

С.В. Спренне, І.П. Бойчук, І.І. Марунько

ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.

КІНЕМАТИКА

2012

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

С.В. Спренне, І.П. Бойчук, І.І. Марунько

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.
КІНЕМАТИКА**

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2012

УДК 531(075.8)

C75

Рецензенти: канд. техн. наук, проф. І.Г. Кириченко;
канд. техн. наук, доц. М.В. Кулешова

Спренне, С.В.

C75 Теоретична механіка. Кінематика [Текст] : навч. посіб. /
С.В. Спренне, І.П. Бойчук, І.І. Марунько. – Х. : Нац. аерокосм. ун-т
ім. М.Є. Жуковського «Харк. авіац. ін-т», 2012. – 63 с.

Розглянуто основні розділи кінематики, а також питання задання й орієнтації у просторі твердого тіла, що пов'язано зі специфікою спеціальних курсів в авіаційних вузах, які базуються на методах і прийомах теоретичної механіки. Поряд з традиційними методами векторного викладу запропоновано аналітичні методи дослідження руху окремих об'єктів і механічних систем.

Для студентів усіх факультетів авіаційних вузів.

Іл. 32. Бібліогр.: 5 назв

УДК 531(075.8)

© Спренне С.В., Бойчук І.П., Марунько І.І., 2012
© Національний аерокосмічний університет
ім. М.Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2012

ВСТУП

Вивчення теоретичної механіки починається з розгляду руху матеріальних тіл і точок і дослідження властивостей рухів незалежно від того, що їх спричинило. Цей розділ теоретичної механіки називають кінематикою. У кінематиці матеріальні точки й тіла різняться тільки положенням у просторі й геометричною формою, тому досліджуються рухи точок і тіл як геометричних об'єктів.

Як впливає з означення, кінематика є геометрією в чотиривимірному просторі, де четвертим виміром є час. Кінематика як самостійний розділ теоретичної механіки виникла лише в середині XIX століття, її перший систематичний курс було написано професором Паризької політехнічної школи А. Резалем (1828–1896) 1882 року.

У цьому курсі викладено лише основні питання кінематики в обсязі, який є необхідним для розуміння динаміки й аналітичної механіки.

Простір, час та системи відліку. Відповідно до наведеного вище означення кінематики розглянемо змінення положення деяких геометричних об'єктів у просторі та впродовж часу.

У теоретичній механіці припускається, що простір є однорідним та ізотропним, а час – однорідним. Однорідність та ізотропність простору означають відсутність у ньому місць і напрямків, що могли б виділятися серед інших. Однорідність часу означає, що впродовж нього немає моментів, що вирізняються. Початок відліку часу є довільним.

Для того щоб став зрозумілим смисл поняття руху, треба ввести у розгляд системи відліку, які містять тіло відліку та зв'язану з ним систему координат, а також спосіб вимірювання часу. Зазвичай систему координат зв'язують з тілом відліку, який є зручним для розв'язання конкретної задачі, а хід і вимірювання часу в усіх системах координат вважають однаковими. Більш того, припускається, що годинники в усіх системах відліку можуть бути синхронними, тобто в будь-якій точці простору годинники показують однаковий час.

Отже, час змінюється в усіх системах відліку однаково, тому вивчення руху в кінематиці зводиться до аналізу властивостей деяких параметричних функцій (де параметром є час), що описують положення об'єкта відносно вибраної системи координат зі зміненням часу. Як правило, за такі функції вибирають координати рухомих точок, що характеризують положення й орієнтацію твердого тіла у просторі.

Простір і час, у яких рухаються всі реальні об'єкти, є невідділюваними від рухомої матерії: вони є об'єктивними формами її буття. У класичній механіці використовують моделі простору, часу й рухомої матерії, які формально не зв'язані одна з одною, вони є лише наближенням до реальних форм існування матерії. Однак коли тіла й точки рухаються зі швидкостями, значно меншими за швидкість поширення світла, тривимірний евклідовий простір та універсальний час є

повноцінними і досить точними абстракціями реального часу й простору, і це підтверджує практика.

Основні задачі кінематики

Оскільки простір є однорідним та ізотропним, а час – однорідним, то всі системи відліку в кінематиці є рівноцінними, і серед них не можна виділити якусь, що має перевагу над іншими. Тому можна говорити лише про рух однієї системи координат відносно іншої, про рух точок або тіл відносно деякої фіксованої системи координат, а не про "абсолютний" рух. У зв'язку з цим йтиметься про чотири основні задачі кінематики:

1. Вибрано деяку систему координат. Спостерігач, зв'язаний з нею, бачить рухому точку. Задача полягає в тому, щоб описати рух цієї точки та вивчити різні способи опису й дослідження цього руху.

2. Задано дві системи координат. Спостерігач, зв'язаний з однією з них, спостерігає за рухом іншої. Задача полягає в тому, щоб описати й дослідити рух однієї системи відносно іншої. Ця задача є еквівалентною до задачі опису руху твердого тіла відносно деякої фіксованої системи відліку.

3. Задано дві системи координат, із кожною з яких зв'язаний свій спостерігач. Обидва спостерігають за рухом однієї й тієї самої точки. Рухи, які вони бачать, зазвичай різні. Задача полягає в описі руху точки відносно першої системи, коли є відомими рухи другої системи відносно першої, і розглядуваної точки відносно цієї самої системи координат.

4. Задано $n + 1$ систем координат, пронумерованих від 0 до n , де n – довільне скінченне ціле число. З кожною із цих систем зв'язаний свій спостерігач, відомим є рух кожної k -ї системи відносно $(k-1)$ -ї. У цьому випадку треба описати й дослідити рух k -ї системи координат відносно нульової.

Послідовний розгляд цих задач кінематики і є першою частиною курсу теоретичної механіки.

1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

Отже, механічний рух – це змінення положення тіл і точок у просторі з часом. Рух у кінематиці розглядається як заданий наперед і незалежно від взаємодії з іншими тілами й точками, тобто без урахування сил, що діють на них. Таке дослідження руху є попереднім етапом, допоміжним засобом для динаміки. Однак кінематика має й самостійне значення. Найбільш типовими у цьому сенсі є задачі кінематики механізмів: визначення траєкторій, швидкостей, прискорень точок і кутових швидкостей і прискорень ланок механізмів; вивчення перетворення рухів, які здійснюють механізми; утворення механізмів, що здійснюють рух із заданими кінематичними параметрами.

Оскільки положення й рух твердого тіла у просторі можна вважати відомими тоді, коли є відомими положення й рух усіх його точок, то спочатку дослідимо задачу руху точки.

1.1. Задання положення й руху точки у просторі

Як відомо з геометрії, положення точки у просторі можна визначити радіус-вектором $\vec{r}$, проведеним з деякої фіксованої точки O до заданої точки M . Під час руху точки, тобто коли змінюється з часом її положення, радіус-вектор $\vec{r}$, змінюючись за величиною й напрямком, є функцією часу:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \quad (1.1)$$

Якщо ввести деяку систему координат, наприклад прямокутну декартову з початком в точці O , то вектору $\vec{r}$ будуть відповідати три скалярні функції часу (координати точки, рис. 1.1)

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad (1.2)$$

які цілком визначають положення точки M у просторі в будь-який момент часу, тобто задають її рух.

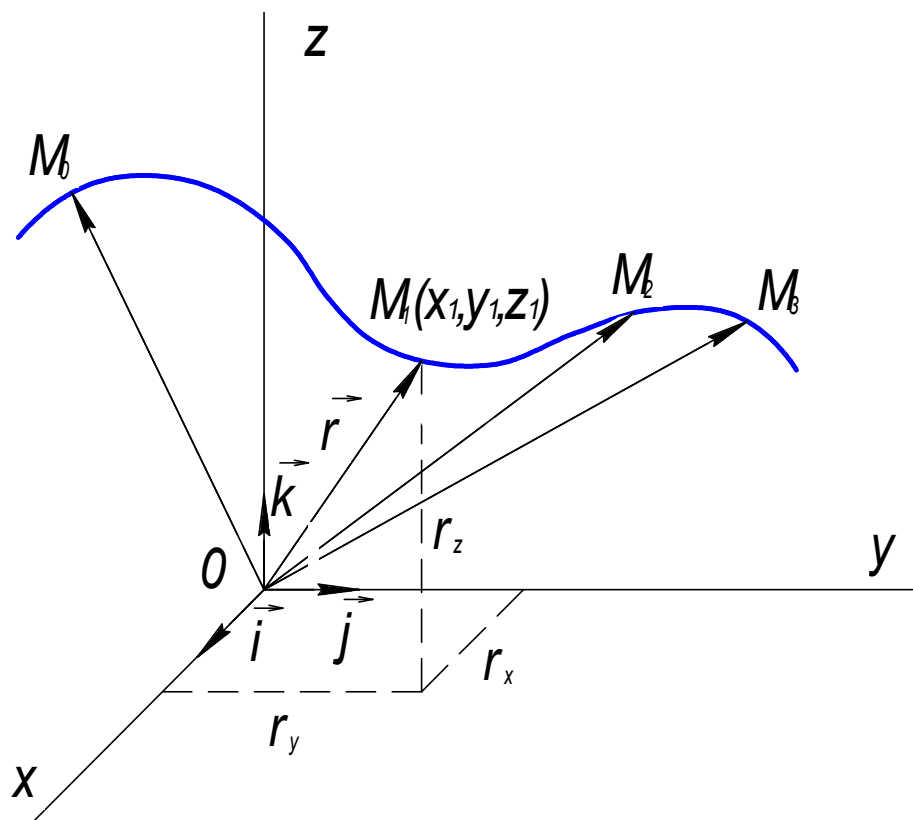


Рис. 1.1

Якщо залежність (1.1) визначено в деякій системі координат $Oxyz$, то кажуть, що рух точки M задано у цій системі координат рівнянням (1.1) у векторній формі.

Якщо функції $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ в (1.2) є однозначними, неперервними й хоча б двічі диференційованими, то рівняння (1.2) називають рівняннями руху точки M у декартових координатах, або скінченними (кінематичними) рівняннями руху точки.

З часом кінець вектора $\vec{r}(t)$ опише криву, вздовж якої рухається точка M . Геометричне місце послідовних положень точки M під час руху має назву траєкторії точки. Ця лінія незмінно зв'язана з системою координат, відносно якої задано рух точки, і суттєво залежить від вибору цієї системи.

Залежності (1.2) можна вважати параметричними рівняннями траєкторії точки M . Дійсно, якщо присвоювати часові деяку послідовність значень, то одержимо координати точки в ці моменти часу i , знаючи їх, побудуємо траєкторію. Для того щоб одержати рівняння траєкторії у координатній формі, з рівнянь руху (1.2) треба виключити час t . При цьому траєкторією може бути не вся лінія, рівняння якої одержано, а лише деяка її частина, що відповідає області значень координат точки, які припускаються рівняннями руху.

Зв'язок векторного й координатного способів задання руху точки легко визначити, якщо ввести орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ осей прямокутної декартової системи координат $\vec{r} = r_x \vec{i} + r_y \vec{j} + r_z \vec{k} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$, або $x(t) = r_x(t) = \vec{r} \cdot \vec{i}$, $y(t) = r_y(t) = \vec{r} \cdot \vec{j}$, $z(t) = r_z(t) = \vec{r} \cdot \vec{k}$.

Якщо траєкторія точки M є відомою заздалегідь, то використовують натуральний спосіб задання руху, що полягає в такому. На траєкторії за початок відліку вибирають довільну фіксовану точку O і вказують (довільно) додатний напрям відліку дуг. Положення точки M на траєкторії тепер можна визначити її дуговою координатою $\sigma(t) = OM$ (рис. 1.2). Під час руху точки її дугова координата неперервно змінюється з часом, тобто є функцією часу:

$$\sigma = \sigma(t). \quad (1.4)$$

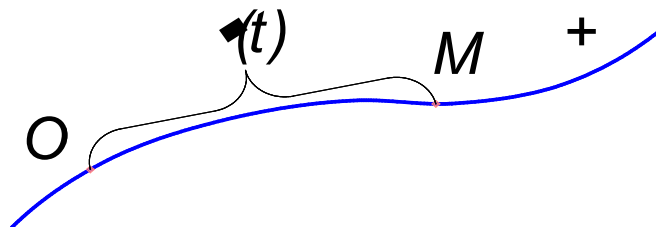


Рис. 1.2

Залежність σ від часу t називають законом руху точки по траєкторії.

Таким чином, рух точки M у просторі задано в натуральній формі, якщо є відомою її траєкторія, вказано початок і додатний напрямок відліку дугової координати σ на траєкторії та задано закон руху точки по траєкторії (1.4).

Із самої природи механічного руху випливає, що функція $\sigma(t)$ (як і будь-яка інша координатна функція) має бути однозначною, скінченною, неперервною і, крім того, двічі диференційованою.

Слід пам'ятати, що в більшості випадків руху дугова координата σ не дорівнює шляху s , пройденому точкою. У цьому легко переконатися, розглянувши рух точки по прямолінійній траєкторії за законом $\sigma = b \sin(kt)$. Проаналізувавши його, дійдемо висновку, що дугова координата може набувати як додатних, так і від'ємних значень, обмежених за модулем значенням b , а пройдений точкою шлях – це додатна необмежена функція, що монотонно зростає. Зв'язок між координатним і натуральним способами задання руху визначається співвідношенням $(d\sigma)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$, де x, y, z – прямокутні декартові координати рухомої точки.

1.2. Швидкість і прискорення точки

Найважливішими кінематичними характеристиками, що визначають характер руху точки, є її швидкість і прискорення.

Нехай у деякий момент часу t положення точки M визначається радіусом-вектором $\vec{r}$, а в момент $t + \Delta t$ – вектором $\vec{r}'$. Переміщення точки $M\vec{M}' = \Delta\vec{r}$ за проміжок часу Δt можна визначити як різницю між $\vec{r}'$ і $\vec{r}$.

