задані в задачі елементи, об'єднуючи їх у фігури, які або вже є на кресленні, або виходять унаслідок додаткової побудови.

6.1. Трикутники

Нехай задано довільний трикутник ABC (рис. 6.1).

Позначимо: a, b, c – сторони трикутника; α, β, γ – протилежні кути; p – півпериметр; S – площа; R, r – радіуси описаного та вписаного кіл; r_a, r_b, r_c – радіуси зовнішніх вписаних кіл; m_a, m_b, m_c – медіани; h_a, h_b, h_c – висоти; l_a, l_b, l_c – бісектриси, проведені до сторін a, b, c .

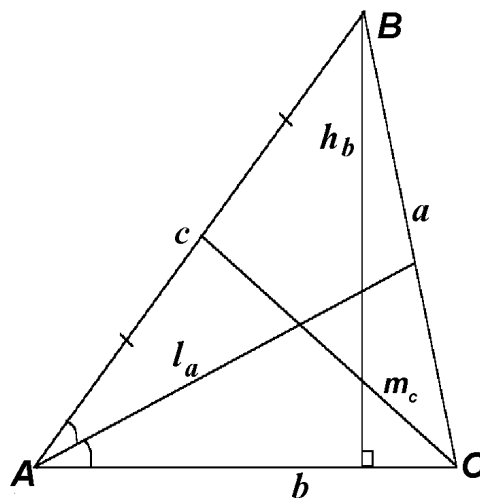


Рис. 6.1

Основні формули:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}ab \cdot \sin \gamma = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)};$$

$$R = \frac{abc}{4S}; \quad r = \frac{S}{p}; \quad r_a = \frac{S}{p-a};$$

$$m_c^2 = \frac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4}; \quad h_c^2 = \frac{4p(p-a)(p-b)(p-c)}{c^2};$$

$$l_c^2 = 4 \frac{ab}{(a+b)^2} p(p-c);$$

$$a + b < c; a + c < b; b + c < a \text{ (нерівності трикутника).}$$

$$\text{Якщо } \gamma = 90^\circ, \text{ то } R = \frac{c}{2}; \quad r = p - c; \quad s = \frac{1}{2}ab.$$

$$\text{Якщо } \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ, \text{ то } R = \frac{\sqrt{3}}{3}a; \quad r = \frac{\sqrt{3}}{6}a; \quad S = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Основні теореми

Теорема Піфагора. У прямокутному трикутнику з кутом $\gamma = 90^\circ$

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Теорема косинусів. У довільному трикутнику

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos \gamma.$$

Теорема синусів. У довільному трикутнику

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R.$$

Теорема 1. У довільному трикутнику медіани перетинаються в одній точці (центроїді) і цією точкою поділяються у відношенні 2:1, рахуючи від вершин трикутника.

Теорема 2. У довільному трикутнику висоти перетинаються в одній точці (ортоцентрі).

Теорема 3. У довільному трикутнику бісектриси внутрішніх кутів перетинаються в одній точці (інцентрі).

Теорема 4. Якщо AN – бісектриса внутрішнього кута A в довільному трикутнику ABC , то $BN : NC = AB : AC$.

Теорема 5. Центр вписаного в довільний трикутник кола лежить на перетині бісектрис внутрішніх кутів, а центр описаного кола – на перетині серединних перпендикулярів до сторін трикутника.

Розглянемо основні методи розв'язання найбільш типових задач.

Часто в задачі для визначення деякого елемента потрібно знати один із кутів трикутника. Цей кут можна отримати за теоремою косинусів.

Приклад 6.1. Сторони трикутника дорівнюють a, b, c . Найдіть довжину відрізка, розташованого між сторонами a і b , який з'єднує вершину трикутника з протилежною стороною c і поділяє цю сторону у відношенні $p : q$.

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.2). Нехай $AC = b$, $BC = a$, $AB = c$, $CD = x$ – довжина шуканого відрізка. Позначимо $\angle CAB = \alpha$. Застосуємо теорему косинусів до $\triangle ACD$:

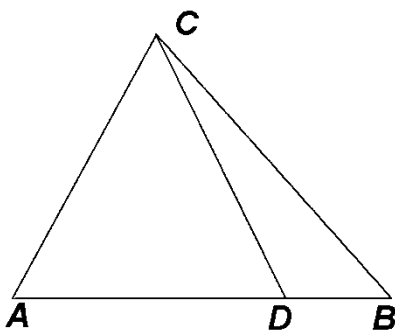


Рис. 6.2

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos \angle A.$$

Оскільки $AD : BD = p : q$ і $AD + BD = c$, то

$$AD = \frac{cp}{p+q}.$$

Звідси маємо

$$x^2 = b^2 + \frac{c^2 p^2}{(p+q)^2} - 2 \frac{cpb}{(p+q)} \cos \alpha.$$

За теоремою косинусів із $\triangle ACB$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}.$$

Підставляючи цей вираз до попередньої рівності, одержимо

$$x^2 = b^2 + \frac{c^2 p^2}{(p+q)^2} - \frac{p}{p+q} (b^2 + c^2 - a^2) = \frac{q}{p+q} b^2 - \frac{pq}{(p+q)^2} c^2 + \frac{p}{p+q} a^2,$$

тобто

$$x = \frac{\sqrt{q(p+q)b^2 - pqc^2 + p(p+q)a^2}}{p+q}.$$

У деяких задачах при обчисленні площі використовують такий результат. Нехай задано $\triangle ABC$, $M \in AB$, $N \in AC$. Тоді

$$S_{AMN} : S_{ABC} = (AM \cdot AN) : (AB \cdot AC).$$

Приклад 6.2. Задано $\triangle ABC$ площею 1. На його медіанах AK , BL і CM узяті відповідно точки P, Q, R так, що $AP = PK$, $BQ = \frac{1}{2}QL$, $CR = \frac{5}{4}RM$. Знайти площу $\triangle PQR$.

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.3). Нехай $OK = x$, тоді $AO = 2x$, оскільки точка перетину медіан трикутника поділяє їх у відношенні 2:1. Отже, з умови задачі виходить, що

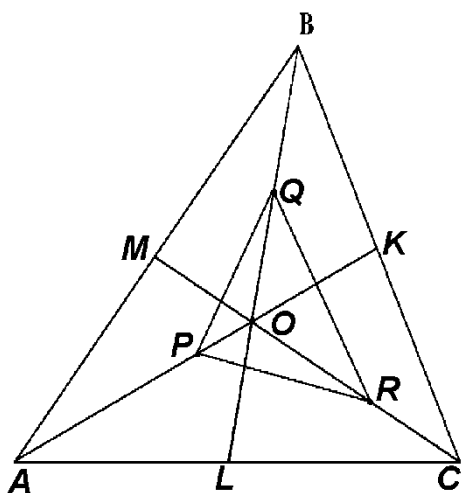


Рис. 6.3

$$AP = \frac{3}{2}x, PO = \frac{x}{2}.$$

Звідси $PO : AO = 1 : 4$. Аналогічно $RO : CO = 1 : 6$, $QO : BO = 1 : 2$. Таким чином,

$$\frac{S_{OPQ}}{S_{OAB}} = \frac{OP \cdot OQ}{OA \cdot OB} = \frac{1}{8},$$

$$\frac{S_{OQR}}{S_{OBC}} = \frac{OQ \cdot OR}{OB \cdot OC} = \frac{1}{12},$$

$$\frac{S_{OPR}}{S_{OAC}} = \frac{OP \cdot OR}{OA \cdot OC} = \frac{1}{24}.$$

У довільному трикутнику

$$S_{OAB} = S_{OBC} = S_{OAC} = \frac{1}{3} S_{ABC}.$$

$$\text{Тому } S_{OPQ} = \frac{1}{24} S_{ABC}, S_{OQR} = \frac{1}{36} S_{ABC}, S_{OPR} = \frac{1}{72} S_{ABC}.$$

$$\text{Отже, } S_{PQR} = S_{OPQ} + S_{OQR} + S_{OPR} = \frac{1}{12} S_{ABC} = \frac{1}{12}.$$

У задачах про бісектрису кута трикутника зазвичай використовують теорему 4.

Приклад 6.3. У трикутнику сторони дорівнюють a , b і c . В якому відношенні бісектриса l_a поділяє бісектрису l_b ?

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.4). За теоремою 4 $AD : DC = AB : BC = c : a$. $AD + DC = b$. Звідси $AD = \frac{bc}{c+a}$.

Ще раз застосуємо теорему 4 до $\triangle BAD$, в якому AO є бісектрисою кута A . Одержимо

$$BO : OD = AB : AD = c : \frac{bc}{c+a} = (c+a) : b.$$

Завдання для самостійної роботи

6.1. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює $4\sqrt{2}$, а медіана, яку проведено до бічної сторони, – 5. Знайти кут при вершині трикутника.

6.2. У трикутник вписано коло радіусом 4 см. Одну із сторін трикутника поділено точкою дотику на відрізки довжиною 6 і 8 см. Знайти довжини двох інших сторін трикутника.

6.3. У трикутнику ABC $AC = \frac{1}{2} BC = R$, висота, яку опущено на BC , дорівнює 3. Знайти радіус описаного кола R .

6.4. Висота прямокутного трикутника поділяє його на трикутники з периметрами P_1 і P_2 . Знайти периметр вихідного трикутника.

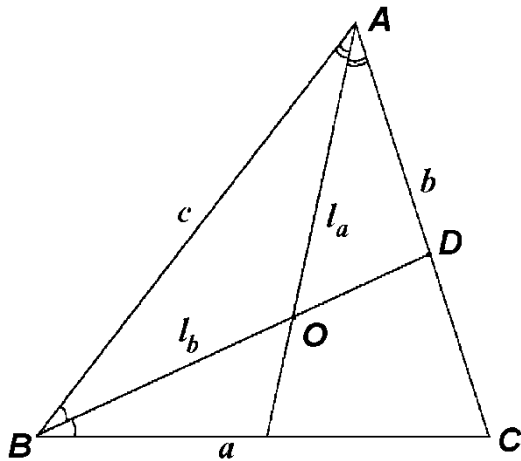


Рис. 6.4

6.5. Медіани, які проведено з вершин гострих кутів прямокутного трикутника, дорівнюють 3 і 2. Знайти площу трикутника.

6.6. У рівнобедреному трикутнику центр вписаного кола поділяє висоту у відношенні 12:5, а бічна сторона дорівнює 60. Знайти основу трикутника.

6.7. Знайти бісектрису CD кута C трикутника ABC , якщо $AC = b$, $BC = a$, $\angle ACB = \gamma$.

6.8. Задано трикутник ABC , в якому $\angle B = 30^\circ$, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см. Бісектриса $\angle B$ перетинає сторону AC у точці D . Визначити площу $\triangle ABD$.

6.9. У трикутнику ABC $AB = BC$, O – точка перетину висот. Знайти кут при вершині B , якщо $OB = AC$.

6.10. Відношення площі прямокутного трикутника до площі квадрата, побудованого на його гіпотенузі, дорівнює k . Знайти суму тангенсів гострих кутів трикутника.

6.11. Площа рівностороннього трикутника, побудованого на гіпотенузі прямокутного трикутника, вдвічі більша за площу останнього. Визначити кути прямокутного трикутника.

6.12. У прямокутний трикутник вписано коло. Точка дотику поділяє гіпотенузу у відношенні 2:3. Знайти сторони трикутника, якщо центр вписаного кола віддалений від вершини прямого кута на відстань $\sqrt{8}$.

6.13. Задано дві сторони a і b трикутника і бісектрису l кута між ними. Знайти цей кут.

6.14. Знайти площу прямокутного трикутника, якщо задано радіуси описаного і вписаного в нього кіл R і r .

6.15. Коло дотикається до більшого катета прямокутного трикутника, проходить через вершину протилежного гострого кута і має центр на гіпотенузі. Знайти радіус кола, якщо катети дорівнюють 3 і 4.

6.16. У рівнобедрений трикутник вписано коло радіусом r . Висота, проведена до основи, ділиться колом у відношенні 1:2, рахуючи від вершини. Знайти площу трикутника.

6.17. Визначити площу трикутника, сторони якого відносяться як 7:15:20, а радіус вписаного кола дорівнює 1.

6.18. Дві сторони трикутника, що утворюють гострий кут, дорівнюють 25 і 63, а

його площа – 630. Знайти радіус описаного навколо трикутника кола.

6.19. Задано три висоти трикутника h_1, h_2, h_3 . Знайти радіус вписаного кола.

6.20. У трикутнику ABC бісектриса кута B ділить сторону AC на відрізки $AD=15$ і $DC=24$ і утворює з цією стороною кут 60° . Знайти AB і BC .

6.21. У прямокутному трикутнику задано катет a і бісектрису прямого кута l . Знайти гіпотенузу.

6.22. У трикутник ABC вписано коло, яке точкою дотику ділить сторону AC на відрізки $AD=6$ і $DC=4$. Визначити сторони AB і BC , якщо $\angle A = 60^\circ$.

6.23. Основа рівнобічного трикутника дорівнює 36, а бічна сторона – 30. Знайти відстань між центрами вписаного й описаного кіл.

6.24. Знайти третю сторону трикутника, якщо задано дві його сторони a і b й відомо, що медіани, які відповідають цим сторонам, перетинаються під прямим кутом.

6.25. У трикутнику ABC проведено бісектрису AD кута BAC і бісектрису CF кута ACB . Знайти відношення площ трикутників ABC і AFD , якщо відомо, що $AB = 21$, $AC = 28$, $CB = 20$.

6.26. На основі AB рівнобедреного трикутника ABC узято точку D . Довести, що радіуси кіл, описаних навколо трикутників ACD і BCD , є рівними.

6.27. Довести, що продовження бісектриси будь-якого внутрішнього кута трикутника і бісектрис зовнішніх кутів, які відповідають двом іншим внутрішнім кутам трикутника, перетинаються в одній точці.

6.28. Довести, що сума відстаней від будь-якої точки, яка лежить всередині трикутника, до його вершин більша за половину периметра.

6.29. Довести, що різниця відстаней точки, взятої на продовженні основи рівнобедреного трикутника, до його бічних сторін дорівнює висоті, проведеній на бічну сторону.

6.30. Довести, що сума медіан довільного трикутника менша за периметр, але більша за $\frac{3}{4}$ периметра трикутника.

6.31. На сторонах AB і BC $\triangle ABC$ у зовнішній бік побудовано квадрати $ADKB$ і $BEPC$. Довести, що відрізок KE у два рази більший за медіану BM $\triangle ABC$.

6.2. Кола

Нехай задано коло з центром у точці O і радіусом R ; l – довжина кола; S – площа кола; $l(\alpha)$, $S_{сек}(\alpha)$, $S_{сез}(\alpha)$ – довжина дуги кола, площа сектора і площа сегмента, обмежених центральним кутом α радіан.

Основні формули:

$$l = 2\pi R; \quad l(\alpha) = \alpha R; \quad S = \pi R^2;$$

$$S_{сек}(\alpha) = \frac{\alpha}{2} R^2; \quad S_{сез}(\alpha) = \frac{1}{2} (\alpha - \sin \alpha) R^2.$$

Основні теореми

Теорема 1. Вписаний у коло кут (кут, у якого вершина лежить на колі, а сторони є хордами кола) дорівнює половині центрального кута, що спирається на ту ж саму дугу кола, що й вписаний кут.

Наслідок 1. Вписані в коло кути, які спираються на одну й ту ж або рівні дуги кола, є рівними.

Наслідок 2. Вписаний в коло кут, що спирається на діаметр кола, дорівнює прямому куту.

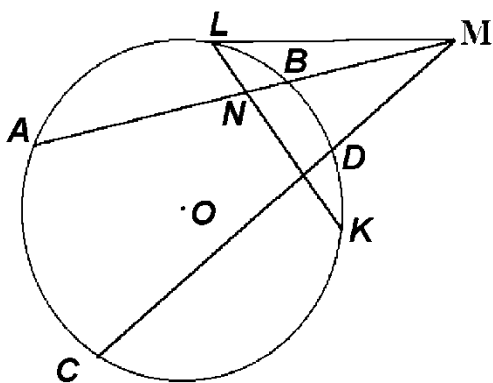


Рис. 6.5

Теорема 2. Кут MLK , утворений дотичною ML і хордою LK , яка виходить з точки дотику (рис. 6.5), вимірюється половиною дуги LK , що знаходиться між дотичною і хордою.

Теорема 3. Нехай M – довільна точка поза колом, L – точка, яка лежить на колі, MA – січна, що перетинає коло в точках B і A . Для того щоб відрізок LM був дотичною до кола, необхідно й достатньо виконання умови

$$ML^2 = MA \cdot MB.$$

Теорема 4. Два відрізки AB і CD перетинаються в точці N . Для того щоб точки A, B, C, D лежали на одному колі, необхідно й достатньо виконання умови

$$AN \cdot NB = CN \cdot ND.$$

Теорема 5. Нехай точки A і C лежать відповідно поза колом й на колі з центром у точці O . Для того щоби відрізок AC був дотичною до кола, необхідно й достатньо, щоб AC був перпендикулярним до CO .

Теорема 6. Чотири точки A, B, C, D розташовано на площині так, що точки C і D знаходяться по один бік від прямої, яка проходить через точки A і B . Для того щоб точки A, B, C, D лежали на одному колі, необхідно й достатньо, щоб $\angle ACB = \angle ADB$.

Розглянемо основні методи розв'язання найбільш типових задач.

Приклад 6.4. У паралелограмі $ABCD$ діагональ AC більша за діагональ BD , M – така точка на діагоналі AC , що чотири точки B, C, D, M лежать на одному колі. Довести, що BD є спільною дотичною до описаних кіл трикутників ABM і ADM .

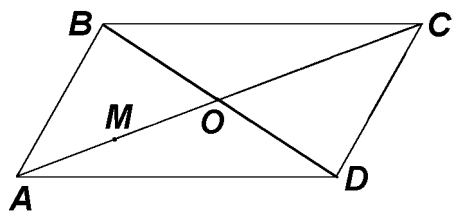


Рис. 6.6

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.6). Оскільки за умовою точки B, C, D, M лежать на одному колі, то за теоремою 4 $MO \cdot OC = BO \cdot OD = BO^2$ (точка O перетину діагоналей паралелограма ділить діагоналі навпіл).

Опишемо коло навколо $\triangle ABM$. Точка B лежить на цьому колі, OA – січна, яка перетинає коло в точках M і A . Визначено, що $BO^2 = MO \cdot OC$, але $OC = AO$. Отже, $BO^2 = MO \cdot AO$.

За теоремою 3 BO є дотичною до кола, описаного навколо $\triangle ABM$. Аналогічно доводиться, що DO є дотичною до кола, описаного навколо $\triangle ADM$.

У деяких задачах, щоби скористатися властивостями вписаних кутів, потрібно провести допоміжне коло.

Приклад 6.5. У $\triangle ABC$ $AB = BC$, кут B менше 60° , CD – бісектриса кута C . Через точку D проведено пряму, перпендикулярну до бісектриси CD . Ця пряма перетинає продовження основи AC у точці E . Довести, що $AD = \frac{1}{2}EC$.

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.7). За умовою $\triangle EDC$ – прямокутний. Щоби зв'язати елементи $\triangle EDC$, опишемо навколо нього коло. Оскільки $\angle EDC = 90^\circ$, то EC – діаметр кола, точка O – середина відрізка EC . Тепер необхідно довести, що $AD = OD$, тобто $\triangle AOD$ – рівнобедрений. Оскільки за умовою $\triangle ABC$ – рівнобедрений, CD – бісектриса $\angle ACB$, то $\angle OAD = \angle ACB = 2\angle ECD$. Кут $\angle ECD$ як вписаний в коло дорівнює половині центрального кута, який спирається на дугу ED , тобто $\angle ECD = \frac{1}{2}\angle EOD$. Отже,

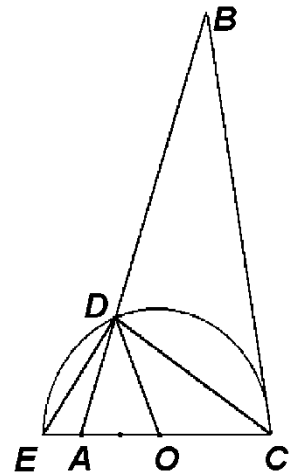


Рис. 6.7

$$\angle OAD = 2\angle ECD = \angle EOD \Rightarrow AD = OD = \frac{1}{2}EC.$$

Приклад 6.6. Два кола радіусами R і r дотикаються зовнішньо в точці C . До них проведено спільну зовнішню дотичну AB , де A і B – точки дотику. Обчислити довжину сторін $\triangle ABC$.

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.8).

Із точки C проведемо перпендикуляр EC до відрізка O_1O_2 , який сполучає центри кіл, до перетину зі спільною дотичною двох кіл AB . EC – друга спільна дотична двох кіл.

За властивістю дотичних до кола, які проведено з однієї точки, $AE = EC = EB$, тобто точка E – центр описаного навколо $\triangle ABC$ кола, AB – діаметр цього кола. Тоді $\angle ACB$ – вписаний, який спирається на діаметр, дорівнює 90° (наслідок 2).

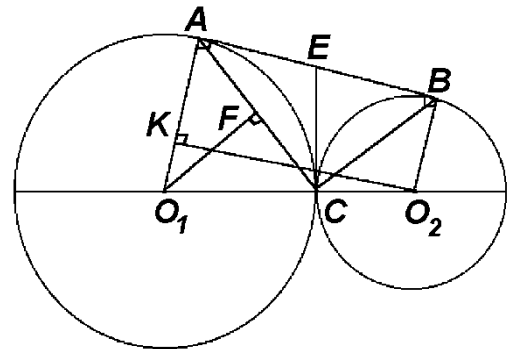


Рис. 6.8

O_1A, O_2A – радіуси кіл, проведені в точки дотику з прямою AB , отже, $O_1A \perp AB, O_2B \perp AB$.

Проведемо $O_2K \perp O_1A$. Чотирикутник ABO_2K – прямокутник (усі кути – прямі). За теоремою Піфагора

$$KO_2 = \sqrt{O_1O_2^2 - O_1K^2} = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = \sqrt{4Rr}.$$

Отже, $AB = KO_2 = \sqrt{4Rr}$. Опустимо перпендикуляр O_1F на AC . $\angle CAB$ – кут між дотичною і хордою. Він дорівнює половині кута AO_1C , тобто $\angle CO_1F = \angle CAB$.

Позначимо величину $\angle CO_1F$ через α . Тоді

$$AC = 2FC = 2R \sin \alpha; \quad BC = AC \cdot \operatorname{tg} \alpha = 2R \cdot \sin \alpha \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

За теоремою Піфагора $AC^2 + CB^2 = AB^2$, тобто

$$4R^2 \cdot \sin^2 \alpha (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = 4Rr \Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{r}{R};$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \sqrt{\frac{r}{R}} \Rightarrow \sin \alpha = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}} = \sqrt{\frac{r}{R+r}} \quad (0 < \alpha < 90^\circ),$$

$$AC = \sqrt{\frac{4R^2 r}{R+r}}; \quad BC = \sqrt{\frac{4Rr^2}{R+r}}.$$

Завдання для самостійної роботи

6.32. Два кола дотикаються внутрішнім чином. Пряма, що проходить через центр меншого кола, перетинає більше в точках A і D , а менше – у точках B і C . Знайти відношення радіусів кіл, якщо

$$AB : BC : CD = 2 : 3 : 4.$$

6.33. Діаметр кола радіусом R є основою правильного трикутника. Обчислити площу тієї частини трикутника, яка лежить поза колом.

6.34. Спільною хордою двох кіл стягуються дуги 60° і 120° . Знайти відношення площ цих кіл.

6.35. У сегмент з дугою 120° вписано квадрат. Знайти сторону квадрата, якщо радіус кола – R .

6.36. У середині кола радіусом R розташовано чотири однакових кола з меншим радіусом. Кожне з них дотикається до більшого кола і двох сусідніх. Обчислити площу фігури, обмеженої всіма однаковими колами.

6.37. Хорда кола дорівнює 10 см. Через один кінець хорди проведено дотичну до кола, а через інший – січну паралельно до дотичної. Визначити радіус кола, якщо внутрішній відрізок січної дорівнює 12 см.

6.38. Із точки A кола радіусом R по різні боки від центра проведено дві хорди AB і AC , одна з яких є стороною вписаного квадрата, а інша – стороною вписаного правильного трикутника. Знайти BC .

6.39. Два кола перетинаються в точках A і B . Через точку A проведено дотичні до кіл, які перетинають їх у точках D і C . Знайти AB , якщо хорди $BC = a$, $BD = b$.

6.40. Із точки, узятої поза колом, проведено дві січні, одна з яких відтинає від кола дугу 60° , а інша – проходить через центр кола. Визначити радіус кола, якщо зовнішні відрізки січних дорівнюють a і b ($b > a$).

6.41. Діаметром кола є один із катетів прямокутного трикутника. Визначити відрізки, на які ділиться цим самим колом гіпотенуза, якщо найменша відстань від третьої вершини до кола дорівнює 6, а найбільша – 16.

6.42. Коло радіусом 13 см дотикається до двох суміжних сторін квадрата, довжина яких дорівнює 18 см. На які два відрізки ділить коло кожну з двох інших сторін квадрата?

6.43. Хорди AB і AC мають однакову довжину. Величина утвореного ними вписаного кута дорівнює $\frac{\pi}{6}$. Знайти відношення площі тієї частини кола, яка розташована в цьому куті, до площі всього кола.

6.44. Через точку A , що лежить на відстані $2r$ від центра кола радіусом r , проведено пряму на відстані $\frac{r}{2}$ від центра кола, яка перетинає коло в точках B і C . Знайти AB і AC .

6.45. Два кола радіусами R і r дотикаються зовнішнім чином. Знайти площу трапеції, утвореної двома спільними дотичними до цих кіл і хордами, що з'єднують точки дотику.

6.46. У трикутнику центри вписаного й описаного кіл симетричні відносно однієї із сторін. Знайти кути трикутника.

6.47. Зовні правильного $\triangle ABC$, але всередині кута BAC узято точку M так, що $\angle CMA = 30^\circ$ і $\angle BMA = \alpha$. Знайти кут ABM .

6.48. Відстань між центрами двох кіл дорівнює d . Кут між зовнішніми дотичними до цих кіл дорівнює α , а між внутрішніми дотичними – β . Визначити радіуси кіл.

6.49. Із точки A до кола радіусом R проведено дотичну AM (M – точка дотику). Січна, яка проходить через точку A , перетинає коло в точках L і K , причому L – середина відрізка AK , $\angle AMK = 60^\circ$. Знайти площу $\triangle AMK$.

6.50. Коло ділить кожну сторону трикутника на три рівні частини. Довести, що цей трикутник є правильним.

6.51. Із довільної точки M усередині кута опущено перпендикуляри MC і MQ на сторони цього кута. Із вершини кута A опущено перпендикуляр AK на відрізок PQ . Довести, що $\angle KAP = \angle MAQ$.

6.3. Чотирикутники і багатокутники

Нехай задано довільний опуклий чотирикутник $ABCD$ (рис. 6.9). Позначимо: a, b, c, d – його сторони AB, BC, CD, DA відповідно; $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – внутрішні кути; p – півпериметр; S – площа; R, r – радіуси описаного і вписаного кіл; h_a – висота, опущена з вершини B на сторону AD ; f, g – діагоналі AC і BD ; φ – кут між діагоналями; m, l – середні лінії EF і KL (відрізки, що з'єднують середини протилежних сторін); ψ – кут між середніми лініями.

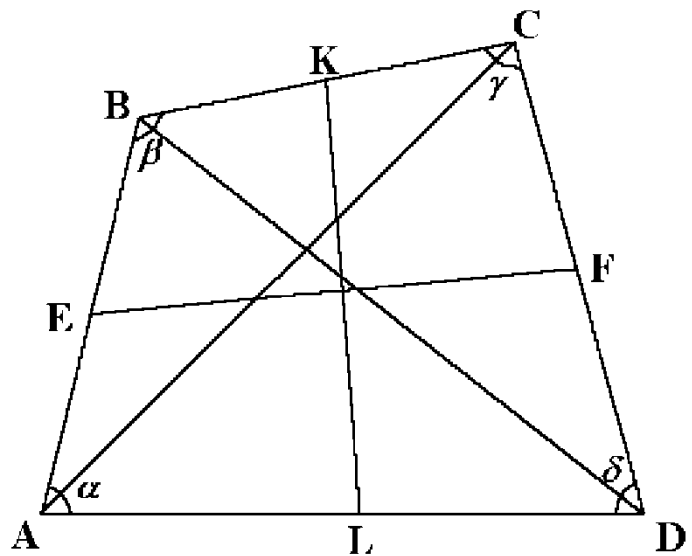


Рис. 6.9

Для n -кутника $A_1A_2\dots A_n$

позначимо: α_i – внутрішній кут з вершиною в точці A_i ;

$$A_1A_2 = a_2, \quad A_2A_3 = a_3, \dots, \quad A_{n-1}A_n = a_n, \quad A_nA_1 = a_1;$$

p – півпериметр; S – площа; R, r – радіуси описаного й вписаного кіл.

Основні формули:

1. Чотирикутник:

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360^\circ, \quad S = \frac{1}{2} fg \sin \varphi = ml \sin \psi;$$

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d) - abcd \cos^2 \left(\frac{\alpha + \gamma}{2} \right)} = \frac{1}{2} (ad \sin \alpha + bc \sin \gamma).$$

Вписаний чотирикутник:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} = \frac{1}{2}(ad+bc)\sin\alpha = \frac{1}{2}(ac+bd)\sin\varphi;$$

$$R = \frac{g}{2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{a^2+d^2-2ad\cos\alpha}}{2\sin\alpha} = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{(ab+cd)(ac+bd)(ad+bc)}{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}};$$

$$f = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd}}, \quad g = \sqrt{\frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}}, \quad fg = ad+bc;$$

$$\cos\alpha = \frac{a^2+d^2-b^2-c^2}{2(ad+bc)}, \quad \sin\alpha = 2\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ad+bc}.$$

Описаний чотирикутник: $r = \frac{S}{p}$.

2. Паралелограм:

$$\alpha = \gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - \delta; \quad a = c, \quad b = d;$$

$$S = ah_a = ab\sin\alpha = \frac{1}{2}fg\sin\varphi; \quad f^2 + g^2 = 2(a^2 + b^2).$$

3. Ромб:

$$a = b = c = d; \quad \varphi = 90^\circ; \quad S = ah_a = a^2\sin\alpha = \frac{1}{2}fg; \quad f^2 + g^2 = 4a^2.$$

4. Прямокутник:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ; \quad f = g; \quad S = ab = \frac{1}{2}f^2\sin\varphi; \quad f^2 = a^2 + b^2.$$

5. Квадрат:

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 90^\circ; \quad a = b = c = d; \quad S = a^2; \quad f = g = \sqrt{2}a.$$

6. Трапеція ($AD \parallel BC$): $\alpha = 180^\circ - \beta; \quad \gamma = 180^\circ - \delta;$

$$S = \frac{a+c}{2}h_a; \quad f^2 + g^2 = b^2 + d^2 + 2ac; \quad m = \frac{a+c}{2}.$$

7. n -кутник: $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = (n-2)180^\circ;$

$S = rp$ – описаний n -кутник;

$$R = \frac{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2\cos\alpha_1}}{2\sin\alpha_1} \text{ – вписаний } n\text{-кутник.}$$

8. Правильний n -кутник:

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = \frac{(n-2)180^\circ}{n}; \quad a_1 = a_2 = \dots = a_n;$$

$$S = \frac{na_1^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}; \quad R = \frac{a_1}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}; \quad r = \frac{a_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

Основні теореми

Теорема 1. Для того щоби чотирикутник можна було вписати в коло, необхідно й достатньо, щоби сума протилежних кутів чотирикутника дорівнювала 180° .

Теорема 2. Для того щоби коло можна було вписати в чотирикутник, необхідно й достатньо виконання однієї з двох таких умов:

- а) суми протилежних сторін чотирикутника є рівними, тобто $a + c = b + d$;
- б) бісектриси внутрішніх кутів перетинаються в одній точці.

Теорема 3. Для того щоби чотирикутник був паралелограмом, необхідно й достатньо виконання однієї з таких умов:

- а) дві пари протилежних сторін є рівними;
- б) протилежні сторони є рівними й паралельними;
- в) протилежні кути є рівними;
- г) діагоналі точкою перетину діляться навпіл.

Розглянемо основні методи розв'язання найбільш типових задач.

Приклад 6.7. Пряма, яка паралельна діагоналі AC чотирикутника $ABCD$ і проходить через середину O діагоналі BD , перетинає сторону AD у точці E . Довести, що пряма CE ділить площу чотирикутника $ABCD$ навпіл.

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.10). З'єднаємо вершини A і C чотирикутника з точкою O .

Така додаткова побудова пов'язана з тим, що пари трикутників BCO і COD , BAO і AOD – рівновеликі.

Дійсно, розглянемо, наприклад, $\triangle BOC$ і $\triangle COD$. Висота, опущена з вершини C на протилежну сторону, є спільною для цих трикутників, а $OB=OD$ за умовою.

Аналогічно $S_{BAO} = S_{AOD}$. Тоді $S_{ABCO} = S_{AOCD}$. Розглянемо трикутники AEO і CEO . Відрізок EO – спільна основа трикутників. Висоти, опущені з вершин A і C , дорівнюють одна одній і висоті трапеції $ACOE$. Отже, $S_{AOE} = S_{COE} \Rightarrow S_{AKE} = S_{CKO}$.

Тоді

$$\begin{aligned} S_{ABCE} &= S_{ABCO} + S_{AKE} - S_{CKO} = S_{ABCO} = \\ &= S_{AOCD} = S_{DEC} + S_{AKE} - S_{CKO} = S_{DEC}, \end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Приклад 6.8. Знайти площу паралелограма і довжину його діагоналей, якщо дано гострий кут α і відстань m і n від точки перетину діагоналей до нерівних сторін.

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.11). Проведемо в паралелограмі $ABCD$ висоти BK і DL і перпендикуляри ON , OM із точки O на сторони AD і AB .

Оскільки точка O – середина відрізка BD , то ON і OM – середні лінії $\triangle DBK$ і $\triangle BDL$. Отже,

$$ON = \frac{1}{2}BK, \quad OM = \frac{1}{2}DL.$$

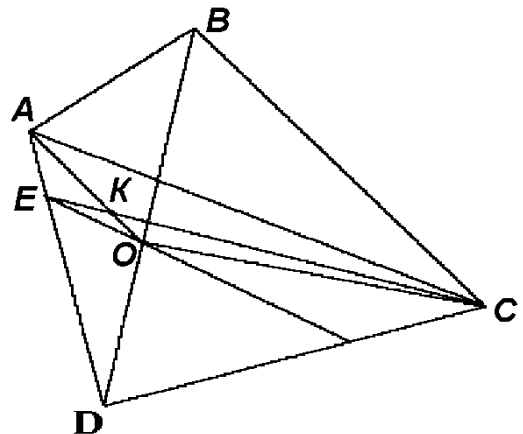


Рис. 6.10

Розглянемо $\triangle ABK$ і $\triangle ADL$. Тут $AB = \frac{BK}{\sin \alpha}$, $AD = \frac{DL}{\sin \alpha}$. Тоді

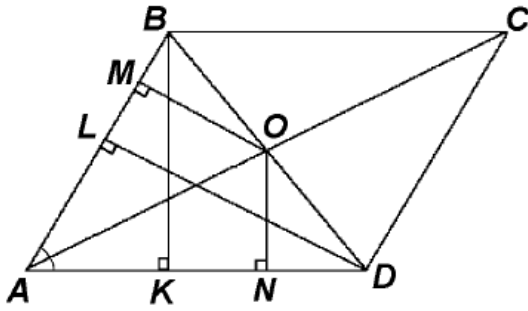


Рис. 6.11

$$AB = \frac{2ON}{\sin \alpha} = \frac{2n}{\sin \alpha}, \quad AD = \frac{2OM}{\sin \alpha} = \frac{2m}{\sin \alpha}.$$

$$S_{ABCD} = AB \cdot AD \sin \alpha = \frac{4mn}{\sin \alpha}.$$

Чотирикутник $AMON$ – вписаний ($\angle AMO + \angle ANO = 180^\circ$). Із умови вписання

чотирикутника в коло $\angle MON = 180^\circ - \alpha$. За теоремою косинусів для $\triangle MON$

$$MN = \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos \alpha}.$$

За теоремою синусів для $\triangle AMN$

$$\frac{MN}{\sin \alpha} = 2R = AO,$$

де R – радіус кола, описаного навколо $AMON$. Після підстановки

$$AC = 2AO = \frac{2}{\sin \alpha} \sqrt{m^2 + n^2 + 2mn \cos \alpha}.$$

Аналогічно

$$BD = \frac{2}{\sin \alpha} \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \alpha}.$$

Приклад 6.9. Центр кола, вписаного в прямокутну трапецію, віддалений від кінців її бічної сторони на відстані 3 і 9. Знайти сторони трапеції.

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.12). Центр кола, вписаного в багатокутник, лежить на перетині бісектрис внутрішніх кутів цього багатокутника. Тому $\angle BCO = \angle OCD$, $\angle CDO = \angle ADO$.

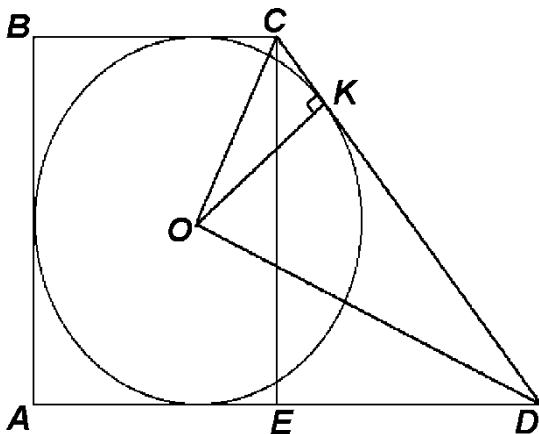


Рис. 6.12

Через паралельність BC і AD $\angle BCD + \angle CDA = 180^\circ$.

Тоді

$$\angle DCO + \angle CDO = \frac{1}{2}(\angle BCD + \angle CDA) = 90^\circ.$$

Отже, $\triangle COD$ – прямокутний з

$\angle COD = 90^\circ$. Позначимо через K точку дотику кола до бічної сторони CD .

Тоді за властивістю дотичної до кола $OK \perp CD$. Розглянемо $\triangle COD$. Тут

$$OK \cdot CD = CO \cdot OD \Rightarrow OK = \frac{CO \cdot OD}{CD} = \frac{CO \cdot OD}{\sqrt{CO^2 + OD^2}} = \frac{9}{\sqrt{10}}.$$

Оскільки трапеція $ABCD$ є прямокутною, то довжина бічної сторони AB дорівнює довжині діаметра, вписаного в коло, тобто

$$AB = 2OK = \frac{18}{\sqrt{10}}.$$

Опустимо з вершини C перпендикуляр CE на основу AD . За теоремою Піфагора

$$ED = \sqrt{CD^2 - CE^2} = \sqrt{CD^2 - AB^2} = \frac{24}{\sqrt{10}}.$$

Із умови вписання кола в трапецію виходить, що

$$BC + AD = AB + CD,$$

тобто

$$BC = \frac{AB + CD - ED}{2} = \frac{12}{\sqrt{10}}, \quad AD = \frac{36}{\sqrt{10}}.$$

Приклад 6.10. У $\triangle ABC$, у якого $\angle B = 60^\circ$, проведено бісектриси AD і CE , що перетинаються в точці O . Довести, що $OD = OE$.

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.13). За умовою задачі $\angle ABC = 60^\circ$. Отже,

$$\angle BAC + \angle ACB = 180^\circ - \angle ABC = 120^\circ.$$

Оскільки AD і CE – бісектриси кутів при основі $\triangle ABC$, то

$$\angle DAC + \angle ACE = \frac{1}{2}(\angle BCA + \angle BAC) = 60^\circ.$$

Звідси $\angle AOC = \angle EOD = 120^\circ$.

Для чотирикутника $BDOE$

$\angle ABC + \angle EOD = 180^\circ$, тобто виконується умова вписання його в коло.

Очевидно, що BO – бісектриса $\angle ABC$, отже, $\angle EBO = \angle DBO$. Обидва ці кути вписано в коло, отже, вони спираються на рівні хорди, тобто $EO = OD$, що й потрібно було довести.

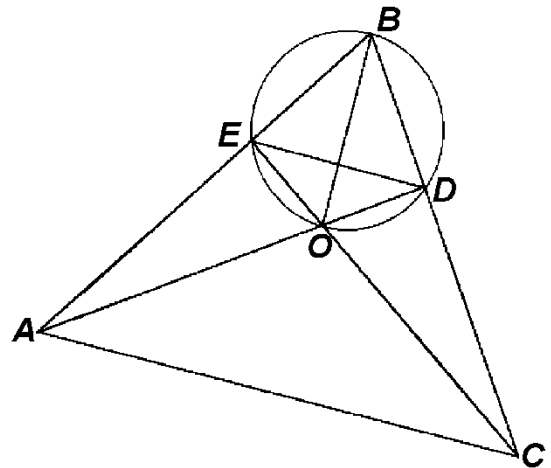


Рис. 6.13

Завдання для самостійної роботи

6.52. Більша основа трапеції дорівнює 24 см. Знайти її меншу основу, знаючи, що відстань між центрами її діагоналей дорівнює 4 см.

6.53. У паралелограмі $ABCD$ висота, проведена з вершини B тупого кута на сторону AD , ділить її у відношенні 5:3, рахуючи від вершини D . Обчислити відношення $AC:BD$, якщо $AD:AB=2$.

6.54. Знайти діагональ і бічну сторону рівнобічної трапеції з основою 20 і 12, якщо відомо, що центр описаного кола лежить на більшій основі.

6.55. Обчислити площу рівнобічної трапеції, якщо її висота дорівнює h , а бічну сторону видно з центра описаного кола під кутом α .

6.56. Перпендикуляр, проведений із вершини паралелограма до його діагоналі, ділить цю діагональ на відрізки 6 і 15. Різниця довжин сторін паралелограма дорівнює 7. Обчислити довжину сторін паралелограма і його діагоналей.

6.57. У рівнобічній трапеції відношення основ становить 3:4, середня лінія і висота дорівнюють 7. Обчислити радіус кола, описаного навколо трапеції.

6.58. Трапецію $KLMN$ з основами KN і LM вписано в коло, центр якого лежить на основі KN . Діагональ KM трапеції дорівнює 4, а бічна сторона $KL = 3$. Визначити LM .

6.59. Сторони паралелограма дорівнюють a і $3a$, а гострий кут між діагоналями – β . Знайти площу паралелограма.

6.60. Визначити площу трапеції, якщо її основи дорівнюють 6 і 11 см, одна із її бічних сторін – 4 см, а сума кутів при нижній основі – 90° .

6.61. У ромб вписано коло, а в коло – квадрат. Чому дорівнює гострий кут ромба, якщо площа квадрата в 4 рази менша за площу ромба?

6.62. Основи трапеції дорівнюють a і b ($b > a$). Знайти відрізок прямої, що з'єднує середини її діагоналей.

6.63. Навколо кола описано рівнобічну трапецію з бічною стороною l , менша основа якої дорівнює a . Знайти радіус кола і площу трапеції.

6.64. У ромб зі стороною 20 см вписано коло. Знайти площу круга, якщо одна діагональ ромба більша за іншу в $\frac{4}{3}$ рази.

6.65. Периметр рівнобічної трапеції вдвічі більший від довжини вписаного кола. Знайти кут при основі трапеції.

6.66. На сторонах AB , BC , CD , DA паралелограма $ABCD$ узяті точки N , K , L , M так, що відрізок KM паралельний до відрізка AB . Знайти площу чотирикутника $NKLM$, якщо площа $ABCD = S$.

6.67. У коло вписано трапецію, бічна сторона якої дорівнює 15, середня лінія – 16, а більша основа є діаметром кола. Визначити площу трапеції.

6.68. Діагоналі рівнобічної трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) перетинаються в точці O . Площі трикутників BOC і AOD дорівнюють 48 і 108, а середня лінія трапеції – 20. Визначити діагоналі.

6.69. Знайти площу трапеції, діагоналі якої дорівнюють 7 і 8, а основи – 3 і 6.

6.70. У ромб зі стороною a і гострим кутом α вписано коло. Визначити площу чотирикутника, вершини якого лежать у точках дотику кола зі сторонами ромба.

6.71. У чотирикутник, три послідовні сторони якого дорівнюють 2, 3, 4 відповідно, вписане коло радіусом 1,2. Знайти площу чотирикутника.