Величину, що дорівнює відношенню переміщення точки до відповідного проміжку часу,

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{V}_{cp} \quad (1.5)$$

будемо називати середньою швидкістю точки M за проміжок часу Δt .

Таким чином, середня швидкість точки M – це вектор, що має напрямок хорди MM' у бік руху точки по траєкторії (рис. 1.3).

Переходячи у виразі (1.5) до границі за умови $\Delta t \rightarrow 0$, одержимо

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{\vec{r}}, \quad (1.6)$$

де точка над буквою означає диференціювання за часом.

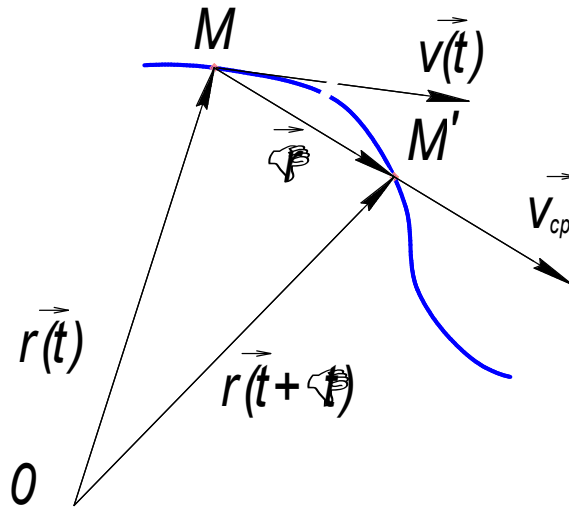


Рис. 1.3

Векторну величину $\vec{V}$, що визначається рівністю (1.6), будемо називати швидкістю точки в певний момент часу t , або миттєвою швидкістю.

Оскільки гранично (коли $\Delta t \rightarrow 0$) напрямок вектора $\Delta \vec{r} / \Delta t$ збігається з напрямком дотичної до траєкторії точки, то й миттєва швидкість точки має напрямок дотичної до траєкторії. Очевидно, що розмірність швидкості – $[V] = [L]/[T]$, вимірюється в метрах за секунду або в кілометрах за годину.

Розглянемо миттєві швидкості $\vec{V}$ і $\vec{V}'$ рухомої точки в положеннях M і M' . З рис. 1.4 випливає, що під час руху точки вектор швидкості змінюється як за величиною, так і за напрямком. Перенесемо вектор $\vec{V}'$ в точку M і визначимо $\Delta \vec{V} = \vec{V}' - \vec{V}$, тобто вектор, який характеризує змінення вектора швидкості за проміжок часу Δt . Розділивши $\Delta \vec{V}$ на Δt , отримуємо вектор

$$\frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \vec{W}_{\text{сеп}}, \quad (1.7)$$

який називають середнім прискоренням точки за проміжок часу Δt . Переходячи в (1.7) до границі за умови $\Delta t \rightarrow 0$, отримуємо векторну величину, яку називають миттєвим прискоренням точки в момент часу t :

$$\vec{W} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \dot{\vec{V}} = \ddot{\vec{r}}. \quad (1.8)$$

Вектор $\vec{W}$ розташований по той же бік від дотичної до траєкторії точки, що й вектори $\Delta \vec{V}$ та $\vec{W}_{\text{сеп}}$, а тому він завжди має напрямок у бік увігнутості траєкторії.

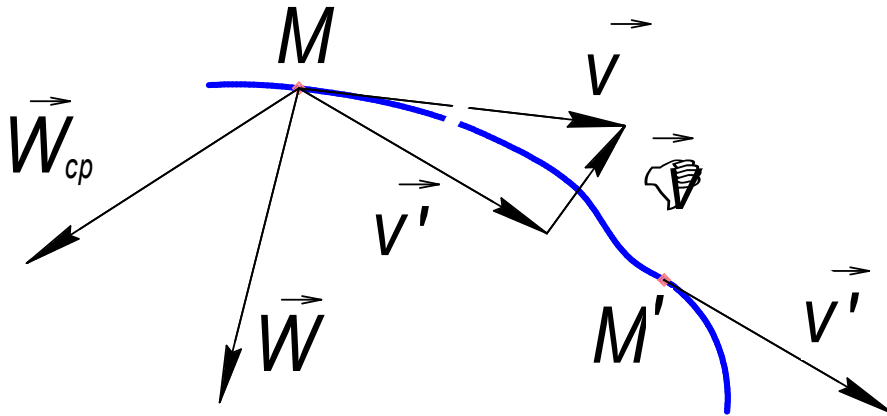


Рис. 1.4

Граничне положення площини, яка проходить через дотичну в точці M і точку M' , коли M' наближається до M , визначає стичну площину в точці M траєкторії. Для плоскої кривої стична площина збігається з площиною самої кривої. Із співвідношення (1.3) випливає, що вектор прискорення точки завжди лежить у стичній площині.

Очевидно, що складова прискорення вздовж дотичної до траєкторії характеризує швидкість змінення модуля вектора швидкості, а складова, перпендикулярна до $\vec{V}$, указує на змінення напрямку вектора $\vec{V}$ зі зміненням часу.

Отже, швидкість і прискорення точки – векторні величини, що характеризують швидкість змінення радіуса-вектора й вектора швидкості відповідно. Вектор миттєвої швидкості збігається з напрямком дотичної до траєкторії точки, а вектор прискорення лежить (разом з вектором швидкості) в стичній у цій точці траєкторії площині і завжди напрямлений у бік увігнутості траєкторії.

Розмірність прискорення $[W] = [L]/[T^2]$, а його одиницею є 1 см/с^2 або 1 км/год^2 .

1.3. Визначення швидкості та прискорення при координатному способі задання руху

Нехай рух точки задано в прямокутних декартових координатах рівняннями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

Позначаючи орти координатних осей $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ і розкладаючи радіус-вектор рухомої точки по осях Ox , Oy і Oz , одержимо

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \quad (1.9)$$

Продиференціюємо вираз (1.9) за часом:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k}. \quad (1.10)$$

Вектор швидкості $\vec{V}$ так само можна розкласти по тих же осях:

$$\vec{V}(t) = V_x(t)\vec{i} + V_y(t)\vec{j} + V_z(t)\vec{k}. \quad (1.11)$$

Зіставляючи формули (1.10) і (1.11), знаходимо

$$V_x(t) = \dot{x}(t), \quad V_y(t) = \dot{y}(t), \quad V_z(t) = \dot{z}(t), \quad (1.12)$$

тобто проекції вектора швидкості точки на осі декартової системи координат дорівнюють першим похідним за часом відповідних координат цієї точки.

Обчисливши проекції вектора швидкості на координатні осі, можна за очевидними формулами визначити модуль і напрямок вектора швидкості:

$$|\vec{V}| = V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (1.13)$$

$$\cos(\vec{V}, \vec{i}) = \frac{V_x}{V}, \quad \cos(\vec{V}, \vec{j}) = \frac{V_y}{V}, \quad \cos(\vec{V}, \vec{k}) = \frac{V_z}{V}. \quad (1.14)$$

Прискорення точки дорівнює другій похідній її радіуса-вектора за часом, а оскільки вектори $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ є сталими, то

$$\vec{W} = \ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k} = \dot{V}_x(t)\vec{i} + \dot{V}_y(t)\vec{j} + \dot{V}_z(t)\vec{k}. \quad (1.15)$$

З іншого боку,

$$\vec{W}(t) = W_x(t)\vec{i} + W_y(t)\vec{j} + W_z(t)\vec{k}. \quad (1.16)$$

Порівняємо вирази (1.15) і (1.16)

$$W_x(t) = \dot{V}_x = \ddot{x}, \quad W_y(t) = \dot{V}_y = \ddot{y}, \quad W_z(t) = \dot{V}_z = \ddot{z}. \quad (1.17)$$

Таким чином, проекції прискорення точки на осі декартової системи координат дорівнюють другим похідним за часом відповідних проекцій радіуса-вектора або першим похідним за часом відповідних проекцій вектора швидкості.

За формулами

$$|\vec{W}| = V = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (1.18)$$

$$\cos(\vec{W}, \vec{i}) = \frac{W_x}{W}, \quad \cos(\vec{W}, \vec{j}) = \frac{W_y}{W}, \quad \cos(\vec{W}, \vec{k}) = \frac{W_z}{W}, \quad (1.19)$$

визначаємо модуль і напрямок вектора $\vec{W}$.

1.4. Визначення швидкості та прискорення при натуральному способі задання руху

Знайдемо швидкість і прискорення точки у випадку, коли її рух задано в натуральній формі. Нагадаємо, що при цьому є відомими траєкторія точки і закон її руху $\sigma = \sigma(t)$.

Нехай в момент часу t точка займає положення M на траєкторії, а в момент $t + \Delta t$ — положення M' . Дугові координати у ці моменти часу відповідно дорівнюють σ і $\sigma' = \sigma + \Delta\sigma$ (рис. 1.5).

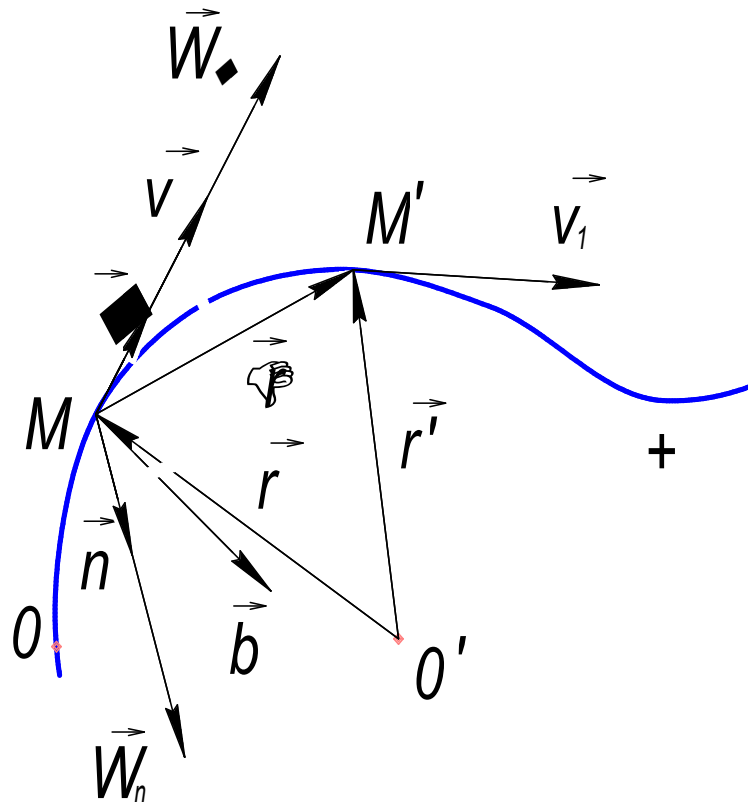


Рис. 1.5

Проводячи з довільної фіксованої точки O' в точку M радіус-вектор $\vec{r}$ і зважаючи, що $\vec{r} = \vec{r}[\sigma(t)]$, одержуємо для вектора швидкості точки

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{d\sigma} \frac{d\sigma}{dt} = \dot{\sigma} \frac{d\vec{r}}{d\sigma}, \quad (1.20)$$

де $\frac{d\vec{r}}{d\sigma} = \lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} (\Delta\vec{r}/\Delta\sigma)$.

Вектор $\Delta\vec{r}/\Delta\sigma$ має такий самий напрямок, як і вектор $\Delta\vec{r}$, і тому, коли $\Delta\sigma \rightarrow 0$, його напрямок наближається до дотичної до траєкторії в точці М, а його модуль – до одиниці: $\lim_{\Delta\sigma \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\sigma} \right| = \lim_{M' \rightarrow M} |M\vec{M}'|/|M\vec{M}'| = 1$.

Отже, вектор $d\vec{r}/d\sigma$ є одиничним вектором дотичної до траєкторії в точці М. Позначимо його $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{r}}{d\sigma}. \quad (1.21)$$

З виразів (1.20) і (1.21) випливає, що

$$\vec{V} = \vec{\tau} \frac{d\sigma}{dt} = \vec{\tau} \dot{\sigma} = \vec{\tau} V_{\tau}, \quad (1.22)$$

де V_{τ} – проекція вектора швидкості $\vec{V}$ на дотичну до траєкторії в певній точці.

Вектор прискорення після диференціювання (1.21) за часом набирає вигляду

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{\tau} \dot{\sigma}) = \vec{\tau} \frac{dV_{\tau}}{dt} + \frac{d\vec{\tau}}{dt} V_{\tau} = \vec{\tau} \dot{V}_{\tau} + \frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} V_{\tau}^2. \quad (1.23)$$

Похідна $\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}$ є вектором $\vec{k}$, перпендикулярним до вектора $\vec{\tau}$:

$$\vec{\tau} \vec{\tau} = 1, \quad \frac{d}{d\sigma}(\vec{\tau} \vec{\tau}) = 2\vec{\tau} \frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = 0. \quad (1.24)$$

З курсу геометрії відомо, що вектор $\vec{k}$ лежить у стичній площині й має напрямок головної нормалі до траєкторії у бік її увігнутості. Величина цього вектора дорівнює кривизні траєкторії в певній точці: $k = 1/\rho$, де ρ – радіус кривизни траєкторії. Отже,

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = \vec{k} = \frac{\vec{n}}{\rho}, \quad (1.25)$$

де $\vec{n}$ – одиничний вектор головної нормалі в точці M.

Підставляючи в рівняння (1.23) вираз, одержаний для $\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}$, запишемо формулу для вектора прискорення:

$$\vec{W} = W_{\tau}\vec{\tau} + W_n\vec{n} = \vec{\tau} \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \vec{n} \frac{V^2}{\rho}. \quad (1.26)$$

Якщо крім одиничних векторів $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ увести третій вектор $\vec{b}$, такий, що $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$, то співвідношення (1.26) набуває очевидного геометричного значення:

$$\vec{W} = W_{\tau}\vec{\tau} + W_n\vec{n} + W_b\vec{b}. \quad (1.27)$$

Рівність (1.27) є розкладом вектора прискорення по трьох взаємно перпендикулярних напрямках: по дотичній, головній нормалі й бінормалі до траєкторії в певній точці (див. рис. 16). При цьому

$$W_{\tau} = \frac{dV_{\tau}}{dt} = \ddot{\sigma}, \quad W_n = \frac{V^2}{\rho}, \quad W_b = 0 \quad (1.28)$$

є проекціями вектора $\vec{W}$ на ці напрямки. Рівність нулю проекції прискорення на бінормаль свідчить про те, що цей вектор лежить у стичній площині, а оскільки $W_n \geq 0$, то вектор прискорення завжди має напрямок у бік увігнутості траєкторії. З виразів (1.27) і (1.28) випливає, що

$$|\vec{W}| = W = \sqrt{\ddot{\sigma}^2 + V^4/\rho^2} \quad (1.29)$$

а напрямок вектора прискорення задається кутами між $\vec{W}$, $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$:

$$\cos(\vec{W}, \vec{\tau}) = \frac{W_{\tau}}{W}, \quad \cos(\vec{W}, \vec{n}) = \frac{W_n}{W}.$$

Напрямки дотичної, головної нормалі й бінормалі в кожній точці траєкторії утворюють прямокутну систему координат з ортами $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ і $\vec{b}$. Ця система має назву натурального тригранника, а (1.27) дає розклад вектора прискорення по його осях.

З формул $W_{\tau} = dV_{\tau}/dt$, $W_n = V^2/\rho$ випливає, що дотичне прискорення може ставати нулем у таких випадках:

а) на відрізках рівномірного руху ($V = \text{const}$);

б) у моменти часу, коли модуль швидкості досягає свого екстремального значення, тобто у точках траєкторії, де відбувається перехід від прискореного руху до сповільненого або навпаки.

Оскільки вектор $\vec{W}_\tau$ і вектор швидкості мають однаковий напрямок уздовж однієї прямої, то дотичне прискорення характеризує змінення модуля швидкості з часом.

Нормальне прискорення перетворюється на нуль у таких випадках:

а) радіус кривизни траєкторії прямує до нескінченності, тобто на прямолінійних відрізках або в точках перегину кривої;

б) швидкість точки дорівнює нулю.

Оскільки $\vec{W}_n \perp \vec{V}$, то з цього випливає, що нормальне прискорення характеризує змінення напрямку вектора швидкості з часом.

1.5. Дослідження характеру руху точки по траєкторії

Розглянемо характер руху точки по її траєкторії залежно від співвідношення між векторами швидкості й прискорення.

Будемо називати рух точки прискореним (сповільненим), якщо з часом модуль її швидкості збільшується (зменшується).

Для того щоб одержати ознаки прискореного й сповільненого рухів, дослідимо поведження функції $|\vec{V}|^2 = V^2$. Очевидно, що під час зростання (спаду) V^2 зростатиме (спадатиме) і $|\vec{V}|$. Крім того, такий прийом дає змогу виключити невизначеність, яка виникла би при дослідженні поведження $f(t) = |\vec{V}|$ в її особливих точках.

Обчислимо похідну V^2 за часом:

$$\frac{dV^2}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{V}\vec{V}) = 2\vec{V}\vec{W} = 2VW \cos(\vec{V}, \wedge \vec{W}). \quad (1.30)$$

З курсу математичного аналізу відомо, що функція зростає, коли її перша похідна є додатною, спадає – в протилежному випадку і зберігає стаке значення, коли ця похідна дорівнює нулю на деякому інтервалі змінення аргументу. Відповідно до цього рух точки є прискореним, якщо скалярний добуток $\vec{V}\vec{W} > 0$, сповільненим при $\vec{V}\vec{W} < 0$ і рівномірним при $\vec{V}\vec{W} \equiv 0$.

Скалярний добуток двох векторів є додатним, якщо кут між ними гострий, від'ємним, якщо кут тупий, і дорівнює нулю, якщо вектори взаємно перпендикулярні. Звідси випливають такі ознаки руху точки:

- якщо кут між її швидкістю та прискоренням гострий, то рух точки є прискореним;

- якщо кут між $\vec{V}$ і $\vec{W}$ тупий, то точка рухається сповільнено;

- якщо вектори швидкості й прискорення взаємно перпендикулярні, то

точка рухається рівномірно протягом деякого проміжку часу, доки $\vec{V} \perp \vec{W}$.

У випадках, коли кут між $\vec{V}$ і $\vec{W}$ дорівнює $\pi/2$ тільки в конкретні моменти часу, кажуть, що в ці моменти змінюється характер руху точки: до цього моменту він був прискореним (сповільненим), а потім стає сповільненим (прискореним) або рівномірним.

З наведених ознак неважко одержати й аналітичний метод дослідження характеру руху точки. Для цього помножимо скалярно вектори $\vec{V}$ і $\vec{W}$, попередньо розклавши їх по осях прямокутної системи координат:

$$\begin{aligned}\vec{V}\vec{W} &= (\dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k})(\ddot{x}(t)\vec{i} + \ddot{y}(t)\vec{j} + \ddot{z}(t)\vec{k}) = \\ &= \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}.\end{aligned}\quad (1.31)$$

З цього виразу та ознак прискореного й сповільненого рухів випливає, що характер руху цілком визначається знаком добутку $\vec{V}\vec{W}$: $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} < 0$ – сповільнений, $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} > 0$ – прискорений, $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} = 0$ – рівномірний рух..

На практиці останнє рівняння розв'язують відносно часу t і з одержаних значень t знаходять точки на траєкторії, що є межами ділянок з певним характером руху. Для з'ясування характеру руху на кожній з них достатньо знайти знак виразу $\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}$ на будь-якій ділянці. Описати характер руху на всіх інших ділянках неважко, оскільки ділянки з різним характером руху чергуються.

Якщо рух точки задано в натуральній формі, то

$$\vec{V}\vec{W} = V_{\tau}\vec{\tau}(W_{\tau}\vec{\tau} + W_n\vec{n}) = V_{\tau}W_{\tau} = \sigma\sigma \quad (1.32)$$

і характер руху точки цілком визначається знаком добутку $\sigma\sigma$.

1.6. Годограф змінного вектора та його використання

Годографом змінного вектора називають криву, яку описує кінець цього вектора при неперервному змінненні його скалярного аргументу за умови, що початок вектора знаходиться в нерухомій довільно вибраній точці. У векторному аналізі годограф змінного вектора має те ж саме значення, що й графік функції в математичному аналізі. Виходячи з прийнятого вище означення годографа вектора, можна говорити про траєкторію точки як про годограф її радіуса-вектора. Побудуємо годограф вектора швидкості точки, відкладаючи з довільної точки O вектори швидкості, що відповідають різним моментам часу, і з'єднуючи їхні кінці. Геометричні властивості годографа наочно відображають закон змінення вектора швидкості з часом. Якщо ввести систему координат $Ox_1y_1z_1$ з початками в точці O , то вирази $x_1 = V_x(t)$, $y_1 = V_y(t)$ і $z_1 = V_z(t)$ є

параметричними рівняннями годографа швидкості у цій системі координат. Виключаючи у цих рівняннях час, можна одержати рівняння годографа вектора швидкості у вигляді, що містить лише координати x_1, y_1, z_1 його точок. Оскільки радіусом-вектором, що визначає положення точок на годографі швидкості, є вектор швидкості, то вектор прискорення, який дорівнює $d\vec{V}/dt$, має напрямок дотичної до годографа і характеризує швидкість руху по ньому кінця вектора швидкості (рис. 1.6).

Годограф вектора швидкості та його властивості можна використовувати для дослідження характеру руху точки по її траєкторії та виявлення деяких особливостей самої траєкторії. Як приклад розглянемо годограф, зображений на рис. 1.7, і з його допомогою проаналізуємо рух точки по траєкторії.

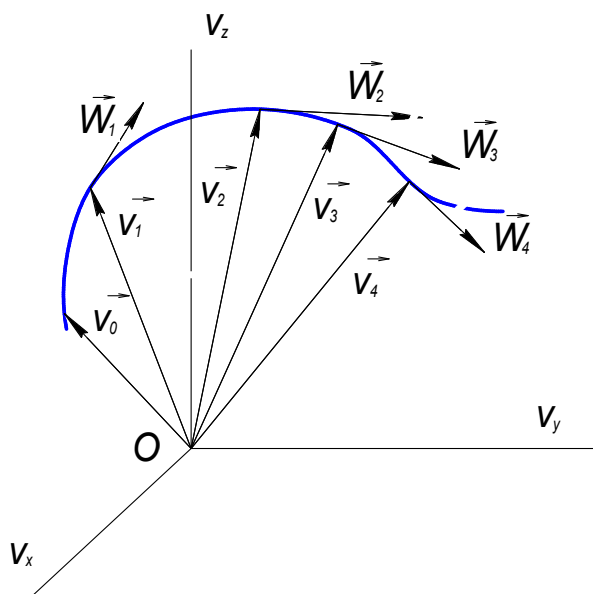


Рис. 1.6

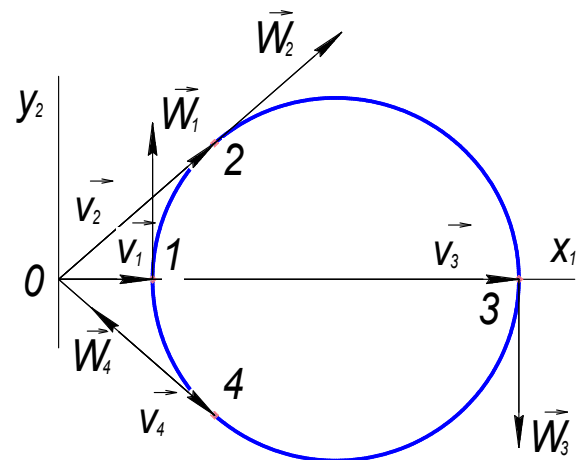


Рис. 1.7

Оскільки вектор $\vec{W}$ має напрямок дотичної до годографа швидкості, його нормальна складова стає нулем у тих точках, де вектор швидкості є дотичним до годографа (положення 2 і 4), дотична складова вектора $\vec{W}$ — у тих точках, де вектор швидкості й дотична до годографа утворюють між собою кут $\pi/2$ (точки 1 і 3).

Дійсно, якщо вектор швидкості є дотичним до годографа, то в точці дотику швидкість і прискорення мають однакові або протилежні напрямки, а це можливо лише при $W_n = 0$. У точках годографа, де вектор швидкості є ортогональним до нього, кут між векторами $\vec{V}$ і $\vec{W}$ є прямим, а це відповідає тому, що $W_\tau = 0$.

Спираючись на властивості годографа та формулу (1.28), яка визначає нормальне й дотичне прискорення, можна стверджувати таке:

1. У точках траєкторії, що відповідають точкам годографа швидкості,

де вектор $\vec{V}$ є дотичним до нього, нормальне прискорення перетворюється на нуль. Ці точки траєкторії є точками перегину, тому що в них $V^2/\rho = 0$. Однак $V^2 \neq 0$, тому $\rho = \infty$.

2. Точки годографа, де вектор $\vec{V}$ є нормальним до нього, відповідають точкам траєкторії, де змінюється характер руху. У цих точках модуль швидкості досягає екстремальних значень.

3. Ділянки годографа, які є дугами кіл з центрами в початку O системи $Ox_1y_1z_1$, відповідають ділянкам рівномірного руху по траєкторії.

4. Прямолінійні ділянки годографа, що проходять через початок координат, відповідають прямолінійним ділянкам траєкторії.

Ці властивості годографа швидкості дають змогу досить просто й наочно проаналізувати характер руху та особливості траєкторії точки.

Поняття годографа вектора швидкості набуло широкого використання в задачах динаміки космічного польоту, зокрема при дослідженні траєкторій міжорбітальних перельотів, відшуканні оптимальних варіантів маневрів космічних апаратів.

Все більшу увагу дослідники звертають на можливості використання властивостей годографів швидкості й прискорення для розв'язання нових задач науки й техніки.

2. КІНЕМАТИКА ВІЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА

Тверде тіло або система твердих тіл є найважливішими об'єктами вивчення теоретичної механіки та деяких інших галузей науки і техніки. Тому детально розглянемо питання визначення положення й орієнтації тіла у просторі, з'ясуємо характер його руху, визначимо швидкості й прискорення його точок.

Методи аналізу руху точки, які викладено вище, можна використати також для дослідження руху твердого тіла і визначення його головних кінематичних характеристик. Однак це викликає необхідність знаходження нескінченно великої кількості рівнянь руху точок, тому що рух тіла можна вважати відомим, якщо відомим є рух кожної його точки. У зв'язку з цим вводять величини, які характеризують рух тіла в цілому і є загальними для всіх його точок. Ці величини дають змогу визначити рух кожної його точки. Такий підхід до дослідження руху тіла суттєво скорочує кількість рівнянь, необхідних для опису його руху. Перша задача полягає у знаходженні найменшої кількості рівнянь для опису руху твердого тіла і визначення їхнього вигляду.

2.1. Задання положення і орієнтації вільного твердого тіла

у просторі

Положення твердого тіла у просторі відносно деякої системи координат $Ax_1x_2x_3$ вважається заданим, якщо задано положення всіх його точок у цій системі (можна визначити їхні координати в будь-який момент часу).