6.72. Знайти діагоналі паралелограма, сторони якого дорівнюють a і b , а більший кут між діагоналями – більшому куту паралелограма.

6.73. У коло вписано прямокутний трикутник ABC , сторона AB якого дорівнює 18, а сторона $BC = 24$. Бісектрису прямого кута продовжено до перетину з колом у точці D , а точку D з'єднано відрізками прямих з вершинами A і C . Знайти площу чотирикутника $ABCD$.

6.74. Визначити площу правильного шестикутника, менша діагональ якого дорівнює 12.

6.75. Навколо кола описано чотирикутник, діагоналі якого взаємно перпендикулярні й дорівнюють 30 і 28, радіус кола – 10. Знайти периметр чотирикутника.

6.76. Навколо кола описано чотирикутник, дві суміжні сторони якого дорівнюють 5 і 12 і утворюють прямий кут. Визначити дві інші сторони чотирикутника, якщо кут між ними становить 60° .

6.77. Через кожну вершину опуклого чотирикутника проведено пряму, паралельну до його діагоналі. Знайти площу отриманого паралелограма, якщо площа вихідного чотирикутника дорівнює 1.

6.78. Трапецію, яка має два прямих кута, описано навколо кола. Знайти її бічні сторони, якщо основи дорівнюють a і b .

6.79. У коло вписано чотирикутник, дві сторони якого дорівнюють 8 і 15, а кут між ними – 60° . Визначити дві інші сторони чотирикутника, якщо одна із них більша за іншу на 1.

6.80. Знайти довжину відрізка прямої, паралельного до основ трапеції і розташованого між її бічними сторонами, який ділить трапецію на дві рівновеликі частини, якщо основи трапеції – a і b .

6.81. Паралелограми $ABCD$ і $BNMK$ мають спільну вершину B . Вершина K другого паралелограма належить стороні AD першого, а вершина C першого – стороні NM другого. Довести, що $S_{ABCD} = S_{BNMK}$.

6.82. Довести, що площа чотирикутника, утвореного центрами сторін опуклого чотирикутника $ABCD$, дорівнює половині площі $ABCD$.

6.83. Нехай AA_1, BB_1, CC_1 – висоти $\triangle ABC$. Довести, що вони є бісектрисами кутів $\triangle A_1B_1C_1$.

6.84. Довести, що площа правильного восьмикутника дорівнює добутку найбільшої і найменшої з його діагоналей.

6.85. Сума кутів при основі трапеції становить 90° . Довести, що відстань між центрами основ дорівнює відстані між центрами діагоналей.

6.4. Подібність трикутників і багатокутників

1. Два багатокутники $A_1A_2\dots A_n$ і $B_1B_2\dots B_n$ ($n \geq 3$) називаються подібними ($A_1A_2\dots A_n \sim B_1B_2\dots B_n$), якщо у них кути A_i і B_i ($i=1,2,\dots,n$) однакові, а сторони, що утворюють ці кути, пропорційні. Відношення відповідних сторін подібних багатокутників називається коефіцієнтом подібності.

Нехай $\triangle A_1A_2A_3 \sim \triangle B_1B_2B_3$ з коефіцієнтом подібності k ; a_i і b_i – сторони цих трикутників, що є протилежними однаковим кутам A_i і B_i ; p_A і p_B – їхні півпериметри; S_A і S_B – площі; r_A, r_B і R_A, R_B – радіуси вписаних і описаних кіл; m_A і m_B , h_A і h_B , l_A і l_B – відповідні медіани, висоти і бісектриси (рис. 6.14).

Основні формули:

$$\frac{a_i}{b_i} = \frac{p_A}{p_B} = \frac{r_A}{r_B} = \frac{R_A}{R_B} = \frac{m_A}{m_B} = \frac{h_A}{h_B} = \frac{l_A}{l_B} = k \quad (i=1,2,3); \quad \frac{S_A}{S_B} = k^2.$$

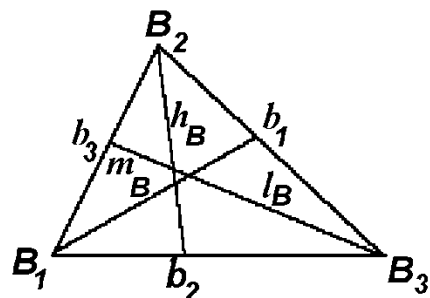
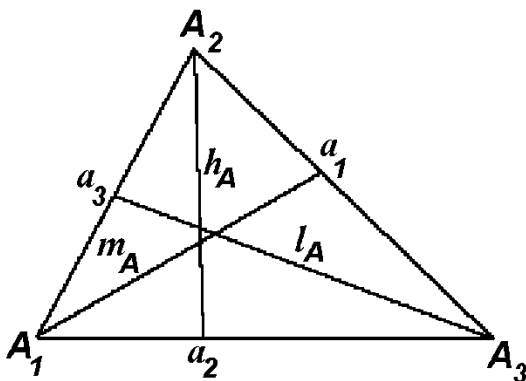


Рис. 6.14

Основні теореми

Теорема 1. Прямі, які перетинають обидві сторони кута, паралельні тоді й тільки тоді, коли відтинають на його сторонах пропорційні відрізки.

Теорема 2. Трикутники $A_1A_2A_3$ і $B_1B_2B_3$ подібні тоді й тільки тоді, коли виконується одна з таких умов:

- а) два кути $\triangle A_1A_2A_3$ дорівнюють двом кутам $\triangle B_1B_2B_3$;
- б) трикутники $A_1A_2A_3$ і $B_1B_2B_3$ мають по рівному куту, а сторони, що утворюють ці кути, є пропорційними;
- в) три сторони одного трикутника пропорційні трьом сторонам іншого.

Теорема 3. Пряма, що перетинає дві сторони трикутника і паралельна до його третій стороні, відтинає трикутник, подібний до даного.

Теорема 4. У подібних багатокутниках відношення будь-яких відповідних лінійних елементів дорівнює коефіцієнту подібності, а відношення площ цих багатокутників – квадрату коефіцієнта подібності.

Розглянемо основні методи розв'язання найбільш типових задач.

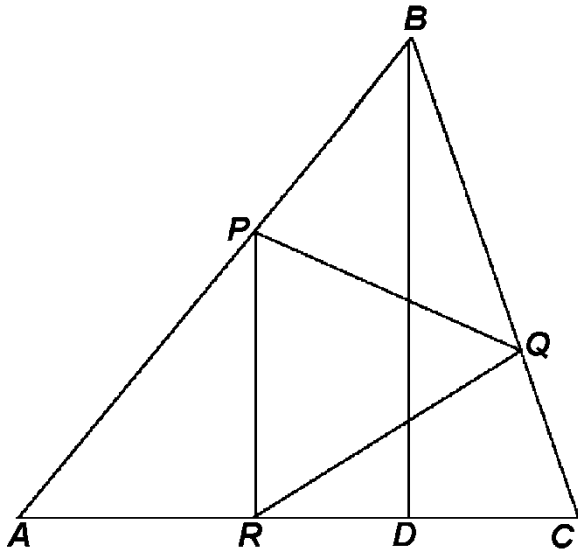


Рис. 6.15

Приклад 6.11. На сторонах BC , CA , AB правильного $\triangle ABC$ узяті точки P , Q , R так, що $AP:PB=BQ:QC=CR:RA=2:1$. Довести, що сторони $\triangle PQR$ відповідно перпендикулярні до сторін $\triangle ABC$.

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.15). Необхідну в задачі умову буде доведено, якщо показати, що сторони $\triangle PQR$ паралельні до висот $\triangle ABC$. Це міркування наводить на думку виконати додаткову побудову в $\triangle ABC$. Опустимо перпендикуляр BD з вершини B на сторону AC . Унаслідок цього сторони кута BAC

пересічені двома прямими BD і PR . BD як висота в рівносторонньому трикутнику одночасно є його медіаною. Тому

$$\frac{RD}{AR} = \frac{AD - AR}{AR} = \frac{AD}{AR} - 1 = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{3}AC} - 1 = \frac{1}{2}.$$

З іншого боку, за умовою $\frac{BP}{AP} = \frac{1}{2}$. За теоремою 1 відрізки BD і PR є паралельними, що й потрібно було довести.

Приклад 6.12. Через деяку точку, взятую всередині трикутника, проведено прямі, паралельні до його сторін. Ці прямі розбивають трикутник на шість частин, три з яких – трикутники з площами S_1 , S_2 , S_3 . Знайти площу вихідного трикутника.

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.16). За умовою

$$A_2C_1 \parallel AC, B_1C_2 \parallel BC, A_1B_2 \parallel AB.$$

Отже,

$$\angle BA_2C_1 = \angle B_2OC_1 = \angle B_2A_1C = \angle BAC,$$

$$\angle B_1OA_2 = \angle B_2C_1A_2 = \angle B_1C_2A = \angle BCA$$

(кути з відповідно паралельними сторонами).

За теоремою 2

$$\triangle A_2B_1O \sim \triangle OB_2C_1 \sim \triangle A_1OC_2 \sim \triangle ABC.$$

Позначимо основи цих трикутників через a_1, a_2, a_3, a , а площі – через S_1, S_2, S_3, S .

Тоді

$$\frac{a_1}{a} = \sqrt{\frac{S_1}{S}}, \quad \frac{a_2}{a} = \sqrt{\frac{S_2}{S}}, \quad \frac{a_3}{a} = \sqrt{\frac{S_3}{S}}$$

(відношення площ подібних трикутників дорівнює квадрату коефіцієнта подібності). За умовою чотирикутники AA_2OA_1 і C_2OC_1C – паралелограми, тобто

$$AA_1 = A_2O = a_1, C_2C = OC_1 = a_2,$$

звідки $a = a_1 + a_2 + a_3$. Тепер одержуємо

$$1 = \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a} = \sqrt{\frac{S_1}{S}} + \sqrt{\frac{S_2}{S}} + \sqrt{\frac{S_3}{S}} \Rightarrow \sqrt{S} = \sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3},$$

тобто $S = (\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2$.

Приклад 6.13. Задано $\triangle A_1A_2A_3$. На його стороні A_1A_2 узято точки B_1 і D_2 , на стороні A_2A_3 – точки B_2 і D_3 , на стороні A_3A_1 – точки B_3 і D_1 так, що, якщо побудувати паралелограми $A_1B_1C_1D_1, A_2B_2C_2D_2$ і $A_3B_3C_3D_3$, то прямі A_1C_1, A_2C_2, A_3C_3 перетинатимуться в одній точці. Довести, що якщо $A_1B_1 = A_2D_2$ і $A_2B_2 = A_3D_3$, то $A_3B_3 = A_1D_1$.

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.17). Нехай P – точка перетину прямих A_1C_1, A_2C_2 і A_3C_3 . Проведемо через неї прямі E_1F_3, E_2F_1 і E_3F_2 , паралельні до сторін $\triangle A_1A_2A_3$. Паралелограми $A_1B_1C_1D_1$ і $A_1E_1PF_1, A_2B_2C_2D_2$ і $A_2E_2PF_2, A_3B_3C_3D_3$ і $A_3E_3PF_3$ – попарно подібні з коефіцієнтами подібності k_1, k_2, k_3 . Доведемо це, наприклад, для першої пари паралелограмів. Через попарну паралельність сторін відповідні кути у них однакові. Крім того, їхні сторони пропорційні, оскільки з подібності $\triangle A_1B_1C_1$ і $\triangle A_1E_1P$ випливає, що $B_1C_1 : E_1P = A_1B_1 : A_1E_1$. Позначимо $A_1F_1 = a_1, F_1E_3 = a_2, E_3A_3 = a_3, A_1E_1 = b_2, E_1F_2 = b_1, F_2A_2 = b_3, A_2E_2 = c_1, E_2F_3 = c_3, F_3A_3 = c_2$. Із

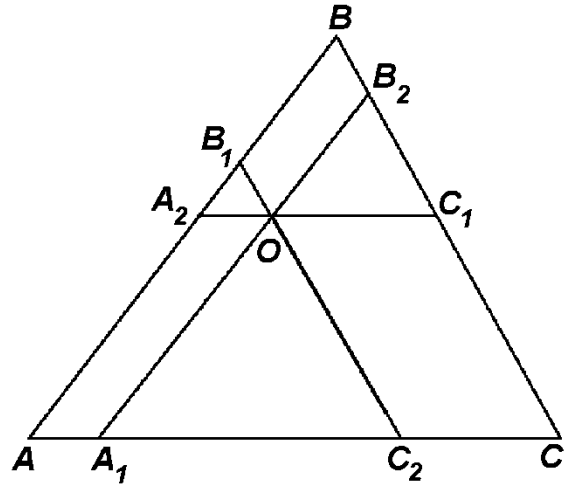


Рис. 6.16

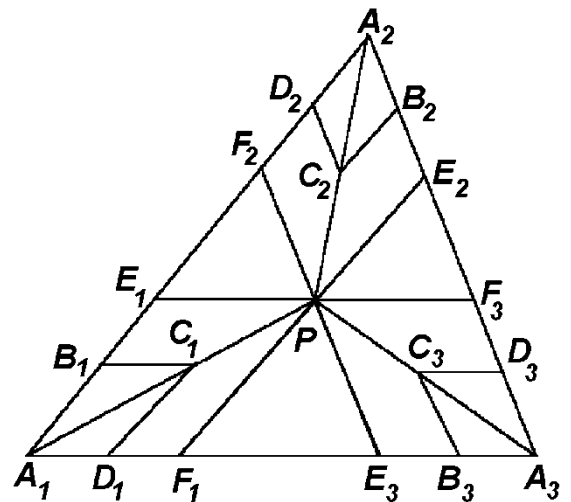


Рис. 6.17

зазначеної вище подібності паралелограмів впливає, що $A_1B_1 = k_1A_1E_1 = k_1b_2$, $A_2D_2 = k_2A_2F_2 = k_2b_3$, $A_2B_2 = k_2A_2E_2 = k_2c_1$, $A_3D_3 = k_3A_3F_3 = k_3c_2$, $A_3B_3 = k_3A_3E_3 = k_3a_3$, $A_1D_1 = k_1A_1F_1 = k_1a_1$. За умовою $A_1B_1 = A_2D_2$, $A_2B_2 = A_3D_3$, звідки

$$k_1b_2 = k_2b_3, \quad k_2c_1 = k_3c_2 \Rightarrow \frac{b_2}{b_3} = \frac{k_2}{k_1}, \quad \frac{c_1}{c_2} = \frac{k_3}{k_2}.$$

Трикутники E_1F_2P , F_1PE_3 і PE_2F_3 подібні як трикутники з відповідно паралельними сторонами. Тоді

$$\frac{b_1}{b_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{k_3}{k_2}, \quad \frac{b_2}{b_3} = \frac{a_2}{a_3} = \frac{c_2}{c_3} = \frac{k_2}{k_1}.$$

Звідси

$$\frac{A_1D_1}{A_3B_3} = \frac{k_1a_1}{k_3a_3} = \frac{k_1}{k_3} \cdot \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} = \frac{k_1}{k_3} \cdot \frac{k_3}{k_2} \cdot \frac{k_2}{k_1} = 1,$$

що й потрібно було довести.

У деяких задачах подібні фігури з'являються на кресленні тільки після додаткової побудови. Як таку іноді проводять описане навколо фігури коло, пересічні хорди якого завжди утворюють подібні трикутники.

Приклад 6.14. Довести, що квадрат бісектриси трикутника дорівнює різниці між добутком сторін, що її утворюють, і добутком відрізків третьої сторони, на які вона ділиться бісектрисою.

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.18). Опишемо навколо $\triangle ABC$ коло і продовжимо бісектрису CD до перетину з колом у точці E . З'єднаємо точки A і E . Унаслідок цієї додаткової побудови отримано подібні трикутники ACE і DBC . Дійсно, $\angle AEC = \angle ABC$ як вписані кути, що спираються на дугу AC . Кути $\angle ACD = \angle BCD$, оскільки CD – бісектриса кута ACB за умовою. Запишемо пропорційність сторін цих трикутників:

$$\frac{CE}{AC} = \frac{CB}{CD}.$$

Для простоти візьмемо $BC = a$, $AC = b$, $AD = m$, $BD = n$, $CD = l$, $DE = x$. Тоді

$$\frac{l+x}{b} = \frac{a}{l} \Rightarrow l(l+x) = a \cdot b \Rightarrow l^2 = a \cdot b - lx.$$

Аналогічно $\triangle AED \sim \triangle CBD$, тобто

$$\frac{l}{n} = \frac{m}{x} \Rightarrow lx = mn.$$

Отже, $l^2 = ab - mn$, що й потрібно було довести.

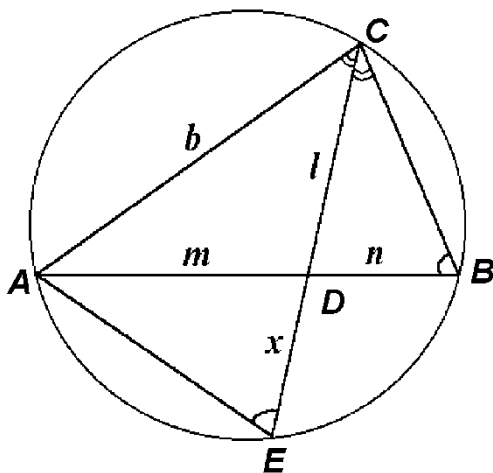


Рис. 6.18

Завдання для самостійної роботи

6.86. До кола, вписаного в трикутник з основою 12 і висотою 8, проведено дотичну, паралельну до основи. Знайти довжину відрізка дотичної, утвореного між сторонами.

6.87. На стороні BC $\triangle ABC$ узято точку A_1 так, що $BA_1 : A_1C = 2 : 1$. В якому відношенні медіана CC_1 ділить відрізок AA_1 на частини, рахуючи від вершини A ?

6.88. Діагоналі розбивають трапецію на чотири трикутники. Знайти площу трапеції, якщо площі трикутників, що примикають до основ, дорівнюють S_1 і S_2 .

6.89. Висота трапеції, діагоналі якої взаємно перпендикулярні, дорівнює 4. Визначити площу трапеції, якщо відомо, що довжина однієї з її діагоналей дорівнює 5.

6.90. У трапеції менша діагональ перпендикулярна до основ. Знайти бічні сторони цієї трапеції, якщо сума протилежних гострих кутів дорівнює 90° , а основи – a і b .

6.91. У прямокутнику $ABCD$ з точки E , що ділить діагональ AC у відношенні $2:1$, рахуючи від A , опущено перпендикуляри EF і EK на сторони AD і AB відповідно. Площа $ABCD$ більша за площу $AKEF$ на 20. Визначити площу кожного з чотирикутників.

6.92. Основа рівнобедреного трикутника дорівнює a , а бічна сторона – b . Знайти відстань між основами рівних висот трикутника.

6.93. У прямокутнику $ABCD$ $AB = 4$, $BC = 10$. На стороні BC узято точку M так, що проведені відрізки AM і MD утворюють прямий кут. Визначити відрізки BM і MC .

6.94. У рівнобедреному трикутнику через точку перетину бісектрис проведено пряму, паралельну до основи. Відрізок цієї прямої, утворений між бічними сторонами трикутника, дорівнює 6. Визначити сторони трикутника, якщо його периметр дорівнює 32.

6.95. Бісектриса тупого кута B паралелограма $ABCD$ перетинає сторону AD у точці E . Через точку E проведено пряму, паралельну AC , яка перетинає сторону CD у точці F . Знайти сторони паралелограма, якщо $DE = a$ і $DF = b$.

6.96. У рівнобічній трапеції $ABCD$ ($AD \parallel BC$) висота BE ділить діагональ AC у відношенні $2:3$, рахуючи від вершини A . Визначити довжину відрізка, що з'єднує вершину нижньої основи з точкою перетину бічних сторін, якщо $AD = 28$, $AB = 20$.

6.97. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) через точку перетину медіан проведено пряму, паралельну AC , що перетинає сторону AB у точці M , а сторону BC – у точці N . Визначити відрізки, на які ця пряма ділить сторону AB , якщо $MN = 12$, а площа $\triangle ABC = 108$.

6.98. У трикутник ABC вписано квадрат так, що дві вершини квадрата лежать на бічних сторонах, а дві інші – на основі. Знайти площу квадрата, якщо основа трикутника дорівнює a , а висота, опущена на основу, – h .

6.99. Основа AC рівнобедреного трикутника ABC є діаметром півкола, яке перетинає бічну сторону AB у точці M , а BC – у точці N . Визначити площу трикутника ABC , якщо хорда $MN = 6$ і $AM:MB$ як $2:3$.

6.100. У паралелограмі $ABCD$ точки M і N – середини сторін BC і CD відповідно. В якому відношенні відрізки AM і AN ділять діагональ BD на три частини?

6.101. Три відрізки з кінцями на сторонах трикутника, паралельні до його сторін, проходять через одну точку і мають однакову довжину x . Знайти x , якщо довжини сторін трикутника дорівнюють a, b, c .

6.102. Довести, що відрізок, який з'єднує основи двох висот гострокутного трикутника, відтинає від нього трикутник, подібний до даного.

6.103. Із вершини паралелограма $ABCD$ проведено висоти AM і AN . Доведіть, що $\triangle AMN \sim \triangle ABC$.

6.104. Через точку перетину медіан $\triangle ABC$ проведено пряму l , яка перетинає сторони AB і AC . Довести, що сума відстаней від прямої l до вершин B і C дорівнює відстані від неї до вершини A .

6.105. У $\triangle ABC$ AA_1, BB_1, CC_1 – висоти, а H – точка їх перетину. Довести, що $AH \cdot A_1H = BH \cdot B_1H = CH \cdot C_1H$.

6.106. Знайти довжину відрізка прямої, паралельного до основ трапеції і утвореного між бічними сторонами, який ділить трапецію на дві подібні трапеції, якщо основи трапеції – a і b .

6.107. На основах AB і CD поза трапецією $ABCD$ побудовано квадрати. Довести, що пряма, яка з'єднує їхні центри, проходить через точку перетину діагоналей трапеції.

6.108. Дано опуклий n -кутник $A_1A_2\dots A_n$ і всередині нього – довільну точку O . Із точки O проведено n променів, що проходять через вершини n -кутника. Нехай k – довільне додатне число ($k \neq 1$). Від точки O по променях OA_i відкладено відрізки $OB_i = kOA_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Довести, що n -кутник $B_1B_2\dots B_n$ подібний до даного і знайти коефіцієнт подібності.

6.5. Застосування тригонометрії в планіметрії

При розв'язанні багатьох задач на обчислення й доведення зручно використовувати тригонометричні функції кутів геометричної фігури, а також тотожності, що зв'язують ці функції з іншими геометричними параметрами. Далі прийнято позначення, які було введено в підрозд. 6.1.

Основні формули:

$$a = 2R \sin \alpha; b = 2R \sin \beta; c = 2R \sin \gamma; \quad (6.1)$$

$$\cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}; \cos \beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}; \cos \gamma = \frac{b^2 + a^2 - c^2}{2ab}; \quad (6.2)$$

$$p = R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma) = 4R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}; \quad (6.3)$$

$$r = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = p \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}; \quad (6.4)$$

$$r_a = 4R \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}; r_b = 4R \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\gamma}{2}; r_c = 4R \sin \frac{\gamma}{2} \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2}; \quad (6.5)$$

$$S = 2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma = p^2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \frac{\beta}{2} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}; \quad (6.6)$$

$$\sin \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}; \cos \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}; \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{p(p-a)}}. \quad (6.7)$$

У задачах часто використовують такі тотожності для тригонометричних функцій кутів довільного трикутника:

$$\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} + \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ctg} \frac{\beta}{2} \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2}; \quad (6.8)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}; \quad (6.9)$$

$$\sin \beta + \sin \gamma - \sin \alpha = 4 \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \quad (6.10)$$

Розглянемо основні методи розв'язання найбільш типових задач.

Приклад 6.15. У трикутнику $r = 1$, $R = 2\sqrt{3}$, $b + a - c = 2\sqrt{3}$. Знайти $\cos(\alpha - \beta)$ (α , β – кути проти сторін a і b).

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.19). Запишемо теорему синусів для цього трикутника:

$$a = 4\sqrt{3} \sin \alpha; \quad b = 4\sqrt{3} \sin \beta; \quad c = 4\sqrt{3} \sin \gamma.$$

За умовою задачі

$$\begin{aligned} b + a - c &= 2\sqrt{3} = 4\sqrt{3}(\sin \alpha + \sin \beta - \sin \gamma) = \\ &= 16\sqrt{3} \cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Тут використано тотожність (6.10). Таким чином,

$$\cos \frac{\gamma}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{8}.$$

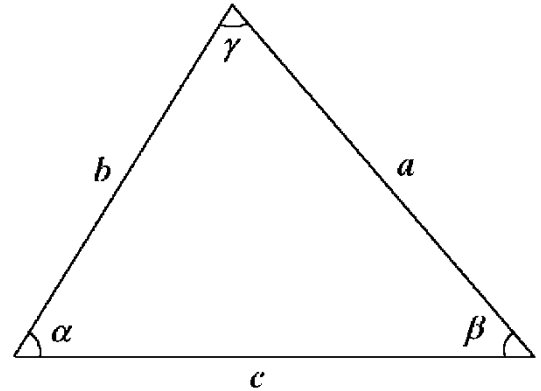


Рис. 6.19

Запишемо інше співвідношення між тригонометричними функціями кутів трикутника, виходячи з формули для радіуса вписаного кола:

$$\begin{aligned} r = \frac{S}{p} &= \frac{\frac{1}{2}ab \sin \gamma}{R(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma)} = \frac{2R^2 \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma}{4R \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2}} = \\ &= 4R \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = 8\sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = 1. \end{aligned}$$

У цих рівностях знаменник перетворено за допомогою формули (6. 9) (можна відразу використати тотожність (6. 4)). Унаслідок цього отримано два співвідношення між тригонометричними функціями кутів трикутника:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{8\sqrt{3}}, \\ \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{8}, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \\ \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{1}{8\sqrt{3}} \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} \gamma = \frac{\pi}{3}, \\ \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} = \frac{1}{4\sqrt{3}}, \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \alpha + \beta = \frac{2\pi}{3}, \\ \cos \frac{\alpha - \beta}{2} - \cos \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \end{cases} \\ \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{3}}; \cos(\alpha - \beta) &= 2 \cos^2 \frac{\alpha - \beta}{2} - 1 = 2 \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{4 \cdot 3} - 1 = \frac{\sqrt{3} - 1}{3}. \end{aligned}$$

У багатьох задачах кути фігури не задано. Їх можна отримати з інших даних або ввести як допоміжні параметри, що не фігурують в остаточному результаті.

Приклад 6.16. Довести, що відстань від ортоцентра до вершини в гострокутному трикутнику в два рази більша за відстань від центра описаного кола до сторони, протилежної цій вершині.

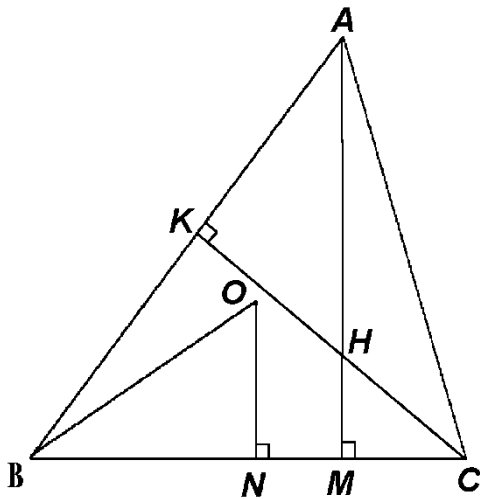


Рис. 6.20

тобто

$$AH = \frac{b \cos \alpha}{\sin \beta} = 2R \cos \alpha$$

(теорема синусів).

З іншого боку, із прямокутного трикутника BON

$$ON = \sqrt{BO^2 - BN^2},$$

$$ON = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 \alpha} = R \cos \alpha \quad (\alpha < 90^\circ),$$

звідки $AH = 2ON$, що й потрібно було довести.

Приклад 6.17. Довести теорему Птолемея: якщо $ABCD$ – вписаний чотирикутник, то

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$$

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.21). Опишемо коло навколо чотирикутника $ABCD$. Введемо позначення: $AB = c$, $BC = d$, $CD = a$, $AD = b$, $\angle DAC = \alpha$, $\angle ABD = \beta$, $\angle BCA = \gamma$, $\angle CDB = \delta$. За властивістю вписаних кутів, що

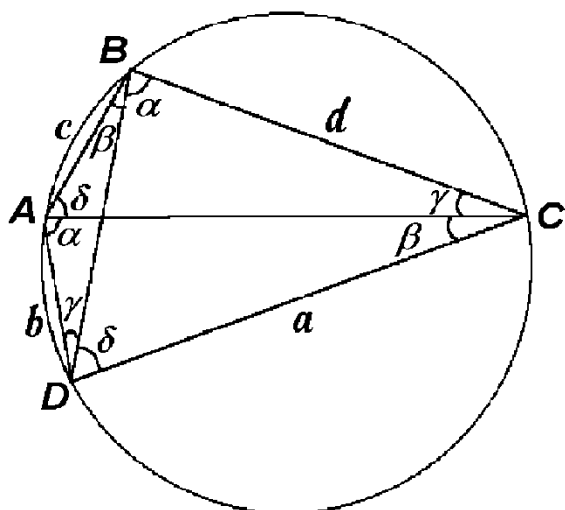


Рис. 6.21

спираються на однакові дуги окружності,
 $\angle DBC = \angle DAC = \alpha$, $\angle ACD = \angle ABD = \beta$,
 $\angle BDA = \angle BCA = \gamma$, $\angle CAB = \angle CDB = \delta$.

Для трикутників ABC , BCD і ABD запишемо теорему синусів:

$$AC = 2R \sin(\alpha + \beta); \quad BD = 2R \sin(\beta + \gamma);$$

$$a = 2R \sin \alpha;$$

$$b = 2R \sin \beta; \quad c = 2R \sin \gamma; \quad d = 2R \sin \delta,$$

де R – радіус кола, описаного навколо чотирикутника $ABCD$. Як відомо, сума кутів чотирикутника дорівнює 360° . Отже,
 $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$.

Щоби довести потрібну рівність, досить

довести тригонометричну тотожність

$$\sin(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma) = \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \delta$$

при виконанні умови $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 180^\circ$. Перетворимо ліву частину співвідношення на різницю косинусів і спростимо результат за допомогою умови

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta)\sin(\beta + \gamma) &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) - \cos(\alpha + \gamma + 2\beta)] = \\ &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) - \cos(180^\circ + \beta - \delta)] = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) + \cos(\beta - \delta)].\end{aligned}$$

З іншого боку,

$$\begin{aligned}\sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \delta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) + \cos(\beta - \delta) - \cos(\alpha + \gamma) - \cos(\beta + \delta)] = \\ &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) - \cos(180^\circ - \beta - \delta) + \cos(\beta - \delta) - \cos(\beta + \delta)] = \\ &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) + \cos(\beta + \delta) + \cos(\beta - \delta) - \cos(\beta + \delta)] = \\ &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \gamma) + \cos(\beta - \delta)],\end{aligned}$$

що й потрібно було довести.

Приклад 6.18. Радіус кола, описаного навколо $\triangle ABC$, дорівнює R . Знайти радіус кола, описаного навколо трикутника, вершини якого розташовані в центрах зовні вписаних кіл $\triangle ABC$.

Розв'язання. Нарисуємо креслення до задачі (рис. 6.22). Кожне зовні вписане коло дотикається до однієї сторони $\triangle ABC$ і продовжень двох інших сторін.

Нехай O_1, O_2, O_3 – центри зовні вписаних кіл $\triangle ABC$. Оскільки центр кола, вписаного в кут, лежить на бісектрисі цього кута, то точки O_1, O_2, O_3 є точками перетину бісектриси внутрішнього кута з двома бісектрисами зовнішніх кутів $\triangle ABC$. Тому

$$\begin{aligned}\angle O_1CB + \angle BCA + \angle ACO_2 &= \\ &= \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCA) + \angle BCA + \\ &+ \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCA) = 180^\circ,\end{aligned}$$

тобто відрізки, що з'єднують центри зовні вписаних кіл, проходять через вершини $\triangle ABC$. Далі

$$\angle O_1CB + \angle BCO_3 = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle BCA) + \frac{1}{2}\angle BCA = 90^\circ,$$

тобто бісектриси $\triangle ABC$ збігаються з висотами $\triangle O_1O_2O_3$.

Виразимо кути $\triangle O_1O_2O_3$ через кути $\triangle ABC$. Нехай α, β, γ – кути вихідного трикутника. Тоді

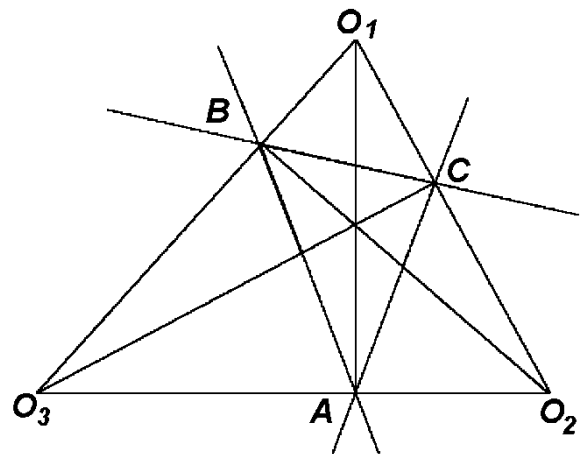


Рис. 6.22

$$\begin{aligned}\angle O_3O_1O_2 &= 180^\circ - \angle O_1BC - \angle O_1CB = \\ &= 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\beta}{2}\right) - \left(90^\circ - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{\beta + \gamma}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Аналогічно

$$\angle O_1O_2O_3 = 90^\circ - \frac{\beta}{2}, \quad \angle O_2O_3O_1 = 90^\circ - \frac{\gamma}{2}.$$

Оскільки кути $\triangle O_1BC$ збігаються з кутами $\triangle O_1O_2O_3$, то ці трикутники є подібними з коефіцієнтом подібності

$$k = \frac{O_1C}{O_1O_3} = \cos \angle O_3O_1O_2 = \cos \left(90^\circ - \frac{\alpha}{2}\right) = \sin \frac{\alpha}{2}$$

($\triangle O_3O_1C$ – прямокутний). З іншого боку, з подібності цих трикутників випливає, що

$$k = \frac{R_1}{R_0},$$

де R_1 , R_0 – радіуси кіл, описаних навколо трикутників $\triangle O_1BC$ і $\triangle O_1O_2O_3$. Отже,

$$R_0 = \frac{R_1}{k} = \frac{BC}{2 \sin \angle BO_1C \cdot k} = \frac{BC}{\sin \alpha}.$$

Останній вираз за теоремою синусів для $\triangle ABC$ дорівнює $2R$, тобто $R_0 = 2R$.

Завдання для самостійної роботи

6.109. Через вершину кута α при основі рівнобедреного трикутника проведено пряму, яка перетинає протилежну бокову сторону і утворює з основою кут β ($\beta < \alpha$). В якому відношенні ця пряма ділить площу трикутника?

6.110. Навколо кола описано трапецію з кутами при основі α і β . Знайти відношення площі трапеції до площі кола.

6.111. Висота трикутника, що дорівнює 6, ділить кут трикутника у відношенні 2:1, а сторону – на відрізки, менший з яких дорівнює 3. Визначити сторони трикутника.

6.112. У прямокутному трикутнику дано гострий кут α і відстань a від вершини іншого гострого кута до центра вписаного кола. Визначити площу трикутника.

6.113. У $\triangle ABC$ кут A дорівнює α , сторона BC – a . Знайти довжину бісектриси AD , якщо кут між AD і висотою AE дорівнює β .

6.114. Дано рівнобедрену трапецію, в яку вписано коло і навколо якої описано коло. Відношення висоти трапеції до радіуса описаного кола дорівнює $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Визначити гострий кут при основі трапеції.

6.115. Одна з основ трапеції є діаметром кола радіусом R , а інша – відтинає від кола дугу α радіан ($0 < \alpha < \pi$). Визначити площу трапеції.

6.116. Бічні сторони трапеції дорівнюють відповідно p і q ($p < q$), більша основа – b . Кути при більшій основі відносяться як 2:1. Знайти меншу основу.

6.117. Через точку M , що лежить всередині кола радіусом r , проведено діаметр AB і хорду CD так, що кут BMD дорівнює α , кут BDM – β . Знайти площу трикутника MBD .

6.118. Непаралельні бічні сторони трапеції перпендикулярні одна до одної. Одна

з них утворює з основою кут α , а інша – такий самий кут з діагоналлю. Обчислити площу трапеції, якщо її висота дорівнює h .

6.119. У гострокутному $\triangle ABC$ з вершини B проведено медіану BD , що дорівнює m . Кут A дорівнює α , кут C – γ . Обчислити площу $\triangle ABC$.

6.120. У рівнобічну трапецію з тупим кутом α вписано коло радіусом r . Визначити довжину кола, описаного навколо тієї ж трапеції.

6.121. У рівнобедреному трикутнику ABC ($AB = BC$) проведено медіану AD . Знайти кут BAD , якщо кут при вершині B дорівнює α .

6.122. Гострий кут прямокутного трикутника дорівнює α , радіус кола, що дотикається до гіпотенузи і продовжень двох катетів, – R . Знайти довжину гіпотенузи цього трикутника.

6.123. Визначити висоту рівнобедреного трикутника, у якого кут при основі дорівнює α , а різниця між радіусами описаного й вписаного кіл – d .

6.124. У коло вписано трикутник з кутом β при вершині B , сторону AB , яка дорівнює стороні BC , продовжено до перетину в точці D з дотичною, яку проведено через вершину кута C . Знайти відношення площ трикутників ABC і BDC .

6.125. У трикутнику один кут вдвічі більший за інший, а сторони, протилежні цим кутам, відрізняються одна від одної на 2. Знайти ці сторони, якщо відомо, що третя сторона трикутника дорівнює 5.

6.126. Знайти косинус кута при основі рівнобедреного трикутника, знаючи, що точка перетину його висот лежить на вписаному колі.

6.127. Із точки A , що лежить поза колом радіусом R , по одну сторону від його центра проведено дотичну AB і січну AC . Знайти площу $\triangle ABC$, якщо січна нахилена під кутом α до дотичної і проходить на відстані a від центра кола.

6.128. У $\triangle ABC$ проведено висоти AA_1, BB_1, CC_1 . Знайти радіус кола, описаного навколо $\triangle A_1B_1C_1$, якщо радіус кола, описаного навколо $\triangle ABC$, дорівнює R .

6.129. Довести, що для будь-якого $\triangle ABC$ виконується співвідношення

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

6.130. Довести, що у всякому трикутнику має місце таке співвідношення:

$$\frac{a(a+c-b)}{b(b+c-a)} = \frac{1-\cos A}{1-\cos B}.$$

6.131. Довести, що якщо O – центр вписаного кола в $\triangle ABC$, то $OA \cdot OB \cdot OC = 4Rr^2$.

6.132. Бісектриси внутрішніх кутів $\triangle ABC$ перетинають описане коло в точках L, M, N . Довести, що площа $\triangle LMN$ дорівнює $\frac{Rp}{2}$.

6.133. Довести, що якщо O – центр вписаного кола в $\triangle ABC$, то

$$BC \cdot AO^2 + AC \cdot OB^2 + AB \cdot OC^2 = AB \cdot BC \cdot AC.$$

Розділ 7. СТЕРЕОМЕТРІЯ

7.1. Паралелепіеди і призми

Нагадаємо основні формули, необхідні для розв'язання задач цього підрозділу. Позначення: V – об'єм тіла; $S_{\text{б}}$ – бічна поверхня; S – площа основи; H – висота; l – довжина бічного ребра.

Об'єм паралелепіеда і призми обчислюється за формулою

$$V = S \cdot H,$$

зокрема, для прямокутного паралелепіеда

$$V = abc,$$

де a , b , c – довжини трьох його вимірів.

У багатьох випадках об'єм похилої призми або паралелепіеда зручно обчислювати за формулою

$$V = S_1 l,$$

де S_1 – площа перерізу, ортогонального до бічного ребра. Периметр цього перерізу P може бути використаний при обчисленні бічної поверхні за формулою

$$S_{\text{б}} = Pl.$$

Площа основи і площа ортогонального перерізу зв'язані співвідношенням

$$S_1 = S \cos \alpha,$$

де α – кут між площиною основи і площиною ортогонального перерізу.

Розглянемо розв'язання типових задач.

Приклад 7.1. Ребра паралелепіеда, що виходять з однієї вершини, дорівнюють a , b і c . Ребра, що дорівнюють a і b , взаємно перпендикулярні, а бічне ребро, що дорівнює c , утворює з кожним з них кут α . Знайти кут нахилу бічного ребра до площини основи, об'єм і бічну поверхню паралелепіеда.

Розв'язання. Розглянемо прямокутник $ABCD$ зі сторонами $AB = a$ і $BC = b$, що лежить в основі паралелепіеда. Бічне ребро BB' дорівнює c і утворює з ребрами AB і BC рівні кути α , тому основа висоти $B'O$, опущеної з вершини B' на основу, потрапляє на бісектрису прямого кута B , що лежить в основі. Це впливає з рівності прямокутних трикутників $B'BK$ і $B'BK'$, а також $BK'O$ і BKO (рис. 7.1).

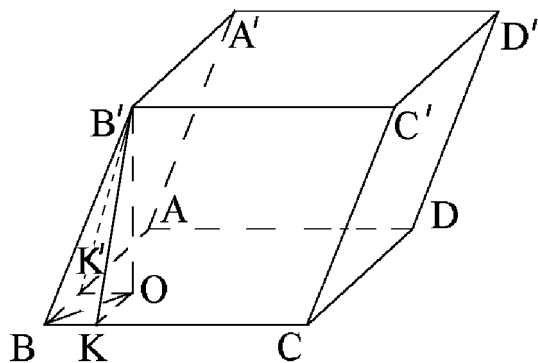


Рис. 7.1

Із $\triangle B'BK$ визначимо катет $B'K$, що лежить проти кута α : $B'K = c \sin \alpha$; $B'K' = B'K = c \sin \alpha$. Знайдені відрізки є висотами паралелограмів, що є бічними гранями. Звідси і визначається бічна поверхня

$$S_{\text{б}} = 2BC \cdot B'K + 2AB \cdot B'K' = 2c \sin \alpha (a + b).$$

Розглянемо $\triangle BB'K$, де $BK = c \cos \alpha$. З огляду на те, що кут B в основі дорівнює 90° , трикутник BKO має $\angle OBK = 45^\circ$, $\angle BKO = 90^\circ$, отже,

$BK = OK$, а $BO = \sqrt{2}c \cos \alpha$. Тепер можна визначити із прямокутного трикутника

BOB' висоту $H = B'O$:

$$H = \sqrt{BB'^2 - BO^2} = \sqrt{c^2 - 2c^2 \cos^2 \alpha} = c\sqrt{1 - 2\cos^2 \alpha} = c\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Слід зауважити, що кут α обов'язково має бути більший 45° , оскільки в тригранному куті при вершині B виконується нерівність $2\alpha > 90^\circ$. Тому кут 2α має від'ємний косинус: $(\cos 2\alpha < 0)$ і під коренем – додатне число.

Визначимо тепер об'єм паралелепіпеда за формулою $V = SH$:

$$S = ab, \quad V = abc\sqrt{-\cos 2\alpha}.$$

Величина кута, утвореного ребром $BB'C$ з площиною основи, визначається як кут між похилою BB' і її проекцією BO . З трикутника $BB'O$ знаходимо

$$\cos \angle B'BO = \frac{BO}{BB'} = \frac{\sqrt{2}c \cos \alpha}{c} = \sqrt{2} \cos \alpha,$$

звідки $\angle BB'O = \arccos(\sqrt{2} \cos \alpha)$.

З області визначення $\arccos(\sqrt{2} \cos \alpha)$ маємо

$$\begin{cases} -1 < \sqrt{2} \cos \alpha < 1, \\ 45^\circ < \alpha < 135^\circ. \end{cases}$$

Приклад 7.2. У правильній трикутній призмі кут між діагоналлю бічної грані й іншою бічною гранню дорівнює α . Визначити бічну поверхню призми, якщо ребро основи дорівнює a .

Розв'язання. Розглянемо правильну призму $ABCA'B'C'$ і проведемо в грані $AA'B'B$ діагональ AB' (рис. 7.2).