Якщо з тілом жорстко зв'язана система координат $O\xi_1\xi_2\xi_3$ з ортами $\bar{e}_k$, $k = \overline{1,3}$, то положення кожної його точки в цій системі визначатиметься незмінними координатами $\xi_{i1}, \xi_{i2}, \xi_{i3}$, а її положення в $Ax_1x_2x_3$ – радіусом-вектором (рис. 2.1):

$$\bar{r}_i = \bar{r}_0 + \bar{\rho}_i = \bar{r}_0 + \sum_{k=1}^3 \xi_{ik} \bar{e}_k. \quad (2.1)$$

Отже, при заданих $\bar{r}_0$ і $\bar{e}_k$ положення кожної точки тіла однозначно буде задаватися в системі $Ax_1x_2x_3$. Згідно з означенням, ці чотири вектори характеризують положення тіла в цій системі координат. Якщо $\bar{r}_0 = \bar{r}_0(t)$ і $\bar{e}_k = \bar{e}_k(t)$, тобто задано рух точки O (полюса) і змінення з часом напрямку зв'язаних з тілом осей, то можна говорити, що рівняння

$$\bar{r}_0 = \bar{r}_0(t), \bar{e}_k = \bar{e}_k(t), k = \overline{1,3} \quad (2.2)$$

є векторними рівняннями руху тіла.

Проектуючи (2.1) на осі системи $Ax_1x_2x_3$, одержимо

$$x_{is} = x_{0s} + \sum_{k=1}^3 \xi_{ik} \alpha_{ks}, s = \overline{1,3}, \quad (2.3)$$

де

$$\alpha_{ks} = \cos(\bar{e}_k, \bar{j}_s) - \quad (2.4)$$

напрямні косинуси осей, що зв'язані з тілом.

У силу очевидних співвідношень

$$\begin{aligned} \bar{e}_i \cdot \bar{e}_k &= \delta_{ik}, i, k = \overline{1,3}, \\ \delta_{ik} &= \begin{cases} 1, i = k, \\ 0, i \neq k. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.5)$$

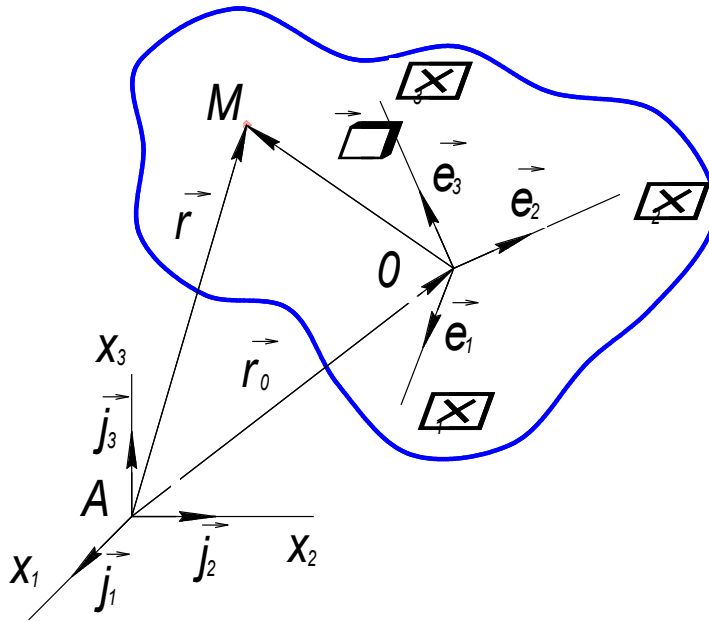


Рис. 2.1

Між дев'ятьма напрямними косинусами α_{ks} (2.4) існує шість залежностей:

$$\alpha_{i1}^2 + \alpha_{i2}^2 + \alpha_{i3}^2 = 1, \quad i = \overline{1,3}, \quad (2.6)$$

$$\alpha_{i1}\alpha_{k1} + \alpha_{i2}\alpha_{k2} + \alpha_{i3}\alpha_{k3} = 0, \quad i, k = \overline{1,3}.$$

Тому з дев'яти величин α_{ks} лише три є незалежними, а всі інші можна виразити через них з допомогою співвідношень (2.6).

Таким чином, для задання положення тіла у просторі достатньо задати шість незалежних один від одного скалярних параметрів: три координати якої-небудь його точки і три величини з α_{ks} . Ці параметри називають узагальненими координатами твердого тіла, а їх кількість – числом його ступенів свободи. У цьому значенні будемо говорити, що тверде тіло, на положення якого у просторі не накладено ніяких обмежень (вільне тверде тіло), має шість ступенів свободи.

У багатьох ситуаціях при дослідженні руху твердого тіла необхідно знайти орієнтацію тіла у просторі. Будемо вважати, що орієнтацію тіла задано, якщо задано напрямок будь-якого вектора $\vec{a}$, незмінно зв'язаного з тілом, відносно осей $Ax_1x_2x_3$.

Оскільки вектор $\vec{a}$ можна подати у вигляді

$$\vec{a} = \sum_{k=1}^3 a_{ek} \vec{e}_k, \quad (2.7)$$

то можна зробити висновок, що напрямок вектора $\vec{a}$ цілком задається ортами $\vec{e}_k$ осей, що зв'язані з тілом. Таким чином, орієнтацію тіла визначено, якщо знайдено вектори $\vec{e}_k$ або їхні напрямні косинуси, тобто для задання орієнтації тіла у просторі достатньо задати три незалежні один від одного скалярні параметри так, щоб через них можна було обчислити всі напрямні косинуси α_{ks} .

Цілком очевидно, що задання орієнтації тіла ще не характеризує його положення. Проте якщо крім орієнтації задати ще положення якої-небудь точки тіла, то положення тіла згідно з (2.1) буде задано.

2.2. Способи задання орієнтації тіла у просторі. Рівняння руху тіла і його точок

У попередньому підрозділі зазначалося, що для задання орієнтації твердого тіла досить задати три вектори $\vec{e}_k$ або три з дев'яти напрямних косинусів осей, що зв'язані з тілом. Звичайно, виникає питання: якими іншими способами можна задати орієнтацію тіла, тобто яким чином вибрати параметри, що однозначно визначають $\vec{e}_k$ або α_{ks} ? Вибір таких незалежних один від одного параметрів вперше запропонував Ейлер, і їх назвали кутами Ейлера. Взагалі можна навести безліч способів вибору кутів Ейлера або яких-небудь інших параметрів, що характеризують орієнтацію тіла. Їх вибір залежить від умови конкретної задачі. Розглянемо лише два з цих можливих наборів параметрів: класичні кути Ейлера і літакові кути, що використовуються в динаміці польоту.

Уведемо проміжну систему координат $Oy_1y_2y_3$, осі якої паралельні осям $Ax_1x_2x_3$ і однаково з ними орієнтовані (рис. 2.2). Лінію перетину площин Oy_1y_2 та $O\xi_1\xi_2$ назвемо лінією вузлів. Очевидно, що вона є перпендикулярною до осей Oy_3 і $O\xi_3$, а тому й до площини, що задається цими осями. Зорієнтуємо лінію вузлів так, щоб поворот навколо неї на кут θ , що приводить до суміщення осей Oy_3 і $O\xi_3$, був додатним. Цей кут, взятий в інтервалі від 0 до π без урахування крайніх значень, має назву кута нутації.

Кут ψ між лінією вузлів і віссю $O\xi_1$, який відраховується від осі Oy_1 у додатному напрямку відносно осі Oy_3 , має назву кута прецесії.

Кут φ між лінією вузлів і віссю $O\xi_1$, який відраховується від лінії вузлів у додатному напрямку відносно осі $O\xi_3$, має назву кута власного обертання тіла.

Кожний з цих кутів може змінюватися від 0 до 2π , за винятком крайнього правого значення.

Уведені таким чином параметри називають кутами Ейлера.

Довільній орієнтації тіла без урахування збігу осей Oy_3 і $O\xi_3$

відповідають три кути Ейлера: φ , ψ і θ . І навпаки, якщо відомо значення кутів φ , ψ , θ , то цим визначається орієнтація осей $O\xi_1\xi_2\xi_3$ відносно $Oy_1y_2y_3$, а тому й самого тіла.

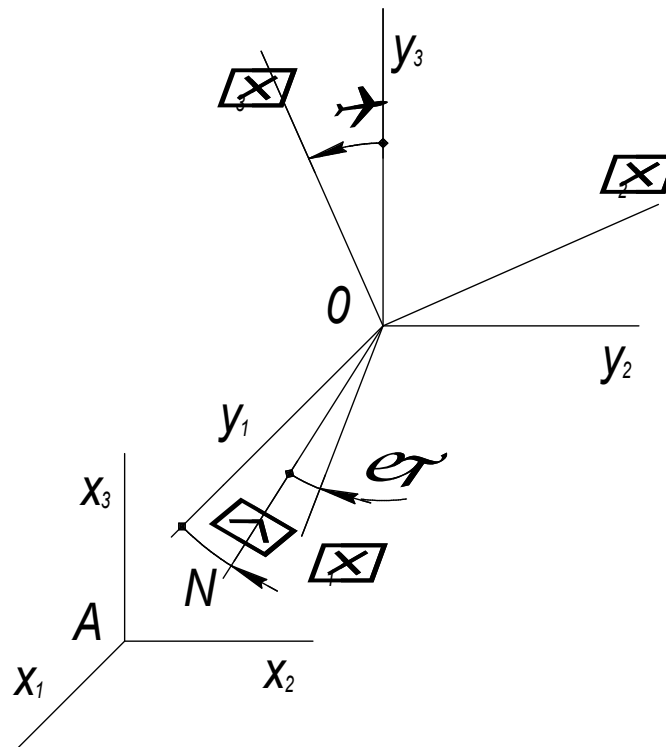


Рис. 2.2

Дійсно, кут ψ задає у площині Oy_1y_2 напрямок лінії вузлів ON (рис. 2.3, а), кут θ – у площині, що є перпендикулярною до лінії вузлів і проходить через точку O , – положення осі $O\xi_3$ (рис. 2.3, б), кут φ – у площині, що є перпендикулярною до осі $O\xi_3$ і проходить через точку O , – напрямок осі $O\xi_1$ (рис. 2.3, в). Напрямок осі $O\xi_2$ стає відомим автоматично, оскільки осі $O\xi_1\xi_2\xi_3$ – це осі правого ортогонального тригранника.

порівняти з невизначеністю полярного кута у полярній системі координат, коли полярний радіус дорівнює нулю.

Описана вище система кутів Ейлера, як вже зазначалося, не є єдиною. Розглянемо ще одну систему ейлерових кутів, яку використовують для дослідження руху літальних апаратів. Досліджуючи рух літака, завжди пов'язують з ним зображену на рис. 2.4 ортогональну систему координат. Початок її збігається з центром мас літака, вісь C_x – з його поздовжньою віссю, вісь C_y лежить у площині симетрії літака і є перпендикулярною до C_x , а вісь C_z має напрямок правого крила.

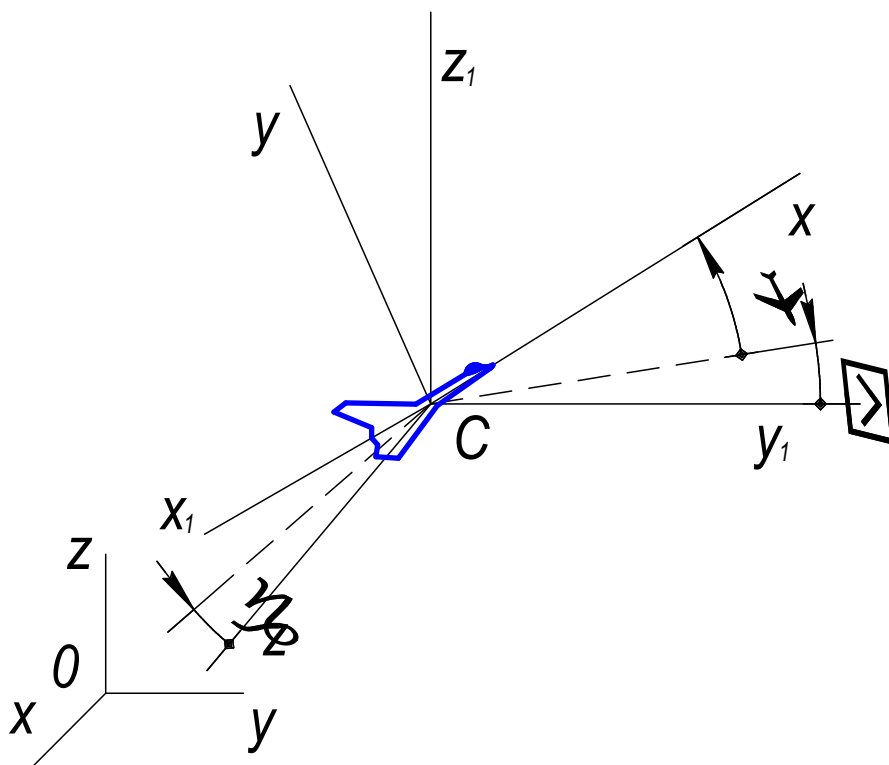


Рис. 2.4

Уведемо проміжну систему координат з початком у центрі мас літака, осі якої паралельні осям земної (стартової) системи координат $OXYZ$ і однаково з ними орієнтовані.

Незалежними параметрами, які визначають орієнтацію зв'язаної системи, а разом з нею і літака відносно Землі або проміжної системи, вибирають γ, θ, ψ , що описуються таким чином:

1) ψ – кут між додатним напрямком осі C_{y_1} та проекцією поздовжньої осі літака на місцеву горизонтальну площину $C_{x_1y_1}$, його називають кутом курсу;

2) θ – кут між додатним напрямком осі C_x та її проекцією на $C_{x_1y_1}$, який називають кутом тангажу; за ним визначають нахил поздовжньої осі

літака до площини горизонту;

3) γ – кут між віссю C_z та її проекцією на площину $C_{x_1y_1}$, що показує відхилення площини симетрії літака від місцевої вертикальної площини, яка проходить через C , його називають кутом крену.

Кутами ψ і θ задають орієнтацію тіла, можна також навести й способи опису руху цього тіла та його точок.