Для визначення кута, утвореного діагоналлю AB' і гранню $BB'C'C$, побудуємо проекцію діагоналі AB' на цю грань, тобто з точки A опустимо перпендикуляр AD на площину грані $BB'C'C$. Задана призма – правильна, тому AD лежатиме в основі (грань $ABC \perp$ грані $BB'C'C$) і збігатиметься з висотою трикутника ABC . Заданим кутом α є кут $AB'B$ у прямокутному (за теоремою про три перпендикуляри) трикутнику $AB'D$. Із $\triangle BB'D$ знаходимо $H = BB'$:

$$H = \sqrt{B_1D^2 - BD^2} = \sqrt{AD^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - BD^2} =$$

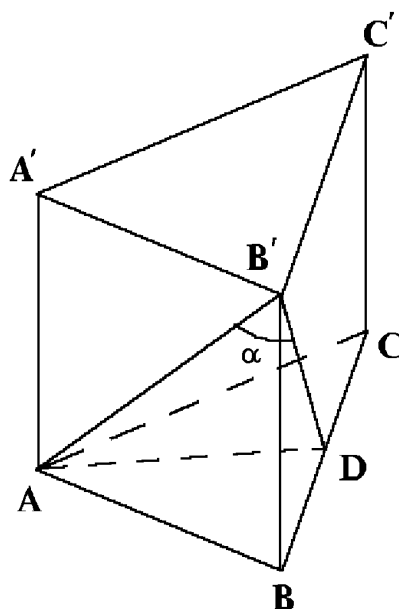


Рис. 7.2

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\left(\frac{3a^2}{4}\operatorname{ctg}^2 \alpha - \frac{a^2}{4}\right)} = \frac{a}{2}\sqrt{3\operatorname{ctg}^2 \alpha - 1} = \frac{a\sqrt{3\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha}}{2\sin \alpha} = \frac{a\sqrt{1+2\cos 2\alpha}}{2\sin \alpha} = \\
&= \frac{2a\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \cos 2\alpha\right)}}{2\sin \alpha} = \frac{a\sqrt{\cos(30^\circ + \alpha)\cos(30^\circ - \alpha)}}{\sin \alpha}.
\end{aligned}$$

Аналіз області визначення дозволяє визначити, що

$$0 < \alpha < 60^\circ.$$

Приклад 7.3. Діагоналі двох суміжних бічних граней прямокутного паралелепіпеда, що не перетинаються, нахилені до площини його основи під кутами α і β . Знайти кут між цими діагоналями.

Розв'язання. Розглянемо діагоналі, що не перетинаються, AD' і BA' . Оскільки

$AD' \parallel BC'$, то шуканим кутом буде кут $C'BA'$. Лінійні розміри паралелепіпеда не задано, але для полегшення обчислення позначимо висоту паралелепіпеда $AA' = H$. Це дозволить обчислити сторони основи і сторони трикутника $BC'A'$. Кут $C'BA'$ позначимо φ (рис. 7.3).

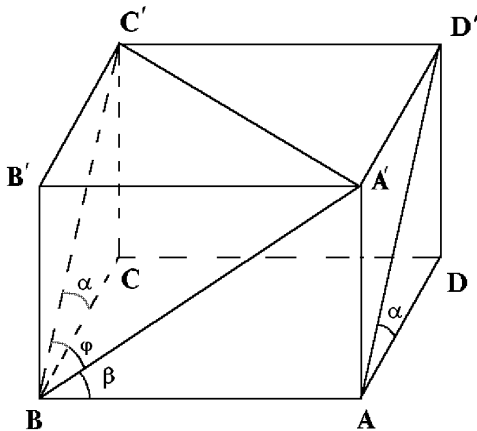


Рис. 7.3

$$\text{Із } \triangle AA'B: A'B = \frac{H}{\sin \beta}; AB = \frac{H}{\operatorname{tg} \beta} = H \operatorname{ctg} \beta. \quad \text{Із}$$

$$\triangle BCC': BC' = \frac{H}{\sin \alpha}; BC = H \operatorname{ctg} \alpha,$$

$$A'C' = \sqrt{AB^2 + BC^2} = H\sqrt{\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta}.$$

За теоремою косинусів із $\triangle BC'A'$ отримуємо

$$A'C'^2 = BC'^2 + BA'^2 - BC' \cdot BA' \cos \varphi,$$

$$\begin{aligned}
\cos \varphi &= \frac{A'C'^2 - BC'^2 - BA'^2}{2BC' \cdot BA'} = \frac{H^2(\operatorname{ctg}^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \beta) - \frac{H^2}{\sin^2 \alpha} - \frac{H^2}{\sin^2 \beta}}{2\frac{H^2}{\sin \alpha \sin \beta}} = \sin \alpha \sin \beta.
\end{aligned}$$

Звідси знаходимо $\varphi = \arccos(\sin \alpha \sin \beta)$.

Завдання для самостійної роботи

7.01. У прямокутному паралелепіпеді сторони основи дорівнюють 7 і 24 см, а висота – 8 см. Визначити площу діагонального перерізу і тангенс кута нахилу діагоналі паралелепіпеда до площини основи.

7.02. Основа прямого паралелепіпеда – ромб, у якого менша діагональ – d , а гострий кут – α . Площа бічної поверхні паралелепіпеда дорівнює S . Знайти об'єм паралелепіпеда.

7.03. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює l і утворює з двома

суміжними бічними гранями кути α і β . Знайти об'єм паралелепіпеда.

7.04. Знайти об'єм паралелепіпеда, усі грані якого – ромби із стороною a і гострим кутом α .

7.05. Діагоналі бічних граней прямокутного паралелепіпеда утворюють з площиною основи кути, які дорівнюють α і β відповідно. Знайти кут між діагоналлю паралелепіпеда і площиною основи.

7.06. Визначити об'єм правильної шестикутної призми, у якій найбільша діагональ – d , а бічні грані – квадрати.

7.07. Бічне ребро прямого паралелепіпеда дорівнює h . Діагоналі суміжних бічних граней, що виходять з однієї вершини, взаємно перпендикулярні й рівні, а їхні проекції на площину основи утворюють кут 120° . Визначити об'єм паралелепіпеда.

7.08. Сторони основи прямого паралелепіпеда дорівнюють 7 і 17 см, а його діагоналі утворюють з площиною основи кути 45° і 30° . Знайти висоту паралелепіпеда.

7.09. В основі похилої призми лежить прямокутний трикутник ABC з катетом $BC = a$. Вершина B_1 верхньої основи проектується на середину катета BC . Двогранний кут між гранями, що містять катет BC і гіпотенузу AB , дорівнює α . Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом β . Визначити бічну поверхню призми.

7.10. У прямокутному паралелепіпеді бічне ребро дорівнює 5 см, площа діагонального перерізу – 205 см^2 , а площа основи – 360 см^2 . Визначити сторони основи.

7.11. В основі паралелепіпеда лежить ромб $ABCD$, в якому кут $\angle BAD = 60^\circ$, бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 60° , а площина $AA'C'C$ перпендикулярна до основи. Довести, що площі перерізів $BB'D'D$ і $AA'C'C$ відносяться як 2: 3.

7.12. Діагональ прямокутного паралелепіпеда дорівнює l і утворює з бічним ребром кут α . Периметр основи дорівнює p . Знайти бічну поверхню і об'єм паралелепіпеда.

7.13. У похилому паралелепіпеді проекція бічного ребра на площину основи дорівнює 5 см, а висота – 12 см. Переріз, перпендикулярний до бічного ребра, є ромбом, діагональ якого дорівнює 8 см, а площа – 24 см^2 . Знайти бічну поверхню і об'єм паралелепіпеда.

7.14. Основою паралелепіпеда є ромб із стороною 6 см і гострим кутом 30° . Діагональ однієї бічної грані перпендикулярна до площини основи, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60° . Знайти об'єм паралелепіпеда.

7.15. Основою прямої призми є рівнобедрений трикутник, основа якого – a і кут при основі – α . Визначити об'єм призми, якщо її бічна поверхня дорівнює сумі площ її основ.

7.16. Основою призми є правильний трикутник із стороною a . Бічне ребро призми дорівнює b . Одне з бічних ребер утворює з прилеглими до нього сторонами основи кути 45° . Знайти бічну поверхню призми.

7.17. Основою прямого паралелепіпеда є ромб. Площі діагональних перерізів – S_1, S_2 . Знайти площу бічної поверхні паралелепіпеда.

7.2. Піраміди

Для визначення об'ємів піраміди і зрізаної піраміди використовуємо відомі формули:

– для піраміди

$$V_{nip} = \frac{1}{3}SH,$$

де S – площа основи, H – висота піраміди;

– для зрізаної піраміди

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}),$$

де S_1, S_2 – площі верхньої і нижньої основ, H – висота зрізаної піраміди.

При визначенні бічної поверхні піраміди обчислюємо площі всіх трикутників, що є бічними гранями піраміди. Для правильної піраміди

$$S_{\sigma} = \frac{1}{2}Ph,$$

де h – апофема бічної грані, P – периметр основи.

Гранями зрізаної піраміди є трапеції. Для правильної піраміди існує також формула

$$S_{\sigma} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h,$$

де P_1, P_2 – периметри верхньої і нижньої основ, h – апофема грані.

Використовується також співвідношення для паралельних перерізів піраміди S_1 і S_2 :

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{h_1^2}{h_2^2},$$

де S_1, S_2 – площі паралельних перерізів піраміди; a_1, a_2 – довжини подібних елементів; h_1, h_2 – відстані перерізів від вершини піраміди.

При розв'язанні задач часто необхідно визначити положення точки, яка є основою висоти піраміди. У правильних пірамідах це центр правильного багатокутника, що лежить в основі. У неправильній піраміді визначення положення висоти може полегшити умова, що всі ребра – рівні. В цьому випадку рівними є і усі їхні проекції і, отже, висота потрапляє в центр кола, описаного навколо основи. Очевидно, і кути, утворені ребрами з основою, є рівними. Якщо задано рівність усіх двограних кутів, утворених бічними гранями з основою, то це спричиняє рівність апофем бічних граней і їхніх проекцій, отже, основа висоти – центр вписаного в основу кола.

Якщо задано не лише рівність двограних кутів при основі, але й величину цього кута, то бічна поверхня зв'язана з площею основи співвідношенням

$$S_{\sigma_{\text{біч}}} \cos \alpha = S_{\text{основ}}.$$

Розглянемо розв'язання типових задач.

Приклад 7.4. Основа чотирикутної піраміди – прямокутник з діагоналлю, що дорівнює b , і кутом α між діагоналями. Кожне бічне ребро утворює з основою кут β . Знайти об'єм піраміди (рис. 7.4).

Розв'язання. Із умов задачі відомо, що $AC = b$, $\angle AOB = \alpha$, $\angle SAO = \beta$. Оскільки всі ребра утворюють з основою однакові кути β , а проекцією ребра є половина діагоналі, то висота

$$SO = OC \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \beta.$$

Площу основи можна знайти за формулою

$$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \sin \alpha = \frac{1}{2} b^2 \sin \alpha.$$

Таким чином, об'єм піраміди

$$\frac{1}{3} SH = \frac{1}{3} \cdot \frac{b^2}{2} \sin \alpha \cdot \frac{b}{2} \operatorname{tg} \beta = \frac{1}{12} b^2 \sin \alpha \operatorname{tg} \beta.$$

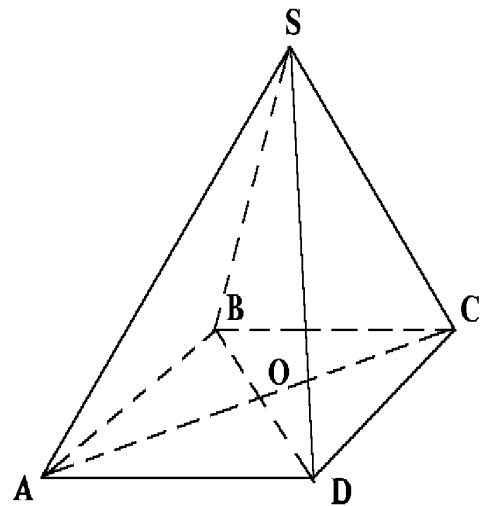


Рис. 7.4

Приклад 7.5. Сторони основи правильної чотирикутної зрізаної піраміди дорівнюють 3 і $3\sqrt{3}$ см, бічна грань нахилена до площини основи під кутом α . Визначити об'єм і повну поверхню піраміди (рис. 7.5).

Розв'язання. Основами піраміди є квадрати, площі яких

$$S_1 = 9 \text{ см}^2, S_2 = 27 \text{ см}^2.$$

Спроектуємо верхню основу на нижню. Бічна поверхня проектується на область між квадратами $ABCD$ і $A_2B_2C_2D_2$. Тому

$$S_{\theta} = \frac{(S_2 - S_1)}{\cos \alpha} = \frac{18}{\cos \alpha}.$$

Тепер можна визначити повну поверхню зрізаної піраміди:

$$S_{\text{нов}} = S_1 + S_2 + S_{\theta}, S = 9 + 27 + \frac{18}{\cos \alpha} = 18 \frac{2 \cos \alpha + 1}{\cos \alpha}.$$

Для визначення об'єму піраміди розглянемо висоту піраміди $H = C_1C_2$. Із точки C_1 опустимо в грані DD_1C_1C перпендикуляр C_1K . Тоді за теоремою про три перпендикуляри $\angle C_1KC_2 = \alpha$.

$$\text{Відрізок } C_2K = \frac{3\sqrt{3} - 3}{2} = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1), \text{ звідки}$$

$$H = C_2K \operatorname{tg} \alpha, H = \frac{3}{2}(\sqrt{3} - 1) \operatorname{tg} \alpha.$$

Визначимо об'єм піраміди:

$$V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}) =$$

$$= \frac{3}{6} (\sqrt{3} - 1) \operatorname{tg} \alpha (9 + 27 + \sqrt{9 \cdot 27}) = \frac{1}{2} (\sqrt{3} - 1) \operatorname{tg} \alpha (36 + 3\sqrt{3}) =$$

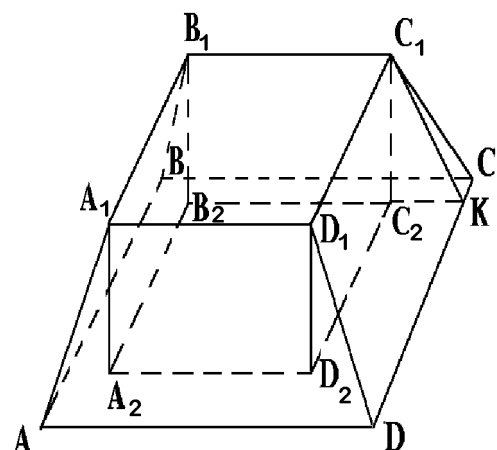


Рис. 7.5

$$= \frac{9}{2} \operatorname{tg} \alpha (\sqrt{3} - 1)(4 + \sqrt{3}) = \frac{9}{2} \operatorname{tg} \alpha (3\sqrt{3} - 1).$$

Приклад 7.6. Обчислити об'єм правильної трикутної піраміди, знаючи, що плоский кут при вершині дорівнює α , а радіус кола, описаного навколо бічної грані, – R .

Розв'язання. Позначимо сторону основи піраміди через a і знайдемо її, застосовуючи до бічної грані наслідок теореми синусів:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = 2R \Rightarrow a = 2R \sin \alpha,$$

отже,

$$S_{\text{осн}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} = R^2 \sin^2 \alpha \sqrt{3}.$$

Визначимо апофему бічної грані із співвідношення

$$\frac{a}{2h} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}, \text{ тобто } h = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Висота піраміди є катетом прямокутного трикутника, в якому гіпотенузою є знайдена апофема $h = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}$, а другим катетом – радіус кола, вписаного в основу:

$$r = \frac{a\sqrt{3}}{6} = \frac{2R \sin \alpha \sqrt{3}}{6} = \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \sqrt{9 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H = \frac{1}{3} R^2 \sin^2 \alpha \sqrt{3} \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}} \sqrt{9 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}.$$

Спростивши останній вираз, отримаємо відповідь:

$$V = \frac{1}{3} R^3 \sin^3 \alpha \frac{\sqrt{9 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}}{\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}.$$

Завдання для самостійної роботи

7.18. Знайти об'єм правильної трикутної піраміди, у якій сторона основи дорівнює a , а бічні ребра взаємно перпендикулярні.

7.19. Основою піраміди є прямокутний трикутник з гіпотенузою, що дорівнює 6 см, і гострим кутом $\alpha = 30^\circ$. Бічні ребра піраміди нахилені під кутом 45° до площини основи. Знайти об'єм піраміди.

7.20. Ребро куба дорівнює a , центр верхньої грані сполучений з вершинами основи. Знайти повну поверхню піраміди, що утворилася. Який кут утворює грань цієї піраміди з площиною основи?

7.21. Основою піраміди є прямокутник з площею Q . Дві бічні грані перпендикулярні до площини основи, а дві інші нахилені під кутами α і β до площини основи. Знайти об'єм піраміди.

7.22. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює a . Бічне ребро нахилено до площини основи під кутом 45° . Знайти двогранний кут при бічному ребрі й площу бічної поверхні піраміди.

7.23. Основою піраміди є трапеція, бічні сторони якої і менша основа дорівнюють a , а гострий кут – α . Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом φ . Знайти об'єм піраміди.

7.24. Основою чотирикутної піраміди є прямокутник з кутом β між діагоналями. Висота піраміди дорівнює H . Усі ребра утворюють з висотою кути α . Знайти об'єм піраміди.

7.25. Висота правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см, її об'єм – 38 см^3 . Сторони основи відносяться як 2:3. Визначити бічну поверхню зрізаної піраміди.

7.26. Основою піраміди є правильний трикутник із стороною a . Одна з граней є рівнобедреним трикутником і перпендикулярна до основи. Протилежне бічне ребро нахилено до площини основи під кутом α . Знайти об'єм піраміди.

7.27. Сторони основи трикутної піраміди дорівнюють 15, 16 і 17 см. Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом 45° . Знайти об'єм піраміди.

7.28. Основа піраміди – рівнобедрений трикутник з кутом при основі α . Бічні грані піраміди нахилені під кутом φ до площини основи. Відстань від центра круга, вписаного в основу піраміди, до середини висоти бічної грані дорівнює d . Знайти повну поверхню піраміди.

7.29. У правильній шестикутній піраміді площа основи дорівнює S , а висота утворює з кожною з бічних граней кут φ . Визначити бічну поверхню піраміди.

7.30. Основами правильної зрізаної піраміди є правильні трикутники зі сторонами a і b ($a > b$). Бічні ребра нахилені до площини основи під кутом α . Знайти об'єм зрізаної піраміди.

7.31. Визначити об'єм правильної чотирикутної зрізаної піраміди, якщо сторони основи – a і b ($a > b$), а гострий кут бічної грані дорівнює α .

7.32. Знайти відношення об'ємів правильного тетраедра і октаедра, якщо їхні повні поверхні є рівними.

7.33. У правильній трикутній піраміді плоский кут при вершині в грані дорівнює α . Знайти кут нахилу бічного ребра до площини основи.

7.3. Перерізи в многогранниках

Для розв'язання задач, в яких розглядається переріз многогранника площиною, слід передусім побудувати переріз, обґрунтувати те, який вигляд має переріз і як він розташований у многограннику. Щоби побудувати переріз, треба визначити точки перетину січної площини з ребрами многогранника і з'єднати ці точки відрізками, які лежать в гранях. Для цього в площині грані досить указати дві точки, що належать січній площині. При цьому зовсім не обов'язково, щоби ці точки належали самій грані або знаходилися на самому ребрі многогранника. Дуже часто при побудові перерізів доводиться розглядати продовження ребер і площин граней за межами многогранника. Покажемо на наведених нижче прикладах, як застосовується цей метод побудови перерізів.

Приклад 7.7. Правильна чотирикутна піраміда зі стороною основи, що дорівнює a , і двограним кутом при основі, який дорівнює 2α , перерізана площиною, що ділить навпіл двограний кут при основі. Знайти площу перерізу.

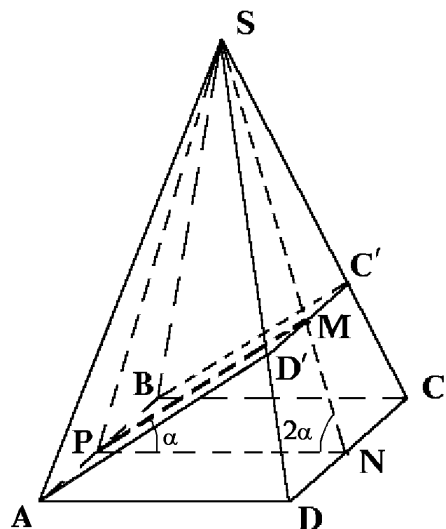


Рис. 7.6

Розв'язання. Розглянемо піраміду $ABCD S$ і її переріз $ABC'D'$, проведений через сторону AB . Проведемо апофеми граней SP і SN (рис. 7.6). Розглянемо площину, що містить трикутник SPM . У ньому $\angle SPN = 2\alpha$ як двограний кут при основі, $\angle MPN = \alpha$ за умовою задачі і $\angle SPM = \alpha$, оскільки площина SPN перпендикулярна до площини основи і ребер AB і CD . Кут $\angle PSN = \pi - 4\alpha$, тоді $\angle SMP = 3\alpha$. За теоремою синусів $\frac{SM}{SP} = \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha} = k$, але $SP = SN$ і k можна розглядати як коефіцієнт подібності трикутників DSC і $D'SC'$ ($DCID'C'$), звідки

$$D'C' = DC \frac{SM}{SN} = a \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Застосувавши до трикутника PMN теорему синусів, знаходимо

$$\frac{PM}{PN} = \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\pi - 3\alpha)}, PM = a \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

Тепер можна визначити площу перерізу

$$S = \frac{1}{2}(AB + D'C')PM = \frac{1}{2} \left(a + a \frac{\sin \alpha}{\sin 3\alpha} \right) a \frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}.$$

отримуємо:
$$S = a^2 \frac{\sin^2 2\alpha \cos \alpha}{\sin^2 3\alpha}.$$

Приклад 7.8. У правильній чотирикутній піраміді довжина висоти дорівнює h . Через діагональ основи піраміди і середину протилежного ребра проведено переріз, що утворює кут α з діагональною площиною, яка проходить через ту ж саму діагональ основи. Знайти площу перерізу.

Розв'язання. Розглянемо піраміду $ABCD S$ і перерізи, проведені через діагональ BD : діагональний переріз піраміди BSD і шуканий переріз BKD , де точка K – середина ребра SC . Висота піраміди – SO . Переріз BKD є рівнобедреним трикутником, висота якого $KO \perp BD$. Отже, заданий кут α між перерізами BCD і

BKD – це кут $\angle SOK = \alpha$, тоді $\angle KOC = \frac{\pi}{2} - \alpha$; OK – медіана прямокутного трикутника SOC , яка дорівнює половині гіпотенузи. Таким чином $SK = KC = OK$, звідки кут $\angle SCO = \frac{\pi}{2} - \alpha$ (рис. 7.7).

Із трикутника SOC визначимо відрізки

$$OC = SO \cdot \operatorname{tg} \alpha \text{ і } CS = \frac{SO}{\cos \alpha},$$

але $SO = h$, отже,

$$OC = h \cdot \operatorname{tg} \alpha, \quad CS = \frac{h}{\cos \alpha}, \quad OK = \frac{1}{2} \cdot SC = \frac{h}{2 \cos \alpha}.$$

Площа перерізу BKD є добутком $0,5BD \cdot OK$,
але $0,5BD = OC$. Звідси остаточно

$$S = h \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{h}{2 \cos \alpha} = \frac{0,5h^2 \sin \alpha}{\cos^2 \alpha}.$$

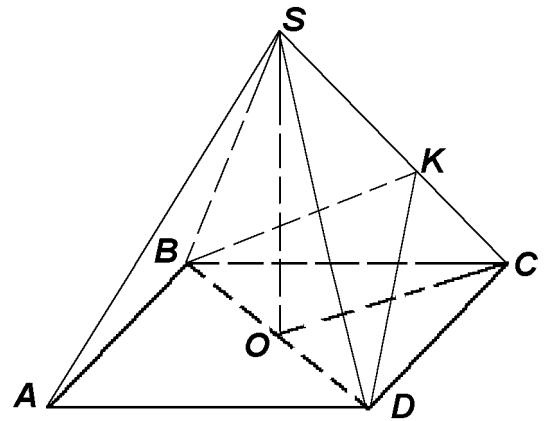


Рис. 7.7

Завдання для самостійної роботи

7.34. У кубі проведено переріз, який є правильним шестикутником. Обчислити площу перерізу, якщо ребро куба дорівнює a . Який кут утворює площина перерізу з площиною основи?

7.35. У прямокутному паралелепіпеді $ABCD A' B' C' D'$ через вершини B , D і C' проведено площину, що утворює з площиною основи кут 60° . Сторони основи дорівнюють a і b . Знайти об'єм паралелепіпеда.

7.36. Правильна трикутна піраміда розізнута площиною, яка перпендикулярна до основи і ділить дві сторони основи навпіл. Визначити об'єм відрізаної піраміди, якщо задано сторону a основи первинної піраміди і двогранний кут α при основі. Обчислити площу перерізу.

7.37. Ребро правильного тетраедра дорівнює a . Через середину бічного ребра проведено площину паралельно до площини основи. Визначити площу отриманого перерізу.

7.38. Правильну трикутну піраміду перерізано площиною, що проходить крізь вершину основи і середини двох бічних ребер. Знайти відношення бічної поверхні піраміди до площі основи, якщо відомо, що січна площина перпендикулярна до однієї з бічних граней.

7.39. У правильній трикутній зрізаній піраміді сторони основи становлять 2 і 3 см, а висота – 7 см. Обчислити площу перерізу, що проходить через сторону нижньої основи і протилежну вершину верхньої.

7.40. Висота правильної зрізаної чотирикутної піраміди дорівнює 3 см, а її об'єм – 38 см^3 , сторони основи відносяться як 2:3. Обчислити площу перерізу, що проходить через середини двох сусідніх бічних ребер перпендикулярно до площини, що містить їхні грані.

7.41. У правильній чотирикутній піраміді сторона основи дорівнює a . Бічне ребро нахилено до площини основи під кутом 45° . Знайти площу перерізу, яка проходить через сторону основи і середину протилежного бічного ребра.

7.42. Основою прямого паралелепіпеда є ромб, сторона якого a . Площина, проведена крізь одну із сторін нижньої основи і протилежну сторону верхньої основи, утворює з площиною основи кут β . Знайти площу перерізу, знаючи, що висота

паралелепіпеда дорівнює h .

7.43. Через вершину правильної чотирикутної піраміди під кутом φ до основи піраміди проведено площину паралельно до сторони основи. Знайти площу перерізу, якщо сторона основи піраміди дорівнює a , а плоский кут при вершині піраміди – α .

7.44. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a . Переріз, що ділить кут між бічними гранями навпіл, є прямокутним трикутником. Визначити об'єм піраміди.

7.45. Площі основ зрізаної піраміди дорівнюють S_1 і S_2 . Знайти площу перерізу піраміди площиною, яка паралельна до основ і рівновіддалена від них.

7.46. Правильний тетраедр, ребро якого – a , перерізано площиною, що містить одно з ребер тетраедра і ділить протилежне ребро у відношенні 2:1. Визначити площу перерізу.

7.4. Круглі тіла

Наведемо основні формули, необхідні для розв'язання задач. Об'єм циліндра обчислюється за формулою

$$V = \pi R^2 H,$$

де R – радіус основи; H – висота циліндра, що збігається з його твірною.

Бічна і повна поверхні циліндра обчислюються за формулами

$$S_{\text{б}} = 2\pi RH, \quad S_n = 2\pi RH + 2\pi R^2 = 2\pi R(H + R).$$

Слід зазначити, що розгортка бічної поверхні циліндра є прямокутником із сторонами $2\pi R$ і H .

Для конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H, \quad S_{\text{б}} = \pi Rl, \quad S_n = \pi R(l + R),$$

де R – радіус основи конуса; l – твірна конуса; H – його висота. Зауважимо, що розгортка бічної поверхні конуса – сектор, радіусом якого є твірна конуса l , а довжина дуги дорівнює $2\pi R$.

Для зрізаного конуса

$$V = \frac{1}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)H, \quad S_{\text{б}} = \pi(R + r)l,$$

де R і r – радіуси нижньої і верхньої основ зрізаного конуса; l – його твірна; H – висота.

Для кулі

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad S = 4\pi R^2.$$

Наведемо формули обчислення поверхні кульового пояса і об'ємів кульового сектора, кільця і кульового шару.

Для кульового сектора

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

де R – радіус кульового сектора з центром O на осі обертання $A'B'$; h – довжина висоти кульового пояса дуги AB , тобто $h = A'B'$ (рис. 7.8).

Для кільця $V = \frac{1}{6}\pi l^2 h$ (рис. 7.9), де l – довжина хорди кільця, $h = A'B'$ –

довжина проекції цієї хорди на вісь обертання.

Для кульового пояса $S = 2\pi R h$.

Для кульового шару

$$V = \frac{1}{6}\pi h^3 + \frac{1}{2}\pi(r_1^2 + r_2^2)h,$$

де R – радіус кулі; h – довжина проекції дуги на вісь обертання; r_1 і r_2 – відстані від кінців дуги до осі обертання (рис. 7.10).

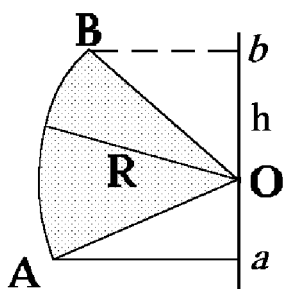


Рис. 7.8

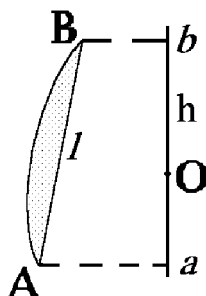


Рис. 7.9

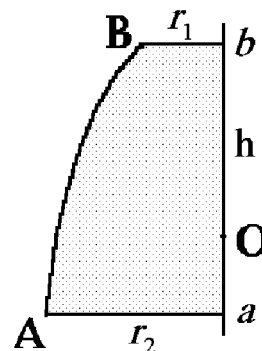


Рис. 7.10

Розглянемо розв'язання типових задач.

Приклад 7.9. Розгортка бічної поверхні циліндра є прямокутником, діагональ якого дорівнює d і утворює кут φ з основою. Визначити об'єм циліндра.

Розв'язання. Оскільки відомі діагональ прямокутника і кут φ , визначимо сторони прямокутника $a = d \cos \varphi$ і $b = d \sin \varphi$. Припустимо, що сторона a є довжиною дуги основи, а тому $d \cos \varphi = 2\pi R$, звідки

$$R = \frac{d \cos \varphi}{2\pi}.$$

Тоді сторона b є твірною і збігається з висотою. Таким чином, $H = d \sin \varphi$. Знаходимо об'єм за формулою

$$V = \pi \left(\frac{d \cos \varphi}{2\pi} \right)^2 d \sin \varphi = \frac{d^3 \cos^2 \varphi \sin \varphi}{4\pi}.$$

Приклад 7.10. Трикутник зі сторонами 10, 17 і 21 см обертається навколо більшої сторони. Визначити об'єм і площу поверхні отриманого тіла обертання.

Розв'язання. Розглянемо рисунок. Вісь обертання збігається зі стороною $AB = 21$ см, $BC = 17$ см, $AC = 10$ см (рис. 7.11).

Об'єм отриманого тіла дорівнюватиме сумі об'ємів двох конусів, вершинами яких є точки A і B , висотами – відрізки OB і OA , а радіусом основи – OC .

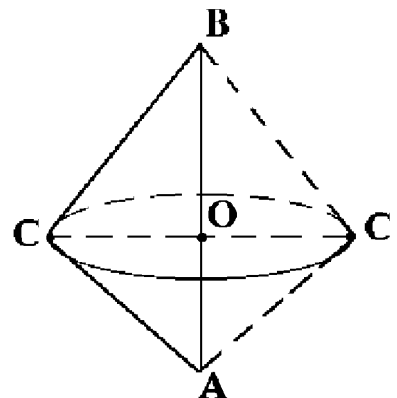


Рис. 7.11

Відрізок OC є висотою трикутника ABC . Знаючи сторони трикутника, можна визначити його площу за формулою Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, де $p = 0,5(a+b+c)$. Визначимо $p = 0,5(10+17+21) = 24$. Тоді

$$S = \sqrt{24 \cdot 14 \cdot 7 \cdot 3} = 7 \cdot 3 \cdot 4 = 84 \text{ см}^2.$$

Тепер знаходимо

$$\begin{aligned} OC &= \frac{2 \cdot 84}{21} = 8 \text{ см}, \\ V_{\text{тіла}} &= \frac{1}{3} \pi OC^2 OB + \frac{1}{3} \pi OC^2 OA = \\ &= \frac{1}{3} \pi OC \cdot 2(OB + OC) = \frac{1}{3} \pi OC^2 AB = \frac{1}{3} \pi 8^2 21 = 448 \pi (\text{см}^3). \end{aligned}$$

Поверхня тіла дорівнює сумі бічних поверхонь, що утворюють тіло конусів з твірними $l_1 = AC$ і $l_2 = BC$:

$$S = \pi R l_1 + \pi R l_2 = \pi OC (AC + BC) = 8 \pi (10 + 17) = 216 \pi \text{ см}^2.$$

Приклад 7.11. Радіус основи конуса дорівнює R . Дві взаємно перпендикулярні твірні делять бічну поверхню конуса на частини у співвідношенні 1:2. Знайти об'єм конуса.

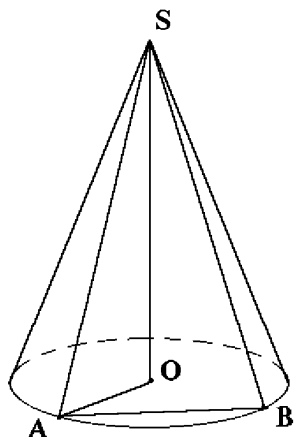


Рис. 7.12

Розв'язання. Позначимо на рис. 7.12 задані твірні SA і SB . Трикутник ASB за умовою є прямокутним рівнобедреним з гіпотенузою AB , а хорда AB стягує дугу 120° , оскільки точки A і B ділять довжину кола основи в тому ж співвідношенні, в якому AS і BS ділять бічну поверхню. Радіус основи конуса дорівнює R , отже,

$$AB = R\sqrt{3}, \quad AS = BS = R\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

$$\text{Визначимо } SO = H = \sqrt{AS^2 - AO^2} = \sqrt{\frac{3R^2}{2} - R^2} = \frac{R}{\sqrt{2}}.$$

Знаходимо об'єм конуса за формулою $V = \frac{1}{3} \pi R^2 H = \frac{\sqrt{2}}{6} \pi R^3$.

Приклад 7.12. Твірна зрізаного конуса дорівнює l , утворює з площиною нижньої основи кут α і перпендикулярна до прямої, що з'єднує верхній її кінець з нижнім кінцем протилежної твірної. Знайти бічну поверхню зрізаного конуса.

Розв'язання. Розглянемо зрізаний конус з осьовим перерізом $AA'B'B'$ (рис. 7.13).

Осьовий переріз є рівнобічною трапецією, бічна сторона якої перпендикулярна до діагоналі. Із трикутника $AA'C$ $AC = l \cos \alpha$. Із трикутника $AA'B$ знаходимо діаметр нижньої основи $AB = 2R = \frac{l}{\cos \alpha}$.

$$\text{Звідси } AO = R = \frac{1}{2 \cos \alpha},$$

$$r = A'O' = AO - AC = \left(\frac{1}{2 \cos \alpha} - \cos \alpha \right).$$

Тепер знаходимо

$$S_{\sigma} = \pi l(R + r) = \pi l^2 \left(\frac{1}{\cos \alpha} - \cos \alpha \right) = \pi l^2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha}.$$

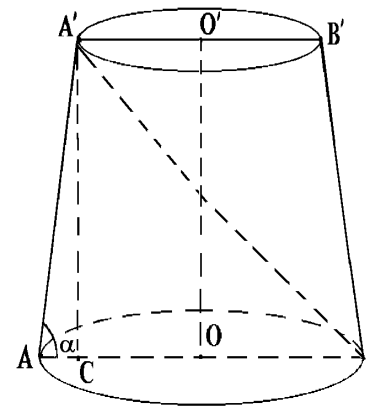


Рис. 7.13

Завдання для самостійної роботи

7.47. Розгорткою бічної поверхні циліндра є прямокутник з діагоналлю, що дорівнює d . Діагоналі перетинаються під кутом α , поверненим до твірної. Знайти бічну поверхню циліндра і його об'єм.

7.48. Півколо згорнено в конічну поверхню. Знайти кут між твірною й висотою конуса.

7.49. Знайти об'єм конуса, якщо в його основі хорда завдовжки a стягує дугу α , а висота конуса утворює з твірною кут β .

7.50. Радіуси основ зрізаного конуса дорівнюють 5 і 11 см, твірна – 10 см. Визначити площу осьового перерізу.

7.51. Визначити об'єм і повну поверхню кульового сектора, вирізаного з кулі радіусом R , що має в осьовому перерізі кут α .

7.52. Через вершину конуса проведено дві площини. Одна з них нахилена до площини основи конуса під кутом α і перетинає основу по хорді завдовжки a , інша – нахилена до площини основи під кутом β і перетинає основу по хорді, довжина якої дорівнює b . Визначити об'єм конуса.

7.53. Діагональ рівнобедреної трапеції перпендикулярна до бічної сторони. Бічна сторона дорівнює b і утворює з більшою основою кут φ . Визначити поверхню тіла, утвореного обертанням трапеції навколо більшої основи.

7.54. Діагоналі осьового перерізу циліндра перетинаються під кутом α , поверненим до основи. Об'єм циліндра дорівнює V . Знайти висоту циліндра.

7.55. У конусі, радіус основи якого дорівнює R , через вершину проведено переріз, площина якого нахилена до площини основи конуса під кутом 60° . Переріз відтинає від кола основи дугу 120° . Знайти площу перерізу.

7.56. Кут при вершині осьового перерізу конуса дорівнює 2α , а сума його висоти і твірної – a . Знайти об'єм конуса.

7.57. У зрізаному конусі радіуси основ дорівнюють R і r . Через дві твірні проведено переріз площиною, що відтинає від кіл основ дуги 90° і нахилений до площини основи під кутом 60° . Знайти площу перерізу.

7.58. Діагоналі осьового перерізу зрізаного конуса діляться точкою перетину у

відношенні 2:1, рахуючи від більшої основи. Кут між діагоналями, повернений до основ конуса, дорівнює α , довжина діагоналі – l . Знайти об'єм зрізаного конуса.

7.59. Кульовий сегмент кулі радіусом R має повну поверхню S . Знайти його висоту.

7.60. У трикутнику дано сторони b і c і кут між ними α . Трикутник обертається навколо осі, яка проходить поза трикутником через вершину відомого кута α і перпендикулярна до бісектриси цього кута. Визначити об'єм тіла обертання.

7.5. Комбінація тіл

При розв'язанні задач, в яких розглядаються різні комбінації тіл, необхідно добре уявити собі взаємне розташування тіл, правильно зобразити це на кресленні, обґрунтувати всі твердження. Найчастіше мають місце комбінації різних тіл з кулею. При цьому зображення самої кулі часто буває зайвим, досить указати його центр і точки дотику з різними площинами і прямими. Розглянемо декілька типових задач на комбінації піраміди і кулі. Слід урахувати, що завдання вписати кулю в задану піраміду має розв'язок тільки тоді, коли бісекторні площини всіх двогранних кутів піраміди перетинаються в одній точці. Можна довести, що в правильну n -кутну піраміду завжди можна вписати кулю; так само можна вписати кулю у будь-яку трикутну піраміду. Радіус кулі визначається як радіус круга в перерізі, що проходить через центр кулі. Слід пам'ятати, що ортогональна проекція кулі на площину основи не є кругом, вписаним у багатокутник, що лежить в основі. У разі неправильної піраміди положення центра вписаної кулі визначається як перетин бісекторних площин двогранних кутів.

Якщо із умови задачі відомо, що в многогранник можна вписати кулю, то радіус кулі можна визначити за формулою

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{пов}} r,$$

де V – об'єм многогранника; $S_{\text{пов}}$ – повна поверхня многогранника; r – радіус вписаної в многогранник кулі.

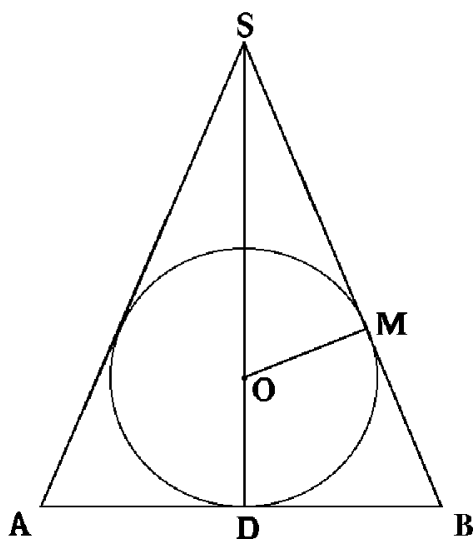


Рис. 7.14

Формула стає очевидною, якщо з'єднати центр кулі з усіма вершинами многогранника і обчислити об'єм многогранника як суму об'ємів отриманих пірамід.

Розглянемо випадок, коли кулю описано навколо піраміди, отже, усі вершини піраміди лежать на поверхні кулі. У цьому випадку обов'язково існує коло, описане навколо основи піраміди. Якщо не можна описати навколо основи піраміди коло, то описати кулю навколо піраміди також не можна.

Розглянемо деякі типові задачі на комбінації тіл.

Приклад 7.13. У конус, радіус основи якого $R = 5$, а висота $H = 12$, вписано циліндр, радіус основи якого дорівнює радіусу кулі, вписаної в цей конус. Визначити бічну поверхню циліндра.

Розв'язання. Розглянемо осьовий переріз конуса ASB (рис. 7.14). Це рівнобедрений трикутник, висота якого – H , а основа – $2R$. Кулю пересічено цим перерізом по колу великого круга, отже, $OM = OD = r$ і є шуканим радіусом кулі. Розглянемо подібність трикутників DBS і OMS :

$$\frac{SO}{BS} = \frac{OM}{DB},$$

де $BS = \sqrt{R^2 + H^2}$ – твірна конуса; $DB = R$ – радіус основи конуса;
 $SO = SD - OD = H - r$; $OM = r$,

$$\frac{H - r}{\sqrt{R^2 + H^2}} = \frac{r}{R},$$

звідки

$$\begin{aligned} HR &= r \left(R + \sqrt{R^2 + H^2} \right); r = \frac{HR}{R + \sqrt{R^2 + H^2}} = \\ &= \frac{\left(HR \left(R - \sqrt{R^2 + H^2} \right) \right)}{R^2 - \left(R^2 + H^2 \right)} = \frac{R}{H} \left(\sqrt{R^2 + H^2} - R \right). \end{aligned}$$

Тепер визначимо висоту циліндра, вписаного в конус, і основи, що має заданий радіус. Для цього розглянемо осьові перерізи конуса і вписаного в нього циліндра (рис. 7.15). Позначимо висоту циліндра $KN = h$ і розглянемо подібність трикутників SDB і KNB :

$$\frac{SD}{KN} = \frac{DB}{NB}; \frac{H}{h} = \frac{R}{R - r},$$

звідки

$$\begin{aligned} h &= \frac{H(R - r)}{R} = \frac{H}{R} \left(R - \frac{R}{H} \left(\sqrt{R^2 + H^2} - R \right) \right) \\ &= H + R - \sqrt{R^2 + H^2}. \end{aligned}$$

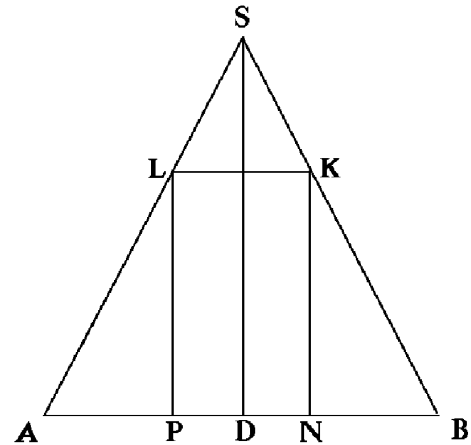


Рис. 7.15

Тепер визначимо бічну поверхню циліндра:

$$S_{\text{б}} = 2\pi rh = 2\pi \frac{R}{H} \left(\sqrt{R^2 + H^2} - R \right) \left(H + R - \sqrt{R^2 + H^2} \right).$$

Підставивши у цей вираз задані числові значення, отримаємо $S_{\text{б}} = \frac{80\pi}{3}$.

Приклад 7.14. Основою піраміди $ABCD$ є рівнобічна трапеція з бічною стороною $AB = l$ і гострим кутом φ . Бічні грані ASD і BSC утворюють з площиною основи однакові кути величиною α . У піраміду можна вписати кулю, що дотикається усіх її граней. Визначити радіус вписаної кулі, якщо бічні ребра рівні парами, тобто $AS = DS$ і $BS = CS$.

Розв'язання. Проведемо переріз через висоту піраміди і апофеми граней ASD і BSC (рис 7.16). Апофема SK є бісектрисою, медіаною і висотою $\triangle ASD$. За теоремою про три перпендикуляри сторона AD перпендикулярна до проекції апофеми відрізка OK , а отже, і всієї площини перерізу LSK . Паралельна до неї сторона BC має ту ж саму властивість. Отже, кути SLO і OKS є тими плоскими кутами, якими вимірюються

двогранні кути при основі граней ASD і BSC . Таким чином, $\angle SLO = \angle OKS = \alpha$ і трикутник LSK є рівнобедреним. З огляду на те, що площина SLK перпендикулярна до площин граней ASD і BSC , двогранний кут між гранями ASD і BSC вимірюється кутом LSK .

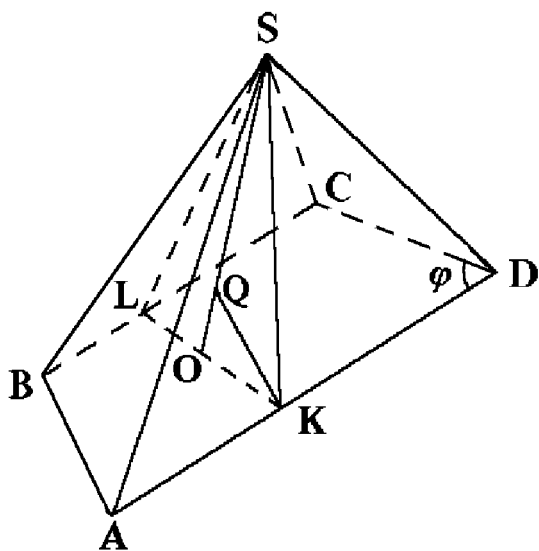


Рис. 7.16

Слід бісекторної площини двогранного кута LSK у площині перерізу, яка є бісекторною площиною між гранями ASB і CSD , – це висота SO . Отже, центр кулі Q лежить на цій висоті. Визначимо його положення як точку перетину бісектриси кута OKS з висотою SO . Таким чином, задача зводиться до визначення радіуса круга, вписаного в рівнобедрений трикутник LSK , оскільки цей круг є більшим кругом кулі, вписаної в цю піраміду.

Розглянемо трикутник OQK :

$$\angle QKO = \frac{\alpha}{2}; \quad OK = \frac{1}{2}LK = \frac{1}{2}l \sin \varphi, \quad \text{отже,}$$

$$QO = r = \frac{1}{2}l \sin \varphi \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}.$$

Приклад 7.15. У правильну трикутну призму вписано кулю, що дотикається всіх бічних граней і обох основ призми. У скільки разів повна поверхня призми більша за поверхню кулі?

Розв'язання. Розглянемо правильну трикутну призму. Висота призми дорівнює $2r$, де r – діаметр вписаної кулі. Якщо через центр кулі провести переріз паралельно до основ призми, то отримаємо рівносторонній трикутник, а в перерізі кулі – великий круг, вписаний у цей трикутник. Але якщо сторона правильного трикутника – a , то

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$, тобто $a = 2r\sqrt{3}$. Повна поверхня призми дорівнює сумі площ двох основ

$$2S = 2 \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$$

і бічній поверхні, яка становить $6ar$. Тоді

$$S_{\text{нов}} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} + 6ar = \frac{12r^2 \sqrt{3}}{2} + 12r^2 \sqrt{3} = 18r^2 \sqrt{3}, \quad S_{\text{к}} = 4\pi r^2.$$

Шукане співвідношення має такий вигляд: $\frac{18r^2 \sqrt{3}}{4\pi r^2} = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi}$.

Завдання для самостійної роботи

7.61. Висота конуса і його твірна дорівнюють 4 і 5 см відповідно. Визначити об'єм вписаної в конус півкулі, центр якої збігається з центром основи конуса.

7.62. У конус, твірна якого дорівнює b , вписано правильну шестикутну призму з рівними ребрами. Знайти бічну поверхню призми, якщо кут при вершині в осьовому перерізі конуса дорівнює 2α .

7.63. Навколо кулі описано прямий паралелепіпед, у якого діагоналі основи

дорівнюють a і b . Визначити повну поверхню цього паралелепіпеда.

7.64. Знайти кут між твірною зрізаного конуса і площиною його нижньої основи, якщо повна поверхня зрізаного конуса вдвічі більша за поверхню вписаної в нього кулі.

7.65. У кулю вписано конус. Площа осьового перерізу конуса дорівнює S , а кут між висотою і твірною – α . Знайти об'єм кулі.

7.66. Кут між твірною конуса і площиною основи дорівнює 30° , бічна поверхня конуса – $3\pi\sqrt{3}$. Визначити об'єм правильної шестикутної піраміди, вписаної в цей конус.

7.67. Сторона основи правильної трикутної піраміди дорівнює a , двогранний кут при основі – φ . Визначити об'єм кулі, вписаної в піраміду.

7.68. Знайти величину плоского кута при вершині правильної чотирикутної піраміди, якщо центри сфер, вписаної в піраміду і описаної біля неї, збігаються.

7.69. У сферу радіусом R вписано правильну трикутну призму, бічна грань якої – квадрат. Знайти довжину ребра призми.

7.70. У конус, радіус основи якого дорівнює 3 см, а кут при вершині осьового перерізу – 90° , вписано циліндр з квадратним осьовим перерізом. Знайти об'єм циліндра і його бічну поверхню.

7.71. Знайти відношення об'ємів, площ поверхонь кулі й вписаного в нього рівностороннього конуса.

7.72. У циліндр вписано прямокутний паралелепіпед, діагональ якого утворює з прилеглими до неї сторонами основи кути α і β відповідно. Знайти відношення об'ємів паралелепіпеда і циліндра.

7.73. У зрізаний конус вписано кулю радіусом R . Твірна конуса нахилена до площини основи під кутом α . Знайти об'єм зрізаного конуса.

7.74. Сфера, центр якої знаходиться у вершині конуса, дотикається до його основи. Знайти кут при вершині в осьовому перерізі конуса, якщо сфера ділить конус на частини рівних об'ємів.

7.75. У циліндр, висота якого дорівнює H , вписано трикутну піраміду. Дві грані піраміди перпендикулярні до площини його основи, а два бічні ребра утворюють з площиною основи кути, кожен з яких дорівнює α . Кут між цими ребрами дорівнює β . Знайти площу бічної поверхні піраміди.

7.76. У кулю радіусом R вписано правильну шестикутну зрізану піраміду, у якої площина нижньої основи проходить через центр кулі, а бічне ребро утворює з площиною основи кут 60° . Визначити об'єм піраміди.

7.77. У кулю радіусом R вписано піраміду, в основі якої лежить квадрат. Одне з бічних ребер перпендикулярне до площини основи, найбільше бічне ребро утворює з нею кут α . Знайти бічну поверхню піраміди.

Розділ 8. ВЕКТОРНА АЛГЕБРА

8.1. Лінійні операції над векторами

Вектором $\overrightarrow{AB}$ називається напрямлений відрізок з початком у точці A і кінцем у точці B (рис. 8.1).

Довжиною вектора $\overrightarrow{AB}$ називається довжина відрізка AB і позначається $|\overrightarrow{AB}|$.

Вектор, початок і кінець якого збігаються, називається *нульовим вектором*. Він не має напрямку, а довжина дорівнює нулю.

Два вектори називаються *рівними*, якщо вони мають однакові напрям і довжину (рис. 8.2).

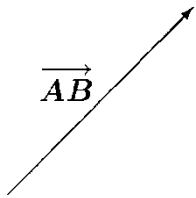


Рис. 8.1

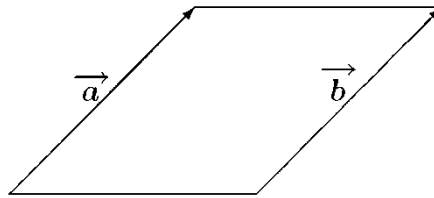


Рис. 8.2

Добутком вектора $\vec{a}$ на дійсне число λ називається вектор $\lambda\vec{a}$, такий, що:

1) $|\lambda\vec{a}| = |\lambda| |\vec{a}|$;

2) при $\lambda > 0$ вектори $\vec{a}$ і $\lambda\vec{a}$ однаково напрямлені, а при $\lambda < 0$ - протилежно напрямлені (рис. 8.3).

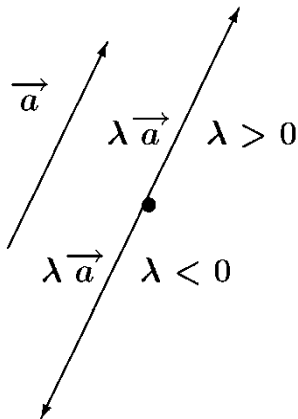


Рис. 8.3

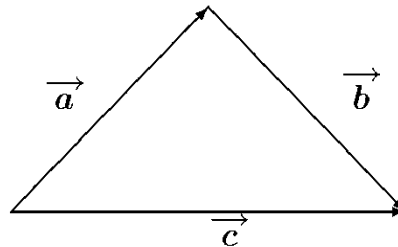


Рис. 8.4

Сумою двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$, для яких початок другого вектора розташований в кінці першого, називається вектор $\vec{c}$, проведений з початку першого вектора в кінець другого (рис. 8.4) (*правило трикутника*).

Два ненульових вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називаються *колінеарними*, якщо вони паралельні до однієї прямої.

Умова колінеарності векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$: $\exists \lambda \neq 0 : \vec{a} = \lambda\vec{b}$.

Три ненульових вектори $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$ називаються *компланарними*, якщо вони паралельні до однієї площини.

Умова компланарності векторів $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$:

$\exists \lambda, \mu, \nu$ не дорівнюють одночасно нулю і такі, що $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \nu\vec{c} = \vec{0}$.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається *лінійно залежною*, якщо існують числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, які не дорівнюють одночасно нулю і такі, що $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

Система векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ називається *лінійно незалежною*, якщо рівність $\lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \dots + \lambda_n\vec{a}_n = \vec{0}$ виконується лише за умови $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.

Приклад 8.1. Дано $\triangle ABC$: $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AC} = \vec{b}$. Виразити через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектор $\vec{CD}$, де D – середина відрізка AB (рис. 8.5).

Розв'язання. За правилом трикутника додавання векторів з $\triangle ADC \Rightarrow \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AD}$. Оскільки $\overrightarrow{CA}$ протилежний $\overrightarrow{AC}$, то $\overrightarrow{CA} = -\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AD}$ однаково напрямлений з вектором $\overrightarrow{AB}$ і в два рази менший від нього за довжиною.

$$\text{Тому } \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \vec{a}.$$

$$\text{Отже, } \overrightarrow{CD} = -\vec{b} + \frac{1}{2} \vec{a}.$$

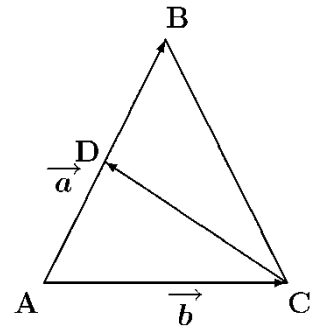


Рис. 8.5

Приклад 8.2. Задано ненульовий вектор $\vec{a}$. Знайти одиничний вектор $\vec{e}$ (тобто $|\vec{e}| = 1$) того ж напрямку, що й $\vec{a}$.

Розв'язання. За умовою вектори $\vec{a}$ і $\vec{e}$ однаково напрямлені. Із умови колінеарності отримуємо, що існує $\lambda > 0$ таке, що $\vec{a} = \lambda \vec{e}$. Тоді $|\vec{a}| = |\lambda \vec{e}| = |\lambda| \cdot |\vec{e}| = \lambda$.

$$\text{Таким чином, } \vec{a} = |\vec{a}| \vec{e} \text{ або } \vec{e} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}.$$

Приклад 8.3. Нехай вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно незалежні. Показати, що вектори $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}, \vec{q} = \vec{a} - \vec{b}, \vec{r} = 2\vec{b} + 3\vec{c}$ також лінійно незалежні і розкласти за ними вектор $\vec{s} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$.

Розв'язання. За означенням три вектори $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ – лінійно незалежні, якщо рівність $\lambda_1 \vec{p} + \lambda_2 \vec{q} + \lambda_3 \vec{r} = 0$ виконується тільки за умови $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Підставимо в цю рівність вирази $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ через $\vec{a}, \vec{b}$ і $\vec{c}$. Одержимо

$$\lambda_1 (\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{c}) + \lambda_2 (\vec{a} - \vec{b}) + \lambda_3 (2\vec{b} + 3\vec{c}) = 0,$$

або

$$(\lambda_1 + \lambda_2) \vec{a} + (\lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3) \vec{b} + (-2\lambda_1 + 3\lambda_3) \vec{c} = 0.$$

Оскільки за умовою задачі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ – лінійно незалежні, то

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ -2\lambda_1 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2, \\ -2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0, \\ 2\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -\lambda_2, \\ \lambda_2 = \lambda_3, \\ \lambda_3 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0, \\ \lambda_2 = 0, \\ \lambda_3 = 0, \end{cases}$$

тобто $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ – лінійно незалежні.

Розкласти вектор $\vec{s}$ за векторами $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ означає подати його у вигляді $\vec{s} = \alpha \vec{p} + \beta \vec{q} + \gamma \vec{r}$, де α, β, γ – деякі числа, які потребують визначення. Якщо підставити у попередню рівність зображення $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{s}$ через $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ і спростити вираз, то отримаємо

$$(\alpha + \beta - 1) \vec{a} + (\alpha - \beta + 2\gamma - 1) \vec{b} + (-2\alpha + 3\gamma - 1) \vec{c} = 0.$$

За умови лінійної незалежності $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ одержимо

$$\begin{cases} \alpha + \beta - 1 = 0, \\ \alpha - \beta + 2\gamma - 1 = 0, \\ -2\alpha + 3\gamma - 1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta, \\ \beta = \gamma, \\ 2\beta + 3\gamma = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 - \beta, \\ \beta = \gamma, \\ 5\gamma = 3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 2/5, \\ \beta = 3/5, \\ \gamma = 3/5, \end{cases}$$

тобто $\vec{s} = \frac{2}{5}\vec{p} + \frac{3}{5}\vec{q} + \frac{3}{5}\vec{r}$.

Завдання для самостійної роботи

8.01. Дано вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Побудувати вектори $-3\vec{a}$, $\frac{1}{2}\vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $2\vec{a} + 3\vec{b}$.

8.02. У паралелограмі $ABCD$ $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$. Виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$, $\overrightarrow{MD}$, де M – точка перетину діагоналей паралелограма.

8.03. Нехай M – точка перетину медіан $\triangle ABC$. Довести, що $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM} = \vec{0}$.

8.04. Точки E і F – середини сторін AD і BC чотирикутника $ABCD$. Довести, що $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$.

8.05. $ABCDEF$ – правильний шестикутник, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EF}$, $\overrightarrow{FA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.

8.06. M – точка перетину медіан $\triangle ABC$, O – довільна точка простору. Довести, що $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$.

8.07. У призмі $ABCA_1B_1C_1$ точка $M \in B_1C_1$ і $B_1M : B_1C_1 = 2 : 3$. Виразити $\overrightarrow{AM}$ через $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AA_1}$.

8.08. У трапеції $ABCD$ відношення довжини основи AD до довжини основи BC дорівнює λ , $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Виразити через $\vec{a}$ і $\vec{b}$ вектори $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

8.09. З використанням векторної алгебри довести, що середини основ трапеції та точка перетину її діагоналей належать одній прямій.

8.10. O – точка перетину медіан $\triangle ABC$, $\overrightarrow{BA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{c}$. Виразити вектор $\overrightarrow{OB}$ через вектори $\vec{a}$, $\vec{c}$.

8.11. Нехай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ – лінійно незалежні. Показати, що вектори $\vec{r} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{q} = \vec{b} - \vec{c}$ є лінійно незалежними, і розкласти за ними вектор $\vec{s} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$.

8.12. Дано три некомпланарних вектори: $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$. При яких значеннях λ і μ вектори $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} + \vec{c}$ і $\vec{a} + \lambda\vec{b} + \mu\vec{c}$ – колінеарні?

8.13. Дано три ненульових вектори: $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$, кожні два з яких – неколінеарні. Знайти їхню суму, якщо вектор $\vec{a} + \vec{b}$ – колінеарний вектору $\vec{c}$, а вектор $\vec{b} + \vec{c}$ – колінеарний вектору $\vec{a}$.

8.14. У паралелограмі $ABCD$ точка O – точка перетину діагоналей. Виразити вектор $\overrightarrow{BO}$ через вектори $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$.

8.2. Прямокутні координати вектора

Довільна трійка $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ попарно перпендикулярних одиничних векторів називається прямокутним базисом. Кожний вектор $\vec{a}$ тривимірного геометричного простору можна однозначно розкласти за базисом $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, тобто подати у вигляді (рис. 8.6)

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Три числа x, y, z називаються прямокутними координатами вектора $\vec{a}$ в базисі $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

При заданому базисі $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ існує взаємно однозначне відображення між векторами тривимірного геометричного простору і впорядкованими трійками чисел – їхніми координатами. Тому вектор $\vec{a}$ в координатній формі можна записати таким чином:

$$\vec{a} = (x, y, z).$$

Нехай у базисі $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ задано вектори $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$. Лінійні операції над векторами в координатній формі виконуються за такими правилами:

- 1) $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2, y_1 \pm y_2, z_1 \pm z_2)$;
- 2) $\lambda \vec{a} = (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$.

Умова колінеарності двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ у координатній формі:

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

На рис. 8.7 зображено прямокутну систему координат $OXYZ$, напрям осей OX ,

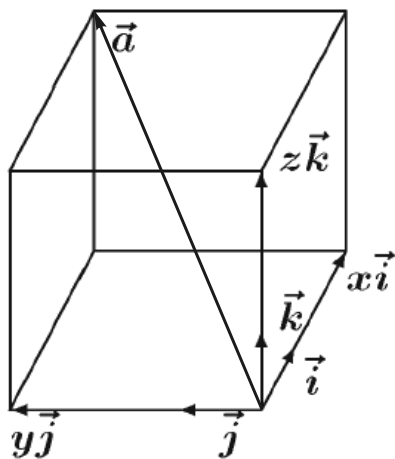


Рис. 8.6

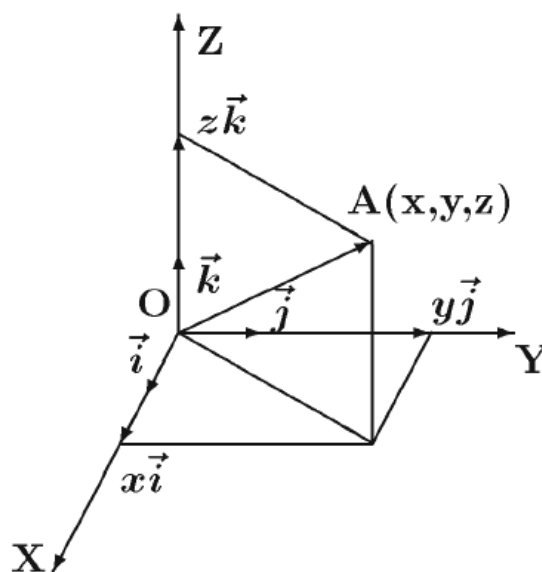


Рис. 8.7

OY , OZ якої задано трьома попарно перпендикулярними одиничними векторами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$. Точка A – довільна точка простору. Тоді координати вектора $\overrightarrow{OA}$ в базисі $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ збігаються з координатами точки A в системі координат $OXYZ$.

Вектор $\overrightarrow{AB}$ з початком у точці $A(x_1, y_1, z_1)$ і кінцем у точці $B(x_2, y_2, z_2)$ має такі координати:

$$\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

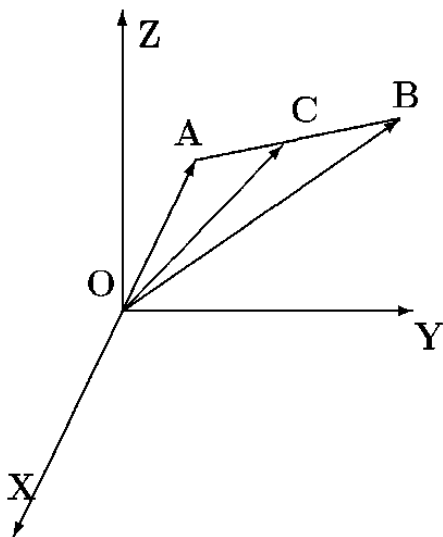


Рис. 8.8

Приклад 8.3. Задано координати кінців відрізка AB у прямокутній системі координат $OXYZ$: $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$. Точка C поділяє відрізок AB у відношенні $AC : BC = \lambda : \mu$. Знайти координати вектора $\overrightarrow{OC}$ (рис. 8.8).

Розв'язання. Оскільки за умовами задачі $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, то $\overrightarrow{OA} = (x_1, y_1, z_1)$ і $\overrightarrow{OB} = (x_2, y_2, z_2)$. За правилом трикутника

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}.$$

Вектори $\overrightarrow{AC}$ і $\overrightarrow{AB}$ однаково напрямлені, крім

того,
$$|\overrightarrow{AC}| : |\overrightarrow{AB}| = \lambda : (\lambda + \mu).$$

Тому $\overrightarrow{AC} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overrightarrow{AB}$. Отже, маємо

$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OA} + \frac{\lambda}{\lambda + \mu} (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \frac{\mu \cdot \overrightarrow{OA} + \lambda \cdot \overrightarrow{OB}}{\lambda + \mu}.$$

Виконавши дії над векторами, які задані в координатній формі, одержимо

$$\overrightarrow{OA} = \left(\frac{\mu x_1 + \lambda x_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu y_1 + \lambda y_2}{\lambda + \mu}, \frac{\mu z_1 + \lambda z_2}{\lambda + \mu} \right).$$

Приклад 8.4. Показати, що точки $A(-2, -6, -4)$, $B(1, 0, -1)$ і $C(3, 4, 1)$ належать одній прямій.

Розв'язання. Три різні точки A, B, C належать одній прямій тоді й тільки тоді, коли два вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ – колінеарні. Координати векторів $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} = (3, 6, 3), \quad \overrightarrow{AC} = (5, 10, 5).$$

Оскільки $\frac{3}{5} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, то координати $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ пропорційні, а вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$ – колінеарні. Отже, три точки A, B, C належать одній прямій.

Завдання для самостійної роботи

- 8.15.** Дано точки $A(3;5)$, $B(-1;-2)$ і $C(0;4)$. Знайти таку точку D , щоби вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ дорівнювали один одному.
- 8.16.** Задано вектори $\vec{a} = (-1, 2, 0)$, $\vec{b} (3, 1, 1)$, $\vec{c} (2, 0, 1)$. Знайти координати вектора $2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$.
- 8.17.** При якому значенні α вектори $\vec{a} (\alpha + 5; -8)$ і $\vec{b} (5; 1 - \alpha)$ – колінеарні?
- 8.18.** Серед векторів $\vec{a}(4;14;2)$, $\vec{b}(2;7;11)$, $\vec{c}(0;0;3)$, $\vec{d}(-6;-21;3)$ знайти колінеарні.
- 8.19.** При якому значенні p вектори $\vec{a} (p + 5; -8; p + 1)$ і $\vec{b} (5; 1 - p; 3)$ – колінеарні?
- 8.20.** Дано $|a| = 2$, $|b| = 1$, $\varphi = 60^\circ$, де φ – кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$. Знайти:
 а) скалярний добуток векторів $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a}$; б) модуль вектора $\vec{a} + \vec{b}$;
 в) косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a}$.
- 8.21.** Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Обчислити кут між векторами $\overrightarrow{BD_1}$ і $\overrightarrow{MA_1}$, де M – середина ребра AD .
- 8.22.** Дано три вершини $A(3, -4, 7)$, $B(-5, 3, -2)$ і $C(1, 2, -3)$ паралелограма $ABCD$. Знайти його четверту вершину D , яка є протилежною вершині B .
- 8.23.** Нехай у $\triangle ABC$ $A_1(-2, 3, 1)$, $B_1(0, 2, 0)$, $C_1(-1, 1, 3)$ – середини сторін BC , AC , AB відповідно. Знайти координати векторів $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$.
- 8.24.** У тетраедрі $ABCD$: $A(1, 2, 0)$, $B(-2, 3, 1)$, $C(2, 1, -1)$, $D(3, -1, 2)$, M – точка перетину медіан грані ABC . Знайти координати $\overrightarrow{DM}$.
- 8.25.** При яких значеннях x і y вектори $\vec{a} = (4, x, -2)$ і $\vec{b} = (2, 1, y)$ – колінеарні?
- 8.26.** У паралелограмі $ABCD$: $A(1, 1, 1)$, $B(2, 3, 0)$, $D(3, 0, 1)$, точка N – середина AD , точка $M \in AC$. Знайти координати точки M , щоби вектори $\overrightarrow{BM}$ і $\overrightarrow{MN}$ були колінеарні.
- 8.27.** Дано вектори $\vec{a}(2, -3, 1)$, $\vec{b}(3, 1, -2)$, $\vec{c}(0, 2, 4)$. Знайти координати вектора $\vec{d}$, щоби $2\vec{a} - 3\vec{b} - \vec{c} + 6\vec{d} = 0$.
- 8.28.** Серед векторів $\vec{a}(4;14;2)$, $\vec{b}(2;7;11)$, $\vec{c}(2;7;-1)$, $\vec{d}(-6;-21;3)$ знайти колінеарні.
- 8.29.** Дано дві суміжні вершини паралелограма $A(-2, 6, 4)$, $B(2, 8, 0)$ і точка перетину його діагоналей $M(2, 2, -2)$. Знайти координати двох інших вершин.
- 8.30.** Трикутник ABC задано координатами вершин $A(3, -2, 1)$, $B(3, 1, 5)$, $C(4, 0, 3)$. Знайти координати вектора, що з'єднує початок координат з точкою перетину медіан $\triangle ABC$.
- 8.31.** У паралелепіпеді $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ відомі координати вершин $A(1, 0, 1)$, $B(2, -1, 0)$, $D(-1, 1, 2)$, $A_1(3, 2, -1)$. Знайти координати вектора $\overrightarrow{AM}$, якщо точка M – середина ребра $B_1 C_1$.
- 8.32.** Перевірити, що чотири точки $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -1)$, $C(-1, 1, -3)$, $D(3, -5, 3)$ є вершинами трапеції.
- 8.33.** Визначити, при яких α і β вектори $\vec{a}(-2, 3, \beta)$ і $\vec{b}(\alpha, -6, 2)$ є колінеарними.

8.3. Скалярний добуток векторів

Скалярним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називається число

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos(\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

Алгебраїчні властивості скалярного добутку:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$;
- 2) $(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$;
- 3) $\vec{a} \cdot (\vec{b}_1 + \vec{b}_2) = \vec{a} \cdot \vec{b}_1 + \vec{a} \cdot \vec{b}_2$.

Нехай $\vec{a}$ і $\vec{b}$ задано в координатах $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$. Тоді скалярний добуток $\vec{a}$ і $\vec{b}$ обчислюється за формулою

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2.$$

Довжина вектора

$$|\vec{a}| = \sqrt{(\vec{a}, \vec{a})}; \quad |\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Кут між векторами

$$\cos(\vec{a} \wedge \vec{b}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}.$$

Умова перпендикулярності двох ненульових векторів:

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0.$$

Проекцією вектора $\vec{a}$ на напрям вектора $\vec{b}$ називається число

$$np_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| \cos(\angle \vec{a}, \vec{b}) \text{ або } np_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|}.$$

Приклад 8.5. Напрямними косинусами ненульового вектора $\vec{a}$ називаються косинуси кутів, які він утворює з осями координат. Показати, що напрямні косинуси збігаються з координатами одиничного вектора того ж напрямку, що й вектор $\vec{a}$.

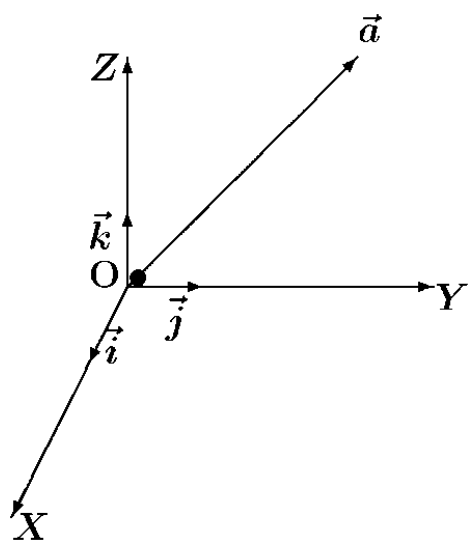


Рис. 8.9

Розв'язання. Нехай вектор $\vec{a}$ утворює з осями OX , OY , OZ кути α , β , γ відповідно (рис. 8.9). Якщо $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, то $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – напрямні косинуси вектора $\vec{a}$:

$$\cos \alpha = \cos(\vec{a} \wedge \vec{i}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{i}}{|\vec{a}| |\vec{i}|} = \frac{x_1}{|\vec{a}|},$$

$$\cos \beta = \cos(\vec{a} \wedge \vec{j}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{j}}{|\vec{a}| |\vec{j}|} = \frac{y_1}{|\vec{a}|},$$

$$\cos \gamma = \cos(\vec{a} \wedge \vec{k}) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{k}}{|\vec{a}| |\vec{k}|} = \frac{z_1}{|\vec{a}|}.$$

Отже, вектор

$$\vec{e} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \left(\frac{x_1}{|\vec{a}|}, \frac{y_1}{|\vec{a}|}, \frac{z_1}{|\vec{a}|} \right) = \frac{1}{|\vec{a}|} (x_1, y_1, z_1) = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$

є одиничним вектором того ж напрямку, що й вектор $\vec{a}$.

Приклад 8.6. Обчислити довжину діагоналей паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} = \vec{p} - 3\vec{q}$ і $\vec{b} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$, якщо відомо, що $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ і $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{\pi}{4}$.

Розв'язання. Виразимо вектори, що збігаються з діагоналями паралелограма $ABCD$ (рис. 8.10), через вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, а далі – через $\vec{p}$ і $\vec{q}$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q} + 5\vec{p} + 2\vec{q} = \\ &= 6\vec{p} - \vec{q}; \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q} - 5\vec{p} - 2\vec{q} = -4\vec{p} - 5\vec{q}.$$

Скористаємося формулою довжини вектора:

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC})} = \sqrt{(6\vec{p} - \vec{q})(6\vec{p} - \vec{q})} = \sqrt{36\vec{p}^2 - 12\vec{p}\vec{q} + \vec{q}^2};$$

$$|\overrightarrow{DB}| = \sqrt{(\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DB})} = \sqrt{(4\vec{p} + 5\vec{q})(4\vec{p} + 5\vec{q})} = \sqrt{16\vec{p}^2 + 40\vec{p}\vec{q} + 25\vec{q}^2}.$$

Обчислимо отримані вирази, маючи на увазі рівності:

$$\vec{p}^2 = |\vec{p}|^2 \cos 0 = |\vec{p}|^2 = 8;$$

$$\vec{q}^2 = |\vec{q}|^2 = 9; \quad \vec{p}\vec{q} = |\vec{p}||\vec{q}| \cos(\vec{p} \wedge \vec{q}) = 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 6.$$

$$\text{Тоді } |\overrightarrow{AC}| = 15, \quad |\overrightarrow{DB}| = \sqrt{593}.$$

Приклад 8.7. Вектор $\vec{c}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (3; 2; 2)$ і $\vec{b} = (18; -22; -5)$, утворює з віссю OY тупий кут. Знайти його координати, якщо $|\vec{c}| = 14$.

Розв'язання. Нехай координати вектора $\vec{c}$ дорівнюють x, y, z . Запишемо умови перпендикулярності векторів $\vec{a}$ і $\vec{c}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \\ \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y + 2z = 0, \\ 18x - 22y - 5z = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y, \\ z = -2y. \end{cases}$$

До цих рівнянь треба додати умову

$$|\vec{c}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 14.$$

Одержимо систему

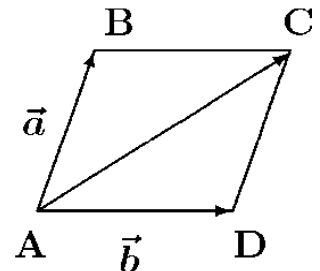


Рис. 8.10

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3}y, \\ z = -2y, \\ x^2 + y^2 + z^2 = 196, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3}y, \\ z = -2y, \\ y^2 = 36. \end{cases}$$

Оскільки вектор $\vec{c}$ за умовою утворює тупий кут з віссю OY , то беремо такий розв'язок системи, для якого $y < 0$. Отже, отримаємо $x = -4$, $y = -6$, $z = 12$.

Завдання для самостійної роботи

8.34. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відомо, що він колінеарний вектору $\vec{c}(2; -2; 3)$ і їхній скалярний добуток дорівнює 34.

8.35. Обчислити скалярний добуток $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{b} - 4\vec{c})$, якщо $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 4$, $\vec{a} \perp \vec{b}$, $(\vec{a} \wedge \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$, $(\vec{c} \wedge \vec{b}) = \frac{\pi}{4}$.

8.36. Обчислити кут між векторами $\vec{a} = \vec{q} + \vec{p}$ і $\vec{b} = \vec{p} - \vec{q}$, якщо $|\vec{p}| = \sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 1$, $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{3\pi}{4}$.

8.37. Обчислити $np_{\vec{c}}(3\vec{a} + \vec{b})$, якщо $\vec{a} = (1; 2; -1)$, $\vec{b} = (2; 0; 1)$, $\vec{c} = (-1; 1; 2)$.

8.38. Довести, що чотирикутник з вершинами $A(-3; 5; 6)$, $B(1; -5; 7)$, $C(8; -3; -1)$, $D(4; 7; -2)$ є квадратом.

8.39. Дано два вектори: $\vec{a} = (3; -1; 5)$ і $\vec{b} = (1; 2; -3)$. Знайти вектор $\vec{c}$ за умови, що він перпендикулярний до OZ і задовольняє умовам $\vec{c} \cdot \vec{a} = 9$, $\vec{c} \cdot \vec{b} = 4$.

8.40. Обчислити внутрішні кути і визначити тип $\triangle ABC$ з вершинами $A(1; 2; 1)$, $B(3; -1; 7)$, $C(7; 4; -2)$.

8.41. Обчислити тупий кут, який утворюють медіани, проведені з вершин гострих кутів рівнобедреного прямокутного трикутника.

8.42. Знайти проекцію вектора $\vec{c} = (4; -3; 2)$ на напрям, який утворює з координатними осями рівні гострі кути.

8.43. При якому значенні параметра α вектори $\vec{m} = \alpha\vec{p} + 3\vec{q}$ і $\vec{n} = \vec{p} - 2\vec{q}$ є взаємно перпендикулярними, якщо $|\vec{p}| = 1$, $|\vec{q}| = 2$ і $(\vec{p} \wedge \vec{q}) = \frac{\pi}{3}$?

8.44. Визначити кут між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо $(\vec{a} - \vec{b})^2 + (\vec{a} + 2\vec{b})^2 = 20$, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$.

8.45. Знайти довжину сторін і величину кутів $\triangle ABC$ з вершинами $A(-1; -2; 4)$, $B(-4; -2; 0)$, $C(3; -2; 1)$.

8.46. Обчислити $np_{\vec{a}+\vec{b}}(2\vec{a} - \vec{b})$, якщо $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ і $(\vec{a} \wedge \vec{b}) = 120^\circ$.

8.47. Дано вершини чотирикутника $A(1; -2; 2)$, $B(1; 4; 0)$, $C(-4; 1; 1)$, $D(-5; -5; 3)$. Довести, що його діагоналі є взаємно перпендикулярними.

8.48. Знайти вектор $\vec{c}$, який колінеарний вектору $\vec{a} = (2; 1; -1)$ і задовольняє умову $\vec{c} \cdot \vec{a} = 3$.

8.49. Довести, що вектор $(\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} - (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a}$.

8.50. Знайти вектор $\vec{c}$, якщо він перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2; 3; -1)$ і $\vec{b} = (1; -2; 3)$ і задовольняє умову $\vec{c} \cdot (2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}) = -6$.

8.51. Визначити, при якому значенні α вектори $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ і $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - \alpha\vec{k}$ є взаємно перпендикулярними.

8.52. У ромбі $ABCD$ дано вектори, які відповідають його діагоналям: $\overrightarrow{AC} = \vec{a}$ і $\overrightarrow{BD} = \vec{b}$. Розкласти за ними вектори, які збігаються зі сторонами ромба: $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ і $\overrightarrow{DA}$.

8.53. Обчислити косинус кута між векторами $\vec{a} = (2; -4; 4)$ і $\vec{b} = (-3; 2; 6)$.

8.54. Дано паралелепіпед $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$. Розкласти за векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектор $\overrightarrow{AM}$, якщо $M = DC_1 \cap D_1C$.

8.55. Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ утворюють кут $\varphi = \frac{\pi}{6}$. Обчислити кут між векторами $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{q} = \vec{a} - \vec{b}$, якщо $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 1$,

8.56. Визначити тип $\triangle ABC$ з вершинами в точках $A(1; 1; 1)$, $B(2; 2; 1)$, $C(2; 1; 2)$.

8.57. Дано точки $A(1; -2; 5)$ і $B(-2; 2; -7)$. Знайти довжину вектора $\overrightarrow{AB}$.

8.58. У $\triangle ABC$ з вершинами $A(2; -1; 3)$, $B(1; 1; 1)$, $C(0; 0; 5)$ визначити кут ABC .

8.59. Дано вектор $\vec{a} = (-2; 2; 1)$. Знайти вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a}$ і протилежний йому за напрямом, якщо $|\vec{b}| = 9$.

8.60. Дано дві точки $A(1; 3; 4)$ і $B(5; 9; 16)$. Знайти одиничний вектор, співнаправлений з вектором $\overrightarrow{AB}$.

8.61. Трикутник задано координатами його вершин $A(9; 2; 4)$, $B(7; 2; 2)$ і $C(1; -2; 2)$. Знайти величину кута між медіанами $\overrightarrow{AA_1}$ і $\overrightarrow{BB_1}$.

8.62. Визначити координати точки A - початку вектора $\vec{a} = (6; 9; 8)$, якщо його кінець збігається з точкою $B(-2; 4; 4)$.

8.63. Який кут утворюють одиничні вектори $\vec{p}$ і $\vec{q}$, якщо вектори $\vec{a} = 10\vec{p} - 8\vec{q}$ і $\vec{b} = 2\vec{p} + 4\vec{q}$ взаємно перпендикулярні?

- 8.64.** При яких значеннях параметра a вектори $\vec{m} = (4; a; 2)$ і $\vec{n} = (2a; 2; 2)$ мають однакову довжину?
- 8.65.** Знайти косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$, якщо $\vec{a} = (2; -1; 3)$ і $\vec{b} = (3; -2; 0)$.
- 8.66.** Показати, що точки $A(-2; -6; -4)$, $B(1; 0; -1)$ і $C(3; 4; 1)$ належать одній прямій.
- 8.67.** Знайти вектор $\vec{b}$, колінеарний вектору $\vec{a} = (12; -16; 15)$, якщо він утворює гострий кут з віссю OY і $|\vec{b}| = 125$.
- 8.68.** Вектор $\vec{a}$ довжиною $\sqrt{3}$ утворює рівні гострі кути з осями координат. Знайти координати цього вектора.
- 8.69.** Знайти $\text{пр}_{\vec{b}} \vec{a}$, якщо $\vec{a} = (3; -4; 4)$, $\vec{b} = (2; -2; 1)$.
- 8.70.** Із точки $A(4; -2; 1)$ проведено відрізок до точки $B(5; 3; 0)$ і продовжено ще на таку саму відстань. Знайти координати кінця продовження.
- 8.71.** Дано вектори $\vec{a} = (-x; 6x; 1)$ і $\vec{b} = (x; 1; -5)$. При яких значеннях x скалярний добуток $\vec{a}$ і $\vec{b}$ буде найбільшим?
- 8.72.** Дано протилежні вершини прямокутника $A(3; 7; 1)$ і $B(11; -1; 3)$. Знайти координати його центра.
- 8.73.** Дано вершини чотирикутника $A(1; 2; 3)$, $B(7; 3; 2)$, $C(-3; 0; 6)$ і $D(9; 2; 4)$. Показати, що його діагоналі взаємно перпендикулярні.
- 8.74.** Дано $|\vec{a}| = 1, |\vec{b}| = 1, \vec{a} \wedge \vec{b} = \frac{2}{3}\pi$. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a} + \vec{b}$ і $\vec{a} - \vec{b}$.
- 8.75.** Дано вершини трикутника $A(3; -1; 5)$, $B(4; 2; -5)$ і $C(-4; 0; 3)$. Знайти довжину медіани, проведеної з вершини A .
- 8.76.** Який кут утворюють між собою два вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектор $\vec{a} + 3\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$, а вектор $\vec{a} - 2\vec{b}$ перпендикулярний до вектора $\vec{a} - 3\vec{b}$?
- 8.77.** Дано точки $A(2; 1; -1)$, $B(3; 2; -1)$ і $C(3; 1; 0)$. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$.
- 8.78.** Довести, що точки $A(1; -1; 1)$, $B(1; 3; 1)$, $C(4; 3; 1)$, $D(4; -1; 1)$ є вершинами прямокутника. Обчислити довжину діагоналей.
- 8.79.** Дано куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Знайти кут між векторами $\overrightarrow{DA_1}$ і $\overrightarrow{DM}$, якщо M – середина ребра CC_1 .
- 8.80.** $SABC$ – трикутна піраміда, P – середина ребра AB , Q – точка перетину медіан грані SBC . Розкласти вектор $\overrightarrow{PQ}$ за векторами $\overrightarrow{SA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{SC} = \vec{c}$.

- 8.81.** Дано точки $A(2; 3; 2)$, $B(3; 0; 4)$, $C(4; \alpha; \beta)$. При яких значеннях α і β точка C належить прямій AB ?
- 8.82.** Знайти вектор $\vec{b}$, який колінеарний вектору $\vec{a} = (4; 3; -12)$ і задовольняє умову $\vec{a} \cdot \vec{b} = 338$.
- 8.83.** Знайти вектор $\vec{x}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a} = (2; 0; -3)$ і $\vec{b} = (0; 1; -2)$, якщо відомо, що $\text{pr}_{\vec{c}} \vec{x} = 2$, $\vec{c} = (2; 1; -2)$.
- 8.84.** Трикутну піраміду задано координатами її вершин $A(3; 0; 1)$, $B(-1; 4; 1)$, $C(5; 2; 3)$ і $D(0; -5; 4)$. Обчислити довжину вектора $\overrightarrow{AO}$, якщо O – точка перетину медіан грані BCD .
- 8.85.** Вектори $\overrightarrow{AB} = (10; -10; 5)$ і $\overrightarrow{AC} = (-2; 2; -1)$ є сторонами $\triangle ABC$. Знайти довжину медіани $\overrightarrow{BN}$.
- 8.86.** Вектор $\vec{a}$ колінеарний вектору $\vec{b} = (12; -16; 15)$ і утворює гострий кут з віссю OZ . Знайти координати $\vec{a}$, якщо $|\vec{a}| = 100$.
- 8.87.** У призмі $ABCA_1B_1C_1$ точка $M \in B_1C_1$ і $B_1M : B_1C_1 = 2 : 3$. Розкласти $\overrightarrow{AM}$ за векторами $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, $\overrightarrow{AA_1} = \vec{c}$.
- 8.88.** Дано чотири точки $A(-2; -3; 8)$, $B(2; 1; 7)$, $C(1; 4; 5)$, $D(-7; -4; 7)$. Перевірити, що вектори $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{CD}$ – колінеарні.
- 8.89.** Дано три вершини паралелограма $A(-3; -2; 0)$, $B(3; -3; 1)$ і $C(5; 0; 2)$. Знайти четверту вершину D , протилежну B , і кут між діагоналями.
- 8.90.** Дано вектори $\vec{a} = (-2; 2; -1)$ і $\vec{b} = (3; 2; -2)$. Знайти проекцію вектора $\vec{c} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ на напрям вектора $\vec{a}$.
- 8.91.** Дано три вектори $\vec{a} = (2; -1; 3)$, $\vec{b} = (1; -3; 2)$, $\vec{c} = (3; 2; -4)$. Знайти вектор $\vec{x}$, який задовольняє умови $\vec{x}\vec{a} = -5$, $\vec{x}\vec{b} = -11$, $\vec{x}\vec{c} = 20$.
- 8.92.** Вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$ – взаємно перпендикулярні, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Знайти $|\vec{a} + \vec{b}|$ і $|\vec{a} - \vec{b}|$.
- 8.93.** Вектор $\vec{c}$, перпендикулярний до векторів $\vec{a}(1; 1; 1)$ і $\vec{b}(1; -1; 3)$, утворює з віссю OZ тупий кут. Знайти координати $\vec{c}$, якщо $|\vec{c}| = 3$.
- 8.94.** Дано три вектори: $\vec{a} = (-2; 1; 1)$, $\vec{b} = (1; 5; 0)$, $\vec{c} = (4; 4; -2)$. Обчислити $\text{pr}_{\vec{c}}(3\vec{a} - 2\vec{b})$.
- 8.95.** Знайти вектор $\vec{x}$ за напрямом бісектриси кута між векторами $\vec{a} = (7; -4; -4)$ і $\vec{b} = (-2; -1; 2)$, якщо $|\vec{x}| = 5\sqrt{6}$.