Якщо відомо закон руху деякої точки O тіла $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t)$ і закон змінення з часом його орієнтації $\vec{e}_k = \vec{e}_k(t)$, $k = \overline{1,3}$ або $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$, то кажуть, що рух тіла задано рівняннями у векторній формі

$$\vec{r}_0 = \vec{r}_0(t), \vec{e}_k = \vec{e}_k(t), k = \overline{1,3} \quad (2.8)$$

або в скалярній формі

$$\begin{aligned} x_{01} &= x_{01}(t), x_{02} = x_{02}(t), x_{03} = x_{03}(t), \\ \varphi &= \varphi(t), \psi = \psi(t), \theta = \theta(t), \end{aligned} \quad (2.9)$$

де x_{01}, x_{02}, x_{03} – координати довільної точки O (далі – полюса) тіла, а φ, ψ, θ – деяка система кутів Ейлера.

Як і в кінематиці точки, припускається, що всі функції часу в рівняннях руху є однозначними, неперервними і принаймні двічі диференційованими.

Рівняння руху точки тіла відповідно до (2.3) мають вигляд

$$\vec{x}_{is} = \vec{x}_{0s} + \sum_{k=1}^3 \xi_{ik} \alpha_{ks}, s = \overline{1,3}. \quad (2.10)$$

Сукупність рівнянь (2.9) і (2.10) дає змогу розв'язати задачу кінематики вільного твердого тіла: перші три рівняння цілком характеризують рух тіла в цілому, а рівняння (2.10) дають змогу знайти траєкторії, швидкості та прискорення усіх точок тіла.

2.3. Вираження напрямних косинусів зв'язаних осей через кути Ейлера

Напрямні косинуси α_{ks} осей координатної системи, яка жорстко зв'язана з тілом, можна записати у формі

$$A = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix},$$

що є матрицею перетворення координат. Кожний елемент цієї матриці – це функція кутів Ейлера φ, ψ, θ . Для знаходження вигляду цих функцій подамо перехід від системи $Oy_1y_2y_3$ (див. рис. 2.2) до системи $O\xi_1\xi_2\xi_3$ як сукупність трьох послідовних поворотів (рис. 2.5).

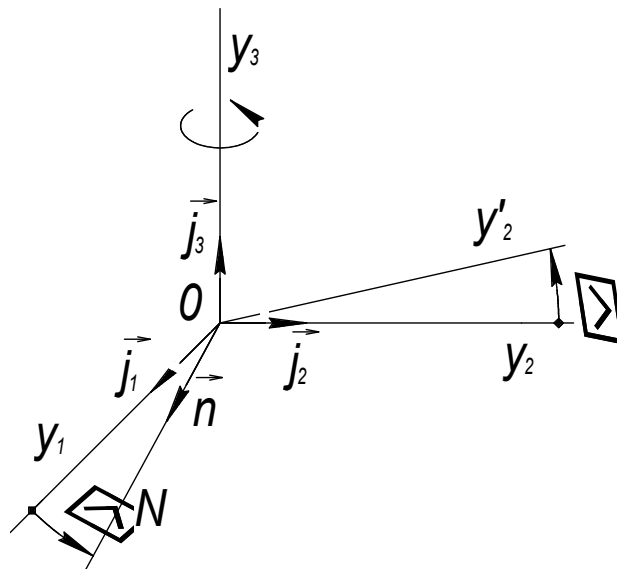


Рис. 2.5

Перший поворот здійснимо у додатному напрямку навколо осі Oy_3 на кут ψ , тоді система координат $Oy_1y_2y_3$ перейде в ONy'_2y_3 . Цим переходом буде задано лінію вузлів ON . Матриця такого перетворення, елементами якої є напрямні косинуси нових осей відносно попередніх, має вигляд

$$A_\psi = \begin{pmatrix} \vec{j}_1 & \vec{j}_2 & \vec{j}_3 \\ n & \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ \vec{j}_2 - \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ \vec{j}_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Другий поворот виконаємо навколо лінії вузлів ON на кут θ у додатному напрямку (проти годинникової стрілки). Такий поворот приведе до системи $ONy''_2\xi_3$, тобто визначиться напрямок осі $O\xi_3$ зв'язаної системи

координат. Матриця такого повороту (напрямні кути між осями $ONy_2''\xi_3$ і $ONy_2'y_3$ зображено на рис. 2.6) набуває вигляду

$$A_\theta = \begin{vmatrix} \vec{n} & \vec{j}_2' & \vec{j}_3 \\ \vec{n} & 1 & 0 & 0 \\ \vec{j}_2'' & 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ \vec{e}_3 & 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{vmatrix} \quad (2.13)$$

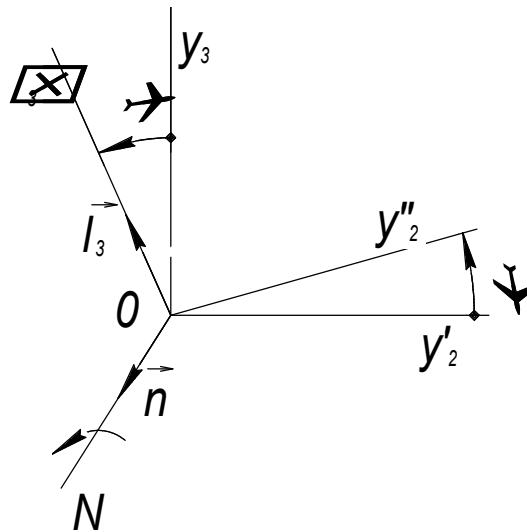


Рис. 2.6

Останній поворот на кут φ навколо осі $O\xi_3$ сумістить Oy_2'' з $O\xi_2$, а ON – з $O\xi_1$. Таким чином, тригранник $Oy_1y_2y_3$ суміститься з $O\xi_1\xi_2\xi_3$.

Згідно з рис. 2.7 матрицю останнього повороту запишемо у вигляді

$$\mathbf{A}_\varphi = \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{n}} & \hat{\mathbf{j}}_2'' & \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_1 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \mathbf{e}_2 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \mathbf{e}_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

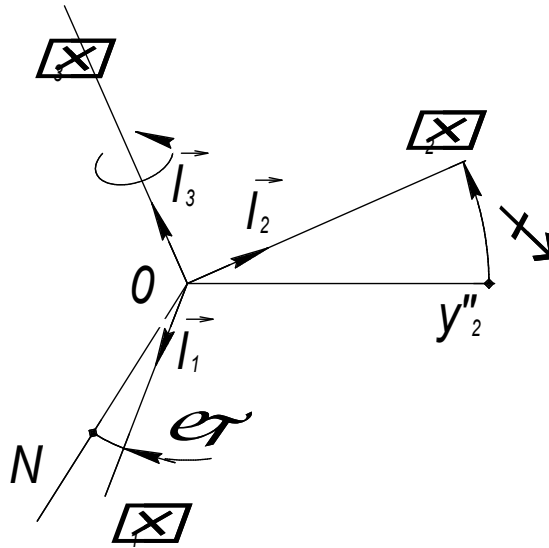


Рис. 2.7

Матриця переходу від тригранника $O_{y_1 y_2 y_3}$ до $O_{\xi_1 \xi_2 \xi_3}$ є добутком матриць трьох послідовних поворотів, розглянутих вище:

$$A = A_{\varphi} A_{\theta} A_{\psi}. \quad (2.15)$$

Помноживши ці матриці, дістанемо

$$A = \begin{matrix} & \vec{j}_1 & \vec{j}_2 & \vec{j}_3 \\ \begin{matrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{matrix} & \left\| \begin{array}{ccc} \cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi \cos \theta & \cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi \cos \theta & \sin \varphi \sin \theta \\ -\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi \cos \theta & -\sin \varphi \sin \psi + \cos \varphi \cos \psi \cos \theta & \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \theta \sin \psi & -\sin \theta \cos \psi & \cos \theta \end{array} \right\| \end{matrix}.$$

Очевидно, що добуток $A_{\psi} A_{\theta} A_{\varphi}$ дасть матрицю A^T , транспоновану до матриці A , тобто матрицю, одержану з A шляхом заміни рядків стовпцями.

Аналогічно можна знайти матрицю косинусів кутів між осями зв'язаної системи координат $C_{x_1 y_1 z_1}$ і через літакові кути:

$$A = \begin{matrix} & \vec{i}_1 & \vec{j}_1 & \vec{k}_1 \\ \begin{matrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{matrix} & \left\| \begin{array}{ccc} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \cos \theta \cos \psi & -\cos \theta \sin \psi \\ \sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \theta \cos \gamma & \cos \theta \cos \gamma & \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \theta \cos \gamma \\ \sin \psi \cos \gamma + \cos \psi \sin \theta \sin \gamma & -\cos \theta \sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \theta \sin \gamma \end{array} \right\| \end{matrix}.$$

2.4. Розподіл швидкостей точок вільного твердого тіла. Поняття кутової швидкості й кутового прискорення

Рух кожної точки тіла характеризується її швидкістю й прискоренням: сукупність цих векторів, побудованих в кожній точці тіла, дає так званий розподіл швидкостей і прискорень точок тіла (поле швидкостей та прискорень).

Швидкості точок тіла можна визначити шляхом диференціюванням за часом співвідношення (2.1):

$$\frac{d\mathbf{r}_m}{dt} = \mathbf{V}_m = \frac{d\mathbf{r}_0}{dt} + \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{V}_0 + \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (2.16)$$

Безпосередньо обчислення похідної $d\mathbf{p}/dt$ важко виконати, тому що в зображенні вектора

$$\mathbf{p} = \sum_{k=1}^3 \xi_{mk} \mathbf{e}_k \quad (2.17)$$

для спостерігача, який виконує диференціювання, вектори $\mathbf{e}_k$ є змінними. Оскільки модулі всіх векторів $\mathbf{e}_k$ залишаються незмінними, а змінюються протягом часу їхні напрямки разом зі зміненням орієнтації тіла, то можна вважати, що

$$\mathbf{e}_k = \mathbf{e}_k(\varphi, \psi, \theta), \quad k = \overline{1,3} \quad (2.18)$$

Згідно з цим

$$\dot{\mathbf{e}}_k = \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \varphi} \dot{\varphi} + \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \psi} \dot{\psi} + \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \theta} \dot{\theta}. \quad (2.19)$$

Безпосередня перевірка свідчить, що

$$\frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_k, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \psi} = \mathbf{j}_3 \times \mathbf{e}_k, \quad \frac{\partial \mathbf{e}_k}{\partial \theta} = \mathbf{n} \times \mathbf{e}_k. \quad (2.20)$$

Подивимося на поведження векторів $\mathbf{e}_k$ при змінненні тільки одного з кутів Ейлера, наприклад ψ . Оскільки кут ψ задає напрямок лінії вузлів ON на площині y_1Oy_2 (рис. 2.6), то кінець кожного вектора $\mathbf{e}_k$ буде описувати коло радіусом $\bar{R} = |\mathbf{e}_k| \sin \alpha_k = \sin \alpha_k$ з центром на осі Oy_3 (α_k – кути, які

утворюють вектори $\vec{e}_k$ з віссю Oy_3).

З'ясуємо, яким є збільшення вектора $\vec{e}_k$ при зміні кута ψ на величину $\Delta\psi$ (див. рис. 2.8). З рисунка видно, що вектор $\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial \psi} = \lim_{\Delta\psi \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}_k}{\Delta \psi}$ має напрямок, який є перпендикулярним до площини, де лежать вектори $\vec{e}_k$ і $\vec{j}_3$, і утворює з цими векторами праву трійку. Модуль цього вектора

$$\left| \lim_{\Delta\psi \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{e}_k}{\Delta \psi} \right| = \left| \lim_{\Delta\psi \rightarrow 0} \left(\frac{2R \sin \frac{\Delta\psi}{2}}{\Delta\psi} \right) \right| = |\sin \alpha_k|.$$

З іншого боку, із співвідношення $\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial \psi} = \vec{j}_3 \times \vec{e}_k$ випливає, що вектор $\frac{\partial \vec{e}_k}{\partial \psi}$ утворює прямий кут з площиною співмножників $\vec{j}_3$ і $\vec{e}_k$, а всі три вектори утворюють праву трійку. Крім того,

$$\left| \frac{\partial \vec{e}_k}{\partial \psi} \right| = |\vec{j}_3 \times \vec{e}_k| = |\vec{j}_3| |\vec{e}_k| \sin(\hat{\vec{j}_3}, \vec{e}_k) = |\sin \alpha_k|.$$

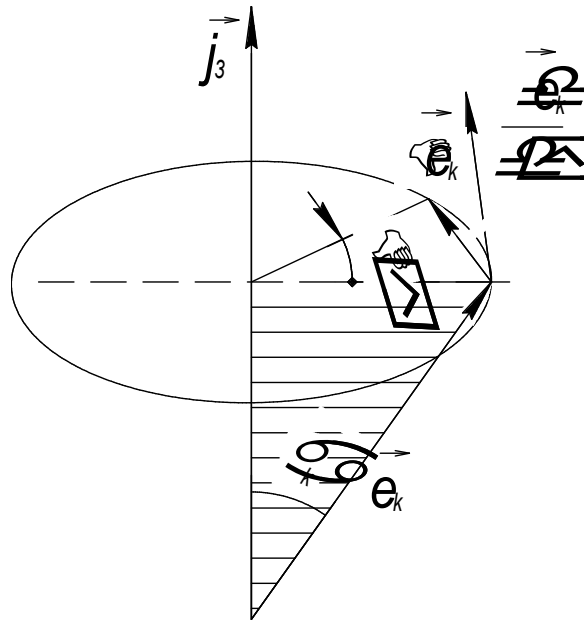


Рис. 2.8

Це, нарешті, і доводить правильність другого із співвідношень (2.20). Аналогічно можна довести і два інші співвідношення. Таким чином, з виразу (2.19) випливає, що

$$\dot{\vec{e}}_k = (\phi \vec{e}_3 + \psi \vec{j}_3 + \theta \vec{n}) \times \vec{e}_k. \quad (2.21)$$

Позначивши

$$(\phi \vec{e}_3 + \psi \vec{j}_3 + \theta \vec{n}) = \vec{\omega}, \quad (2.22)$$

назвемо вектор $\vec{\omega}$ кутовою швидкістю тіла, оскільки він характеризує швидкість змінення орієнтації тіла протягом часу, а сама орієнтація задається кутами Ейлера.