Розділ 9. ОСНОВИ АНАЛІЗУ

9.1. Похідна. Техніка диференціювання

Нехай функцію $y = f(x)$ визначено у деякому околі $U(x_0)$ точки x_0 . Якщо розглянути будь-яке $x \in U(x_0)$, то приріст аргументу $x - x_0$ будемо позначати символом Δx :

$$\Delta x = x - x_0.$$

Різницю між значеннями функції у точках x і x_0 називають приростом функції, що відповідає даному приросту аргументу, і позначають символом Δf або Δy :

$$\Delta f = \Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Основне означення. Якщо існує скінченна границя

$$y'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то вона називається похідною функції $f(x)$ у точці x_0 .

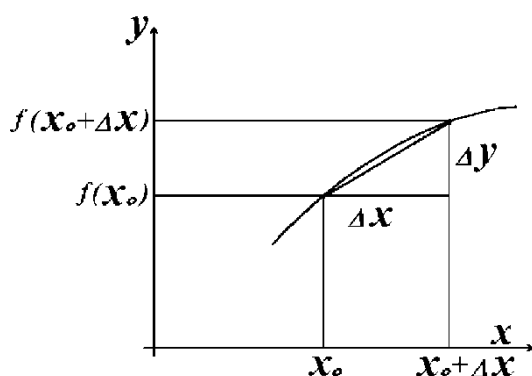


Рис. 9.1

Дріб $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ (рис 9.1) – це тангенс кута, який

утворюють похила і вісь OX . Якщо $\Delta x \rightarrow 0$, то похила прямує до дотичної, яку проведено до графіка функції у точці з абсцисою x_0 .

Геометричний зміст похідної: похідна функції у точці з абсцисою x_0 дорівнює тангенсу кута, який утворює дотична, яку проведено до графіка функції $y = f(x)$ у точці з абсцисою x_0 .

У фізичних задачах похідна $S'(t)$ пов'язана насамперед із миттєвою швидкістю у момент часу t_0 :

$$S'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{S(t_0 + \Delta t) - S(t_0)}{\Delta t} = g(t_0).$$

Властивості похідної можна отримати із відповідних властивостей границі функції:

1) якщо $f(x) = C = \text{const}$, то $f'(x) = 0$ у будь-якій точці;

$$2) [kf(x)]' = kf'(x);$$

$$3) (f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x);$$

$$4) (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x);$$

$$5) (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$6) \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

Зрозуміло, що властивості виконуються лише за умови існування похідних

окремих доданків або множників.

Похідні деяких елементарних функцій:

- | | |
|---|---|
| 1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}, (\alpha \in R);$ | 5) $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a};$ |
| 2) $(e^x)' = e^x;$ | 6) $(\sin x)' = \cos x;$ |
| 3) $(a^x)' = a^x \ln a;$ | 7) $(\cos x)' = -\sin x;$ |
| 4) $(\ln x)' = \frac{1}{x};$ | 8) $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$ |
| | 9) $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$ |

Приклад 9.1. Нехай $y = x^3$, тоді для будь-якої точки x_0 за означенням маємо

$$\begin{aligned} y'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^3 + 3x_0^2 \Delta x + 3x_0 \Delta x^2 + \Delta x^3 - x_0^3}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (3x_0^2 + 3x_0 \Delta x + (\Delta x^2)) = 3x_0^2. \end{aligned}$$

Таким чином, $y'(x_0) = 3x_0^2$.

Зауваження. Замість терміна «знайти похідну» часто застосовують термін «продиференціювати функцію».

Наведемо правило знаходження похідних так званих складених функцій, їх також називають функціями від функцій, або композиціями функцій. Наприклад, $y = e^{x^2}$, $y = \sin(x^3)$, $y = \operatorname{tg} \sqrt{x}$ – складені функції.

Якщо $y = g(f(x))$, то $y' = g'(f(x)) \cdot f'(x)$, тобто похідна від складеної функції дорівнює добутку похідних функцій, що входять до неї. Існує досить вдалий термін англійською мовою, а саме «chain rule».

Приклад 9.2. Знайти y' , якщо $y = \sin x^2$.

Розв'язання. Тут зовнішньою функцією є синус, а внутрішньою – x^2 . Тоді $y' = \cos(x^2)2x$.

Приклад 9.3. Знайти y' , якщо $y = \sin^2 x$.

Розв'язання. Степенева функція $y = (\sin x)^2$ є зовнішньою, а тригонометрична – внутрішньою, тобто спочатку для функції $y = t^2$ похідна дорівнює $2t$, а оскільки $t = \sin x$, помножимо її на похідну від $\sin x$: $y' = 2\sin x \cdot \cos x$.

Приклад 9.4. Знайти y' , якщо $y = 2^{\sqrt{\cos 3x}}$.

Розв'язання. Композиція складається із чотирьох функцій: першою є показникова функція 2^u із похідною $2^u \ln 2$. Показник має похідну

$$U' = (\sqrt{g})' = (g^{\frac{1}{2}})' = 0,5g^{-0,5} = \frac{1}{2\sqrt{g}}.$$

Залишається знайти похідну останньої функції, а саме $g = \cos 3x$. Вона дорівнює $g' = -\sin 3x \cdot 3$. Остаточно маємо

$$(2^{\sqrt{\cos 3x}})' = 2^{\sqrt{\cos 3x}} \ln 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\cos 3x}} \cdot (-\sin 3x \cdot 3).$$

Приклад 9.5. Знайти $y'(\pi)$, якщо $y = \frac{\sin 3x}{\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо y' : $y' = \frac{\sqrt{x} \cos 3x \cdot 3 - \sin 3x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x}$.

Замінімо x числом π : $y'(\pi) = \frac{\sqrt{\pi} \cos 3\pi \cdot 3 - 0}{\pi} = \frac{-3}{\sqrt{\pi}}$.

Завдання для самостійної роботи

9.1. Користуючись означенням похідної, довести, що $(x^4)' = 4x^3$, $(x^2)' = 2x$.

9.2. Проаналізувати, як легше знайти похідну y : за правилом $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ або користуючись

похідною степеневі функції x^α , якщо $y = \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}} - \frac{4}{\sqrt{x}}$.

Знайти похідні функцій:

9.3. $y = x^3 \sin x$. **9.4.** $y = \frac{1-5x}{1+x}$. **9.5.** $y = \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

9.6. $y = x - 3x^2 + 3x^4 - 2 + (x+7)(2-5x)$. **9.7.** $\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

9.8. $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 3x + 11$. **9.9.** $y = 4\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}}$. **9.10.** $y = 3\sqrt[3]{x} + 4x^3\sqrt{x} + \frac{1}{x^2}$.

9.11. $y = 4x^5 \cdot \sin x$. **9.12.** $y = x - \frac{1}{2}x^2 \cos 4x - 2$. **9.13.** $y = \frac{1-8x}{1+7x}$. **9.14.** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \operatorname{ctg} x$.

9.15. $y = x^3 \operatorname{tg} x$. **9.16.** $y = \frac{1-2x}{1+3x}$. **9.17.** $y = \log_x 2$. **9.18.** $y = \sqrt{x} \cos x$. **9.19.** $y = \frac{x-2}{\log_3 x}$.

9.20. $y = \frac{x^3}{4^x}$. **9.21.** $y = e^{-4x+3}$. **9.22.** $y = 2^{-x^3}$. **9.23.** $y = -3x^2 \operatorname{ctg} x$. **9.24.** $y = \frac{\sin \frac{x}{7}}{x^2 + 6}$.

9.25. $y = \cos(x^7)$. **9.26.** $y = \cos^7 x$. **9.27.** $y = \sin(x^5)$. **9.28.** $y = (\sin x)^5$.

Знайти похідні у поданих точках:

9.29. $y = \sin 6x \cos 6x$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = ?$ **9.30.** $y = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = ?$

9.31. Довести, що функція $y = xe^{5x}$ задовольняє умову $y' - 5y = e^{5x}$.

9.32. Довести, що функція $y = xe^{3x}$ задовольняє умову $y' - 3y = e^{3x}$.

9.33. Знайти $y'(0)$, якщо $y = (x-1)(x-2)(x-3)$.

Знайти похідну функції у точці:

9.34. $y = (x-1)(x-2)(x-3)$, $y'(1) = ?$ 9.35. $y = e^{-2x} \cos 4x$, $y'(0) = ?$

9.36. $y = \frac{x}{3} + \frac{3}{x}$, $y'(1) = ?$ 9.37. $y = (x^2-1)(x^2-2)(x^2-3)$, $y'(1) = ?$

9.38. $y = \frac{\cos x}{1-x^2}$, $y'(0) = ?$

9.39. Розв'язати рівняння $y' = 0$, якщо $y = \sin x + \frac{\sin 2x}{2}$.

9.40. Знайти $y'(0)$, якщо $y = e^{-x} \cos 4x \sin 5x$. 9.41. $y = \cos x - \frac{\cos^3 x}{3}$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = ?$

9.42. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{9x}}$, $y'(1) = ?$ 9.43. $y = \sin x + \frac{\sin^3 x}{3}$, $y'\left(\frac{4\pi}{3}\right) = ?$

9.44. $y = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d)$, $y'(a) = ?$ 9.45. $y = \left(x^3 - \frac{1}{x^3} + 3\right)^4$, $y'(1) = ?$

9.46. $y = \frac{\cos x - \sin x}{x^2}$, $y'(\pi) = ?$ 9.47. $y = \frac{x \cos x - 1}{x}$, $y'(3\pi) = ?$

9.2. Застосування похідної

Зростання і спадання функцій

Функція $f(x)$ називається зростаючою на множині X , якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$, таких, що $x_1 < x_2$, виконується нерівність $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Зауважимо, що іноді таку функцію називають неспадною.

Якщо при $x_1 < x_2$ нерівність є строгою ($f(x_1) < f(x_2)$), то функцію називають строго зростаючою.

Функція називається спадною на множині X , якщо для будь-яких $x_1, x_2 \in X$, таких, що $x_1 < x_2$, $f(x_1) \geq f(x_2)$.

У випадку, коли $f(x_1) > f(x_2)$, функцію називають строго спадною.

Якщо $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$ і має похідну на інтервалі (a, b) , то справедливими є такі властивості:

1) якщо $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) = 0 \Rightarrow f(x) = \text{const}$;

2) якщо $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x)$ – зростає на (a, b) ;

3) якщо $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x)$ – спадає на (a, b) .

При цьому у випадку $f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ є строго зростаючою, а у випадку $f'(x) < 0$ функція є строго спадною.

Приклад 9.6. Знайти інтервали зростання і спадання функції $y = x^2 e^{-x}$.

Розв'язання. Знаходимо похідну функції: $y' = 2x \cdot e^{-x} + x^2 \cdot e^{-x} \cdot (-1) = xe^{-x}(2-x)$. Зобразимо на осі (рис. 9.2) точки, у яких похідна дорівнює нулю, і дослідимо знак похідної на інтервалах.

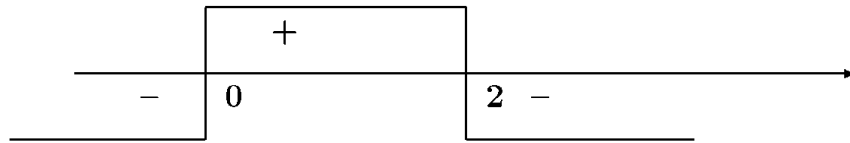


Рис. 9.2

Оскільки $y' < 0$ при $x \in (-\infty; 0)$, то функція спадає на інтервалі $(-\infty; 0)$. Для $x \in (0; 2)$ похідна $y' > 0$, на цьому інтервалі функція зростає. На інтервалі $(2; +\infty)$ функція спадає.

Точки екстремуму

Нехай функцію $f(x)$ визначено на інтервалі (a, b) , $x_0 \in (a, b)$. Кажуть, що точка x_0 є точкою локального максимуму функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $U(x_0)$ точки x_0 , що для будь-якого $x \in U(x_0)$ виконується нерівність $f(x) \leq f(x_0)$. Іншими словами, значення функції в околі точки x_0 не перевершують її значення у самій x_0 .

Нехай функцію $f(x)$ визначено на інтервалі (a, b) , $x_0 \in (a, b)$. Кажуть, що точка x_0 є точкою локального мінімуму функції $f(x)$, якщо існує такий окіл $U(x_0)$ точки x_0 , що для будь-якого $x \in U(x_0)$ виконується нерівність $f(x) \geq f(x_0)$.

У випадку виконання строгих нерівностей точки локального мінімуму або максимуму мають назву точок строгого мінімуму або строгого максимуму.

Слово "локальний" в означенні підкреслює той факт, що значення функції є більшими або меншими лише у деякому околі x_0 , але вони можуть не бути найбільшими та найменшими на всьому інтервалі (рис. 9.3). Тут x_1, x_3 – точки локальних максимумів, x_2, x_4 – мінімумів. У подальшому слово «локальний» не застосовуватимемо, будемо просто говорити про точки мінімуму або максимуму. Їх також називають точками екстремуму функції.

Точки, в яких похідна дорівнює нулю або не існує, називаються критичними точками функції.

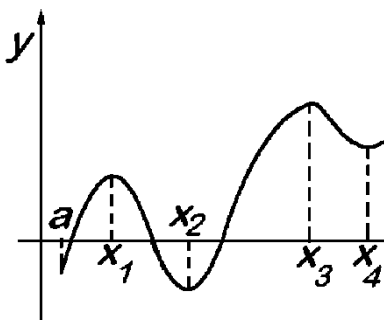


Рис. 9.3

Необхідна умова екстремуму. Якщо x_0 – точка екстремуму функції $f(x)$, то вона є критичною точкою (рис. 9.4). Тобто якщо точка є точкою локального екстремуму, то похідна в цій точці або дорівнює нулю, або не існує.

Достатня умова екстремуму. Підкреслимо, що попередня умова є лише необхідною, але не достатньою. Наприклад, розглянемо функцію $y = x^3$, для якої похідна $y' = 0$ в точці $x_0 = 0$. Але екстремуму там немає.

Достатні умови екстремуму впливають із монотонності. Нехай $f(x)$ – неперервна в точці x_0 , і у деякому околі $U(x_0)$ (може, навіть окрім самої x_0) існує похідна $f'(x)$. Тоді у випадку, коли знак похідної змінюється: $f'(x) \leq 0$ для $x < x_0$, $x \in U(x_0)$, $f'(x) \geq 0$ для $x > x_0, x \in U(x_0)$, x_0 є точкою мінімуму $f(x)$. Якщо

$f'(x) \geq 0$ для $x < x_0$, $f'(x) \leq 0$ для $x > x_0$, то x_0 – точка максимуму. Інакше кажучи, якщо при переході через точку x_0 похідна функції змінює знак з "–" на "+", то x_0 – точка мінімуму, а у випадку "+" на "–" – точка максимуму.

$$y = 2x - x^2, \\ x_0 = 1, f'(x_0) = 0.$$

$y = |x|$, $x_0 = 0$ – точка мінімуму, похідна в точці x_0 не існує.

$y = \sqrt[3]{x^2}$, $x_0 = 0$ – точка мінімуму, похідна у точці x_0 не існує, або її можна вважати нескінченною

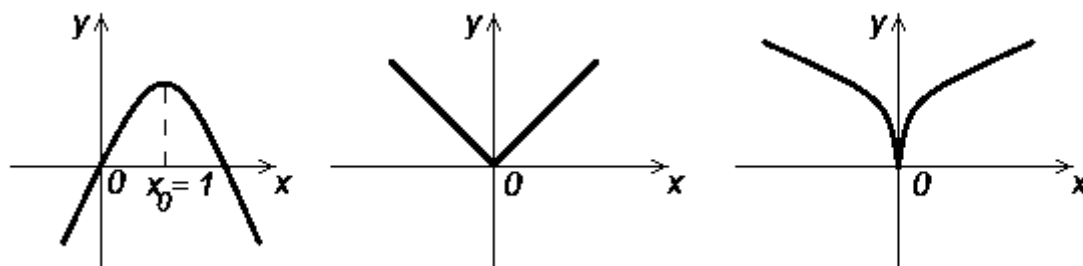


Рис. 9.4

Приклад 9.7. Дослідити функцію на екстремум $y = 3x^5 - 5x^3 + 8$.

Розв'язання. Похідна дорівнює $y' = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x-1)(x+1)$. Указуємо (рис. 9.5) критичні точки $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$ і досліджуємо знак похідної y' на інтервалах $(-\infty; -1)$, $(-1; 0)$, $(0; 1)$, $(1; +\infty)$.

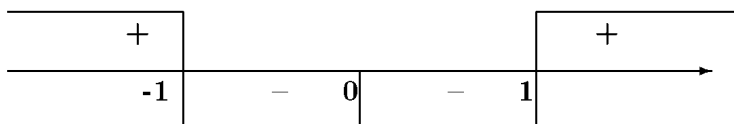


Рис. 9.5

При переході через точку $x_1 = -1$ похідна змінює знак з "+" на "-", а при переході через $x_3 = 1$ – з "-" на "+". Тому точка $x_1 = -1$ є точкою максимуму, а $x_3 = 1$ – точкою мінімуму функції $f(x)$. Точка $x_2 = 0$ не є точкою екстремуму, не зважаючи на те, що $y'(0) = 0$. Дійсно, при переході через неї знак похідної не змінюється.

Приклад 9.8. Знайти точки екстремуму функції $y = \sqrt[3]{(x^2 - 16)^2}$.

Розв'язання. Функцію визначено на всій числовій осі, Знаходимо її похідну:

$$y' = \left((x^2 - 16)^{\frac{2}{3}} \right)' = \frac{2(x^2 - 16)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2x}{3} = \frac{4x}{3\sqrt[3]{x^2 - 16}}.$$

У точці $x_1 = 0$ похідна дорівнює 0, а в точках $x = \pm 4$ – не існує. Дослідимо знак похідної y' (рис. 9.6).

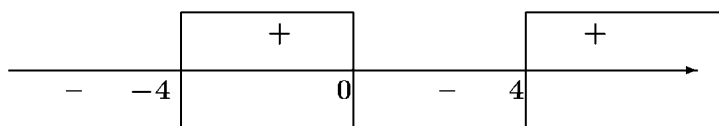


Рис. 9.6

У точці $x = 0$ функція має максимум, а в точках $x = \pm 4$ – мінімуми.

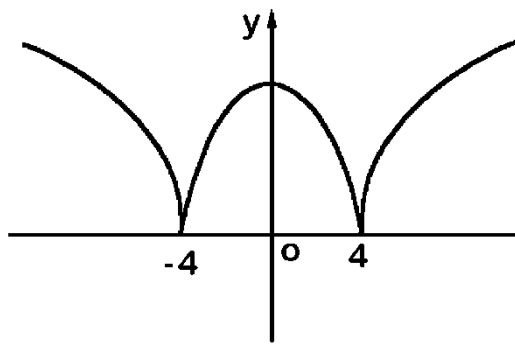


Рис. 9.7

Цей приклад є цікавим тому, що тут у точках екстремуму дотичні суттєво відрізняються одна від одної, а саме: якщо $x_1 = 0$, похідна дорівнює нулю і дотична паралельна осі OX . Щодо точок мінімуму, у яких похідна є нескінченною, дотична паралельна до осі ординат, бо похідна перетворюється на ∞ (рис. 9.7).

Найбільше та найменше значення функції на відрізку

Нехай функція $f(x)$ є неперервною на відрізку $[a, b]$. Тоді вона досягає найбільшого та найменшого значень на цьому відрізку або у критичних точках, або у кінцях відрізка (рис. 9.8).

$$y = x \text{ на } [0, 1],$$

найбільше й
найменше значення –
на кінцях відрізка.

$$y = \sin x, x \in [0, 2\pi],$$

обидва значення – у
точках екстремуму.

$$y = x^2, x \in [-1; 2],$$

найбільше – у кінці відрізка,
найменше – у точці
екстремуму.

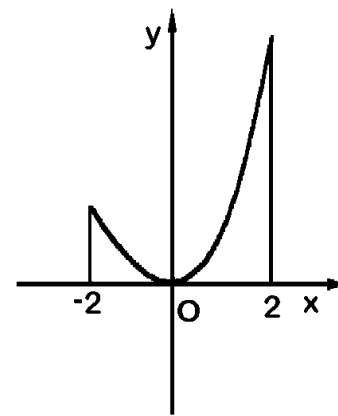
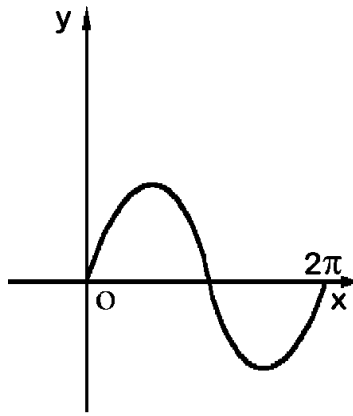
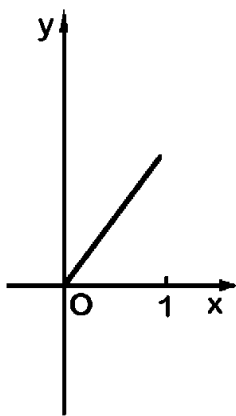


Рис. 9.8

Алгоритм пошуку найбільшого й найменшого значень $y = f(x)$ на відрізку $[a, b]$:

- 1) знайти y' ;
- 2) визначити критичні точки $x_1, \dots, x_m$;
- 3) порівняти значення $f(a), f(x_1), \dots, f(x_m), f(b)$;
- 4) вибрати найбільше та найменше значення.

Приклад 9.9. Знайти найбільше й найменше значення функції $y = \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \sin x$ на відрізку $[0, \pi]$.

Розв'язання. 1. Знаходимо похідну:

$$y' = 2 \cos \frac{x}{2} \cdot \left(-\sin \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin x + \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \cos x = \cos \frac{x}{2} \left[\cos \frac{x}{2} \cdot \cos x - \sin \frac{x}{2} \cdot \sin x \right] =$$

$$= \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \left[\frac{x}{2} + x \right] = \cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2}.$$

2. Визначаємо критичні точки: $y' = 0$, $\cos \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{3x}{2} = 0$,

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi m; x = \pi + 2\pi k, x = \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi m}{3}.$$

На відрізку $[0, \pi]$ розташовано дві з них: $x_1 = \frac{\pi}{3}$, $x_2 = \pi$.

3. Порівнюємо значення:

$$y(0) = 0, y\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}, y(\pi) = 0.$$

$$\text{Відповідь: } y_{\text{найб}} = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \quad y_{\text{найм}} = 0.$$

Інша форма запису відповіді: $\max_{[0; \pi]} \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \sin x = \frac{3\sqrt{3}}{8}$, $\min_{[0; \pi]} \cos^2 \frac{x}{2} \cdot \sin x = 0$.

Рівняння дотичної

Рівняння дотичної до графіка функції $f(x)$ у точці з абсцисою x_0 має такий вигляд:

$$y - y_0 = f'(x_0) \cdot (x - x_0),$$

де $y_0 = f(x_0)$ – значення функції у точці x_0 , а $f'(x_0)$ – значення похідної.

Приклад 9.10. Скласти рівняння такої дотичної до параболи $y = x^2 - 7x + 3$, яка є паралельною до прямої $5x + y - 3 = 0$.

Розв'язання. З умови паралельності $f'(x_0) = -5$, $y' = 2x - 7$. Для того, щоби значення похідної у точці x_0 збігалося із кутовим коефіцієнтом прямої, необхідно, щоби $2x_0 - 7 = -5$, тобто $x_0 = 1$. Знаходимо значення функції $y_0 = f(x_0) = 1^2 - 7 \cdot 1 + 3 = -3$. Остаточнo одержимо

$$y - (-3) = -5 \cdot (x - 1) \Leftrightarrow y = -5x + 2.$$

Завдання для самостійної роботи

Знайти інтервали зростання і спадання функцій:

9.48. $y = -x \cdot (x - 2)^2$. **9.49.** $y = x^5 - 20 \cdot x^3 + 8$. **9.50.** $y = \frac{x+2}{x^2-1}$.

9.51. $y = \frac{-x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2} - 8x + 3$. **9.52.** $y = x(4x - x^2)$. **9.53.** $y = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$.

9.54. $y = 3x^5 - 25x^3 + 60x + 15$.

Знайти точки екстремуму функцій:

9.55. $y = x^4 - \frac{5 \cdot x^2}{4} + \frac{1}{4}$. **9.56.** $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 12$. **9.57.** $y = \frac{x}{x^2 + 1}$.

9.58. $y = e^{-x^2 + 8x + 5}$. **9.59.** $y = 2^{x^3 - 3x}$. **9.60.** $y = x^4(1 - x)^3$. **9.61.** $y = x^{\frac{2}{3}} - x$.

9.62. $y = \frac{x^6}{6} + \frac{3x^5}{5} + 1$. **9.63.** $y = 2x - 6\sqrt[3]{x}$. **9.64.** $y = x \ln x$. **9.65.** $y = (x - 4)\sqrt{x}$.

9.66. $y = 5x^2 - 2x^5 + 3$. **9.67.** $y = \frac{x^2}{x - 1}$.

Знайти найбільше й найменше значення функцій:

9.68. $y = \frac{x^3}{3} - 2x^2 + 3x + 1$ на відрізку $[-1; 5]$. **9.69.** $y = \frac{x - 3}{x + 1}$ на відрізку $[0; 2]$.

9.70. $y = (x + 3)^3(x - 2)$ на відрізку $[0; 1]$. **9.71.** $y = \frac{2x + 1}{x - 2}$ на відрізку $[-1; 1]$.

9.72. $y = x^3 + 9x - 3$ на відрізку $[-1; 0]$. **9.73.** $y = 6x - x^3$ на відрізку $[-2; 1]$.

9.74. $y = x + 2\sqrt{x}$ на відрізку $[0; 4]$. **9.75.** $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$ на відрізку $[0,25; 1]$.

9.76. $y = \sqrt{x} - 2\sqrt[4]{x} + 3$ на відрізку $[0; 16]$. **9.77.** $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на відрізку $[-2; 2]$.

9.78. $y = \frac{x}{x^2 + 1}$ на відрізку $[0; 2]$. **9.79.** $y = \frac{x^2}{x + 4}$ на відрізку $[-9; -5]$.

Скласти рівняння дотичної до графіка функції у поданих точках:

9.80. $y = 4x - x^2$ у точках перетину з віссю абсцис.

9.81. $y = \frac{2x + 1}{x - 2}$ у точці перетину з віссю ординат.

9.82. $y = \sin x$ у точці $x = 0$.

9.83. В яких точках дотична до графіка $y = 2 \sin x + \sin 2x + 3$ є паралельною до осі абсцис?

9.84. Скласти рівняння такої дотичної до параболи $y = -x^2 + 2$, яка є паралельною до прямої $y = 4x + 7$.

9.85. Периметр прямокутної трапеції дорівнює 4, гострий кут $- 45^\circ$. При якому значенні висоти трапеції її площа буде мати найбільше значення?

9.86. Твірна конуса дорівнює a . При якому значенні радіуса основи конусу він матиме найбільший об'єм?

9.87. В якій точці дотична до графіка функції $y = \frac{x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} - 9x + 1$ нахилена під

кутом 45° до осі абсцис?

9.3. Первісна. Невизначений інтеграл

Функція $F(x)$ називається первісною функції $f(x)$ на множині I , якщо для будь-якого $x \in I$

$$F'(x) = f(x).$$

Наприклад, $F(x) = \operatorname{tg} x + 1$ є первісною функції $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$ на інтервалі $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тому що

$$F'(x) = (\operatorname{tg} x + 1)' = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Якщо $F(x)$ – первісна $f(x)$, а C – довільне число, то $F(x) + C$ – теж є первісною $f(x)$, оскільки

$$(F(x) + C)' = F'(x) + 0 = F'(x).$$

Дві первісні однієї функції, знайдені на інтервалі I , відрізняються одна від одної на константу

$$F_1(x) = F_2(x) + C.$$

Сукупність усіх первісних функції $f(x)$ називається невизначеним інтегралом функції і позначається символом

$$\int f(x) dx.$$

Таблиця первісних

$$1. \int 1 dx = x + C.$$

$$2. \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \text{ где } \alpha \in R, \alpha \neq -1.$$

$$3. \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C.$$

$$4. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$5. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$$

$$6. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$7. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$8. \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C.$$

$$9. \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C.$$

Кожну формулу таблиці можна перевірити безпосередньо знаходженням похідної правої частини.

Основні властивості

$$1. \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

$$2. \int C f(x) dx = C \int f(x) dx, \quad C - \text{будь-яка константа.}$$

$$3. \text{Якщо } \int f(x) dx = F(x) + C, \text{ то}$$

$$\int f(ax + b) dx = \frac{F(ax + b)}{a} + C, \quad a \neq 0.$$

Приклад 9.11. Знайдемо інтеграл від суми:

$$\begin{aligned}\int (5x^5 + 6x + \sqrt{x}) dx &= 5 \int x^5 dx + 6 \int x dx + \int x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= 5 \cdot \frac{x^6}{6} + 6 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{5}{6}x^6 + 3x^2 + \frac{2}{3} \cdot x^{\frac{3}{2}} + C.\end{aligned}$$

Приклад 9.12. $\int (x-1)^{100} dx = \frac{(x-1)^{100+1}}{100+1} + C = \frac{(x-1)^{101}}{101} + C.$

Приклад 9.13. $\int \sqrt{2x+5} dx = \int (2x+5)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{(2x+5)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \cdot \frac{1}{2} + C = \frac{1}{3} \sqrt{(2x+5)^3} + C.$

У прикладі використовується третя властивість $\int f(ax+b)dx$, але корисніше переконатися безпосередньо:

$$\left(\frac{1}{3} (2x+5)^{\frac{3}{2}} \right)' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} (2x+5)^{\frac{3}{2}-1} \cdot 2 = \sqrt{2x+5}.$$

Приклад 9.14. $\int \sin 5x dx = -\frac{\cos 5x}{5} + C.$

Приклад 9.15. $\int \cos^2 \frac{x}{3} dx.$

Розв'язання. За формулою тригонометрії маємо

$$\begin{aligned}\cos^2 \frac{x}{3} &= \frac{1 + \cos \frac{2x}{3}}{2}, \\ \int \cos^2 \frac{x}{3} dx &= \frac{1}{2} \int \left(1 + \cos \frac{2x}{3} \right) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{3}{2} \sin \frac{2x}{3} \right) + C.\end{aligned}$$

Приклад 9.16. $\int 4 \cos 7x \cdot \cos 9x dx = 2 \int (\cos 16x + \cos 2x) dx =$
 $= 2 \left(\frac{\sin 16x}{16} + \frac{\sin 2x}{2} \right) + C.$

Приклад 9.17. $\int \frac{dx}{x^2-1}.$

Розв'язання. Знаходження похідної безпосередньо впливає із простих перетворень:

$$\begin{aligned}\frac{1}{x^2-1} &= \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right); \\ \int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} (\ln|x-1| - \ln|x+1|) + C = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C.\end{aligned}$$

Приклад 9.18. $\int \frac{x^3 dx}{x+2} = \int \frac{x^3 + 8 - 8}{x+2} dx = \int \frac{(x+2)(x^2 - 2x + 4)}{x+2} dx -$

$$-8 \int \frac{dx}{x+2} = \int (x^2 - 2x + 4) dx - 8 \ln|x+2| + C = \frac{x^3}{3} - x^2 + 4x - 8 \ln|x+2| + C.$$

Зауваження. Звернемо увагу на те, що дві первісні однієї функції на інтервалі обов'язково відрізняються одна від одної на константу. Наступний приклад пояснює, чому у цьому твердженні слово «інтервал» не є зайвим.

Приклад 9.19. Легко переконатись в тому, що дві функції $F_1(x) = -\frac{1}{x}$ і

$$F_2(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} + 1, & x > 0, \\ -\frac{1}{x} - 1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{мають на множині } (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \quad \text{однакову похідну}$$

$f(x) = \frac{1}{x^2}$, тобто обидві є її первісними. Однак на множині $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ їх різниця не є сталою.

Завдання для самостійної роботи

9.88. $\int (5-x) dx$. **9.89.** $\int \left(5 - \frac{1}{x}\right) dx$. **9.90.** $\int (5 - \sqrt{x}) dx$. **9.91.** $\int \left(\frac{1}{5x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$.

9.92. $\int (x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx$. **9.93.** $\int (x+7)^{19} dx$. **9.94.** $\int (3x+7)^{19} dx$. **9.95.** $\int (7-x)^{19} dx$.

9.96. $\int (7-3x)^{19} dx$. **9.97.** $\int \left(\frac{x}{3} + 1\right)^{19} dx$. **9.98.** $\int \left(5 - \frac{x}{3}\right)^{19} dx$. **9.99.** $\int \sqrt{5x+9} dx$.

9.100. $\int \frac{dx}{\sqrt{5x+9}}$. **9.101.** $\int \sin \frac{x}{7} dx$. **9.102.** $\int \frac{dx}{x^2-9}$. **9.103.** $\int 4 \cos(2x-1) dx$.

9.104. $\int 6 \sin^2 5x dx$. **9.105.** $\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$. **9.106.** $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$. **9.107.** $\int \frac{x^2 dx}{x^2-1}$.

9.108. $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{7}}$. **9.109.** $\int \frac{2x+1}{x^2+x-6} dx$. **9.110.** $\int e^{-\frac{x}{3}} dx$. **9.111.** $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} dx$.

9.112. $\int 4 \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx$. **9.113.** $\int 4 \sin \frac{x}{2} \sin \frac{3x}{2} dx$. **9.114.** $\int (2x^2 - 3x + 1) dx$

9.115. $\int \sin \frac{x}{9} dx$. **9.116.** $\int \left(2x^2 - 3x + \frac{1}{x}\right) dx$. **9.117.** $\int 6 \cos(3x-5) dx$. **9.118.** $\int (3-x) dx$.

9.119. $\int 4 \sin^2 2x dx$. **9.120.** $\int (1+3x)^{11} dx$. **9.121.** $\int (1-3x)^{11} dx$. **9.122.** $\int \frac{dx}{\cos^2 13x}$.

9.123. $\int \sqrt{2x-9} dx$. **9.124.** $\int \frac{dx}{\sin^2 \frac{x}{13}}$. **9.125.** $\int \frac{x^3 dx}{x-1}$. **9.126.** $\int \operatorname{tg}^2 \frac{x}{13} dx$.

9.127. $\int (2 \arcsin x + 2 \arccos x + 1) dx$.

9.4. Визначений інтеграл і його застосування

Розглянемо деякі задачі, що приводять до поняття визначеного інтегралу.

Задача про площу криволінійної трапеції

Нехай потрібно обчислити площу так званої криволінійної трапеції, тобто геометричної фігури, обмеженої лініями $y=0$, $x=a$, $x=b$ і графіком функції $y=f(x) \geq 0$ (рис. 9.9).

Розіб'ємо відрізок $[a;b]$ точками $a=x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n=b$ і проведемо вертикальні лінії $x=x_1$, $x=x_2$, ..., $x=x_n$ (рис. 9.10).

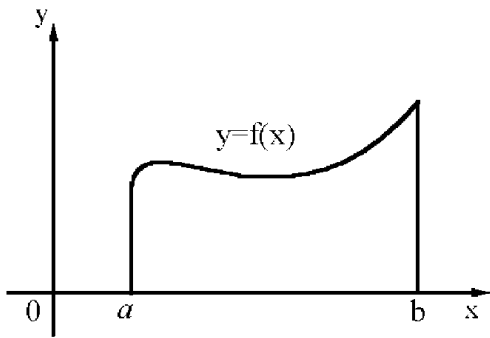


Рис. 9.9

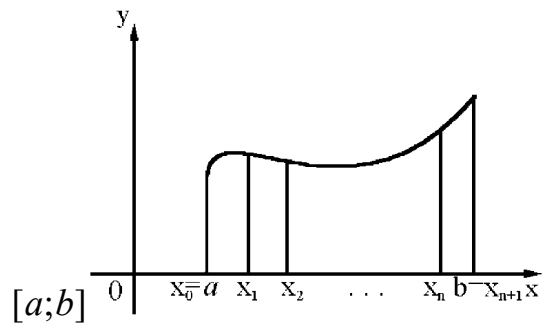


Рис. 9.10

Якщо розбиття відрізка є досить «дрібним», то окремі криволінійні частини можна наближено розглядати як прямокутники. Тепер на кожному відрізку $[x_i; x_{i+1}]$ виберемо будь-яку точку M_i . Площу окремої частини можна наближено знаходити як площу прямокутника, висотою якого є значення функції у вибраній точці:

$$\Delta S_i = (x_{i+1} - x_i) f(M_i) = f(M_i) \Delta x_i, \text{ де } \Delta x_i = x_{i+1} - x_i.$$

Тоді площа криволінійної трапеції дорівнює

$$S \approx \Delta S_1 + \Delta S_2 + \dots + \Delta S_n = f(M_1) \Delta x_1 + f(M_2) \Delta x_2 + \dots$$

Суму, що знаходиться праворуч, будемо називати інтегральною сумою функції, яка відповідає даному розбиттю відрізка точками і даному способу вибрати точки M_i . Зрозуміло, що її значення буде тим ближче до площі, чим «дрібнішим» є розбиття. Якщо розглянути граничний випадок, коли максимальна довжина сегмента розбиття $\max \Delta x_i \rightarrow 0$, то отримаємо точне значення площі. Така границя називається визначеним інтегралом функції $f(x)$ по відрізку $[a;b]$ і позначається символом

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Тепер зрозуміле походження символу інтеграла: перша літера S слова «сума» латиницею перетворилася на символ інтеграла.

Зауваження. Підкреслимо, що геометричний зміст безпосередньо формули $\int_a^b f(x) dx = S$ виконується лише для $f(x) \geq 0$. Випадки, коли функція на відрізку змінює знак, розглянемо окремо.

Задача про пройдений шлях. Якщо точка рухається по прямій, а її швидкість залежить від часу a , то для пошуку шляху, пройденого від моменту a до моменту b , можна застосувати той самий метод, що було розглянуто вище.

Сегмент часу $[a;b]$ знову розбиваємо на частини, які потім будемо вважати досить «дрібними». Тоді на кожному сегменті швидкість вважатимемо сталою.

Пройдений шлях наближено дорівнює

$$S \approx v(M_1)\Delta t_1 + v(M_2)\Delta t_2 + \dots + v(M_n)\Delta t_n, \text{ де } \Delta t_i = t_{i+1} - t_i.$$

Значення суми буде тим ближче до S , чим «дрібнішим» буде розбиття, або меншим, відповідно, буде $\max \Delta t_i$:

$$S = \lim_{\max \Delta t_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(M_i)\Delta t_i = \int_a^b v(t)dt.$$

У курсі вищої математики акуратно розглядають означення і властивості визначеного інтеграла і на базі цих властивостей доводять основну формулу інтегрального числення – формулу Ньютона – Лейбніца:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

де $F(x)$ – будь-яка первісна функції $f(x)$.

Важливість формули полягає в тому, що вона поєднує поняття первісної, яку було визначено просто як дію, обернену до похідної, з поняттям визначеного інтеграла, який має численну кількість застосувань у багатьох галузях знань.

Продовжимо ілюструвати застосування визначеного інтеграла для знаходження площі. Розглянемо фігуру, обмежену лініями $x = a$, $x = b$, $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, де $f_1(x) \geq f_2(x)$ (рис. 9.11). Тоді

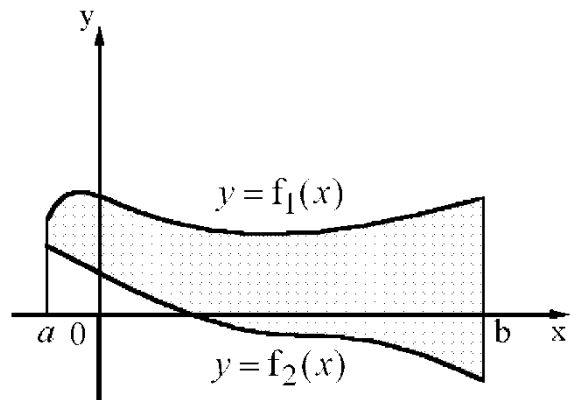


Рис. 9.11

$$S = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))dx.$$

Попередня формула – це її окремий випадок для

$$f_2(x) = 0, \quad f_1(x) = f(x) \geq 0.$$

Якщо $f(x) \leq 0$, то площу фігури, обмеженої лініями $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$, теж можна знайти як окремий випадок:

$$S = \int_a^b (0 - f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad (f_1(x) = 0, \quad f_2(x) = f(x)).$$

Аналогічно розглядається випадок, зображений на рис. 9.12. Якщо дозволити собі на декілька хвилин відхилитися від академічного стилю мовлення, то всі випадки можна поєднати такою формулою:

$$\text{Площа} = \int_a^b (\text{даха} - \text{нідлога}) dx.$$

Зауважимо, що іноді простіше інтегрувати відносно іншої осі (рис. 9.13):

$$S = \int_c^d (f_1(y) - f_2(y))dy.$$

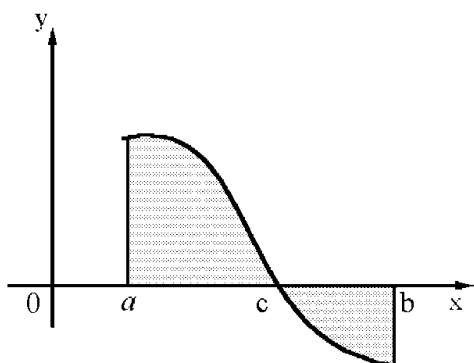


Рис. 9.12

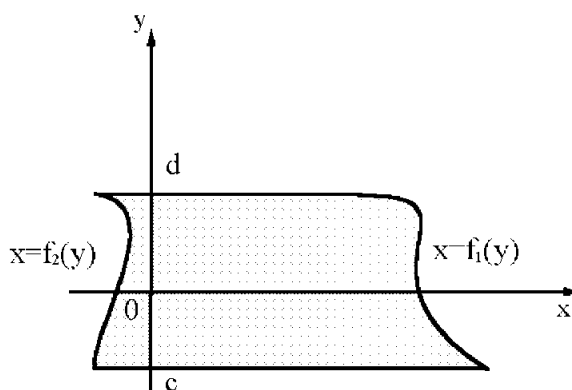


Рис. 9.13

Приклад 9.20. Обчислити $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx$.

Розв'язання. Формули тригонометрії дозволяють швидко знайти первісну: $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1 + \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right)$.

$$\text{Звідси } \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = \frac{1}{2} \left(x + \frac{\sin 2x}{2} \right) \Big|_0^{\pi} = \frac{1}{2} \left(\pi + \frac{\sin 2\pi}{2} \right) - \frac{1}{2} \left(0 + \frac{\sin 0}{2} \right) = \frac{\pi}{2}$$

$(F(x)) \Big|_a^b$ – це позначення для різниці довільної первісної в кінцях відрізка, тобто $F(b) - F(a)$.

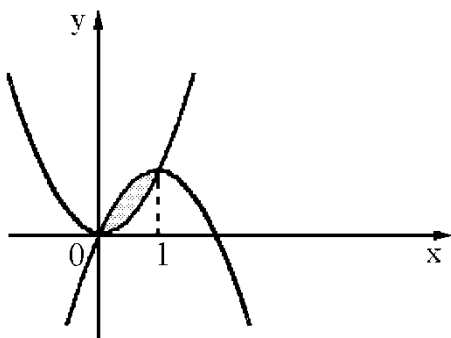


Рис. 9.14

Приклад 9.21. Знайти площу, обмежену лініями $y = 2x - x^2$, $x^2 = y$ (рис. 9.14).