Враховуючи (2.22), співвідношення (2.21) можна записати у вигляді

$$\dot{\vec{e}}_k = \vec{\omega} \times \vec{e}_k, \quad k = \overline{1,3}. \quad (2.23)$$

Ці співвідношення мають назву формул Пуассона.

Унаслідок цього приходимо до такого зображення похідної $d\vec{p}/dt$:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^3 \xi_k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^3 \xi_k \dot{\vec{e}}_k = \sum_{k=1}^3 \xi_k (\vec{\omega} \times \vec{e}_k) = \vec{\omega} \times \sum_{k=1}^3 \xi_k \vec{e}_k = \vec{\omega} \times \vec{p},$$

або

$$\dot{\vec{p}} = \vec{\omega} \times \vec{p}. \quad (2.24)$$

Для швидкості довільної точки М тіла маємо на основі (2.16)

$$\vec{V}_M = \vec{V}_0 + \vec{\omega} \times \vec{p} = \vec{V}_0 + \vec{V}_{M0}, \quad (2.25)$$

де

$$\vec{V}_{M0} \equiv \vec{\omega} \times \vec{p} = \vec{\omega} \times \overline{OM}. \quad (2.26)$$

Співвідношення (2.25), яке має назву формули розподілу швидкостей точок вільного твердого тіла, відображає залежність швидкостей від положення точки на тілі ($\vec{p}$) і двох векторів характеристик руху тіла як цілого – швидкості $\vec{V}_0$ довільно вибраного полюса 0 й кутової швидкості $\vec{\omega}$.

З (2.26) випливає, що вектор $\vec{V}_{M0}$ напрямлений під прямим кутом до площини, де розташовано вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{p}$, і утворює з ними праву трійку (див. рис. 2.8). Модуль цього вектора

$$V_{MO} \equiv \omega \rho \sin(\hat{\omega}, \vec{\rho}) = \omega h_M, \quad (2.27)$$

де h_M – найменша відстань від точки M до напрямку вектора, який проходить через точку O .

Треба зазначити, що швидкості всіх точок, розташованих на лінії дії вектора $\vec{\omega}$ відносно полюса O , дорівнюють нулю, тому що напрямки векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\rho}$ у цьому випадку збігаються. У зв'язку з цим швидкість V_{MO} можна трактувати як швидкість при миттєвому обертанні тіла навколо осі, яка суміщається з напрямком вектора $\vec{\omega}$.

Вектор $\vec{\omega}$ можна вважати мірою швидкості змінення орієнтації тіла лише у тому випадку, коли буде доведено, що він не залежить від вибору полюса O і системи відліку, зв'язаної з тілом.

Для того щоб це довести, скористаємося цілком зрозумілим висновком із формул Пуассона: для довільного вектора $\vec{a}$, зв'язаного з твердим тілом, має місце співвідношення

$$\dot{\vec{a}} = \vec{\omega} \times \vec{a}. \quad (2.28)$$

Дійсно, $\vec{a} = a_{\xi_1} \vec{e}_1 + a_{\xi_2} \vec{e}_2 + a_{\xi_3} \vec{e}_3$, але проекції a_{ξ_k} не залежать від змінення часу, тому $\dot{\vec{a}} = \sum_{k=1}^3 a_{\xi_k} \dot{\vec{e}}_k = \sum_{k=1}^3 a_{\xi_k} ((\vec{\omega} \times \vec{e}_k)) = \vec{\omega} \times \vec{a}$, що й свідчить про правильність співвідношення (2.28).

Припустимо тепер, що нарівні із системою відліку $O\xi_1\xi_2\xi_3$ з ортами $\vec{e}_k$, $k=1,3$, існує система $O\xi'_1\xi'_2\xi'_3$, що жорстко зв'язана з тілом, ортами якої є $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$.

Оскільки $\dot{\vec{a}} = \vec{\omega} \times \vec{a}$ і $\dot{\vec{a}} = \vec{\omega}' \times \vec{a}$, то маємо $0 = (\vec{\omega} - \vec{\omega}') \times \vec{a}$, звідки у зв'язку з довільністю вибору вектора $\vec{a}$ випливає, що $(\vec{\omega} - \vec{\omega}') = 0$, $\vec{\omega} = \vec{\omega}'$.

Таким чином, вектор кутової швидкості $\vec{\omega}$ не залежить від способу задання зв'язаної з тілом системи відліку, а тому його можна взяти як міру швидкості змінення з часом орієнтації тіла в просторі.

Залежно від руху тіла змінюються модуль і напрямок вектора його кутової швидкості. Характеризуються ці зміни вектором

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \dot{\vec{\omega}}, \quad (2.29)$$

який має назву вектора кутового прискорення тіла.

Якщо вектор $\vec{\omega}$ задається через проекції на осі нерухомої системи відліку, то він має вигляд $\vec{\omega} = \sum_{k=1}^3 \omega_{x_i} \vec{j}_i$. Оскільки вектори $\vec{j}_i$ є незмінними, то

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \sum_{k=1}^3 \dot{\omega}_{x_i} \vec{j}_i = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{x_i} \vec{j}_i \quad (2.30)$$

або

$$\varepsilon_{x_i} = \dot{\omega}_{x_i}, \quad i = \overline{1,3}. \quad (2.31)$$

Коли $\vec{\omega} = \sum_{k=1}^3 \omega_{\xi_k} \vec{e}_k$, тобто його задано своїми проекціями на осі зв'язаної з тілом системи відліку, тоді

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon} &= \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^3 \omega_{\xi_k} \vec{e}_k = \sum_{k=1}^3 \dot{\omega}_{\xi_k} \vec{e}_k + \sum_{k=1}^3 \omega_{\xi_k} \dot{\vec{e}}_k = \\ &= \sum_{k=1}^3 \dot{\omega}_{\xi_k} \vec{e}_k + \sum_{k=1}^3 \omega_{\xi_k} (\vec{\omega} \times \vec{e}_k) = \sum_{k=1}^3 \dot{\omega}_{\xi_k} \vec{e}_k + \sum_{k=1}^3 (\vec{\omega} \times \omega_{\xi_k} \vec{e}_k) = \\ &= \sum_{k=1}^3 \dot{\omega}_{\xi_k} \vec{e}_k + (\vec{\omega} \times \vec{\omega}) = \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{\xi_k} \vec{e}_k. \end{aligned}$$

Таким чином,

$$\varepsilon_{\xi_k} = \dot{\omega}_{\xi_k}, \quad (2.32)$$

тобто проекції кутового прискорення на нерухомі та зв'язані з тілом осі обчислюються як похідні відповідних проекцій кутової швидкості тіла.

2.5. Вираження кутової швидкості через кути Ейлера та її похідні

Щоб обчислити кутову швидкість через кути Ейлера, необхідно сумістити координатні осі $Oy_1y_2y_3$ з осями $O\xi_1\xi_2\xi_3$ шляхом трьох послідовних поворотів: навколо осі Oy_3 на кут ψ , навколо лінії вузлів ON на кут θ і навколо осі $O\xi_3$ на кут ϕ . Ці повороти здійснюються з кутовими швидкостями $\dot{\psi}$, $\dot{\theta}$ і $\dot{\phi}$ відповідно.

Кутова швидкість тіла, яке бере участь у трьох одночасних обертаннях, є геометричною сумою кутових швидкостей складових обертань. Запишемо це без доведення (рис. 2.5):

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \vec{j}_3 + \dot{\theta} \vec{n} + \dot{\phi} \vec{e}_3. \quad (2.33)$$

З допомогою цієї формули знайдемо проекції вектора кутової швидкості на осі нерухомі $Ox_1x_2x_3$ та зв'язані з тілом $O\xi_1\xi_2\xi_3$ системи координат:

$$\begin{aligned}
\omega_{x1} &= \vec{\omega} \cdot \vec{j}_1 = \psi \vec{j}_3 \vec{j}_1 + \dot{\theta} \vec{n} \vec{j}_1 + \phi \vec{e}_3 \vec{j}_1; \\
\omega_{x2} &= \vec{\omega} \cdot \vec{j}_2 = \psi \vec{j}_3 \vec{j}_2 + \dot{\theta} \vec{n} \vec{j}_2 + \phi \vec{e}_3 \vec{j}_2; \\
\omega_{x3} &= \vec{\omega} \cdot \vec{j}_3 = \psi \vec{j}_3 \vec{j}_3 + \dot{\theta} \vec{n} \vec{j}_3 + \phi \vec{e}_3 \vec{j}_3.
\end{aligned}
\tag{2.34}$$

Аналогічний вигляд мають проекції на зв'язані з тілом осі:

$$\begin{aligned}
\omega_{\xi1} &= \vec{\omega} \cdot \vec{e}_1 = \psi \vec{j}_3 \vec{e}_1 + \dot{\theta} \vec{n} \vec{e}_1 + \phi \vec{e}_3 \vec{e}_1, \\
\omega_{\xi2} &= \vec{\omega} \cdot \vec{e}_2 = \psi \vec{j}_3 \vec{e}_2 + \dot{\theta} \vec{n} \vec{e}_2 + \phi \vec{e}_3 \vec{e}_2, \\
\omega_{\xi3} &= \vec{\omega} \cdot \vec{e}_3 = \psi \vec{j}_3 \vec{e}_3 + \dot{\theta} \vec{n} \vec{e}_3 + \phi \vec{e}_3 \vec{e}_3.
\end{aligned}
\tag{2.35}$$

Використовуючи у цих співвідношеннях вирази для косинусів напрямних кутів зв'язаної системи координат, запишемо кінематичні формули Ейлера як залежності проекцій кутової швидкості тіла на нерухомі та зв'язані з тілом осі від кутів Ейлера і їх похідних:

$$\begin{aligned}
\omega_{x1} &= \phi \sin \theta \sin \psi + \dot{\theta} \cos \psi, \\
\omega_{x2} &= -\phi \sin \theta \cos \psi + \dot{\theta} \sin \psi, \\
\omega_{x3} &= \phi \cos \theta + \dot{\psi},
\end{aligned}
\tag{2.36}$$

$$\begin{aligned}
\omega_{\xi1} &= \dot{\theta} \cos \varphi + \psi \sin \theta \sin \varphi, \\
\omega_{\xi2} &= -\dot{\theta} \sin \varphi + \psi \sin \theta \cos \varphi, \\
\omega_{\xi3} &= \dot{\phi} + \psi \cos \theta.
\end{aligned}
\tag{2.37}$$

З цих рівнянь випливає вираз для модуля кутової швидкості:

$$\omega^2 = \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2 + \dot{\psi}^2 + 2\dot{\phi}\dot{\psi}\cos\theta.
\tag{2.38}$$

2.6. Деякі властивості швидкостей точок твердого тіла

Використовуючи співвідношення (2.25), сформулюємо й доведемо **теорему**, висновки з яких можуть бути корисними при розв'язанні конкретних задач.

Теорема про проекції швидкостей точок твердого тіла. Для рухомого твердого тіла проекції швидкостей двох будь-яких його точок на пряму, яка їх з'єднує, є однаковими.

Доведення. Помножимо (2.25) скалярно на вектор $\vec{r}$, який з'єднує точки О та М. Тоді $\vec{V}_M \cdot \vec{r} = \vec{V}_O \cdot \vec{r} + (\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{r}$, де $(\vec{\omega} \times \vec{r}) \cdot \vec{r} = 0$, що впливає з властивостей змішаного добутку трьох векторів.

Таким чином, $\vec{V}_M \cdot \vec{\rho} = \vec{V}_O \cdot \vec{\rho}$, але $\vec{\rho} = \vec{e}\rho$, де $\vec{e}$ – одиничний вектор напрямку ОМ, і тому $\vec{V}_M \cdot \vec{e} = \vec{V}_O \cdot \vec{e}$, що й доводить теорему, бо $\vec{V}_M \cdot \vec{e} = \rho_{OM} \vec{V}_M$, $\vec{V}_O \cdot \vec{e} = \rho_{OM} \vec{V}_O$.

Інший спосіб доведення цього факту базується на властивостях твердого тіла як фізичного об'єкта. Розкладемо вектори $\vec{V}_M$ і $\vec{V}_O$ кожний на дві складові. Одну складову кожного з цих векторів направимо вздовж відрізка ОМ, а другу – перпендикулярно до цього напрямку (рис. 2.9). Умовою твердості тіла є незмінність відстані між точками М і О, а це можливо лише за умови виконання рівності $\vec{V}_{M1} = \vec{V}_{O1}$, що й доводить теорему.

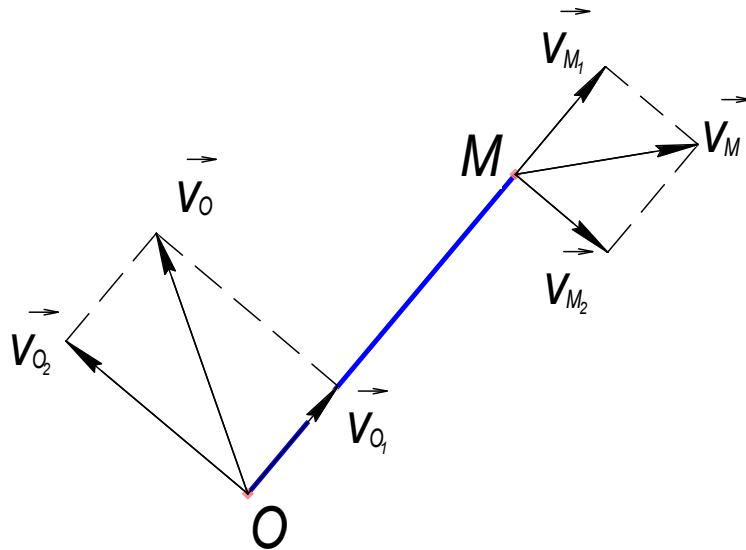


Рис. 2.9

Теорема про швидкості точок відрізка у твердому тілі. Кінці векторів швидкостей точок відрізка розташовані на одній прямій і поділяють її так, як їхні початки – сам відрізок (рис. 2.10).

Доведення. Нехай точка М відрізка АВ поділяє його у відношенні $\lambda = AM/MB$. Тоді її радіус-вектор

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \overline{AM} = \vec{r}_A + \lambda(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{r}_A(1 - \lambda) + \vec{r}_B\lambda. \quad (2.39)$$

Обчислюючи похідну за часом від обох частин (2.39), отримаємо

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \frac{d}{dt} \overline{AM} = \vec{V}_A + \lambda(\vec{V}_B - \vec{V}_A) = \vec{V}_A(1 - \lambda) + \vec{V}_B\lambda. \quad (2.40)$$

Змінення параметра λ відповідає перегляду точок відрізка АВ. Тому з формули (2.40) випливає, що кінці векторів швидкостей точок цього відрізка розташовані на одній прямій, яку ділять в тому ж відношенні λ , що

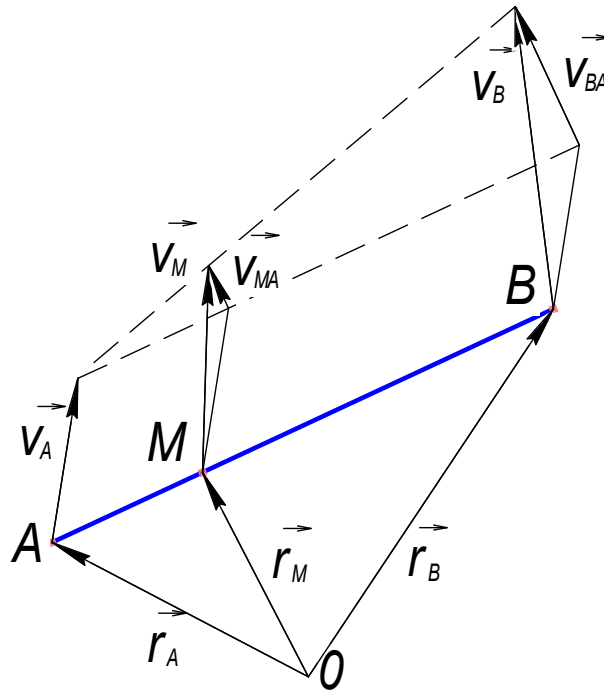


Рис 2.10

й точки A, M і B відрізок AB.

Теорема про напрямки однакових швидкостей. Швидкості точок, розташованих на прямій, яка є паралельною вектору кутової швидкості тіла, для певного моменту часу є однаковими.

Доведення цієї теореми випливає безпосередньо з аналізу співвідношення (2.25). Якщо $\overline{OM} \parallel \vec{\omega}$, то $(\vec{\omega} \times \overline{OM}) = 0$ і тоді $\vec{v}_M = \vec{v}_O$, що й доводить теорему.

2.7. Розподіл прискорень точок твердого тіла

Диференціюючи за часом швидкість (2.25) довільної точки M твердого тіла, одержимо формулу прискорень точок твердого тіла:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_O + (\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) + \vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = \vec{W}_O + \vec{W}_{MO}^{oo} + \vec{W}_{MO}^{oc}. \quad (2.41)$$

Вектор

$$\vec{W}_{MO}^{oo} = (\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}) = (\vec{\varepsilon} \times \overline{OM}) \quad (2.42)$$

має назву вектора обертального прискорення точки M тіла відносно полюса O і має напрямок, перпендикулярний до площини векторів $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\rho}$, утворюючи з ними праву трійку (рис. 2.11). Модуль цього вектора

$W_{MO}^{ob} = \varepsilon \rho \cos(\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}) = \varepsilon d_M$, де d_M – найкоротша відстань від точки M тіла до напрямку вектора кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$.

Останній доданок у (2.41) називають доосьовим прискоренням точки M відносно полюса O :

$$\vec{W}_{MO}^{oc} = \vec{\omega}(\vec{\omega} \times \vec{\rho}) = (\vec{\omega} \times \vec{V}_{MO}). \quad (2.44)$$

Оскільки $\vec{V}_{MO} \perp \vec{\omega}$, то доосьове прискорення

$$W_{MO}^{oc} = \omega h_M^2, \quad (2.45)$$

а вектор $\vec{W}_{MO}^{oc}$ перетинає напрямок вектора $\vec{\omega}$ під прямим кутом. Вектор повного прискорення точки M можна подати у вигляді суми прискорень полюса O тіла і точки M відносно полюса:

$$\vec{W}_M = \vec{W}_O + \vec{W}_{MO}, \quad \vec{W}_{MO} = \vec{W}_{MO}^{ob} + \vec{W}_{MO}^{oc}, \quad (2.46)$$

де складова $\vec{W}_{MO}$ зумовлена зміненням орієнтації тіла у просторі.

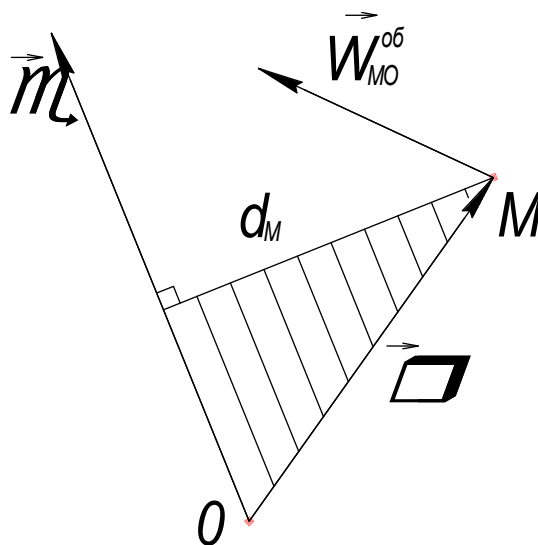


Рис. 2.11

Через велику кількість векторів у виразі прискорення довільної точки твердого тіла (2.46) розподіл прискорень точок тіла є більш складним, ніж розподіл швидкостей. У зв'язку з цим використання співвідношення (2.41) при геометричному обчисленні прискорень точок тіла потребує проєкціювання його на деякі осі, тобто застосування аналітичного методу розв'язання задачі, що розглядається.

Як і при дослідженні поля швидкостей точок тіла, можна

стверджувати, що поле прискорень точок вільного твердого тіла є результатом накладання поля прискорень, яке відповідає поступальному руху з прискоренням $\vec{W}_O$ полюса O на поле прискорень, що відповідає сферичному руху з полюсом у точці O і кутовими $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$.

3. НЕВІЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

У попередньому розділі було з'ясовано, що для опису руху вільного твердого тіла достатньо шести незалежних параметрів. Такими параметрами можуть бути, наприклад, координати довільної точки тіла і який-небудь набір кутів Ейлера, що характеризує орієнтацію тіла у просторі. Відомо, що кількість цих незалежних параметрів визначає число ступенів свободи твердого тіла. Отже, вільне тверде тіло має шість ступенів свободи.

Розглянемо окремі види руху твердого тіла, головною особливістю яких є те, що тіло у кожному з цих рухів матиме число ступенів свободи менше шести.

Зменшення числа ступенів свободи пояснюється накладенням на рух тіла певних обмежень геометричного характеру. Такі наперед задані обмеження, накладені на рух тіла, називають в'язями. Розглянемо лише ті в'язі, що накладають безпосередні обмеження на координати точок тіла і які можна подати у вигляді рівнянь $f_k(t, x_i, y_i, z_i) = 0$, $k = \overline{1, m}$, $i = \overline{1, k}$. Ці рівняння називають рівняннями голономних в'язей. Якщо в рівняння в'язі не входить час, то в'язь називають стаціонарною, за наявності очевидної залежності від часу – нестаціонарною.

Вище зазначалося, що числом ступенів свободи є кількість незалежних один від одного параметрів, необхідних для опису руху тіла. З допомогою рівнянь в'язей можна виразити яку-небудь одну змінну через інші, тому m рівнянь в'язей дають змогу виразити m незалежних змінних. Як видно з розд. 2, координати всіх точок невіЛЬНОГО тіла можна виразити шістьма незалежними параметрами, а m в'язей, які описуються рівняннями $f_k(x_{1A}, x_{2A}, x_{3A}, \varphi, \psi, \theta) = 0$, $k = \overline{1, m}$, зменшують цю кількість на кількість рівнянь в'язей. Отже, число ступенів свободи невіЛЬНОГО твердого тіла визначається формулою $S = 6 - m$.

На основі введених понять в'язей і числа ступенів свободи твердого тіла можна з рівнянь руху вільного твердого тіла як окремі випадки одержати рівняння руху невіЛЬНОГО тіла й визначити особливості такого руху.

3.1. Поступальний рух твердого тіла

Поступальним називають такий рух твердого тіла, коли його орієнтація у просторі залишається незмінною.

З цього означення випливає, що незалежно від того, яким чином здійснюються в'язі, які забезпечують поступальний рух, їхній ефект аналітично можна виразити рівняннями

$$\varphi = \text{const}, \psi = \text{const}, \theta = \text{const}, \quad (3.1)$$

або, якщо відповідно вибрати нерухому й зв'язану системи координат,

$$\varphi \equiv 0, \psi \equiv 0, \theta \equiv 0.$$

Отже, положення і рух тіла в цьому випадку цілком задаються трьома незалежними параметрами – координатами деякої точки цього тіла, яка має назву полюса. Це означає, що при поступальному русі максимальне число ступенів свободи твердого тіла дорівнює трьом.

З рівнянь руху вільного твердого тіла (2.9) випливає, що поступальний рух цілком можна описати рівняннями

$$\vec{r}_A = \vec{r}_A(t), \quad x_{iA} = x_{iA}(t), \quad i = \overline{1,3}, \quad (3.2)$$

а рівняння руху довільної точки такого тіла у векторній формі має вигляд

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho}_M, \quad (3.3)$$

де $\vec{\rho}_M = \text{const}$, тому що цей вектор з'єднує дві точки твердого тіла, яке не змінює своєї орієнтації.

З формули (3.3) видно, що траєкторії усіх точок твердого тіла, яке рухається поступально, є однаковими і їх можна сумістити паралельним переносом. Крім того, з умови $\vec{\rho}_M = \text{const}$ випливає, що при поступальному русі тіла будь-яка пряма у ньому залишається паралельною самій собі (це може бути означенням поступального руху).

Диференціюючи (3.3) послідовно двічі за часом, одержимо

$$\vec{V}_M = \dot{\vec{r}}_M = \dot{\vec{r}}_A = \vec{V}_A, \quad (3.4)$$

$$\vec{W}_M = \ddot{\vec{r}}_M = \ddot{\vec{r}}_A = \vec{W}_A, \quad (3.5)$$

звідки видно, що при поступальному русі твердого тіла швидкості усіх його точок для кожного моменту часу є геометрично однаковими. Те ж саме можна сказати про прискорення усіх точок твердого тіла.

Особливо зазначимо, що тільки при поступальному русі можна казати про лінійні швидкість і прискорення твердого тіла як єдиного цілого, у загальному випадку руху ці поняття є безглуздими.

3.2. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі

Якщо протягом усього часу руху дві точки тіла залишаються нерухомими, то рух тіла називають обертальним, а пряма, яка проходить через нерухомі точки, – віссю обертання тіла,

З метою більш раціонального опису такого руху сумістимо осі Ox_3 $O\xi_3$ нерухомої і зв'язаної систем координат з віссю обертання тіла. У цьому випадку $\vec{r}_A \equiv 0$ (початок відліку суміщено з нерухомою точкою на осі обертання, яку вибрано за полюс), $\theta \equiv 0$, а кути φ і ψ не визначено, тому що площини Ox_1x_2 і $O\xi_1\xi_2$ є суміщеними. Однак сума цих двох кутів дорівнює куту між осями Ox_1 і $O\xi_1$. При вивченні обертального руху ця сума, яку позначимо Φ і назовемо кутом повороту тіла (рис. 3.1), цілком характеризує обертальний рух, і тому рівність

$$\Phi = \Phi(t) \quad (3.6)$$

назовемо рівнянням обертального руху твердого тіла.

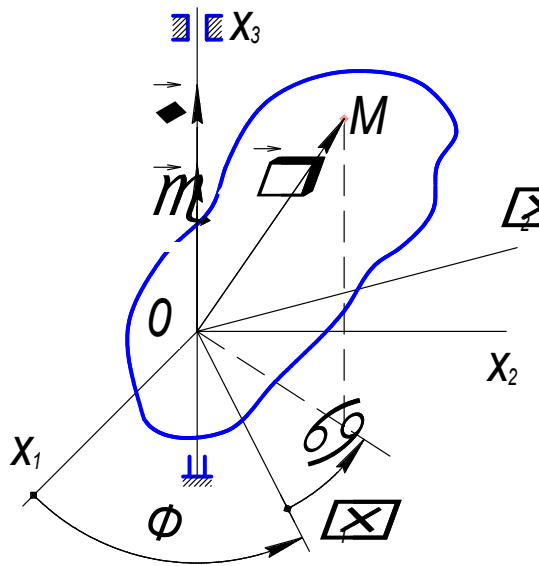


Рис. 3.1

Те, що обертальний рух можна описати заданням лише одного параметра, видно із розглянутого раніше: вільне тверде тіло має шість ступенів свободи; нерухомість осі при обертальному русі накладає на рух тіла обмеження, що відповідають рівнянням $\vec{r}_A \equiv 0$, $\theta \equiv 0$, $\Phi = \varphi + \psi$, які впливають з означення обертального руху. Число ступенів свободи обчислюється як різниця числа ступенів свободи вільного тіла і кількості рівнянь в'язей: $S = 6 - 5 = 1$.

Таким чином, тверде тіло при обертанні навколо нерухомої осі має

один ступінь свободи, і тому його рух може характеризуватися одним параметром.