Розв'язання. Знаходимо точки перетину, розв'язуючи систему $\begin{cases} y = x^2, \\ y = 2x - x^2. \end{cases}$

Маємо дві точки: $(0; 0)$ і $(1; 1)$. Тепер $f_1(x) = 2x - x^2$ – це «дах», а «підлогу» утворює $f_2(x) = x^2$.

Тому площу можна знайти за формулою

$$S = \int_0^1 [(2x - x^2) - x^2] dx = \int_0^1 (2x - 2x^2) dx = \left(x^2 - \frac{2x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Приклад 9.22. Знайти площу, обмежену графіком функції $y = \sin x$, віссю абсцис і прямою $x = \frac{4\pi}{3}$ (рис. 9.15).

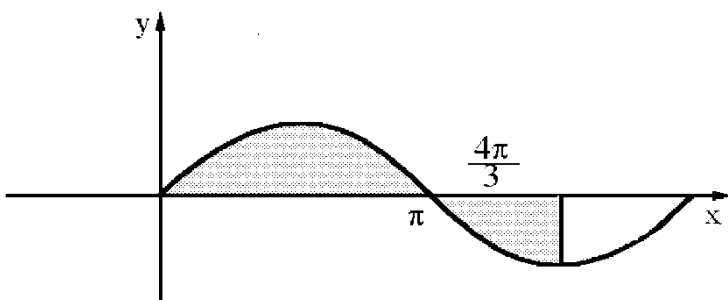


Рис. 9.15

Розв'язання. Для частини $x \in [0; \pi]$ маємо $y = \sin x \geq 0$, тому

$$S_1 = \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{\pi} = -\cos \pi - (-\cos 0) = 2.$$

Для решти

$$\pi \leq x \leq \frac{4\pi}{3} \quad y = \sin x \leq 0, \text{ тому}$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} (0 - \sin x) dx = \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} -\sin x dx = \cos x \Big|_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} = \cos \frac{4\pi}{3} - \cos \pi = -\frac{1}{2} - (-1) = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Відповідь: } S = 2\frac{1}{2}.$$

Приклад 9.23. Знайти площу фігури, обмеженої кривою $y = x^2 - 5|x|$ і віссю абсцис (рис. 9.16).

Розв'язання. Звернемо увагу на те, як допомагає в задачах на застосування визначених інтегралів використання **симетрії**.

Так, у цьому прикладі достатньо знайти лише площу правої частини для $x \geq 0$.

Для додатних значень аргументу модуль можна не писати, отже, $y = x^2 - 5x$.

Тому

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^5 -(x^2 - 5x) dx = \\ &= 2 \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_0^5 = \\ &= \frac{125}{3} \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

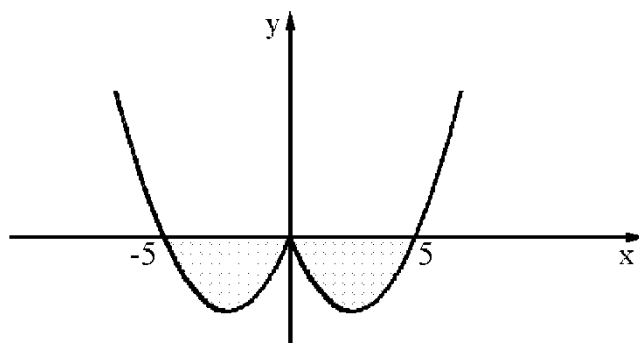


Рис. 9.16

Приклад 9.24. Знайти відстань, яку пройде точка за перші сім секунд руху, якщо швидкість руху $v = \sqrt{1+t}$.

Розв'язання.

$$S = \int_0^7 v(t) dt = \int_0^7 \sqrt{1+t} dt = \int_0^7 (1+t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{2(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^7 = \frac{4}{3} (8^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}) = \frac{4}{3} (16 - 1) = \frac{40}{3}.$$

Приклад 9.25. Знайти $\int_{-7}^7 \sqrt{49 - x^2} dx$ (рис. 9.17).

Розв'язання. Інтеграл у цьому випадку є площею половини кола, тому первісну знаходити не потрібно. Знадобляться лише геометричний зміст і формула геометрії:

$$\int_{-7}^7 \sqrt{49 - x^2} dx = \frac{1}{2} \pi R^2 = \pi \frac{49}{2}.$$

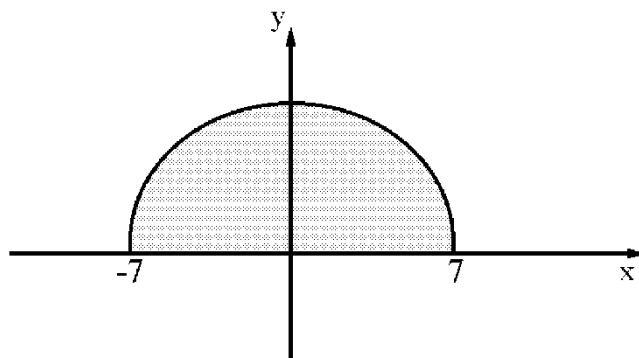


Рис. 9.17

Завдання для самостійної роботи

Обчислити інтеграли:

9.128. $\int_0^1 (4x^3 + 3x^2 + 2x - 3)dx$. **9.129.** $\int_0^1 (\sqrt{x} - 4x^5)dx$. **9.130.** $\int_1^e \frac{5}{x}dx$.

9.131. $\int_1^8 (\sqrt[3]{x} - 2x + 3)dx$. **9.132.** $\int_{-3}^3 (4x^3 - 5x^7 + 2x)dx$. **9.133.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 4x dx$.

9.134. $\int_0^1 (5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x - 4)dx$. **9.135.** $\int_0^1 (2\sqrt{x} - 1)dx$. **9.136.** $\int_{e^2}^{e^3} \frac{4}{x}dx$.

9.137. $\int_0^{16} \sqrt[4]{x^3} dx$. **9.138.** $\int_{-3}^3 (2x^5 + x^3 + 4x)dx$. **9.139.** $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3x+1}}$.

9.140. $\int_{-\pi}^{\pi} \cos 4x \cdot \cos 7x \cdot dx$. **9.141.** $\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos^2 \frac{x}{5}}$.

9.142. Знайти інтеграли, користуючись їхнім геометричним змістом: $\int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx$.

$\int_{-5}^5 \sqrt{25-x^2} dx$.

Знайти площі фігур, обмежених лініями:

9.143. $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 1$, $x = 2$. **9.144.** $y = 1 - x^2$, $y = x^2 + 2$, $x = 0$, $x = 1$.

9.145. $y = \frac{x^2}{4}$, $x + y = 3$. **9.146.** $y = \sin 3x$, $y = 1$, $x = 0$, $(x \geq 0)$.

9.147. $y = x^2 - 5x + 6$, $y = 0$. **9.148.** $y = 2x - x^2$, $y = 0$, $x = -3$, $(x \in [-3; 2])$.

9.149. $y = \frac{5}{x}$, $x = 7$, $y = 4$. **9.150.** $y = \frac{1}{\cos^2 x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$.

9.151. $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$. **9.152.** $y = x^2$, $y = 2x - x^2$. **9.153.** $y = 4x - x^2$, $y = x$.

9.154. $y = x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$. **9.155.** $y = x^2 - 4x$, $y = 0$.

9.156. $y = \frac{x^2}{4} - 1$, $y = 2 - x$. **9.157.** $y = \frac{5}{x}$, $y = 6 - x$. **9.158.** $y = -x^2$, $y = 0$, $x = -4$.

9.159. $y = x^2 - x + 2$, $y = x + 2$. **9.160.** $y = x^2$, $y = 2\sqrt{2x}$. **9.161.** $y = x^2$, $x + y = 2$.

9.162. $y = x^2 - 6x + 5$, $x + y = 11$.

9.163. Знайти площу: $y = x^2 + 4x$, $y = 0$, $x = 1$. $(x \in [-4; 1])$ Знайти площі ,

користуючись інтегруванням відносно осі ординат, тобто $\int_{-18}^3 \sqrt[3]{2 - \frac{x}{3}} dx$.

9.164. $x = y^2 - 1$, $x + 2y = 2$. **9.165.** $x = y^2 - 4$, $x - y = 2$. **9.166.** $y = \arcsin x$, $x = 1$ і віссю абсцис.

9.167. Знайти площу, обмежену графіками $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ і віссю ординат.

Розділ 10. ПРОГРЕСІЇ

Скінченна або нескінченна послідовність чисел $\{a_n\}$ називається *арифметичною прогресією*, якщо існує число d таке, що для будь-якого $n \in N$ виконується рівність

$$a_{n+1} = a_n + d;$$

число d називається *різницею прогресії*.

Основні властивості арифметичної прогресії:

1) $a_n = a_1 + d(n-1);$

2) $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} n$, где $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$.

Характеристична властивість арифметичної прогресії:

$$a_{n+1} = \frac{a_n + a_{n+2}}{2} \quad (n \in N).$$

Скінченна або нескінченна послідовність $\{b_n\}$ називається *геометричною прогресією*, якщо $b_1 \neq 0$ та існує число $q \neq 0$ таке, що для будь-якого $n \in N$ виконується рівність

$$b_{n+1} = b_n \cdot q;$$

число q називається *знаменником прогресії*.

Основні властивості геометричної прогресії:

1) $b_n = b_1 \cdot q^{n-1};$

2) $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, якщо $q \neq 1$,

$S_n = nb_1$, якщо $q = 1$, де $S_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$.

Характеристична властивість геометричної прогресії:

$$|b_{n+1}| = \sqrt{b_n \cdot b_{n+2}}$$

(на практиці зручніше використовувати рівність $b_{n+1}^2 = b_n \cdot b_{n+2}$).

Якщо геометрична прогресія є нескінченно спадною, тобто $|q| < 1$, то

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \text{ де } S = \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Приклад 10.1. Кількість членів арифметичної прогресії дорівнює 10. Сума членів, розташованих на парних місцях, дорівнює 15, а на непарних місцях – 12,5. Знайти всі члени прогресії.

Розв'язання. $a_2 + a_4 + a_6 + a_8 + a_{10} = 15$, $a_1 + a_3 + \dots + a_9 = 12,5$.

Першу і другу рівності перепишемо в такому вигляді:

$$\frac{a_2 + a_{10}}{2} \cdot 5 = 15, \quad \frac{a_1 + a_9}{2} \cdot 5 = 12,5.$$

Оскільки $a_n = a_1 + (n-1)d$, то

$$a_2 + a_{10} = 2a_1 + 10d, \quad a_1 + a_9 = 2a_1 + 8d.$$

Маємо систему

$$\begin{cases} \frac{2a_1 + 10d}{2} \cdot 5 = 15, \\ \frac{2a_1 + 8d}{2} \cdot 5 = 12,5 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 + 5d = 3, \\ a_1 + 4d = \frac{12,5}{5}. \end{cases}$$

Розв'язавши систему двох рівнянь з двома невідомими, отримаємо $a_1 = 0,5$, $d = 0,5$.

Відповідь: 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5; 3; 3,5; 4; 4,5; 5.

Приклад 10.2. Знайти арифметичну прогресію, якщо сума її n членів дорівнює $2n^2 - 3n$.

Розв'язання. Якщо $n = 1$, то $S_1 = a_1 = 2 - 3 = -1$. Для $n = 2$ маємо $S_2 = a_1 + a_2 = 2 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2$, $a_1 + a_2 = 2$. Ураховуючи, що $d = a_2 - a_1$, отримаємо $d = 4$.

Відповідь: $a_1 = -1$; $d = 4$.

Приклад 10.3. Знайти перший і п'ятий члени геометричної прогресії, якщо відомо, що її знаменник дорівнює 3, а сума шести її перших членів – 1820.

Розв'язання. Оскільки

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}, \text{ то } S_6 = \frac{a_1(1 - q^6)}{1 - q}, \text{ або } S_6 = \frac{a_1(1 - 3^6)}{1 - 3} = 1820,$$

звідки $a_1 = 5$.

Ураховуючи, що $a_5 = a_1 \cdot q^4$, отримаємо $a_5 = a_1 \cdot q^4 = 5 \cdot 3^4 = 405$.

Відповідь: $a_1 = 5$; $a_5 = 405$.

Приклад 10.4. Три числа утворюють геометричну прогресію. Якщо від третього числа відняти 4, то числа утворять арифметичну прогресію. Якщо від другого й третього членів отриманої арифметичної прогресії відняти по одиниці, то знову отримаємо геометричну прогресію. Знайти ці числа.

Розв'язання. Нехай x, y, z – шукані числа. Оскільки вони є послідовними членами геометричної прогресії, то $y^2 = xz$. Далі, через те, що числа $x, y, (z - 4)$ є послідовними членами арифметичної прогресії, то, скориставшись характеристичною властивістю арифметичної прогресії, отримаємо

$$y = \frac{x + (z - 4)}{2}.$$

Оскільки, нарешті, числа $x, y - 1, z - 5$ є послідовними членами геометричної прогресії, то $(y - 1)^2 = x(z - 5)$. Таким чином, маємо систему

$$\begin{cases} y^2 = xz, \\ x + z - 4 = 2y, \\ (y - 1)^2 = x(z - 5). \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо такі розв'язки: $(1, 3, 9)$ і $(\frac{1}{9}, \frac{7}{9}, \frac{49}{9})$.

Відповідь: $x_1 = 1$; $y_1 = 3$, $z_1 = 9$; $x_2 = \frac{1}{9}$; $y_2 = \frac{7}{9}$, $z_2 = \frac{49}{9}$.

Завдання для самостійної роботи

10.01. Розв'язати рівняння $1 + 7 + 13 + \dots + x = 280$ (доданки утворюють арифметичну прогресію).

10.02. Знайти суму перших тринадцяти членів арифметичної прогресії, якщо сума перших шести членів цієї прогресії, розташованих на парних місцях, дорівнює 90.

10.03. Знайти арифметичну прогресію, якщо сума її перших n членів $S_n = 9n^2 + 10n$.

10.04. Знайти арифметичну прогресію, якщо $a_5 = 18$, а $S_n = \frac{1}{4}S_{2n}$.

10.05. Знайти знаменник геометричної прогресії, в якій кожний член, починаючи з другого, дорівнює різниці двох сусідніх.

10.06. Сума трьох членів геометричної прогресії дорівнює 62, а сума їхніх десятичних логарифмів – 3. Знайти ці члени прогресії.

10.07. Довести, що у скінченній геометричній прогресії добуток членів, розташованих на однакових відстанях від кінців, дорівнює добутку крайніх членів.

10.08. Знайти суму 20 членів арифметичної прогресії, якщо її перший член дорівнює 2, а сьомий – 20.

10.09. В арифметичній прогресії сума другого і п'ятого членів дорівнює 8, а третього і сьомого – 14. Знайти прогресію.

10.10. Числа a^2, b^2, c^2 утворюють арифметичну прогресію. Довести, що числа $\frac{1}{b+c}, \frac{1}{c+a}, \frac{1}{a+b}$ також утворюють арифметичну прогресію.

10.11. Розв'язати рівняння $(x+1) + (x+4) + \dots + (x+28) = 155$.

10.12. Знайти геометричну прогресію із семичленів, якщо сума трьох перших її членів дорівнює 26, а трьох останніх – 2106.

10.13. Знайти три числа, що утворюють спадну геометричну прогресію, якщо сума трьох чисел дорівнює 74, а сума їхніх квадратів – 1924.

10.14. Знайти чотири числа, з яких перші три утворюють геометричну прогресію, а останні три – арифметичну, причому сума крайніх чисел дорівнює 14, а середніх – 12.

10.15. Знайти знаменник нескінченно спадної геометричної прогресії, якщо сума перших шести її членів у 7 разів більша, ніж сума решти її членів.

10.16. Знайти арифметичну прогресію, у якої сума перших трьох членів дорівнює 27, а сума квадратів цих же членів – 275.

10.17. Три числа, сума яких дорівнює 21, а сума їхніх квадратів – 155, утворюють арифметичну прогресію. Які ці числа?

10.18. Сума чотирьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 1, а сума кубів цих чисел – 0,1. Знайдіть ці числа.

10.19. Знайти арифметичну прогресію, якщо сума перших чотирьох її членів дорівнює 26, а їхній добуток – 880.

10.20. Скільки треба взяти членів арифметичної прогресії 5, 9, 13, 17 ... для того, щоб отримати суму, яка дорівнює 10877?

10.21. Записати арифметичну прогресію, перший член якої дорівнює 1, а сума перших п'яти членів – $\frac{1}{4}$ від суми наступних п'яти її членів.

10.22. Сума n перших членів послідовності $\{a_n\}$ знаходиться за формулою

$S_n = 2n^2 + 3n$. Довести, що ця послідовність є арифметичною прогресією.

10.23. Добуток третього і шостого членів арифметичної прогресії дорівнює 406. При діленні дев'ятого члена цієї прогресії на четвертий член частка дорівнює 2, а остача – 6. Знайти перший член і різницю прогресії.

10.24. В арифметичній прогресії 20 членів. Сума членів, розташованих на парних місцях, дорівнює 250, а сума членів, що стоять на непарних місцях, – 220. Знайти два середніх члени прогресії.

10.25. Знайти три числа, що утворюють геометричну прогресію, якщо сума цих чисел дорівнює 39, а сума їхніх квадратів – 819.

10.26. Знайти чотири числа, що складають геометричну прогресію, якщо сума крайніх чисел дорівнює 56, а добуток середніх чисел – 108.

10.27. Знайти чотири числа, що утворюють геометричну прогресію, у якій сума крайніх членів дорівнює 112, а сума середніх членів – 48.

10.28. У зростаючій геометричній прогресії сума першого і останнього членів дорівнює 66, добуток другого і передостаннього членів – 128, сума всіх членів – 126. Скільки членів у прогресії?

10.29. Написати декілька перших членів геометричної прогресії, у якій різниця між третім і першим членами дорівнює 9, а різниця між п'ятим і третім членами – 36.

10.30. Знайти чотири числа, що утворюють геометричну прогресію, у якій сума крайніх членів дорівнює 27, а добуток середніх членів дорівнює 72.

10.31. Сума перших трьох членів геометричної прогресії дорівнює 13, а частка від ділення суми перших двох членів на суму другого і третього членів ряду – $\frac{1}{3}$. Знайти прогресію.

10.32. Знайти три числа, що утворюють геометричну прогресію, якщо їхня сума дорівнює 39, а сума десяткових логарифмів – 3.

10.33. Перший член арифметичної прогресії дорівнює 2, другий і третій – відповідно дорівнюють квадратам двох послідовних натуральних чисел. Знайти прогресію.

10.34. Чи можуть довжини сторін прямокутного трикутника утворювати арифметичну прогресію?

10.35. Знайти арифметичну прогресію, у якій сума будь-якого числа членів буде дорівнювати потроєному квадрату числа цих членів.

10.36. Задано ряд виразів: $(a+x)^2$, (a^2+x^2) , $(a-x)^2$, ... Довести, що вони утворюють арифметичну прогресію, і знайти суму n її членів.

10.37. Знайти суму всіх двозначних натуральних чисел.

10.38. У деякій арифметичній прогресії другий член дорівнює 14, а третій – 16. Скласти геометричну прогресію, знаменник якої дорівнював би різниці арифметичної прогресії, а сума перших трьох членів була б одна й та сама в обох прогресіях.

10.39. Довести, що числа $\frac{1}{\log_3 2}$, $\frac{1}{\log_6 2}$, $\frac{1}{\log_{12} 2}$ утворюють арифметичну прогресію.

10.40. Сума трьох членів арифметичної прогресії дорівнює 54. Якщо другий член зменшити на 9, а третій – на 6, то одержимо геометричну прогресію. Якою була арифметична прогресія?

10.41. Сума трьох чисел, що утворюють геометричну прогресію, дорівнює 65. Якщо менше з них зменшити на одиницю, а більше – на 19, то одержимо арифметичну

прогресію. Знайти ці числа.

10.42. Яке натуральне число може бути подано як сума послідовних натуральних чисел, починаючи з одиниці?

10.43. У геометричній прогресії можна її перший, третій і п'ятий члени вважати за перший, четвертий і шістнадцятий члени деякої арифметичної прогресії. Визначити четвертий член цієї арифметичної прогресії, знаючи, що перший дорівнює 5.

10.44. Довести, що якщо три числа x , y і z утворюють геометричну прогресію, то $(x + y + z)(x - y + z) = x^2 + y^2 + z^2$.

10.45. Довести, що якщо xy , y^2 , z^2 є послідовними членами арифметичної прогресії, то числа y , z , $2y - x$ утворюють послідовні члени геометричної прогресії.

10.46. Знайти чотири числа, перші три з яких утворюють геометричну прогресію, а останні три – арифметичну, якщо сума крайніх чисел – 21, а сума середніх – 18.

10.47. Перший член арифметичної прогресії a_1 , a_2 , ... дорівнює 1. При якому значенні різниці прогресії d величина $a_1 \cdot a_3 + a_2 \cdot a_3$ має мінімальне значення?

10.48. В арифметичній прогресії шостий член дорівнює 3, а різниця прогресії – більше 0,5. При якому значенні різниці прогресії добуток першого, четвертого і п'ятого членів прогресії буде найбільшим?

10.49. Довести, що якщо S_n , S_{2n} , S_{3n} – суми n , $2n$ і $3n$ членів арифметичної прогресії, то

$$S_{3n} = 3(S_{2n} - S_n).$$

10.50. Знайти три числа, що утворюють геометричну прогресію, якщо їхній добуток дорівнює 64, а середнє арифметичне – $\frac{14}{3}$.

Розділ 11. МЕТОД МАТЕМАТИЧНОЇ ІНДУКЦІЇ. ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ. БІНОМ НЬЮТОНА

1. Метод математичної індукції. Перехід від окремих тверджень до загальних називається індукцією. Індукція може привести як до правильних, так і до неправильних висновків. Пояснимо це прикладами:

1. 120 ділиться на 5.

2. Усі тризначні числа діляться на 5.

Із окремого твердження 1 одержано загальне твердження 2. Твердження 2 є неправильним. Як користуватися індукцією в математиці, щоб одержувати тільки правильні висновки? Для цього застосовують метод математичної індукції (повної індукції, досконалої індукції). Основою цього методу є *принцип математичної індукції*, що полягає в такому: твердження справедливе для будь-якого натурального n , якщо:

1) воно справедливе для $n = 1$;

2) із справедливості твердження для довільного $n = k$ випливає його справедливості для $n = k + 1$.

Доведення, що базується на принципі математичної індукції, називається доведенням за методом математичної індукції. Звертаємо увагу на те, що таке доведення має складатися з двох частин. Обидві вони є обов'язковими. Якщо їх доведено, то твердження є справедливим для будь-якого натурального n .

Іноді друга частина доведення спирається на справедливості твердження не тільки для $n = k$, але й для $n = k - 1$. У цьому випадку твердження в першій частині

має бути перевірено для двох послідовних значень n .

Іноді твердження доводять не для будь-якого натурального n , а для будь-якого цілого n , яке перевищує деяке ціле m . У цьому випадку в першій частині доведення твердження перевіряється для $n = m + 1$ і, якщо це потрібно, – для декількох наступних значень n .

Приклад 11.1. Обчислити суму $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$.

Розв'язання. Легко перевірити, що

$$S_1 = \frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}; S_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} = \frac{2}{3}; S_3 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} = \frac{3}{4};$$

$$S_4 = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} = \frac{4}{5}.$$

На підставі одержаних результатів припускаємо, що для будь-якого натурального n $S_n = \frac{n}{n+1}$.

Це є гіпотезою. Для її перевірки скористаємося методом математичної індукції.

1. Для $n = 1$ гіпотеза є правильною, оскільки $S_1 = \frac{1}{2}$.

2. Припустимо, що гіпотеза є правильною для $n = k$, тобто що

$$S_k = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{k}{k+1},$$

де k – деяке натуральне число. Доведемо, що тоді гіпотеза має бути правильною і для $n = k + 1$, тобто що $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

$$\text{Дійсно, } S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k^2 + 2k + 1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Тепер на підставі принципу математичної індукції стверджуємо, що $S_n = \frac{n}{n+1}$ для будь-якого натурального n .

Приклад 11.2. Розглянемо тричлен $f(x) = x^2 + x + 41$. Знайдемо $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, ...:

$$f(0) = 41, f(1) = 43, f(2) = 47, f(3) = 53, f(4) = 61.$$

Це все прості числа. На підставі цих результатів будемо стверджувати, що $f(n)$ є простим числом. Таке твердження неправильне, оскільки $f(40) = 41^2$, тобто є складеним числом. Чому зроблено неправильний висновок? Причина – у зневажливому ставленні до методу математичної індукції. Було перевірено правильність твердження для $n = 1, 2, 3, 4$, але відкинуто другу частину доведення методом індукції, а саме з припущення, що гіпотеза правильна для $n = k$ виведення правильності гіпотези для $n = k + 1$.

Приклад 11.3. Довести, що $S_2(n) = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Розв'язання. 1. Знаходимо $S_2(1) = 1^2 = \frac{1(1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6}$.

2. Припустимо, що $S_2(k) = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. Тоді

$$\begin{aligned} S_2(k+1) &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 = \\ &= \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} = \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} = \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}. \end{aligned}$$

Тут ураховано, що $2n^2 + 7n + 6 = 2\left(n + \frac{3}{2}\right)(n+2) = (n+2)(2n+3)$.

Таким чином, твердження $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ є правильним для будь-якого n .

Приклад 11.4. Довести, що сума кубів трьох послідовних натуральних чисел ділиться на 9.

Розв'язання. Сума $1^3 + 2^3 + 3^3$ ділиться на 9. Нехай сума $k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3$, де $k \in N$, ділиться на дев'ять. Сума

$$(k+1)^3 + (k+2)^3 + (k+3)^3 = (k^3 + (k+1)^3 + (k+2)^3) + 9(k^2 + 3k + 3)$$

є сумою двох доданків, кожен з яких ділиться на 9.

II. Комбінаторика.

1. *Перестановки.* Усі можливі *впорядковані множини* з n елементів називаються *перестановками*. P_n – позначення кількості всіх можливих перестановок з n елементів. $P_n = n!$

2. *Розміщення.* Розміщеннями із n елементів по m елементів називаються всі можливі *впорядковані підмножини*, що містять m елементів із даних n . Кількість всіх можливих розміщень з n елементів по m позначається A_n^m і обчислюється за формулою

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1),$$

де n і m – натуральні числа, а $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$, $0 \leq m \leq n$.

Зауважимо, що перестановка – це розміщення n елементів по n .

3. *Комбінації (сполуки).* Комбінаціями із n елементів по m елементів називаються всі можливі підмножини, що містять m елементів із даних n . Кількість комбінацій із n елементів по m позначається C_n^m або $\binom{n}{m}$ і обчислюється за формулою:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-m+1)}{m!},$$

де m і n – натуральні числа; $0 \leq m \leq n$. Властивості комбінацій:

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$.
2. $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.
3. $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + C_{n-3}^{k-1} + \dots + C_{k-1}^{k-1}$.
4. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.

Формула

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + a^n$$

називається **біномом Ньютона**. Будь-який член бінома визначається за формулою

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k.$$

Коефіцієнти $C_n^0, C_n^1, C_n^2, \dots, C_n^{n-1}, C_n^n$ називаються біномними.

1. Коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку і кінця розвинення бінома, дорівнюють один одному. Дійсно, $C_n^k = C_n^{n-k}$.

$$2. C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Нехай $a = b = 1$, тоді

$$(a+b)^n = (1+1)^n = 1 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

3. $C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$, тобто сума біномних коефіцієнтів, що розташовані на парних місцях, дорівнює сумі біномних коефіцієнтів, розташованих на непарних місцях.

Справді, при $a = 1, b = -1$ маємо

$$(1-1)^n = 1 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^n,$$

звідки $1 + C_n^2 + C_n^4 + \dots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots$.

При розв'язанні комбінаторних задач необхідно на першому кроці визначити тип комбінаторної конфігурації, а саме:

1. Звернути увагу на **порядок** розміщення елементів.
2. Якщо порядок не має значення, то ця конфігурація – комбінація.
3. Якщо порядок має значення, то це – розміщення або перестановки, якщо використовуються не всі елементи, то це – розміщення, а якщо до конфігурації входять усі елементи, то це – перестановки.

Крім того, слід пам'ятати два правила:

1. Якщо об'єкт А може бути вибраний m способами, а об'єкт В – n способами, то вибір "або А, або В" може бути здійснено $m + n$ способами (правило додавання).
2. Якщо об'єкт А може бути вибраний m способами і після кожного з таких виборів об'єкт В може бути вибраний n способами, то вибір "А і В" у вказаному порядку може бути здійснено $m \cdot n$ способами (правило множення).

Приклад 11.5. У магазині продаються 5 різних чашок і 3 різних блюдця. Скількома способами можна купити чашку з блюдцем?

Розв'язання. Виберемо чашку. В комплект до неї можна вибрати будь-яке з трьох блюдців. Тому є 3 різних комплекти з цією чашкою. Оскільки чашок 5, то кількість різних комплектів дорівнює 15 ($3 \cdot 5 = 15$).

Приклад 11.6. У магазині продаються 5 різних чашок, 3 різних блюдця і 4 ложки для чаю. Скількома способами можна купити два предмети з різними назвами?

Розв'язання. Можливі три випадки: перший – купується чашка з блюдцем,

другий – чашка з ложкою, третій – блюдо і ложка. У кожному з цих випадків легко порахувати кількість можливих варіантів (у першому – 15, у другому – 20, у третьому – 12). Додавши ці числа, отримаємо відповідь: 47.

Приклад 11.7. Алфавіт племені Мумбо-Юмбо складається з літер А, Б, В. Словом є будь-яка послідовність не більш ніж із чотирьох літер. Скільки слів у мові племені Мумбо-Юмбо?

Указівка. Підрахуйте окремо кількість слів з однієї, двох, трьох і чотирьох літер. Отримаєте відповідь: $3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 = 120$.

Приклад 11.8. Скількома способами можна обрати капітана і його заступника у футбольній команді?

Розв'язання. Капітаном може стати будь-який з 11 футболістів. Коли капітана обрано, то на посаду його заступника можуть претендувати 10 футболістів, що залишилися. Таким чином, усього є $11 \cdot 10 = 110$ різних варіантів.

Приклад 11.9. Алхімік знає, що для того, щоби приготувати еліксир життя, потрібно змішати у певних пропорціях 20 відомих складових. Йому невідомо лише, у якому порядку слід змішувати ці складові. Скільки існує таких порядків?

Розв'язання. Кількість всіх відомих порядків змішування 20 різних складових дорівнює кількості всіх перестановок множини, що складається з 20 елементів, тобто числу $20!$. Число $20!$ більше числа 10^{16} . Якщо на приготування кожної суміші алхімік буде витрачати одну хвилину, то для перевірки всіх можливих варіантів йому знадобиться більше 10^{10} років.

Приклад 11.10. Алфавіт племені Бум-Бум складається з 6 літер. Словом вважається будь-яка послідовність із 6 букв, в якій хоча б 2 літери однакові. Скільки слів у мові племені Бум-Бум?

Відповідь. $6^6 - 6!$

Приклад 11.11. Скількома способами можна вибрати 3 з 5 різних карт?

Розв'язання. $C_5^3 = \frac{5!}{3!2!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2} = 10$.

Приклад 11.12. У класі 24 учня. Потрібно обрати старосту, заступника старости і прогрупорга. Скількома способами можна зробити цей вибір, якщо кожен учень може займати лише один пост?

Розв'язання. Оскільки проводяться вибори на різні пости, то порядок елементів має значення. Отже, маємо або перестановки, або розміщення. Із 24 елементів до набору входять 3 елементи, тобто не всі, отже, треба обчислити кількість розміщень з 24 елементів по 3:

$$A_{24}^3 = 24 \cdot 23 \cdot 22 = 12144.$$

Приклад 11.13. Із колоди, що містить 52 карти, витягнули 10 карт. Скількома різними способами це можна зробити? У скількох випадках серед цих карт опиниться хоча б один туз? У скількох випадках – рівно 4 тузи?

Розв'язання. Число наборів з 52 карт по 10 є числом перестановок з 52 по 10:

$$C_{52}^{10} = \frac{52!}{10!42!} = \frac{52 \cdot 51 \cdot 50 \cdot 49 \cdot \dots \cdot 43}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 10}.$$

Знайти кількість способів, коли серед вибраних карт є хоча б один туз, на перший погляд складніше: треба розглянути випадки, коли є рівно один туз, рівно два тузи, рівно три тузи, рівно чотири тузи. Але простіше знайти спочатку, у скількох випадках серед вибраних карт немає жодного туза – у всіх інших випадках буде хоча б один туз. Але якщо серед вибраних карт немає жодного туза, то вибір було зроблено

не з 52, а з 48 карт (усіх карт, окрім тузів). А тому кількість таких виборів дорівнює C_{48}^{10} .

Отже, хоча б один туз буде в $C_{52}^{10} - C_{48}^{10}$ випадках.

Щоби знайти, у скількох випадках буде рівно один туз, розіб'ємо операцію вибору карт на дві: спочатку вибираємо з чотирьох тузів один туз – це можна зробити C_4^1 способами, а потім з тих 48 карт, що залишилися, вибираємо 9 – це можна зробити C_{48}^9 способами. За правилом множення одержуємо, що весь вибір можна зробити $C_4^1 \cdot C_{48}^9$ способами.

Відповідь на останнє запитання: C_{48}^6 .

Приклад 11.14. Доведемо, що $C_n^m + C_n^{m+1} = C_{n+1}^{m+1}$.

Розв'язання.

$$\begin{aligned} C_n^m + C_n^{m+1} &= \frac{n!}{m!(n-m)!} + \frac{n!}{(m+1)!(n-(m+1))!} = \\ &= \frac{n!(m+1)}{m!(m+1)(n-m)!} + \frac{n!(n-m)}{(n-m-1)!(n-m)(m+1)!} = \\ &= \frac{n!(m+1)}{(m+1)!(n-m)!} + \frac{n!(n-m)}{(m+1)!(n-m)!} = \frac{n!(m+1+n-m)}{(m+1)!(n-m)!} = \\ &= \frac{(n+1)!}{(m+1)!((n+1)-(m+1))!} = C_{n+1}^{m+1}. \end{aligned}$$

Ця тотожність дає можливість обчислити значення C_n^m , якщо відомі C_{n-1}^m і C_{n-1}^{m-1} .

Іншими словами, за допомогою цієї тотожності можна послідовно обчислити C_n^m спочатку при $n=0$, потім – при $n=1$, $n=2$ і т. д. Обчислення зручно записувати у вигляді трикутної таблиці:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & 1 & & \\ & & & 1 & 2 & 1 & & \\ & & 1 & 3 & 3 & 1 & & \\ & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \end{array}$$

У $(n+1)$ -му рядку таблиці стоять числа $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$. Зауважимо, що $C_n^0 = C_n^n = 1$, а інші числа обчислюються за доведеною формулою (наприклад, число 3 у 4-му рядку одержали, додавши числа 1 і 2 з другого рядка). Така таблиця називається трикутником Паскаля.

Завдання для самостійної роботи

11.1. У Країні чудес є три міста: А, Б, В. Від міста А до міста Б побудовано 6 доріг, а від міста Б до міста В – 4 дороги. Скількома способами можна проїхати від міста А до міста В?

11.2. Скількома способами можна зробити триколовий прапор з горизонтальними смугами однакового розміру, якщо є тканина шести різних кольорів?

11.3. Чому дорівнює добуток: а) $10! \cdot 11$; б) $n! \cdot (n+1)$?

11.4. Обчислити: а) $100!/98!$; б) $n!/(n-1)!$

11.5. Скільки існує тризначних чисел, у вигляді яких цифри 1, 2, 3 трапляються рівно один раз?

11.6. Скількома способами можна розташувати в ряд червону, чорну, синю і зелену кулі?

11.7. Підрахуйте скільки різних «слів» можна отримати переставляючи літери слова:

1) «ВЕКТОР»; 2) «ЛІНІЯ»; 3) «ПАРАБОЛА»; 4) «МАТЕМАТИКА»?

11.8. У країні – 20 міст, кожні два з яких сполучено авіалінією. Скільки авіаліній у країні? Зауваження: не забудьте поділити на 2.

11.9. Скільки діагоналей в опуклому n -кутнику?

11.10. На полиці – 5 книг. Скількома способами можна викласти у стос декілька з них (стос – вибірка, яка відрізняється від іншої такої ж вибірки або кількістю, або складом, або порядком розташування елементів)?

11.11. Із 30 учнів треба обрати двох для участі в математичній олімпіаді. Скількома способами можна це зробити?

11.12. В одного учня є 6 книг з математики, а у іншого – 8. Скількома способами можна обміняти три книги одного учня на три книги іншого?

11.13. У шаховому гуртку – 2 дівчинки і 7 хлопчиків. Для участі в змаганнях треба створити команду з чотирьох чоловік, в якій обов'язково має бути хоча б одна дівчинка. Скількома способами можна це зробити?

11.14. У класі, в якому навчаються Сашко і Петро, – 31 учень. Скількома способами можна вибрати з класу футбольну команду таким чином, щоб Сашко і Петро не входили в команду одночасно?

11.15. Рота складається з трьох офіцерів, шістьох сержантів і 60 рядових. Скількома способами можна виділити з них групу, що складається з офіцера, двох сержантів і 20 рядових?

11.16. Розкласти вираз $(x+1)^7$ за степенями x .

11.17. Знайти коефіцієнт при x^3 у виразі $(1+x)^3 + (1+x)^4 + (1+x)^5 + \dots + (1+x)^{10}$.

11.18. Знайти найбільший член розвинення $(\sqrt{5} + \sqrt{2})^{20}$.

11.19. Розкласти за формулою бінома Ньютона $(2x-3)^5$.

11.20. Знайти коефіцієнт при x^3 у виразі $(1+x)^3 + (1+x)^4 + (1+x)^5 + \dots + (1+x)^{10}$.

11.21. Знайти п'ятий член розвинення бінома $(2x\sqrt[2]{x} - \sqrt[3]{x})^8$.

11.22. Розв'язати рівняння $\frac{P_{x+3}}{A_x^5 \cdot P_{x-5}} = 336$.

11.23. Обчислити суму за допомогою методу математичної індукції:

$$S_n = -1 + 3 - 5 + 7 - 9 + \dots + (-1)^n (2n-1).$$

11.24. Довести тотожності для $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

Довести такі рівності:

11.25. $1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 + 7 \cdot 10 + \dots + (3n-2)(3n+1) = n(3n^2 + 3n - 2)$.

11.26. $\frac{0}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{2}{3!} + \dots + \frac{(n-1)}{n!} = 1 - \frac{1}{n!}.$

11.27. Довести, що $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$

11.28. Довести, що сума кубів n перших чисел натурального ряду дорівнює $\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$

11.29. Одержати формулу для суми $S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}.$

11.30. Одержати формулу для суми $S_n = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}.$

11.31. Обчислити суму перших n непарних чисел.

11.32. Довести, що $1 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \dots + (-1)^{n-1} \cdot n^2 = (-1)^{n-1} \cdot \frac{n(n+1)}{2}.$

11.33. Довести, що $1^2 + 3^2 + 5^2 + \dots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$

11.34. Довести, що $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$

11.35. Довести, що $1 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$

11.36. Довести, що $\frac{1^2}{1 \cdot 3} + \frac{2^2}{3 \cdot 5} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}.$

11.37. Довести, що $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \frac{n}{3n+1}.$

11.38. Довести, що $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{(4n-3)(4n+1)} = \frac{n}{4n+1}.$

11.39. Довести, що $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + 3 \cdot 3! + \dots + n \cdot n! = (n+1)! - 1.$

Довести, що при будь-якому натуральному n :

1) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ ділиться на 9. 2) $3^{2n+2} + 8n - 9$ ділиться на 16.

3) $4^n + 15n - 1$ ділиться на 9. 4) $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ ділиться на 133.

11.40. Довести тотожність $\cos \alpha \cdot \cos 2\alpha \cdot \cos 4\alpha \cdot \dots \cdot \cos 2^n \alpha = \frac{\sin 2^{n+1} \alpha}{2^{n+1} \sin \alpha}.$

11.41. Довести, що $\sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx = \frac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{x}{2}} \sin \frac{nx}{2}.$

11.42. Довести, що $\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} x}{2 \sin \frac{x}{2}}.$

11.43. Довести, що $\cos x + 2\cos 2x + \dots + n\cos nx = \frac{(n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1}{4\sin^2 \frac{x}{2}}.$

11.44. Довести, що $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{2^2}\operatorname{tg}\frac{x}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n} = \frac{1}{2^n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n} - \operatorname{ctg}x, (x \neq \pi m).$

11.45. Довести, що

$$\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 5 + \dots + \operatorname{arctg}(2n+1) = \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \frac{3}{2} + \dots + \operatorname{arctg} \frac{n+1}{n} - n \operatorname{arctg} 1.$$

11.46. Довести, що які б не були числа a і b і яке б не було натуральне число n , має місце така формула: $(a+b)^n = a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1}b + \dots + C_n^s \cdot a^{n-s}b^s + \dots + C_n^n \cdot b^n.$

Розділ 12. ЕЛЕМЕНТИ ТЕОРІЇ ЙМОВІРНОСТЕЙ

12.1. Випадкові події

Розглянемо деякий експеримент, результат якого є випадковим. Існує стандартний спосіб позначення множини всіх можливих результатів, а саме – велика літера грецького алфавіту Ω , $\Omega = \{\omega\}$; можливі результати ω називаються елементарними подіями. Множину Ω називають простором елементарних подій, а її підмножини $A \subset \Omega$ – просто подіями, або випадковими подіями. Зауважимо, що у випадку, коли простір є скінченною множиною, подіями називають всі підмножини.

Приклад 12.1. Простір елементарних подій у підкиданні симетричної гральної кістки складається з шести елементарних подій: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$

Подія $A =$ "випадіння парної кількості очок" $= \{2, 4, 6\}$; $B =$ "кількість очок можна поділити на 3" $= \{3, 6\}.$

Приклад 12.2. Випадкову точку кидають навмання у квадрат із вершинами $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ і $(1,1)$. Простір елементарних подій складається з усіх точок квадрата. Наведемо приклади випадкових подій: $A = \{(x, y): 0 \leq y \leq x \leq 1\},$

$$B = \left\{ (x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, \max(x, y) \geq \frac{1}{2} \right\}.$$

Приклад 12.3. Біатлоніст здійснює 5 пострілів. Залежно від того, чи влучним є постріл, його позначимо символом «+». Простір Ω складається з $2^5 = 32$ ланцюжків із символами «+» і «-». Приклади випадкових подій: подія A є наявність чотирьох влучних пострілів з п'яти, тобто $A = \{++++-, +++-+, ++-++, +-+++ , -++++\}.$

Випадкова подія

$$C = A \cup B = A + B,$$

що відповідає здійсненню A або B , має назву «сума подій» (рис. 12.1). Вона відповідає об'єднанню множин.

Випадкова подія $D = A \cap B = AB$, що відповідає одночасному виконанню обох подій A і B , називається їх добутком і відповідає перетину множин (рис.12.2).

Подія $\bar{A} = \Omega \setminus A$ називається протилежною до A (рис. 12.3) і відповідає доповненню у теорії множин.

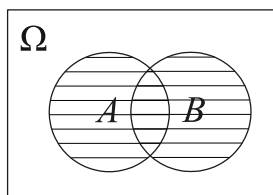


Рис. 12.1

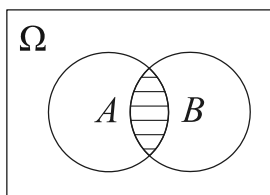


Рис. 12.2

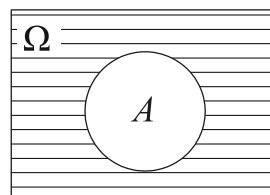


Рис. 12.3

Якщо $A \cap B = \emptyset$, то події A і B називають несумісними.

Приклад 12.4. Перш ніж наводити приклад, зауважимо, що навіть перші дослідники у теорії ймовірностей, а саме Блез Паскаль, П'єр Ферма і Християн Гюйгенс, добре розуміли, що підкидання гральної кістки, азартні ігри і монетки є лише дуже зручною моделлю, на якій легко виявити закономірності нової науки. Але в подальшому вони приводять до безлічі цікавих і складних застосувань.

Розглянемо колоду з 36 карт і візьмемо одну з них навмання.

Несумісні події: A – поява «десятки», B – туза.

Сумісні події: A – поява «десятки»; C – поява карти пікової масті.

Приклад 12.5. Подія A є випадіння хоча б однієї карти бубнової масті, $\bar{A} = \Omega \setminus A$ означає, що серед вибраних немає жодної карти бубнової масті.

Наявність операцій додавання, множення та протилежної події пояснюють термін «алгебра подій».

Тепер нехай кожній випадковій події A відповідає число, яке називається її ймовірністю і позначається $P(A)$ (літера P відповідає англійському слову "probability"). Ймовірність завжди повинна задовольняти такі аксіоми:

1) число $0 \leq P(A) \leq 1$;

2) якщо A і B – несумісні події, то $P(A + B) = P(A) + P(B)$

(так звана теорема додавання);

3) якщо A_i – несумісні події, то $P(\sum A_i) = \sum P(A_i)$;

4) $P(\Omega) = 1$.

Зауваження. Якщо A_i – несумісні події і при цьому $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \Omega$, то $P(A_1) + \dots + P(A_n) = 1$, а окремим випадком є

$$P(A) + P(\bar{A}) = 1.$$

Остання формула, що зв'язує між собою ймовірності протилежних подій, – це справжній трудівник теорії ймовірностей, в чому спробуємо далі переконатися.

Існує так звана теорема додавання для подій, які можуть бути сумісними:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Розглянемо два зовсім різні означення ймовірності, кожне з яких повністю відповідає наведеним аксіомам.

Першим буде означення так званої геометричної ймовірності. Нехай простір елементарних подій Ω – область на площині, $A \subset \Omega$.

Ймовірністю випадкової події називається $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)}$ – відношення площі частини до площі всієї множини.

Якщо Ω – область у тривимірному просторі, то $P(A) = \frac{V(A)}{V(\Omega)}$, а у випадку, коли

Ω розташовано на прямій, $P(A) = \frac{l(A)}{l(\Omega)}$ – відношення однієї довжини до іншої. Цікаво,

що для випадку геометричних імовірностей аксіоми стають зовсім очевидними.

Приклад 12.6. У квадрат з вершинами в точках $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(1; 0)$ і $(1; 1)$ наведено точку з координатами $(x; y)$.

Розглянемо випадкові події: перша подія A складається з точок, які належать колу, що вписано в квадрат; друга подія B – з точок, координати яких задовольняють умову $|x - y| < \frac{1}{3}$. Знайдемо ймовірності подій.

Розв'язання. Очевидно, $P(A) = \frac{S(\text{круга})}{S(\text{квадрата})} = \frac{\pi R^2}{1^2} = \frac{\pi}{4}$.

Для пошуку $P(B)$ зобразимо геометричну множину точок, що відповідають нерівності (рис. 12.4) $\left\{ (x, y) : |x - y| < \frac{1}{3} \right\}$.

Властивість «трудівник» підказує, що легше знайти не $S(B)$, а $S(\bar{B})$: оскільки $\bar{B}$ є об'єднанням двох трикутників, то

$$S(\bar{B}) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \Rightarrow P(B) = \frac{5}{9}.$$

Приклад 12.7. На дорогах деякого міста внаслідок складної ситуації (ожеледиця, ремонт або «пробки») було порушено графік руху автобусів. Ви побачили, як від зупинки відїжджає ваш автобус, у якому зовсім мало пасажирів, але, на жаль, Ви на нього не встигли. Сумно зітхаючи, чекаєте на наступний. Нарешті він з'являється... і Ви ледве протиснулись у битком набитий автобус. Чому?

Якщо б автобуси рухались з постійним інтервалом, то явище було б Вам не знайоме. А тепер розглянемо рис. 12.5. Згідно з означенням геометричної ймовірності ймовірність потрапити у довгий інтервал часу є більшою, $P(B) > P(A)$. А на довгому інтервалі накопичується більша кількість пасажирів.

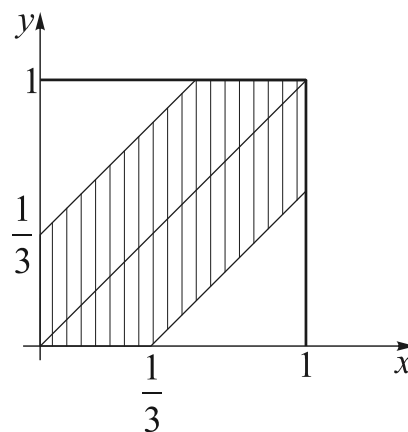


Рис 12.4

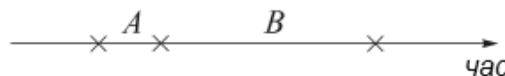


Рис 12.5

12.2. Класичне означення

Нехай множина Ω результатів деякого експерименту скінченна і складається з n елементів. Якщо при цьому всі n результатів виникають із однаковими можливостями, то експеримент називають **класичною** схемою. Випадок (результат) називають **сприятливим** для події A , якщо поява цього результату приводить до появи події A . Тоді

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

де m – кількість подій, що сприяють появі події A ; n – загальна кількість можливих результатів експерименту.

Приклад 12.8. Підкидають гральну кістку. Знайти ймовірності подій: A – випаде парне число; B – випаде число, кратне трьом; C – випаде більше двох очок.

Розв’язання. Зрозуміло, що $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{3, 6\}$, $C = \{3, 4, 5, 6\}$. За означенням маємо

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad P(B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad P(C) = \frac{m}{n} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Залишається додати одна до одної чотири ймовірності: $P(A) = \frac{324}{11111}$.

Зауважимо, що при розв’язуванні багатьох задач з теорії ймовірностей застосовуються формули комбінаторики. Мабуть, найчастіше використовується формула для кількості сполучень

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Нагадаємо, що за цією формулою знаходимо, скількома способами можна вибрати k елементів із множини, що складається з n елементів.

Дозволимо собі у не зовсім серйозний спосіб нагадати найважливіший принцип комбінаторики – принцип множення, і називатимемо його “Василь на “Мерседесі””.

Отже, молодий бізнесмен на ім’я Василь має:

- а) три улюблених автомобіля (“Мерседес”, “BMW”, “Хаммер”),
- б) маму і кохану дівчину Олену.

Увечері в неділю Василь вирішив відпочити або з мамою, або з Оленою, вибравши для цього одну з п’яти можливостей: відвідати кіно, театр, ресторан, аквапарк або більярдний клуб. Скільки він має різних можливостей? Скількома способами він зможе це зробити?

Легко побачити, що кількість можливостей дорівнює добутку (рис. 12.6):

$$3 \cdot 2 \cdot 5 = 30.$$

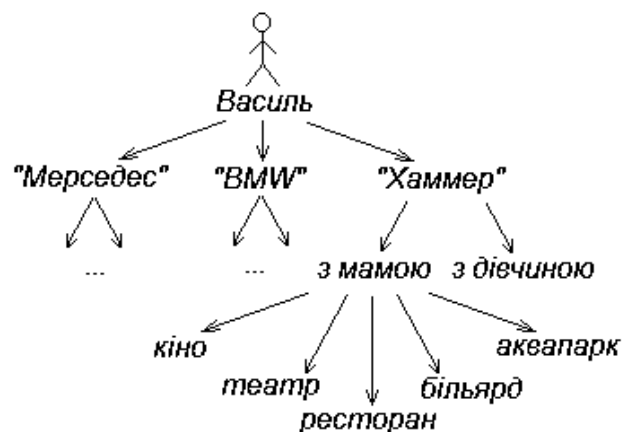


Рис. 12.6

Приклад 12.9. Із шухляди, у якій знаходяться дві білі й три чорні кулі, навмання взяли три кулі. Знайти ймовірність того, що одна з них виявиться білою.

Розв'язання. Загальна кількість можливих результатів $C_5^3 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$. Події A

сприяють випадки, коли одна куля є білою (її можна вибрати $C_2^1 = 2$ способами), а дві, що залишилися, – чорними. Отже,

$$P(C) = \frac{C_2^1 \cdot C_3^2}{C_5^3}.$$

Приклад 12.10. Номер автомобіля складається з п'яти цифр (виключимо 00000). Знайти ймовірність того, що він містить рівно дві цифри 7, причому вони стоять рядом.

Розв'язання. Наведемо не найкоротший, проте простий спосіб розв'язання. Подія A складається з чотирьох несумісних подій: A_1, A_2, A_3, A_4 . Маємо $A_1 = \{77***\}$, $A_2 = \{*77**\}$, $A_3 = \{**77*\}$, $A_4 = \{***77\}$, де замість зірочок можуть стояти будь-які цифри, крім 7. Знайдемо $P(A_i)$. Загальна кількість номерів дорівнює 99999. Кількість випадків, сприятливих появі події A_1 , дорівнює 9^3 . Дійсно, першу цифру вибираємо з ряду 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9 дев'ятьма способами, другу – знову дев'ятьма, третю – також дев'ятьма, причому важливим є і порядок розташування цифр:

$$P(A_1) = \frac{9^3}{99999} = \frac{81}{11111}.$$

Приклад 12.11. Проілюструємо випадок, коли значно легше знаходити ймовірність протилежної події. Підкидають одночасно дві монети. Знайти ймовірність того, що хоча б одна з них випаде герб.

Розв'язання. Простір Ω складається з чотирьох рівноможливих випадків: “герб – герб”, “герб – цифра”, “цифра – герб”, “цифра – цифра”. Подія A – “хоча б один герб”, протилежною подією є $\bar{A}$ – “цифра – цифра”, отже,

$$P(\bar{A}) = \frac{1}{4} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Наступний приклад є найбільш поширеним.

Приклад 12.12. Із колоди з 36 карт узяли чотири карти. Знайти ймовірності подій: A – усі чотири карти – тузи; B – усі чотири карти – пікової масті; C – два тузи, дві дами; D – серед чотирьох карт – два тузи; E – серед чотирьох карт – три червоні, одна чорна; F – хоча б одна чорна карта.

Розв'язання. Число рівноможливих результатів цього експерименту дорівнює кількості способів узяти чотири елементи без повернення з 36, причому неважливо, у якому порядку. Це **число сполучень**

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

$$\text{У цьому випадку } n = 36, k = 4, C_n^k = \frac{36!}{4!32!} = \frac{33 \cdot 34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 33 \cdot 17 \cdot 35 \cdot 3.$$

$$\text{Події } A \text{ сприяє тільки один результат, коли всі чотири карти – тузи: } P(A) = \frac{1}{C_{36}^4}.$$

Для події B сприятливими є ті випадки, коли всі чотири карти вийнято з дев'яти

наявних пік: $P(B) = \frac{C_9^4}{C_{36}^4}$.

Подія C має ймовірність $P(C) = \frac{C_4^2 \cdot C_4^2}{C_{36}^4}$.

Пояснення. Два тузи можна вибрати шістьма способами ($C_4^2 = 6$), дві дами – також шістьма. На **кожний** із шести варіантів вибору тузів припадає шість варіантів вибору дам, ось чому в чисельнику – добуток (тут як раз і знадобиться принцип «Василь на Мерседесі!»).

Подія D : два тузи, дві інші карти – не тузи. На кожний з $C_4^2 = 6$ варіантів вибору тузів припадає C_{32}^2 варіантів вибору двох інших карт, що не є тузами, а в колоді «нетузів» – 32:

$$P(D) = \frac{C_4^2 \cdot C_{32}^2}{C_{36}^4}.$$

Ймовірність події E (взяти з 18 червоних карт три карти, з 18 чорних – одну):

$$P(E) = \frac{C_{18}^3 \cdot C_{18}^1}{C_{36}^4}.$$

Ймовірність події F простіше знайти через протилежну подію $\bar{F}$ – усі карти червоні:

$$P(\bar{F}) = \frac{C_{18}^4}{C_{36}^4} \Rightarrow P(F) = 1 - \frac{C_{18}^4}{C_{36}^4}.$$

12.3. Теорема множення ймовірностей

Якщо ймовірність появи одночасно двох подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій, тобто $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$, то ці події називаються **незалежними**. Це означення і називають теоремою множення. Кілька подій $A_1, \dots, A_n$ називаються незалежними, або незалежними в сукупності, якщо кожна з них не залежить від будь-якої комбінації інших. Для незалежних подій $P(A_1 A_2 \dots A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n)$.

Приклад 12.13. Події A і B несумісні. Чи є вони незалежними?

Розв’язання. Несумісні події залежні. Несумісні події обов’язково залежні, оскільки якщо здійснилася подія A , то подія B відбутися вже не може. А незалежні події, навпаки, є сумісними. Наприклад, подія A : при першому киданні монети випав «орел», подія « B »: при другому киданні випав «орел». Зрозуміло, що вони незалежні, але можуть відбутися разом, тобто сумісні.

Приклад 12.14. Два мисливці зробили по одному пострілу у вовка. Перший влучає з ймовірністю 0,6, а другий – з ймовірністю 0,3. Знайти ймовірність того, що у вовка влучить одна куля.

Розв’язання. Приклад ілюструє теорему множення й додавання. Припускаємо, що влучення першого і другого мисливців – події незалежні. Подія A – влучив один із мисливців – складається з двох несумісних подій:

$$A = A_1 \cup A_2,$$

де $A_1 = \{+-\}$, $A_2 = \{-+\}$ (знак "+" – влучення).

За теоремою додавання

$$P(A) = P(A_1) + P(A_2),$$

де $P(A_1) = 0,6 \cdot (1 - 0,3)$ (перший влучив, другий – ні, причому оскільки влучення незалежні, користуємося теоремою множення).

Аналогічно одержимо

$$P(A_2) = (1 - 0,6) \cdot 0,3.$$

Таким чином, $P(A) = 0,6 \cdot (1 - 0,3) + (1 - 0,6) \cdot 0,3 = 0,54$.

Приклад 12.15. Два елементи з'єднані послідовно, тобто якщо відбувається відмова одного з них, то відразу відбувається відмова всього ланцюга. Нехай ймовірності відмов елементів дорівнюють p_1 і p_2 (рис. 12.7). Знайти ймовірність відмови ланцюга в припущенні, що відмови елементів відбуваються незалежно.

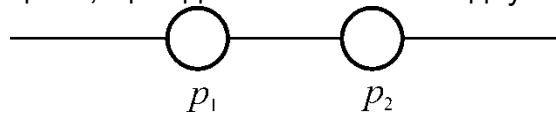


Рис. 12.7

Розв'язання. Нехай A_1 – відмова першого елемента, A_2 – відмова другого, A – відмова всього ланцюга. Зрозуміло, що $A = A_1 \cup A_2$, але теорему додавання ймовірностей використати не можна, тому що події A_1 і A_2 можуть відбутися разом. Простіше знайти $P(\bar{A})$; $\bar{A} = \{\text{ланцюг не відмовить}\}$. Ця подія рівносильна тому, що і перший, і другий елементи не відмовлять:

$$P(\bar{A}) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) = (1 - p_1) \cdot (1 - p_2). \text{ Звідси маємо}$$

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - (1 - p_1) \cdot (1 - p_2).$$

Зауваження. Аналогічна задача для паралельного з'єднання розв'язується простіше: ймовірність відмови ланцюга дорівнює добутку ймовірностей відмов елементів.

Приклад 12.16. Симетричну монету підкинуто тричі. Знайти ймовірність $P(A)$ того, що хоча б один раз з'явиться «орел».

Розв'язання. Спочатку знайдемо ймовірність протилежної події: $\bar{A}$:

$$P(\bar{A}) = P\{---\} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \Rightarrow P(A) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Приклад 12.17. Підкинуто одночасно дві гральні кістки. Знайти ймовірність того, що сума чисел буде дорівнювати 6.

Розв'язання. $P(A_{15}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ – ймовірність появи числа 1 на першій кістці й

числа 5 – на другій. Скориставшись незалежністю подій і теоремою множення, одержимо

$$P(A_{24}) = P(A_{33}) = P(A_{42}) = P(A_{51}) = \frac{1}{36}.$$

Подія, що цікавить, складається з п'яти несумісних подій, отже, за теоремою

додавання

$$A = \{1+5\} \cup \{2+4\} \cup \{3+3\} \cup \{4+2\} \cup \{5+1\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{36}.$$

Завдання для самостійної роботи

12.01. Із трьох цифр 4, 5, 6 усіма можливими способами складено тризначні числа (цифри можуть повторюватися). Яка ймовірність того, що отримане число парне? Яка ймовірність того, що отримане число складається з різних цифр?

12.02. Чорного, білого і сірого кроликів випадковим чином посаджено в три різні ящики. Знайти ймовірність того, що всі ящики виявляться зайнятими (якщо кролики можуть знаходитись навіть в одному ящику).

12.03. Знайти ймовірність того, що карта, навмання витягнута із колоди з 36 карт, виявиться або тузом, або бубною.

12.04. У кошику було 10 яблук сорту "Джонатан" і 20 яблук сорту "Голден Делишес". Навмання взяли 6 яблук. Знайти ймовірність подій :

- а) усі 6 яблук – сорту "Голден";
- б) рівно 4 яблука – сорту "Голден";
- в) хоча б одно яблуко – "Джонатан".

12.05. Дві гральні кістки підкинуто одночасно. Знайти ймовірність того, що сума очок буде більшою, ніж 4.

12.06. У деякій лотереї потрібно вибрати 5 чисел із 36. За результатами накладу деякі п'ять номерів будуть визначені виграшними. Знайти ймовірності подій:

- 1) усі вибрані Вами числа збігаються із виграшними;
- 2) Вам вдалося вгадати рівно 4 номери з п'яти;
- 3) Вам вдалося вгадати рівно 3 номери з п'яти;
- 4) вгадано 3, 4 або 5 номерів;
- 5) серед вибраних Вами немає жодного виграшного номера;
- 6) серед вибраних Вами номерів хоча б один є виграшним.

12.07. Із добре перетасованої колоди з 36 карт навмання витягнуто 5 карт. Знайти ймовірність подій :

- 1) усі 5 карт виявилися чорними;
- 2) усі 5 карт – пікової масті;
- 3) усі 5 карт – "фігури" (туз, король, дама, валет);
- 4) 3 чорні, 2 червоні карти;
- 5) один туз, один король, одна дама;
- 6) 2 тузи (не більше і не менше);
- 7) хоча б одна карта – бубнової масті;
- 8) не менше двох карт – пікової масті.

12.08. Три стрільці незалежно один від одного стріляють по одному разу кожен по своїй мішені. Імовірності їх влучення у мішені дорівнюють 0,8, 0,75 і 0,7. Знайти ймовірність подій :

- 1) хоча б один влучив;
- 2) один влучив;
- 3) двоє влучили;
- 4) влучними виявилися всі три постріли;
- 5) усі схибили.

Додайте чотири останні відповіді й прокоментуйте результат.

12.09. Два студенти складають іспит. Перший досягне успіху з ймовірністю 0,9, а другий – 0,7. Знайти ймовірність того, що тільки один з них складе іспит успішно.

12.10. Деканат дозволяє студентів складати іспит не більше трьох разів. Знайти ймовірність того, що іспит буде складено, якщо йдеться про недбалого студента: його знання від спроби до спроби не покращуються, тобто ймовірність успіху дорівнює 0,3.

12.11. При виготовленні деталі заготовка повинна пройти послідовно три операції. Поява дефекту виготовлення з'являється незалежно на кожному етапі з ймовірностями 0,02, 0,01 і 0,03. Знайти ймовірність виготовлення якісної деталі.

12.12. Дитинча гепарда доживає до одного року з ймовірністю 0,2. Користуючись теоремами додавання і множення ймовірностей, знайти ймовірність того, що з трьох дитинчат:

- 1) виживуть усі троє;
- 2) виживуть двоє;
- 3) виживе одне;
- 4) не виживе жодне.

Чому дорівнює сума знайдених чисел?

Відповіді

1.01. $P_3(x) = Q_2(x)(3x^3 - 2x^2 + x - 1) + 3x$. **1.02.** $P_3(x) = Q_2(x)(2x^2 + 3x - 2) - 3x + 1$.

1.03. $P_3(x) = Q_2(x)(x - 7) + 9x + 1$. **1.04.** $P_4(x) = Q_2(x)(-20x^2 + 7x + 13) - 6x + 6$.

1.05. $P_5(x) = Q_2(x)(x^3 + 2x^2 + 5x + 10) + 20x + 21$.

1.06. $P_5(x) = Q_2(x)(x^3 - 2x^2 + 8) - 15x - 23$.

1.07. $P_6(x) = Q_2(x)(x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 3x) + 4x - 1$.

1.08. $P_7(x) = Q_2(x)(x^5 - x^3 - x^2 - 3x - 2) + 2x + 3$. **1.09.** $a \in R, b = -20 - 2a$.

1.10. $a = -26, b = -24$. **1.11.** $a = -2, b = 1$. **1.12.** $a = -25, b = 4$. **1.13.** $x^2 + xy - 2z^2$.

1.14. $x + 2y$ **1.15.** 1) 34; 2) -6. **1.16.** 1) 67; 2) -2. **1.17.** 1) ділиться; 2) не ділиться; 3) ділиться; 4) ділиться; 5) не ділиться; 6) не ділиться. **1.18.** 1) не ділиться; 2) ділиться; 3) не ділиться; 4) ділиться; 5) ділиться; 6) не ділиться.

1.19. 1) -2; 3; 2) -5; 2; 3) 3; 5; 4) -2; -4; 5) 2; -1; 6) -3; 5; 7) 3; 7; 8) -2; -9.

1.20. 1) -3; -1/2; 2; 2) -3; -√5; 1/2; √5; 3) -4; 2/3; 3; 4) -√3; -1/2; √3; 2.

1.21. 1) $(8x + 3)(x^2 - x + 1)$; 2) $(2x - 5)(x - 3)(2x + 5)$; 3) $(4x - 1)(2x + 3)(x + 4)$;

4) $(4x - 3)(3x + 1)(x - 2)(x + 2)$; 5) $(x - 1)(x + 1)(3x - 2)(2x + 3)$;

6) $(7x - 1)(2x + 1)(x + 1)(x - 4)$; 7) $3\left(x - \frac{1 + \sqrt{22}}{3}\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{22}}{3}\right)$; 8) $8\left(x - \frac{1}{2}\right)^3$;

9) $(x - 5)(x + 2)(x + 3)$; 10) $(x - 1)(x^2 + 3x + 3)$; 11) $(x - 1)^2(x^2 + x + 1)$;

12) $(x - 1)^2(x^2 + 1)$; 13) $(x^2 + 2)(x^2 + 1)$; 14) $(x - 2)^2(x^2 + 4)$. **1.22.** 1) -5; -3; 2; 4;

2) 1; 2; 3) -4; -2; 2; 3; 4) -2; -1/2; 2/3; 5) -1; -3; -5; 6) 1; 2; 2, 5; 5; 7) -1/4; 1/2; 3/2;

8) -1; 2; 3; 9) -1; 2; 10) -4; -3; 3. **1.23.** 1) $\frac{1}{x+1}, x \neq \frac{1}{2}$; 2) $\frac{x+2}{x-2}, x \neq 1$; 3) $\frac{1}{x+y}$;

4) $\frac{ab}{a+b}$; 5) $\frac{x-a}{2x+a}, x \neq -3b$; 6) $\frac{x+2y}{2x+3y}, x \neq \frac{y}{2}$; 7) $-\frac{a^4}{a^2+b^2}, a \neq \pm b$; 8) $\sqrt{x} + \sqrt{y}$; 9) 2;

10) $\sqrt{a} - \sqrt{b}$. **1.24.** 1) $\frac{n^2+n+1}{n}$; 2) $m - n$; 3) 1; 4) $\sqrt{2}$; 5) $\frac{1}{2bc}$; 6) $\frac{a(a-b-c)}{2}$; 7) 1;

8) $\frac{x^3(x^2-xy-y^2)}{y^4(x+y)}$; 9) -1. **1.25.** 1) $2a+3$; 2) ab ; 3) $\frac{a-b}{a+b}$ 4) $\frac{1}{a}$; 5) 1; 6) 1; 7) $\frac{2}{1-x}$; 8) 2;

9) $\sqrt{a}$. **1.26.** $\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{3}{2} \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{3x-1}{x^2+1}$. **1.27.** $\frac{1}{7} \frac{11x+6}{x^2+x+1} - \frac{1}{7} \frac{1}{2x-1}$.

1.28. 1) $(3x+5y)(1-2x)$; 2) $(7a+4)(5b-6c)$; 3) $(3y-2)(5y+4x)$;

4) $(x-7)(3x^2+4)$; 5) $(y+11)(y^2+5)$; 6) $(4x^2+5)(x-12)$; 7) $(7a^2+b)(5+b^2)$;

8) $(5b^2-4b+3)(2a-3)$; 9) $(5a+4)(3a-5)$; 10) $(a+3)(2a+b)$;

11) $(3a+b)(7ab-4)$; 12) $(x-3)(x^2+5)$; 13) $(a-3b)(a-4b)$; 14) $(a-b)(a-b-c)$;

15) $(m+3n)(m+3n-1)$; 16) $(x-3y)(x^2-4y)$; 17) $(8x+1)(x+2)(x^2-2x+4)$;

18) $(3-5x+3y)(3+5x-3y)$; 19) $(x+2)(x-2)(x-3)$; 20) $(4x-3y)(5x-7)$;

21) $(bc-k)(5bc-2k)$; 22) $(x^2-x+1)(x^2+x-3)$; 23) $(x^2-x+3)(x^2+x+3)$;

24) $(x^2-x+2)(x^2+x+2)$. **2.02.** 1) - 6) мінус; 7) плюс. **2.03.** 1) $-\sqrt{3}/12$; 2) $-\sqrt{2}/2$;

3) $-1/\sqrt{3}$; 4) -2; 5) -5; 6) 0. **2.04.** 1) перша і друга; 2) друга і четверта; 3) перша і

четверта; 4) перша і четверта; 5) третя і четверта. **2.05.** 1) перша і третя; 2) перша і

четверта; 3) друга і четверта; 4) третя і четверта. **2.06.** 1) $x=0,2\pi$; 2) $x=\pi/2$; 3) не

існує; 4) не існує. **2.07.** 1) $\sin \alpha = \sqrt{3}/2$, $\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -1/\sqrt{3}$; 2) $\cos \alpha = 1/2$,

$\operatorname{tg} \alpha = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -1/\sqrt{3}$; 3) $\sin \alpha = -\sqrt{3}/2$, $\cos \alpha = -1/2$, $\operatorname{ctg} \alpha = 1/\sqrt{3}$;

4) $\sin \alpha = \sqrt{2}/2$, $\cos \alpha = \sqrt{2}/2$, $\operatorname{tg} \alpha = 1$. **2.08.** -3. **2.09.** 1,5. **2.10.** 5. **2.11.** $-\frac{12}{5}$.

2.12. $\frac{6}{19}$. **2.13.** 0.16. **2.14.** 2. **2.15.** 2. **2.16.** 3. **2.17.** -1. **2.18.** $-\operatorname{tg} \frac{\alpha}{8}$. **2.19.** $2\cos 3\alpha$.

2.20. $2\sin\left(2\alpha - \frac{\pi}{6}\right)$. **2.21.** 1. **2.22.** $\frac{1}{4}\sin \frac{3\alpha}{2}$. **2.23.** $\frac{2}{3}$. **2.24.** 3.

2.55. $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{4} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$. **2.56.** $\alpha \in \left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

2.57. $\alpha \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$. **2.58.** $\alpha \in \left(2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \pi + 2\pi k\right)$, $k \in Z$.

2.61. 1) $-\frac{\pi}{4}$; 2) $-\frac{7\pi}{4}$; 3) $-\frac{\pi}{6}$; 4) -1; 5) $\frac{1}{2}$. **2.62.** 1) $\frac{2x}{1+x^2}$; 2) $\frac{x+y}{1-xy}$; 3) $\sqrt{\frac{1+x}{2}}$. **2.63.** 1) $\frac{\pi}{4}$;

2) $\pi - 4$; 3) $6 - 2\pi$. **2.64.** 1) $\frac{1}{\sqrt{65}}$; 2) -4; 3) $\frac{1}{2\sqrt{6}}$; 4) $\frac{5}{\sqrt{26}}$; 5) $\frac{3}{4}$; 6) $\frac{4\sqrt{3}}{7}$; 7) $\frac{2\sqrt{10}}{7}$.

5.14. 1) $\log_3 7 + 5$; 2) $\frac{1}{\sqrt{3}}$; 3) 0,5; 4) $2 \pm \sqrt{\frac{7}{2}}$; 5) 2; 6) 0; 7) $\log_{4,5} \frac{9}{\sqrt{8}}$; 8) $-\sqrt{2}; -1; \sqrt{2}$;
 9) -8; **10)** -2; **11)** 27; **12)** 4; **13)** 16; 14) 2,25; 15) 2; 16) -1. **5.15.** 1) 8;27; 2) 3; 3) 5; 4) ± 2 ;
 5) 4; 6) 4; 7) 1; 8) 16; 9) 2; 10) 1; 11) 4; 12) 3; 13) $3/2$; 14) 6; 15) 6; 16) 47; 17) 1; 18) 2;
 19) -10;5; 20) 2; 21) 3; 22) $3; 3\log_6 2$; 23) 2; 24) 0,5;-0,25; 25) 3; $\frac{\lg 3}{\lg 2} - 1$; 26) 2; 27) 7;
 28) $-\log_3 6$;2; 29) 3; 30) $12/3$; 31) 4; 32) -1;1; 33) -9; 34) 2; 35) $7/9$; 36) 0,1; 37) 3;
 $1 + 2^{-5/4}$; 38) -1; 39) 7; 40) $2^{80} + 0,5$; 41) 8; 0,125; 42) 25; 43) 2; 44) 26; 45) 29; 46) 3;
 48) $25\sqrt{3}$; 49) 2;3; 50) 16; 51) 0;3; 52) 13; 53) 15; 54) 8; 55) 10;100; 56) 1009;
 9001/1000; 57) $1 + \sqrt[3]{10}$; 1001; 58) 3; 59) 29; 60) $2, 1/16$; 61) 9; $1/27$; 62) 1;100;
 63) 0,125;2; 64) 0,01;100; 65) $-1 + \sqrt{10}$;9; 66) 4; 67) 10;0,1; 68) 30;100; 69) $\emptyset$; 70) 1;
 100; 71) 10^{-2} ; 10^2 ; 72) $\emptyset$; 73) 10^{-4} ; 10; 74) 2^{-1} ; 1; 16; 75) $3; 1/9$; 76) $7; 1/7$.

5.16. 1) (2;0); 2) (2;3);(3;2); 3) (8;9); ($\log_3^3 8; \log_2^2 25$); 4) (-0,5;0,5); 5) (1;2;3);
 6) (0,01;0,1);(100;10); 7) (4;2); 8) (3;3); 9) $\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$; 10) (1;8),(8;1); 11) (18;2);
 (2;18); 12) $\left(\sqrt[4]{3}; -1\right); \left(\sqrt[4]{3}; 1\right)$; 14) (2;1), ($\log_3 7; \log_7 9$); 15) (8;9); 16) (0;6); 17) (2;3);
 18) (2;3); 19) (5;2); 20) $\left(2\sqrt{2}; \sqrt[4]{8}\right)$; 21) (2;10);(10;2); 22) (1;2); 23) (81;16); 24) (2;6).

5.17. 1) (5;+ ∞); 2) $(-\infty; 7/3]$; 3) (0;2]; 4) (0;1); 5) $\left(5\frac{9}{25}; +\infty\right)$; 6) $(-\infty; +\infty)$; 7) (4;6);
 8) $(-1/3; 1)$; 9) (3;4) $\cup$ (4;+ ∞); 10) (0;1); 11) (0;1); 12) $(-2; +\infty)$; 13) $\left[-1; 1 - \sqrt{3}\right) \cup$
 $\left(1 + \sqrt{3}; 3\right]$; 14) $(-\infty; 2) \cup (9; +\infty)$; 15) (3;+ ∞); 16) $(-\infty; -2) \cup (5/8; +\infty)$; 17) $(-\infty; -4]$,
 $[2; +\infty)$. **5.18.** 1) $(-\infty, 0)$; 2) (2/3,5/4); 3) (0,2; 0,4]; 4) $(2, +\infty) \cup \left(-\infty, \frac{\lg 2}{\lg 3} - 1\right)$;
 5) $(-\infty, \log_3 2) \cup (\log_3 4, +\infty)$; 6) (-10,10); 7) (0;0,5); 8) (0;2]; 9) $(-\infty; 0,5), (1; +\infty)$;
 10) $\emptyset$; 11) (4/3;+ ∞); 12) (3;6); 13) (-5;5); 14) $(-\infty; 0) \cup (\log_4 3; +\infty)$; 15) [4;+ ∞);
 16) $(-\infty; 13)$; 17) $(-\infty; 10)$; 18) (0;+ ∞); 19) (0;4); 20) $(-\infty; 3]$; 21) (4;+ ∞);
 22) $(-16/3; -3)$; 23) $(-1/3; 1)$; 24) $[0,5; 1,5) \cup (2,5; 3,5]$; 25) $\left(2\frac{2}{3}; +\infty\right)$; 26) $(-1; 1) \cup$
 $(3; 5)$; 27) $\left[2; 2\frac{3}{4}\right) \cup [4; +\infty)$; 28) (-2;1); 29) (1,5;4]; 30) $(-3; -\sqrt{6}) \cup (\sqrt{6}; 3)$;
 31) (3;4,5) $\cup$ (8;+ ∞); 32) $[0,5; 1) \cup (2; 2,5]$; 33) $(-\infty; 1) \cup (1,5; 2)$; 34) $\{-1\}$;

- 35) $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$. **5.19.** 1) $x = (-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 3) $x = (-1)^{n+1} \arcsin\left(\frac{2}{3}\right) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 5) $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 6) $x = \operatorname{arccotg}(\sqrt{7} - \sqrt{2}) + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 7) $x = -\frac{5\pi}{7} + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 8) $x = \pm \operatorname{arctg} 5 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 9) $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 10) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
- 11) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 12) $x_1 = 180^\circ n, x_2 = 90^\circ + 180^\circ k, k, n \in \mathbb{Z}$;
- 5.20.** 1) $x = \frac{((-1)^n - 1)\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 2) $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{12}{5} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$.
- 5.21.** 1) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; 2) $x_1 = \pi n, x_2 = \pm (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; 3) $x_1 = \frac{\pi n}{2}, x_2 = -\frac{1}{2} \operatorname{arctg} 3 + \frac{\pi k}{2}, k, n \in \mathbb{Z}$.
- 5.22.** 1) $x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 2) $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 4) $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 5) $x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi n, x_2 = \frac{\pi}{3} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; 6) $x = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 7) $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$;
- 8) $x = (-1)^n \frac{\pi}{20} - \frac{6}{5} + \frac{\pi n}{5}, n \in \mathbb{Z}$; 9) $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}, x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$;
- 10) $x = \frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$; 11) $x_1 = 2\pi n, x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, x_3 = (-1)^m \arcsin \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4} + \pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$;
- 12) $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, x_2 = \pi + 2\pi k, n, k \in \mathbb{Z}$.
- 5.23.** 1) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$;
- 2) $x = \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 3) $x = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 5 + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; 4) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, x_2 = \operatorname{arctg} 2 + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$;
- 5) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n, x_2 = \frac{\pi}{4} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; 6) $x_1 = \pi n, x_2 = \operatorname{arctg} 4 + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$;
- 7) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, x_2 = -\operatorname{arctg} 2 + \pi k, k, n \in \mathbb{Z}$; 8) $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, x_2 = -\operatorname{arctg} \frac{1}{4} + \pi k, k, n \in \mathbb{Z}$;
- 9) $x = -\operatorname{arctg} \sqrt[3]{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$; 10) $x_1 = \pi n, x_2 = -\frac{\pi}{3} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$;
- 11) $x_1 = \frac{\pi n}{2}, x_2 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, n, k \in \mathbb{Z}$; 12) $x_1 = \operatorname{arctg} 2 + \pi n, x_2 = -\operatorname{arctg} \frac{3}{4} + \pi k, k, n \in \mathbb{Z}$;
- 13) $\emptyset$; 14) $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, x_2 = \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$; 15) $x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n, x_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi k, n, k \in \mathbb{Z}$;
- 16) $x = \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$.
- 5.24.** 1) $x_1 = \frac{2\pi n}{5}, x_2 = \frac{\pi}{2} + \pi k, x_3 = \pi + 2\pi m, n, k, m \in \mathbb{Z}$; 2) $x_1 = \frac{\pi n}{5}, x_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, n, k \in \mathbb{Z}$; 3) $x_1 = \frac{\pi n}{5}, x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3},$

$n, k \in Z$; 4) $x_1 = \frac{\pi n}{4}$, $x_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi k}{8}$, $n, k \in Z$; 5) $x = \frac{\pi n}{10}$, $n \in Z$; 6) $x_1 = \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi k}{5}$,
 $n, k \in Z$; 7) $x_1 = \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{4}$, $n, k \in Z$; 8) $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{18} + \frac{\pi k}{3}$,
 $n, k \in Z$; 9) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi k}{6}$, $n, k \in Z$; 10) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$,
 $x_3 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi m$, $n, k, m \in Z$; 11) $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$, $n, k \in Z$;
12) $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $n, k \in Z$; 13) $x = \frac{\pi n}{8}$, $n \in Z$; 14) $x_1 = \frac{2\pi n}{15}$,
 $x_2 = \frac{\pi}{17} + \frac{2\pi k}{17}$, $n, k \in Z$; $n \neq 15l$, $l \in Z$; 15) $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{5} + \frac{2\pi k}{5}$, $x_3 = \frac{\pi}{7} + \frac{2\pi m}{7}$,
 $n, k, m \in Z$. **5.25.** 1) $x = \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 2) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x_2 = \frac{11\pi}{12} + 2\pi k$, $x_3 = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi m$,
 $n, k, m \in Z$; 3) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{9}$, $n \in Z$, $n \neq 9m + 4$, $m \in Z$; 4) $x_1 = 2\pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi m$,
 $x_3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $n, m, k \in Z$; 5) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$; 6) $x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$,
 $n, k \in Z$; 7) $x_1 = \frac{\pi n}{5}$, $x_2 = \pm \frac{3\pi}{8} + \pi k$, $n, k \in Z$; 8) $x_1 = \pm \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2}$,
 $n, k \in Z$; 9) $x_1 = \pi n$, $x_2 = \arctg \frac{9}{7} + \pi k$, $n, k \in Z$; 10) $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi n}{7}$, $n \in Z$; 11) $x_1 = \pi n$,
 $x_2 = \pm \frac{1}{2} \arccos \frac{\sqrt{5}-1}{2} + \pi k$, $n, k \in Z$; 12) $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$;
13) $x = \pm \frac{2\pi}{9} + \frac{2\pi n}{3}$, $n \in Z$; 14) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n$, $x_2 = -\frac{5\pi}{12} + 2\pi k$, $x_3 = \frac{11\pi}{12} + 2\pi m$,
 $n, k, m \in Z$; 15) $x = \arctg \frac{2}{3} + \pi n$, $n \in Z$; 16) $x = (-1)^{n+1} \frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.
5.26. 1) $x_1 = \pm \frac{\pi}{6} + \pi n$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k$, $n, k \in Z$; 2) $x = 0$, 3) $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{\pi}{3}$,
 $x_3 = \frac{5\pi}{3}$, $x_4 = -2 \arctg \frac{1}{5} + 2\pi$, $x_5 = 10$; 4) $x = (-1)^n \arcsin \frac{a-4}{2} + \pi n$, $n \in Z$, $a \in [2; 6]$;
5) $x_1 = \frac{2\pi k}{n}$, $x_2 = \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi m}{n+1}$, $k, m \in Z$, $x_1 \neq 2\pi l$, $l \in Z$; 6) $x_1 = \frac{2\pi n}{101}$, $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{300} + \frac{\pi k}{50}$,
 $n, k \in Z$. **5.27.** 1) $\left(-\frac{3\pi}{4} + \pi k, -\frac{11\pi}{4} + \pi k\right)$, $k \in Z$;
2) $\left(\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{8} + \pi(k+n), \frac{\alpha}{2} \mp \frac{\pi}{8} + \pi(k-n)\right)$, $\left(-\frac{\alpha}{2} \mp \frac{\pi}{8} + \pi(k+n), -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\pi}{8} + \pi(k-n)\right)$,
 $n, k \in Z$, $\alpha = \arccos \frac{\sqrt{2}}{4}$, 3) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} - \pi n\right)$, $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n, \frac{\pi}{2} - \pi n\right)$, $n \in Z$;

- 4) $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}(k - 4n)\right), n, k \in \mathbb{Z};$ 5) $\left((-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right),$
 $\left((-1)^{k+1} \frac{\pi}{6} + \pi k, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n, k \in \mathbb{Z};$ 6) $\left(\frac{\pi}{2}k, \pi(n + k)\right), n, k \in \mathbb{Z};$
7) $\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{6} + \pi k\right), \left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + \pi k\right), n, k \in \mathbb{Z};$ 8) $\left(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right),$
 $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi n\right), n, k \in \mathbb{Z};$ 9) $\left(\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), n, k \in \mathbb{Z};$
10) $\left(2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right), n, k \in \mathbb{Z}.$ 5.28. 1) $\left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n, \frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z};$
2) $\left[-\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right], n \in \mathbb{Z};$ 3) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z};$
4) $\left[\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi n, \pi + \pi n\right], n \in \mathbb{Z};$ 5) $\left(\frac{5\pi}{18} - \frac{1}{3} + \frac{2\pi n}{3}, \frac{13\pi}{18} - \frac{1}{3} + \frac{2\pi n}{3}\right), n \in \mathbb{Z}.$
- 5.29. 1) $(2\pi n, \pi + 2\pi n) \cup \left(\frac{7\pi}{6} + 2\pi k, \frac{11\pi}{6} + 2\pi k\right), n, k \in \mathbb{Z};$ 2) $\left(-\frac{\pi}{8} + 2\pi n, \frac{3\pi}{8} + 2\pi n\right) \cup$
 $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{7\pi}{8} + 2\pi k\right) \cup \left(\frac{11\pi}{8} + 2\pi m, \frac{3\pi}{2} + 2\pi m\right), n, k, m \in \mathbb{Z};$ 3) $x \in \mathbb{R};$ 4) $x \in \mathbb{R};$
5) $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ 6) $(2\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n) \cup \left(\frac{5\pi}{4} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right), n, k \in \mathbb{Z};$
7) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ 8) $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ 9) $x \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{4} + 2\pi n,$
 $n \in \mathbb{Z};$ 10) $\left(-\operatorname{arctg} \frac{5}{3} + \pi n, \frac{\pi}{4} + \pi n\right), n \in \mathbb{Z}.$
- 5.30. 1) $\left(\arccos \frac{1}{4} + 2\pi n, 2\pi - \arccos \frac{1}{4} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ 2) $\left(\frac{\pi}{12} + 2\pi n, \frac{5\pi}{12} + 2\pi n\right) \cup$
 $\left(-\frac{5\pi}{12} + 2\pi k, -\frac{\pi}{12} + 2\pi k\right), n, k \in \mathbb{Z};$ 3) $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z};$ d) $\left(\cos \frac{\pi}{18}, 1\right];$
4) $[\pi + 2\pi n, 2\pi + 2\pi n], n \in \mathbb{Z}.$
- 5.31. 1) $(-\infty; 1);$ 2) $(0; +\infty);$ 3) $\left(-\frac{2}{3}; 3 - \sqrt{8}\right);$ 4) $(-\infty; 2).$ 5.32. При $a \neq 3, a \neq -1$
 $x_1 = a + 3, x_2 = a - 1;$ якщо $a = 3, x = 6.$ 5.33. При $m \neq 1, m \neq 0$ $x_1 = 2m, x_2 = m + 2;$ якщо
 $m = 1, x = 3.$ 5.34. $x = a^2 + a,$ якщо $a \geq 0.$ 5.35. якщо $a = 1,$ то $x \in [-1; \infty),$ якщо $a \neq 1,$ то
розв'язків немає. 5.36. Два корені, якщо $a \in (-\infty; 1] \cup \{3\};$ три корені, якщо $a \in (1; 3) \cup$
 $(3; +\infty)$ 5.37. -1,625. 5.38. -10. 5.39. 5,5. 5.40. $a \in \left[\frac{1}{2}; \frac{5}{8}\right) \cup \left(\frac{5}{8}; \frac{3}{4}\right) \cup \left(\frac{3}{4}; \frac{7}{8}\right) \cup \left(\frac{7}{8}; 1\right].$

5.41. якщо $2 \leq a < 2,5$. **5.42.** $a \in \left(0; \frac{1}{8}\right)$. **5.43.** $x = 2$, якщо $a = 2 - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$, $x = -2$, якщо $a = -2 - 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. **5.44.** Якщо $a < 0$, то коренів немає; якщо $a = 0, a > 4$, то два корені; якщо $0 < a < 3, a = 4$, то чотири корені; якщо $a = 3$, то п'ять коренів; якщо $3 < a < 4$, то шість коренів. **5.45.** $-8\pi < a < -6\pi$ або $6\pi < a < 8\pi$. **5.46.** $-14,3$. **5.47.** При $a \in (-\infty; -4] \cup [4; +\infty)$ $x_1 = (-1)^n \arcsin \frac{4}{a} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$, $x_2 = (-1)^n \arcsin \frac{2}{a} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; при $a \in (-4; -2] \cup [2; 4)$ $x = (-1)^n \arcsin \frac{2}{a} + \frac{\pi n}{2}, n \in \mathbb{Z}$; при $a \in (-2; 2)$, то коренів немає. **5.48.** Якщо $a = \frac{1}{2}$, то $x = 2$; якщо $a \neq \frac{1}{2}$, то коренів немає. **5.49.** Якщо $a = -3$, то $x \in \mathbb{R}$; якщо $a < -3$, то $x < \frac{6a-1}{a+3}$; якщо $a > -3$, то $x > \frac{6a-1}{a+3}$. **5.50.** Якщо $a < 1$ і $a > 4$, то $x > \frac{a-1}{3(a-4)}$; якщо $a = 4$ і $a = 1$, то $x \in \emptyset$; якщо $1 < a < 4$ $x < \frac{a-1}{3(a-4)}$. **5.51.** 1) $-3 - 2\sqrt{2} < a < -3 + 2\sqrt{2}$; 2) таких значень b немає; 3) $-2 - 2\sqrt{3} < m < -2 + 2\sqrt{3}$. **5.52.** $a \in (-\infty; -11) \cup (1; +\infty)$. **5.53.** $-\frac{|a|}{\sqrt{2}} \leq x \leq |a|$. **5.54.** $x \in \left[0; \frac{(a-1)^2}{4}\right)$, якщо $a > 1$; $x \in \emptyset$, якщо $a \leq 1$. **5.55.** $x \in \left[\frac{2-\sqrt{2}}{2}a; 2a\right]$, якщо $a \geq 0$; $x \in \left[\frac{2+\sqrt{2}}{2}a; 0\right]$, якщо $a < 0$. **5.56.** При $a \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup [1; +\infty)$. **5.57.** $x \in (-\infty; \log_2(-\lg a))$, якщо $0 < a < 1$; розв'язків немає, якщо $a \leq 0$ і $a = 1$; $x \in (\sqrt{a} - \sqrt{a-1}; \sqrt{a} + \sqrt{a-1})$, якщо $a > 1$. **5.58.** Один розв'язок при $a \in (-\infty; 2]$; розв'язків немає при $a \in (2; +\infty)$. **5.59.** $(-8, 5)$. **5.60.** 9; 11; 13; 15. **5.61.** $a = \frac{5}{2}$. **5.62.** При $b = -2$, $a \in \mathbb{R}$ або при $b = -2$, $a = \pm 1$. **5.63.** $\left[-\frac{7}{3}; 6\right)$. **5.64.** $a = \frac{9}{4}$. **5.65.** Указівка: треба розглянути систему для $a = 0, a > 0, a < 0$, застосовуючи для першої нерівності метод інтервалів. **6.1.** $\arccos \frac{5}{9}$. **6.2.** 13 см; 15 см. **6.3.** $2\sqrt{3}$. **6.4.** $\sqrt{p_1^2 + p_2^2}$. **6.5.** $\frac{8\sqrt{14}}{15}$. **6.6.** 50. **6.7.** $\frac{2ab \cos \frac{\gamma}{2}}{(a+b)}$. **6.8.** $2,4 \text{ см}^2$. **6.9.** 45° . **6.10.** $(2k)^{-1}$. **6.11.** $30^\circ; 60^\circ$. **6.12.** 6; 8; 10. **6.13.** $2 \arccos \frac{(a+b)l}{2ab}$. **6.14.** $r^2 + 2Rr$. **6.15.** $\frac{15}{8}$. **6.16.** $3\sqrt{3}r^2$. **6.17.** 10,5. **6.18.** 32,5. **6.19.**

$$\frac{h_1 h_2 h_3}{(h_1 h_2 + h_2 h_3 + h_1 h_3)} \cdot 6.20. 56; 35. 6.21. \frac{a}{(\sqrt{2}a-l)} \cdot \sqrt{(\sqrt{2}a-l)^2 + l^2}. 6.22. 16; 14. 6.23.$$

$$\frac{15}{4}. 6.24. \sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}. 6.25. \text{Указівка: скористатися теоремою 4. 6.26. Указівка:}$$

скористатися теоремою синусів. 6.27. Указівка: з точки перетину бісектрис зовнішніх кутів трикутника опустити перпендикуляри на сторони, що утворюють бісектрису внутрішнього кута трикутника. 6.28. Указівка: скористатися нерівністю трикутника.

6.29. Указівка: виконати паралельне перенесення висоти, проведеної на бічну сторону трикутника так, щоб вона збігалася з відрізком перпендикуляра, опущеного з даної за умовою точки на ту ж сторону. 6.30. Указівка: скористатися нерівністю трикутника.

$$6.31. \text{Указівка: побудувати } \triangle ABC \text{ до паралелограма. 6.32. } 6:1. 6.33. \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\right) R^2.$$

$$6.34. 3. 6.35. \frac{(\sqrt{19}-2)R}{5}. 6.36. 4\pi R^2 (\sqrt{2}-1)^2. 6.37. \frac{25}{4} \text{ см. 6.38. } R\sqrt{2+\sqrt{3}}.$$

$$6.39. \sqrt{ab}. 6.40. \frac{(b^2-a^2)}{(2a-b)}. 6.41. \frac{48}{7}, \frac{50}{7}. 6.42. 1; 17. 6.43. \frac{3+\pi}{6\pi}. 6.44. \frac{\sqrt{15}-\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{15}+\sqrt{3}}{2}.$$

$$6.45. \frac{8(Rr)^{1,5}}{(R+r)}. 6.46. 36^\circ, 36^\circ, 108^\circ. 6.47. 180^\circ - 2\alpha. 6.48. \frac{d}{2} \left(\sin \frac{\alpha}{2} + \sin \frac{\beta}{2} \right),$$

$$\frac{d}{2} \left(\sin \frac{\beta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \right). 6.49. \frac{3\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)}{8} R^2. 6.50. \text{Указівка: використати теорему про січні,}$$

які проведено до кола з однієї точки. 6.51. Указівка: описати окружність біля $\triangle APQ$.

$$6.52. 16 \text{ см. 6.53. } 2. 6.54. 8\sqrt{5}, 4\sqrt{5} 6.55. h^2 \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}. 6.56. 10; 17; 21; \sqrt{3}37. 6.57. 5.$$

$$6.58. \frac{7}{5}. 6.59. 4a^2 \operatorname{tg} \beta. 6.60. 20,4 \text{ см}^2. 6.61. 30^\circ. 6.62. \frac{(b-a)}{2}. 6.63. \frac{1}{2} \frac{1}{2} \sqrt{(2l-a)a};$$

$$l\sqrt{(2l-a)a}. 6.64. 92,16\pi \text{ см}^2. 6.65. \arcsin\left(\frac{2}{\pi}\right). 6.66. \frac{S}{2}. 6.67. 192. 6.68. 25; 25.$$

$$6.69. 12\sqrt{5}. 6.70. \frac{a^2}{2} \sin^3 \alpha. 6.71. 7,2. 6.72. \sqrt{2}a; \sqrt{2}b. 6.73. 441. 6.74. 72\sqrt{3}. 6.75. 84.$$

$$6.76. 8; 15. 6.77. 2. 6.78. \frac{2ab}{a+b}; \frac{a^2+b^2}{a+b}. 6.79. 7; 8. 6.80. \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}. \text{Указівка: Записати}$$

площу трапеції як суму площ двох її частин. 6.81. Вказівка: порівняти площі паралелограмів з площею $\triangle BCK$. 6.82. Указівка: Знайти площу частини ABCD, яка не є спільною у двох чотирикутників. 6.83. Указівка: описані кола трикутників $AC_1B_1, BC_1A_1, CA_1B_1$ проходять через ортоцентр $\triangle ABC$. 6.84. Указівка: замінити

восьмикутник рівновеликим прямокутником. **6.85.** Вказівка: виконати паралельне перенесення бічної сторони трапеції так, щоб одна з вершин при верхній основі стала спільною для двох бічних сторін.

6.86. 3. **6.87.** 3:1. **6.88.** $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2$. **6.89.** $\frac{50}{3}$. **6.90.** $\sqrt{a(a+b)}$; $\sqrt{b(a+b)}$. **6.91.** 16;

36. **6.92.** $a \cdot \frac{2b^2 - a^2}{2a^2}$. **6.93.** 2; 8. **6.94.** 8; 12; 12. **6.95.** $\frac{ab}{(a-b)}$; $\frac{a^2}{(a-b)}$. **6.96.** 35. **6.97.** 5; 10.

6.98. $\frac{a^2 h^2}{(a+h)^2}$. **6.99.** 50. **6.100.** 1:1:1. **6.101.** $\frac{2abc}{(ab+ac+bc)}$. **6.102.** Указівка: описати коло

навколо чотирикутника, утвореного двома вершинами і двома основами висот вихідного трикутника. **6.103.** Указівка: описати коло навколо чотирикутника $AMCN$.

6.104. Указівка: провести медіану AD і з точок A і D опустити перпендикуляри на пряму l . **6.105.** Указівка: використати подібність трикутників, на які висоти розбивають

вихідний трикутник. **6.106.** $\sqrt{ab}$. **6.107.** Указівка: використати подібність трикутників, утворених центрами квадратів, точкою перетину діагоналей і протилежними

вершинами трапеції. **6.108.** k . **6.109.** $\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\beta\cos\alpha}$. **6.110.** $\frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha \sin\beta}$.

6.111. $\sqrt{45}$; 10; 11. **6.112.** $\frac{1}{2}a^2 \cos\alpha \operatorname{ctg}\frac{a}{2}$. **6.113.** $\frac{a \cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}{\sin\alpha \cos\beta}$. Указівка:

використати те, що площа $\triangle ABC$ дорівнює сумі площ трикутників, на які ділить його

бісектриса. **6.114.** 45° . **6.115.** $R^2 \left(1 + \sin\frac{\alpha}{2}\right) \cos\frac{\alpha}{2}$. **6.116.** $\frac{p^2 + pb - q^2}{p}$.

6.117. $r^2 \frac{\sin 2(\alpha+\beta) \sin\beta \cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha}$. **6.118.** $\frac{2h^2}{\sin 4\alpha}$. **6.119.** $\frac{2m^2 \sin\alpha \sin\gamma \sin(\alpha+\gamma)}{\sin^2\alpha + \sin^2\gamma - 2\sin\alpha \sin\gamma \cos(\alpha+\gamma)}$.

Указівка: побудувати $\triangle ABC$ до паралелограма. **6.120.** $\frac{r\sqrt{1+\sin^2\alpha}}{\sin^2\alpha}$. **6.121.** $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin\alpha}{2-\cos\alpha}\right)$.

6.122. $\frac{\sqrt{2}R}{2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\alpha}{2}\right)}$. **6.123.** $\frac{2d \sin^2\alpha}{1-2\cos\alpha+2\cos^2\alpha}$. **6.124.** $1-2\cos\beta$. **6.125.** 4; 6.

6.126. $\frac{2}{3}$. **6.127.** $\frac{R \cos\alpha - a}{2\sin\alpha} \left[\sin\alpha \sqrt{R^2 - a^2} + R - a \cos\alpha \right]$. Указівка: кут між

перпендикулярами, опущеними з центра кола на січну і дотичну, дорівнює α .

6.128. $\frac{R}{2}$. Указівка: знайти кути $\triangle A_1 B_1 C_1$ і використати теорему синусів. **6.129.** Указівка:

використати теорему косинусів. **6.130.** Указівка: використати теорему синусів.

6.131. Указівка: виразити OA , OB , OC через радіус вписаного кола і використати теорему синусів. **6.132.** Указівка: виразити кути $\triangle LMN$ через кути $\triangle ABC$, використовуючи той факт, що бісектриса кута ділить навпіл дугу, яка стягується стороною трикутника, що є протилежною цьому куту. **6.133.** Указівка: виразити OA , OB , OC через радіус вписаного кола і використати теорему синусів.

7.01. 200 см^2 , $8/25$. **7.02.** $0,25Sd \cos 0,5\alpha$. **7.03.** $l^3 \sin \alpha \sin \beta \sqrt{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}$.

7.04. $a^3 \sin \alpha \sqrt{\sin^2 \alpha - \frac{1}{3} \cos^2 \alpha}$. **7.05.** $\arctg \sqrt{\text{ctg}^2 \alpha + \text{ctg}^2 \beta}$. **7.06.** $\frac{3\sqrt{15}}{50} d^3$.

7.07. $h^3 \sqrt{3}$. **7.08.** 13 см . **7.09.** $\frac{a^2 \text{tg} \beta \cos \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{2} \sin \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} \right)}$. **7.10.** 9 ; 40 . **7.12.** $pl \cos \alpha$, 0 ,

$125l \cos \alpha (p^2 - 4l^2 \sin^2 \alpha)$. **7.13.** 260 см^2 ; 312 см^3 . **7.14.** $108\sqrt{3} \text{ см}^3$.

7.15. $\frac{a^3}{8} \text{tg} \alpha \text{tg} \frac{\alpha}{2}$. **7.16.** $ab(\sqrt{2} + 1)$. **7.17.** $2\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$. **7.18.** $\frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$. **7.19.** $\frac{9\sqrt{3}}{2}$.

7.20. $a^2(\sqrt{5} + 1)$; $\arctg 2$. **7.21.** $\frac{1}{3} Q \sqrt{Q \text{tg} \beta \text{tg} \alpha}$. **7.22.** $\arccos \left(-\frac{1}{3} \right)$; $a^2 \sqrt{3}$.

7.23. $\frac{a^3}{6} \text{tg} \varphi \frac{(1 + \cos \alpha)^2}{\sin \alpha}$. **7.24.** $\frac{2}{3} H^3 \text{tg}^2 \alpha \sin \beta$. **7.25.** $10\sqrt{19} \text{ см}^2$. **7.26.** $\frac{a^3}{8} \text{tg} \alpha$.

7.27. 340 см^3 **7.28.** $8d^2 \cos \varphi \cos^2 \frac{\varphi}{2} \text{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \text{tg} \alpha$. **7.29.** $\frac{S}{\sin \alpha}$. **7.30.** $\frac{1}{12} (a^3 - b^3) \text{tg} \alpha$.

7.31. $\frac{a^3 - b^3}{6} \sqrt{\text{tg}^2 \alpha - 1}$. **7.32.** $1 : \sqrt{2}$. **7.33.** $\arccos \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\alpha}{2} \right)$. **7.34.** $\frac{3\sqrt{3}a^2}{4}$;

$\arccos \frac{1}{\sqrt{3}} (\arctg \sqrt{2})$. **7.35.** $\frac{a^2 b^2 \sqrt{3}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. **7.36.** $\frac{a^3 \text{tg} \alpha}{128}$; $\frac{a^2 \sqrt{3}}{32} \text{tg} \alpha$. **7.37.** $\frac{a^2 \sqrt{3}}{16}$.

7.38. $\sqrt{6}$ **7.39.** $\frac{5\sqrt{221}}{4}$. **7.40.** $\frac{33}{8} \sqrt{38}$. **7.41.** $\frac{3}{16} a^2 \sqrt{11}$. **7.42.** $\frac{4ah}{\sin \beta}$. **7.43.** $\frac{a^2 \sqrt{\cos \alpha}}{4 \sin \frac{\alpha}{2} \sin \varphi}$.

7.44. $\frac{a^3 \sqrt{2}}{24}$. **7.45.** $\frac{(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2})^2}{4}$. **7.46.** $\frac{\sqrt{19} a^2}{12}$. **7.47.** $\frac{d^2 \sin \alpha}{2}$; $\frac{d^3}{4\pi} \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\alpha}{2}$.

7.48. $\pi/6$. **7.49.** $\frac{\pi a^3 \text{ctg} \beta}{24 \sin^3 \frac{\alpha}{2}}$. **7.50.** 128 см^2 . **7.51.** $\frac{4\pi}{3} R^3 \sin^2 \frac{\alpha}{4}$; $\pi R^2 \sin \frac{\alpha}{2} \left(1 + 2 \text{tg} \frac{\alpha}{4} \right)$.

$$7.52. \frac{\pi(b^2 \operatorname{ctg}^2 \alpha - a^2 \operatorname{ctg}^2 \beta) \sqrt{b^2 - a^2}}{24(\operatorname{ctg}^2 \alpha - \operatorname{ctg}^2 \beta)^{3/2}}.$$

$$7.53. 2\pi b^2 \operatorname{tg} \varphi (\cos \varphi - \cos 2\varphi).$$

$$7.54. \left(\frac{4g}{\pi \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}} \right)^{1/3}.$$

$$7.55. \frac{R^2 \sqrt{3}}{2}.$$

$$7.56. \frac{\pi a^3 \cos \alpha \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{6 \cos^4 \frac{\alpha}{2}}.$$

$$7.57. \sqrt{3}(R^2 - r^2).$$

$$7.58. \frac{7}{54} \pi l^3 \sin \alpha \sin \frac{\alpha}{2}.$$

$$7.59. 2R - \sqrt{4R^2 - \frac{S}{\pi}}.$$

$$7.60. \frac{1}{3} \pi bc(b+c) \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2}.$$

$$7.61. \frac{1152\pi}{125}.$$

$$7.62. \frac{3\sqrt{2}b^2 \sin^2 2\alpha}{8 \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right)}.$$

$$7.63. 3ab.$$

$$7.64. \arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$7.65. \frac{\pi S \sqrt{2S \sin 2\alpha}}{3 \sin^2 2\alpha \cos^3 \alpha}.$$

$$7.66. \frac{27\sqrt{2}}{8}.$$

$$7.67. \frac{\pi a^3 \sqrt{3}}{54} \operatorname{tg}^3 \frac{\varphi}{2}.$$

$$7.68. \frac{\pi}{4}.$$

$$7.69. 2R \sqrt{\frac{3}{7}}.$$

$$7.70. V = 2\pi \text{ см}^3, S = 4\pi \text{ см}^2.$$

$$7.71. 32:9; 16:9.$$

$$7.72. \frac{4 \cos \alpha \cos \beta}{\pi (\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta)}.$$

$$7.73. \frac{\pi R^3 (3 + \cos^2 \alpha)}{3 \sin^2 \alpha}.$$

$$7.74. 2 \arccos \frac{1 + \sqrt{17}}{8}.$$

$$7.75. \frac{H^2 \sin \frac{2\alpha + \beta}{2} \cos \frac{2\alpha - \beta}{2}}{\sin^2 \alpha}.$$

$$7.76. \frac{21}{16} R^3.$$

$$7.77. 2\sqrt{2} R^2 \cos \alpha$$

$$\left(\sin \alpha + \sqrt{1 - 0.5 \cos^2 \alpha} \right).$$

$$8.02. -\frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}; \frac{\vec{a} - \vec{b}}{2}; \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}; \frac{\vec{b} - \vec{a}}{2}. 8.04. \text{Указівка: розкласти вектор } \overrightarrow{EF} \text{ за векторами,}$$

$$\text{зв'язаними з чотирикутниками ABFE і DCFE. 8.05. } \vec{b} - \vec{a}; -\vec{a}; -\vec{b}; \vec{a} - \vec{b}; \vec{a} + \vec{b}; 2\vec{b}; 2\vec{b} - \vec{a}.$$

$$8.07. \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA_1}. 8.08. \frac{\lambda \vec{a} - \vec{b}}{1 + \lambda}; \frac{\vec{a} + \vec{b}}{1 + \lambda}; \frac{\lambda \vec{b} - \vec{a}}{1 + \lambda}; \frac{-\lambda}{(1 + \lambda)} (\vec{a} + \vec{b}). 8.09. \text{Указівка:}$$

$$\text{показати, що два вектори, що відповідають трьом заданим точкам, є колінеарними.}$$

$$8.10. \frac{1}{3} (\vec{a} + \vec{c}). 8.11. \vec{S} = 2\vec{p} - 2\vec{q} - 1,5\vec{r}. 8.12. \lambda = \mu = 1. 8.13. 0. 8.14. \frac{1}{2} (\vec{a} - \vec{b}).$$

$$8.15. (-4; -3). 8.16. (-9; 1; -2). 8.17. 5; -9. 8.18. \vec{a} \text{ і } \vec{d}. 8.19. 5. 8.20. 5; \sqrt{7}; \frac{5}{2\sqrt{7}}.$$

$$8.21. \arccos \frac{1}{\sqrt{15}}. 8.22. (9; -5; 6). 8.23. (-3; 3; 1); (3; 0; -4); (0; -3; 5). 8.24. \left(-\frac{8}{3}; 3; -2 \right).$$

$$8.25. x = 2; y = -1. 8.26. \left(2; \frac{4}{3}; \frac{2}{3} \right). 8.27. \left(\frac{5}{6}; \frac{11}{6}; -\frac{2}{3} \right) 8.28. \vec{c} \text{ і } \vec{d}. 8.29. C(6; -2; -8),$$

$D(2; -4; -4)$. **8.30.** $\left(\frac{10}{3}; -\frac{1}{3}; 3\right)$. **8.31.** $\left(2; \frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right)$. **8.33.** $\alpha = 4; \beta = -1$. **8.34.** $(4; 4; 6)$.
8.35. $16 - 32\sqrt{2}$. **8.36.** $\arccos\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. **8.37.** $\frac{19}{\sqrt{6}}$. **8.39.** $\left(\frac{22}{7}; \frac{3}{7}; 0\right)$.
8.40. $\angle A = \arccos\left(-\frac{12}{49}\right)$, $\angle B = \angle C = \arccos \frac{61}{7\sqrt{122}}$. **8.41.** $\arccos\left(-\frac{4}{5}\right)$. **8.42.** $\sqrt{3}$.
8.43. -21 . **8.44.** $\frac{2\pi}{3}$. **8.45.** $AB = AC = 5; BC = 5\sqrt{2}; \angle A = 90^\circ; \angle B = \angle C = 45^\circ$.
8.46. $0, 5$. **8.48.** $(1; 0, 5; -0, 5)$. **8.50.** $(-3; 3; 3)$. **8.51.** -6 . **8.52.** $\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}; \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}; \frac{\vec{b}-\vec{a}}{2}; -\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$.
8.53. $\frac{5}{21}$. **8.54.** $\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$. **8.55.** $\arccos \frac{2}{\sqrt{7}}$. **8.56.** Рівносторонній. **8.57.** 13 . **8.58.** 45° .
8.59. $(6; -6; -3)$. **8.60.** $\left(\frac{2}{7}; \frac{3}{7}; \frac{6}{7}\right)$. **8.61.** $\arccos \frac{4}{\sqrt{33}}$. **8.62.** $(-8; -5; -4)$. **8.63.** 60° .
8.64. ± 2 . **8.65.** $\frac{1}{\sqrt{473}}$. **8.67.** $(-60; 80; -75)$. **8.68.** $(1; 1; 1)$. **8.69.** 6 . **8.70.** $(6; 8; -1)$.
8.71. 3 . **8.72.** $(7; 3; 2)$. **8.74.** $-\frac{3}{\sqrt{21}}$. **8.75.** 7 . **8.76.** 90° . **8.77.** 60° . **8.78.** $5; 5$.
8.79. $\arccos \frac{1}{\sqrt{10}}$. **8.80.** $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$. **8.81.** $-3; 6$. **8.82.** $(8; 6; -24)$. **8.83.** $(3; 4; 2)$.
8.84. $\frac{\sqrt{51}}{3}$. **8.85.** $\frac{\sqrt{889}}{2}$. **8.86.** $(-48; 64; 60)$. **8.87.** $\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b} + \vec{c}$. **8.89.** $(-1; 1; 1); 120^\circ$.
8.90. 12 . **8.91.** $(2; 3; -2)$. **8.92.** $5; 5$. **8.93.** $\left(2\sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2}}; -\sqrt{\frac{3}{2}}\right)$. **8.94.** -11 . **8.95.** $\left(\frac{5}{3}; -\frac{35}{3}; \frac{10}{3}\right)$.
9.3. $3x^2 \sin x + x^3 \cos x$. **9.4.** $\frac{-6}{(1+x)^2}$. **9.5.** $\frac{2x \cos x - \sin x}{2x\sqrt{x}}$. **9.6.** $y' = -32 - 16x + 12x^3$.
9.7. $\frac{x^2}{2} - x + 3$. **9.8.** $y = x^2 + x - 3$. **9.9.** $y' = \frac{2}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x^3}}$. **9.10.** $x^{-2/3} + 14x^{2,5} - \frac{2}{x^3}$.
9.11. $4x^4(5\sin x + x\cos x)$. **9.12.** $y = 1 - x \cos 4x + 2x^2 \sin 4x$. **9.13.** $y = \frac{-9}{(1+7x)^2}$.
9.14. $-(0,5)^x \left(\operatorname{ctg} x \cdot \ln 2 + \frac{1}{\sin^2 x}\right)$. **9.15.** $3x^2 \operatorname{tg} x + \frac{x^3}{\cos^2 x}$. **9.16.** $\frac{-5}{(1+3x)^2}$.
9.17. $\frac{-1}{x \cdot \ln 2 (\log_2 x)^2}$. Зауважимо, що $\log_x 2 = \frac{1}{\log_2 x}$. **9.18.** $\frac{\cos x}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x} \sin x$.

$$9.19. \frac{x \cdot \ln 3 \log_3 x - x + 2}{x \ln 3 (\log_3 x)^2} \cdot \quad 9.20. \frac{x^2}{4^x} (3 - x \ln 4). \quad 9.21. -4e^{-4x+3}. \quad 9.22. -3x^2 \ln 2 (2^{-x^3}).$$

$$9.23. -6x \operatorname{ctg} x + \frac{3x^2}{\sin^2 x}. \quad 9.24. \frac{\frac{1}{7} \cos \frac{x}{7} (x^2 + 6) - 2x \sin \frac{x}{7}}{(x^2 + 6)^2}. \quad 9.25. -7x^6 \cdot \sin(x^7).$$

9.26. $-7 \cos^6 x \sin x$. 9.27. $5 \cos x^5 \cdot x^4$. 9.28. $5(\sin x)^4 \cos x$. Знайти похідні у поданих точках: 9.29. 3. 9.30. 1. 9.33. 11. 9.34. 2. 9.35. -2. 9.36. -8/3. 9.37. 4. 9.38. 0

9.39. $x = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}, x = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$. 9.40. 5. 9.41. $-\frac{1}{8}$ 9.42. $-\frac{1}{16}$ 9.43. $y = -\frac{7}{8}$

9.44. $(a-b)(a-c)(a-d)$. 9.45. 24 9.46. $\frac{\pi+2}{\pi^3} \cdot$ 9.47. $\frac{1}{9\pi^2} \cdot$ 9.48. Спадає на інтервалі

$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$ і $(2; +\infty)$, зростає на інтервалі $\left(\frac{2}{3}; 2\right)$. 9.49. Спадає на

інтервалах $(-\infty; -2 - \sqrt{3})$, $(-1; -2 + \sqrt{3})$, $(1; +\infty)$. Зростає на інтервалах

$(-2 - \sqrt{3}; -1)$, $(-2 + \sqrt{3}; 1)$ 9.50. Зростає на інтервалах $(-\infty; -\sqrt{12})$ і $(\sqrt{12}; +\infty)$.

9.51. Спадає на інтервалі $[2; +\infty)$. 9.52. Зростає на інтервалі $(0; 8/3)$. 9.53. Зростає на інтервалі $(-2; 8)$. 9.54. Зростає на інтервалах $(-2; -1)$ та $(1; 2)$. Зростає на інтервалах $(-\infty; -2)$, $(-1; 1)$ і $(2; +\infty)$ 9.55. $x = 0$ – точка максимуму, $x = \pm \frac{\sqrt{5}}{8}$ – точки мінімуму.

9.56. $x = \frac{1}{3}$ – точка максимуму, $x = 3$ – точка мінімуму. 9.57. $x = 1$ – точка максимуму;

$x = -1$ – точка мінімуму. 9.58. $x = 4$ – точка максимуму. 9.59. $x = -1$ – точка

максимуму; $x = 1$ – точка мінімуму. 9.60. $x = \frac{4}{7}$ – точка максимуму; $x = 0$ – точка

мінімуму. 9.61. $x = \frac{8}{27}$ – точка максимуму; $x = 0$ – точка мінімуму. 9.62. $x = -3$ – точка

мінімуму. 9.63. $x = -1$ – точка максимуму; $x = 1$ – точка мінімуму. 9.64. $x = \frac{1}{e}$ – точка

мінімуму. 9.65. Точок екстремуму немає. 9.66. $x = 1$ – точка максимуму; $x = 0$ – точка

мінімуму. 9.67. $x = 0$ – точка максимуму; $x = 2$ – точка мінімуму. 9.68. $y_{\text{найб}} = -\frac{\pi}{2}$ при

$x = 5$, $y_{\text{найм}} = -\frac{13}{3}$ при $n \in \mathbb{Z}$. 9.69. $[0; 2]$; $y_{\text{найб}} = -\frac{1}{3}$ при $x = 2$, $y_{\text{найм}} = -3$ при $x = 0$.

- 9.70.** $y_{\text{найб}} = -54$ при $x = 0$, $y_{\text{найм}} \approx -65,9$ при $x = 0,75$. **9.71.** $y_{\text{найб}} = y(-1) = \left(\frac{1}{3}\right)$; $y_{\text{найм}} = y(1) = -3$. **9.72.** $y_{\text{найб}} = y(0) = -3$; $y_{\text{найм}} = y(-1) = -13$. **9.73.** $y_{\text{найб}} = y(1) = 5$; $y_{\text{найм}} = y(-\sqrt{2}) = -4\sqrt{2}$. **9.74.** $y_{\text{найб}} = y(4) = 8$; $y_{\text{найм}} = y(0) = 0$. **9.75.** $y_{\text{найб}} = y(1) = 5$; $y_{\text{найм}} = y(0,5) = 3$. **9.76.** $y_{\text{найб}} = y(0) = y(16) = 3$; $y_{\text{найм}} = y(1) = 2$. **9.77.** $y_{\text{найб}} = 13$; $y_{\text{найм}} = 4$. **9.78.** $y_{\text{найб}} = y(1) = 0,5$; $y_{\text{найм}} = y(0) = 0$. **9.79.** $y_{\text{найб}} = y(-8) = -16$; $y_{\text{найм}} = y(-5) = -25$. **9.80.** $y = 4x$; $y = -4x + 16$. **9.81.** $y = -\frac{5}{4}x - \frac{1}{2}$. **9.82.** $y = \sin x$ у точці $x = 0$. **9.83.** $\pi + 2\pi n, \frac{\pi}{3} + 2\frac{\pi n_1}{3}$. **9.84.** $y = 4x + 6$. **9.85.** $2(\sqrt{2} - 1)$. **9.86.** $R = a\sqrt{\frac{2}{3}}$.
- 9.87.** У точках з абсцисами -2 і 5 . **9.88.** $5x - \frac{x^2}{2} + C$. **9.89.** $5x - \ln|x| + C$.
- 9.90.** $\int (5 - \sqrt{x}) dx$. **9.91.** $\frac{1}{5} \ln|x| - 2\sqrt{x} + C$. **9.92.** $\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2 + x + C$. **9.93.** $\frac{(x+7)^{20}}{20} + C$.
- 9.94.** $\frac{(3x+7)^{20}}{60} + C$. **9.95.** $-\frac{(7-x)^{20}}{20} + C$. **9.96.** $-\frac{(7-3x)^{20}}{60} + C$. **9.97.** $\frac{3\left(\frac{x}{3}+1\right)^{20}}{20} + C$.
- 9.98.** $\left(5 - \frac{x}{3}\right)^{20} \left(\frac{-3}{20}\right)$ **9.99.** $\frac{2}{15}(5x+9)^{\frac{3}{2}} + C$. **9.100.** $\frac{2}{5}\sqrt{5x+9} + C$. **9.101.** $-7\cos\frac{x}{7} + C$.
- 9.102.** $\int \frac{dx}{x^2 - 9}$. **9.103.** $2\sin(2x-1) + C$. **9.104.** $3x - \frac{3}{10}\sin 10x + C$. **9.105.** $\int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}$.
- 9.106.** $\frac{\text{tg} 7x}{7} + C$. **9.107.** $x + \frac{1}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + C$; $\frac{x^2}{x^2-1} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1}\right)$. **9.108.** $-7\text{ctg}\frac{x}{7} + C$.
- 9.109.** $\ln\left|\frac{1}{x^2+x-6}\right| + C$; $\frac{2x+1}{x^2+x-6} = \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x+3}$. **9.110.** $2\text{tg}\frac{x}{2} - x + C$. **9.111.** $-3e^{-\frac{x}{3}} + C$.
- 9.112.** $\sin 2x + 2\sin x + C$. **9.113.** $2\sin x - \sin 2x + C$. **9.114.** $\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + x + C$.
- 9.115.** $-9\cos\frac{x}{9}$ **9.116.** $\frac{2x^3}{3} - \frac{3x^2}{2} + \ln x + C$. **9.117.** $2\sin(3x-5) + C$. **9.118.** $x - 3\frac{x^2}{2} + C$.
- 9.119.** $2x - \frac{\sin 4x}{2} + C$. **9.120.** $\frac{1}{36}(1+3x)^{12}$ **9.121.** $-\frac{(1-3x)^{12}}{36} + C$. **9.122.** $\frac{1}{13}\text{tg} 13x + C$.
- 9.123.** $\frac{1}{3}(2x-9)^{\frac{3}{2}} + C$. **9.124.** $-13\text{ctg}\frac{x}{13} + C$. **9.125.** $\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + \ln|x-1| + C$.
- 9.126.** $13\text{tg}\frac{x}{13} - x + C$. **9.127.** $(\pi+1)x + C$. **9.128.** 0 . **9.129.** 0 . **9.130.** 5 . **9.131.** $-30,75$.
- 9.132.** 0 . **9.133.** $\frac{\pi}{4}$. **9.134.** 0 . **9.135.** $\frac{1}{3}$. **9.136.** 1 . **9.137.** $512/7$. **9.138.** 0 . **9.139.** $2/3$.
- 9.140.** 0 . **9.141.** $5\text{tg}\frac{\pi}{5}$. **9.142.** $\frac{9\pi}{4}, \frac{25\pi}{2}$. **9.143.** $1/2$. **9.144.** $5/3$. **9.145.** $64/3$. **9.146.** $\frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}$.

9.147. $11/6$. **9.148.** $58/3$. **9.149.** $23 - 5\ln \frac{28}{5}$. **9.150.** 1. **9.151.** $1/3$. **9.152.** $1/3$. **9.153.** $9/2$.
9.154. $5/6$. **9.155.** $32/3$. **9.156.** $64/3$. **9.157.** $12 - 5\ln 5$. **9.158.** $64/3$. **9.159.** $4/3$. **9.160.** $8/3$.
9.161. 4,5. **9.162.** 9. **9.163.** 13. **9.164.** $32/3$. **9.165.** $125/6$. **9.166.** $\frac{\pi}{2} - 1$. **9.167.** $2 - \sqrt{2}$.
10.01. 55. **10.02.** 195. **10.03.** 19; 37; 55... **10.04.** 2; 6; 10; 14 ... **10.06.** 2; 10; 50 або 50; 10;
2. **10.08.** 610. **10.09.** -1; 1; 3; 5 ... **10.11.** 1. **10.12.** $q = 3$; $a_1 = 2$; $q = -3$; $a_1 = 26/7$;
10.13. 18; 24; 32; або 32; 24; 18. **10.14.** 2; 4; 8; 12 або 12,5; 7,5; 4,5; 1,5. **10.15.** $\frac{1}{\sqrt{2}}$.
10.16. 5; 9; 13... **10.17.** 5; 7; 9. **10.18.** 0,1; 0,2; 0,3; 0,4 або 0,4; 0,3; 0,2; 0,1. **10.19.** 2; 5; 8;
11; 14... ; 11; 8; 5; 2; -1...; $\frac{13 \mp \sqrt{1609}}{2}$; $\frac{13 \mp \sqrt{1609}}{6}$; $\frac{13 \pm \sqrt{1609}}{6}$; $\frac{13 \pm \sqrt{1609}}{2}$... **10.20.** 73
10.21. 1; -2; -5; -8... **10.23.** $a_1 = 4$, $d = 2$; $a_1 = -79/7$, $d = -37/14$. **10.24.** $a_{10} = 22$,
 $a_{11} = 25$ **10.25.** 3; 9; 27. **10.26.** 2; 6; 18; 54 или 54; 18; 6; 2. **10.27.** 4; 12; 36; 108. **10.28.** 6.
10.29. 3; 6; 12; 24; 48...; 3; -6; 12; -24; 48... **10.30.** 3; 6; 12; 24...; 24; 12; 6; 3... **10.31.** 1; 3;
9... **10.32.** 4; 10; 25 або 25; 10; 4. **10.33.** 2; 9; 16. **10.34.** Так. $3a$; $4a$; $5a$. **10.35.** 3; 9; 15;
21... **10.36.** $\left(a^2 + (3-n)ax + x^2\right)n$. **10.37.** 4905. **10.38.** 6; 12; 24... **10.40.** 3; 18; 33 або 27;
18; 9. **10.41.** 5; 15; 45. **10.42.** $x = n(n+1)/2$. **10.43.** 20 або 5. **10.46.** $75/4$; $45/4$; $27/4$; $9/4$
або 3; 6; 12; 18. **10.47.** $-5/4$. **10.348.** $12/5$. **10.50.** 2; 4; 8.
11.1. 24. **11.2.** 120. **11.3.** а) $11!$ **11.5.** 6. **11.6.** 24. **11.7.** 1) 120; 2) $5!/2$; 3) $8!/3!$; 4) $10!/(3!2!2!)$.
11.8. 190. **11.9.** $n(n-3)/2$. **11.10.** 325. **11.11.** 435. **11.12.** $C_6^3 C_8^3$. **11.13.** 91.
11.14. $2C_{30}^{10} + C_{29}^{11}$. **11.15.** $3C_6^2 C_{60}^{20}$. **12.01.** а) $2/3$; б) $2/9$. **12.02.** $2/9$. **12.03.** $1/3$. **12.04.** а) $\frac{C_{20}^6}{C_{30}^6}$
; б) $\frac{C_{20}^4 C_{10}^2}{C_{30}^6}$ в) $1 - C_{20}^6 / C_{30}^6$. **12.05.** $1/12$. **12.06.** 1) $\frac{1}{C_{36}^5}$ або $1/376992$. 2) $\frac{C_5^1 C_{31}^4}{C_{36}^5}$ або
 $155/376992$; 3) $\frac{C_5^3 C_{31}^2}{C_{36}^5}$ або $4650/376992$; 4) наближено 0.01275; додати попередні
три числа; 5) $5481/376992$; 6) наближено 0.985. **12.07.** 1) C_{18}^5 / C_{36}^5 ; 2) C_9^5 / C_{36}^5 ;
3) C_{16}^5 / C_{36}^5 ; 4) $\frac{C_{18}^3 C_{18}^2}{C_{36}^5}$; 5) $\frac{C_4^1 C_4^1 C_4^1 C_{24}^2}{C_{36}^5}$; 6) $\frac{C_4^2 C_{32}^3}{C_{36}^5}$; 7) $1 - \frac{C_{27}^5}{C_{36}^5}$ - через протилежну
подію; 8) $1 - \frac{C_{27}^5}{C_{36}^5} - \frac{C_9^1 C_{27}^4}{C_{36}^5}$. **12.08.** 1) 0.985; 2) 0.14; 3) 0.425; 4) 0.42; 5) 0.015. **12.09.** 0.34.
12.10. 0.657. Простіше знайти ймовірність протилежної події. **12.11.** 0.941094.
12.12. 1) $1/125$; 2) $12/125$; 3) $48/125$; 4) $64/125$. Сума дорівнює 1.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Сборник задач по элементарной математике [Текст]: учеб. пособие / Н. П. Антонов, М. Я. Выгодский, В. В. Никитин, А. И. Санкин. – М.: Наука, 1979. – 448 с.
2. Дорофеев, Г. В. Пособие по математике для поступающих в вузы [Текст]: учеб. пособие для самообразования / Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. – М.: Наука, 1976. – 640 с.
3. Сборник задач по математике для поступающих во втузы [Текст]: учеб. пособие для самообразования / под ред. М. И. Сканави. – М.: Высш. шк., 1992. – 528 с.
4. Пособие по математике для поступающих в вузы [Текст]: учеб. пособие для самообразования / под ред. Г. Н. Яковлева. – М.: Наука, 1982. – 480 с.
5. Практичний курс математики для систем довузівської підготовки [Текст]: навч. посіб. / за ред. В. О. Рвачова. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2007. – 816 с.
6. Адаптаційний курс елементарної математики [Текст]: навч. посіб. / О. Г. Ніколаєв, К. П. Барахов, І. В. Брисіна та ін. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т «Харк. авіац. ін-т», 2011. – 64 с.

ЗМІСТ

Передмова	3
Розділ 1. Алгебраїчні перетворення	4
1.1. Многочлени від однієї змінної. Ділення многочленів з остачею. Теорема Безу	4
1.2. Корені многочлена. Теорема Вієта	6
1.3. Елементарні формули алгебри. Спрощення алгебраїчних виразів. Раціональні дробі. Розкладання правильних раціональних дробів на прості дробі	10
1.4. Розкладання многочлена на множники	15
Розділ 2. Тригонометричні перетворення	16
2.1. Тригонометричні функції числового аргументу	16
2.2. Основні формули тригонометрії. Формули зведення. Перетворення тригонометричних виразів	19
Розділ 3. Перетворення логарифмічних виразів	27
3.1. Означення логарифма числа	27
3.2. Властивості логарифмів. Логарифмічні перетворення	27
Розділ 4. Функції та графіки	29
4.1. Означення функції та її властивості	29
4.2. Графіки алгебраїчних функцій	35
4.3. Графіки тригонометричних функцій	37
4.4. Графіки показникової і логарифмічної функцій	38
4.5. Графіки обернених тригонометричних функцій	39
4.6. Побудова графіків функцій за допомогою геометричних перетворень .	40
Розділ 5. Рівняння і нерівності	45
5.1. Рівняння і нерівності. Основні означення	45
5.2. Метод інтервалів. Раціональні нерівності	47
5.3. Рівняння і нерівності, що містять x під знаком абсолютної величини .	50
5.4. Показникові й логарифмічні рівняння	52
5.5. Системи показникових і логарифмічних рівнянь	56
5.6. Показникові і логарифмічні нерівності	59
5.7. Тригонометричні рівняння	62
5.8. Системи тригонометричних рівнянь	67
5.9. Тригонометричні нерівності	69
5.10. Рівняння, нерівності й системи з параметрами	72
Розділ 6. Планіметрія	85
6.1. Трикутники	85
6.2. Кола	89
6.3. Чотирикутники і багатокутники	93
6.4. Подібність трикутників і багатокутників	99
6.5. Застосування тригонометрії в планіметрії	104
Розділ 7. Стереометрія	110
7.1. Паралелепіпеди і призми	110
7.2. Піраміди	114
7.3. Перерізи в многогранниках	117
7.4. Круглі тіла	120
7.5. Комбінація тіл	124
Розділ 8. Векторна алгебра	127
8.1. Лінійні операції над векторами	127
8.2. Прямокутні координати вектора	131

8.3. Скалярний добуток векторів	134
Розділ 9. Основи аналізу	140
9.1. Похідна. Техніка диференціювання	140
9.2. Застосування похідної	143
9.3. Первісна. Невизначений інтеграл	149
9.4. Визначений інтеграл і його застосування	151
Розділ 10. Прогресії	156
Розділ 11. Метод математичної індукції. Елементи комбінаторики. Біном Ньютона	161
Розділ 12. Елементи теорії ймовірностей	169
12.1. Випадкові події	169
12.2. Класичне означення	171
12.3. Теорема множення ймовірностей	174
Відповіді	178
Бібліографічний список	193

Навчальне видання

**Барахов Костянтин Петрович,
Брисіна Ірина Вікторівна,
Головченко Олександр Васильович та ін.**

ЕЛЕМЕНТАРНА МАТЕМАТИКА В ПРИКЛАДАХ І ЗАДАЧАХ

Редактори: А. М. Ємленінова, Л. О. Кузьменко

Зв. план, 2016

Підписано до друку 03.08.2016

Формат 60x84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк

Ум. друк. арк. 10,8. Обл.-вид. арк. 12,25. Наклад 400 пр.

Замовлення 249. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного
реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів видавничої
продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001