Кутова швидкість тіла, що обертається, відповідно до формул (2,36), (2.37) є такою:

$$\omega_{x1} = 0, \omega_{x2} = 0, \omega_{x3} = \dot{\Phi}, \quad (3.8)$$

звідки

$$\vec{\omega} = \dot{\Phi} \vec{j}_3 = \dot{\Phi} \vec{e}_3. \quad (3.9)$$

Диференціюючи $\vec{\omega}$ за часом, одержимо для вектора кутового прискорення

$$\vec{\varepsilon} = \ddot{\Phi} \vec{j}_3 = \ddot{\Phi} \vec{e}_3. \quad (3.10)$$

З цих виразів випливає, що при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі вектори кутової швидкості й кутового прискорення тіла мають напрямки вздовж цієї осі, а їх проекції на неї відповідно такі:

$$\omega_{x3} = \dot{\Phi} = \omega_{\xi3}, \varepsilon_{x3} = \ddot{\Phi} = \varepsilon_{\xi3}. \quad (3.11)$$

Іншими словами, напрямок вектора кутової швидкості вздовж осі обертання такий, що з його кінця можна бачити обертання тіла проти руху стрілки годинника (див. рис. 3.1).

Характер обертального руху твердого тіла (аналогічно до характеру руху точки) будемо визначати залежно від знака добутку $\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\omega} = \ddot{\Phi} \dot{\Phi}$. Проаналізувавши цей добуток, можна побачити, що обертання є прискореним, якщо вектори $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\omega}$ мають однакові напрямки, і сповільненим, коли їхні напрямки є протилежними. При рівномірному русі модуль кутової швидкості є сталим.

Закон руху будь-якої точки тіла, що обертається, легко одержати або із загальних співвідношень (2.1), (2.16), або геометричним способом (рис. 3.2):

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \cos \Phi - \xi_2 \sin \Phi = h \cos(\alpha + \Phi); \\ x_2 &= \xi_1 \sin \Phi + \xi_2 \cos \Phi = h \sin(\alpha + \Phi); \\ x_3 &= \xi_3 = \text{const} \end{aligned} \quad (3.12)$$

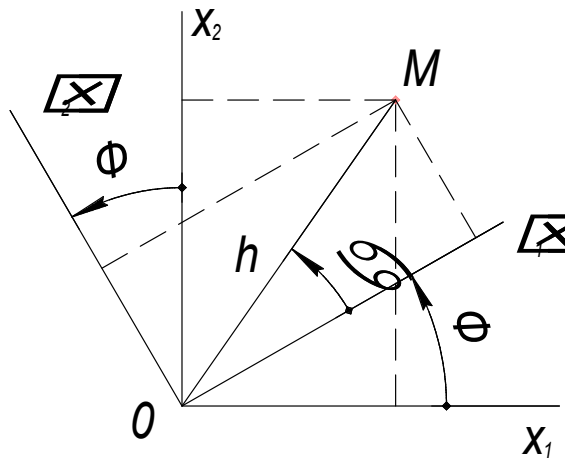


Рис. 3.2

У цих формулах h – відстань від точки до осі обертання, α – кут, що визначає разом з h положення цієї точки у площині, яка є перпендикулярною до осі обертання. Траєкторія будь-якої точки – це коло радіусом h з центром на осі обертання, яке лежить у площині, що є перпендикулярною до осі обертання.

Швидкість і прискорення точки можна одержати диференціюванням (3.12):

$$\begin{aligned} V_{x_1} &= -h\dot{\Phi} \sin(\alpha + \Phi) = -x_2\dot{\Phi}, \\ V_{x_2} &= h\dot{\Phi} \cos(\alpha + \Phi) = x_1\dot{\Phi}, \quad V_{x_3} = 0; \end{aligned} \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} W_{x_1} &= -h\ddot{\Phi} \sin(\alpha + \Phi) - h\dot{\Phi}^2 \cos(\alpha + \Phi) = -x_2\ddot{\Phi} - x_1\dot{\Phi}^2, \\ W_{x_2} &= h\ddot{\Phi} \cos(\alpha + \Phi) - h\dot{\Phi}^2 \sin(\alpha + \Phi) = x_1\ddot{\Phi} - x_2\dot{\Phi}^2 \\ W_{x_3} &= 0. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Такі самі результати одержують із загальних співвідношень (2.39) і (2.41), де слід брати $\bar{V}_A = 0$, $\bar{W}_A = 0$:

$$\bar{V}_M = (\bar{\omega} \times \bar{\rho}); \quad (3.15)$$

$$\bar{W}_M = (\bar{\varepsilon} \times \bar{\rho}) + \bar{\omega}(\bar{\omega} \times \bar{\rho}) = \bar{W}_{MO}^{\text{об}} + \bar{W}_{MO}^{\text{ос}}. \quad (3.16)$$

Очевидно, що при обертальному русі твердого тіла швидкість кожної його точки лежить у площині, що є перпендикулярною до осі обертання, яка має цю точку. Напрямок швидкості точки є перпендикулярним до її радіуса обертання h . Обертальне прискорення точки збігається з дотичним, а доосьове – з нормальним її прискоренням. Величини швидкості й складових прискорення, а також модуль повного прискорення визначають за формулами

$$V_M = \omega h_M, \quad W_M^{ob} = \varepsilon h_M, \quad W_M^{oc} = \omega^2 h_M; \\ W_M = h_M \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad \operatorname{tg} \mu = \frac{W_M^{ob}}{W_M^{oc}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2} \quad (3.17)$$

Напрямки векторів швидкості й прискорення точки показано на рис. 3.3.

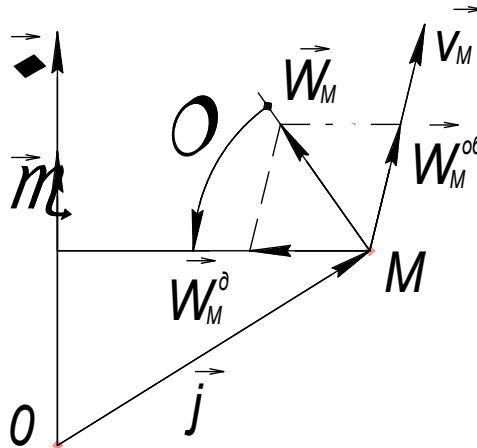


Рис. 3.3

Вектор доосьового прискорення під прямим кутом перетинає вісь обертання, а вектор обертального прискорення є перпендикулярним до площини векторів $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\rho}$, так само, як і вектор швидкості цієї точки. Напрямки векторів $\vec{V}$ і $\vec{W}^{ob}$ збігаються при прискореному обертанні тіла і є протилежними при сповільненому.

3.3. Плоскопаралельний рух тіла

Рух твердого тіла, коли відстань від його точки до деякої нерухомої площини протягом усього часу руху залишається незмінною, називають плоскопаралельним.

Такий вид руху викликає особливий інтерес, тому що він має місце при рухах різних машин та їхніх частин.

При плоскопаралельному русі у всіх точок тіла, розміщених на прямій, яка є перпендикулярною до площини руху, траєкторії, швидкості та прискорення – однакові. Це впливає з рівнянь руху вільної точки на такий прямій:

$$\vec{r}_M = \vec{r}_A + \vec{\rho}_M, \quad (3.18)$$

де $\vec{r}_A$ – радіус-вектор полюса A, який лежить на тій самій прямій,

$\vec{\rho}_M = \text{const}$ – радіус-вектор, що з'єднує полюс А з точкою М.

Отже, будь-яка площина, що є паралельною заданій нерухомій площині, відносно якої відбувається плоскопаралельний рух, має ті самі кінематичні характеристики руху, що й будь-яка інша зв'язана з тілом площина, що є паралельною до неї. У зв'язку з цим при дослідженні плоскопаралельного руху твердого тіла досить розглянути рух одного її плоского перерізу, який є паралельним до опорної нерухомої площини.

3.3.1. Аналітичний опис і дослідження плоскопаралельного руху

Одержимо рівняння руху плоского перерізу, для чого нерухому систему координат $Ox_1x_2x_3$ виберемо так, щоб площина Ox_1x_2 сумістилася з площиною руху. Рухому систему $A\xi_1\xi_2\xi_3$ візьмемо з початком у довільній точці А перерізу, а її осі $A\xi_1$, і $A\xi_2$ жорстко зв'яжемо з ним. Осі Ox_3 і $A\xi_3$ є паралельними одна одній і перпендикулярними до площини руху (рис. 3.4).

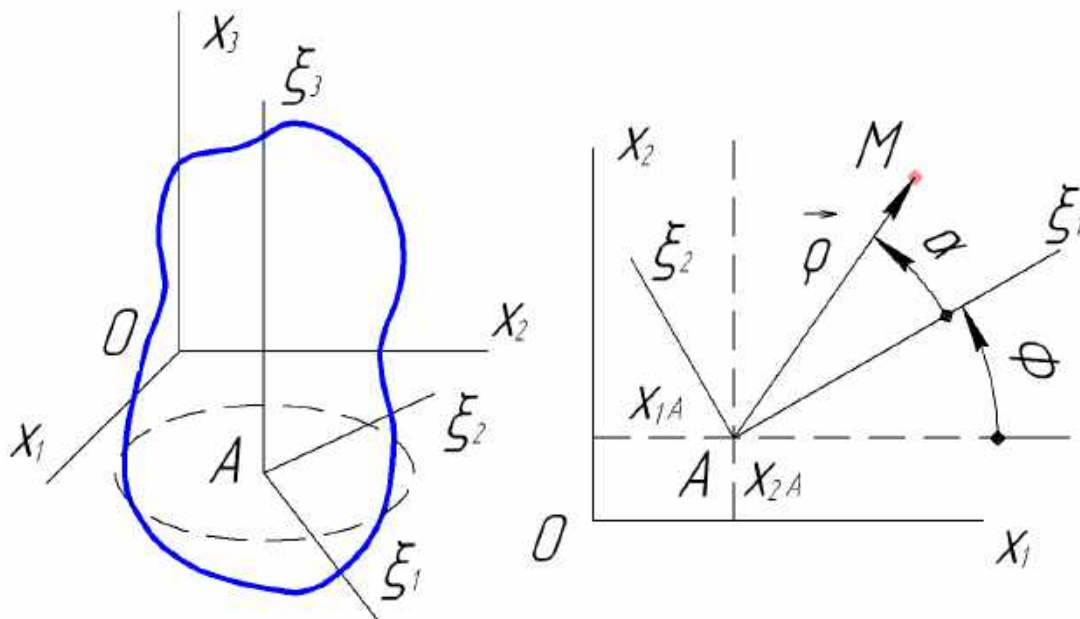


Рис. 3.4

При такому виборі рухомої і нерухомої систем відліку видно, що положення й рух плоского перерізу тіла цілком визначається координатами x_{1A} і x_{2A} полюса А, а також кутом Φ , що задає орієнтацію фігур відносно нерухомих осей:

$$x_{1A} = x_{1A}(t), \quad x_{2A} = x_{2A}(t), \quad \Phi = \Phi(t). \quad (3.19)$$

Закон руху довільної точки М цього перерізу має такий вигляд:

$$\begin{aligned}x_{1M} &= x_{1A} + AM \cos(\alpha + \Phi); \\x_{2M} &= x_{2A} + AM \sin(\alpha + \Phi); \\x_{3M} &= x_{3A} = \text{const}.\end{aligned}\tag{3.20}$$

Швидкість і прискорення цієї точки обчислюють звичайним диференціюванням за часом співвідношень (3.20). Очевидно, що вектори швидкості й прискорення точки М розташовані протягом усього часу руху в площині рухомої фігури.

Таким чином, рівняння плоскопаралельного руху тіла (3.19) у сукупності із законом руху (3.20) його довільної точки М повністю описують рухи тіла і всіх його точок.

Плоскопаралельний рух можна визначити з допомогою рівнянь, одержаних з виразів (2.9) і (2.10), якщо взяти $x_{O3} \equiv 0$, $\theta \equiv 0$, а суму кутів прецесії ψ і власного обертання φ позначити Φ . Це ще раз підтверджує те, що тверде тіло при плоскопаралельному русі має три ступені свободи.

3.3.2. Векторне дослідження плоскопаралельного руху твердого тіла

Якщо рух тіла задано не рівняннями (3.19), а яким-небудь іншим способом, наприклад, швидкістю й прискоренням полюса А, кутовою швидкістю й кутовим прискоренням тіла, то раціональніше використовувати для дослідження руху векторні методи, що ґрунтуються на раніше одержаних співвідношеннях

$$\vec{V}_M = \vec{V}_A + \vec{V}_{MA} = \vec{V}_A + (\vec{\omega} \times \overline{AM}),\tag{3.21}$$

$$\vec{W}_M = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA} = \vec{W}_A + \vec{W}_{MA}^{об} + \vec{W}_{MA}^{oc} = \vec{W}_A + (\vec{\varepsilon} \times \overline{AM}) + \vec{\omega}(\vec{\omega} \times \overline{AM})\tag{3.22}$$

і деяких нових поняттях, які наведено нижче.

Векторні рівності (3.21) і (3.22) еквівалентні чотирьом скалярним, які дістають проєціюванням векторних рівнянь на довільно вибрані осі, що лежать у площині руху. Ці чотири скалярні рівності можна розглядати як систему рівнянь для визначення будь-яких чотирьох величин (незалежних), що входять до їх складу. На цьому базується графоаналітичний (векторний) метод дослідження плоскопаралельного руху. Розглянемо задачі, які розв'язуються за цим методом.

1. Нехай у деякий момент часу є відомими вектори швидкості й прискорення полюса А тіла, що розглядається, а також його кутова швидкість і кутове прискорення в цей момент (при векторному методі дослідження руху орієнтацію векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ умовно позначають круговими стрілками). У цьому випадку додатним значенням ω_{x3} і ε_{x3} відповідає напрямок проти руху годинникової стрілки. Виберемо нерухомі осі

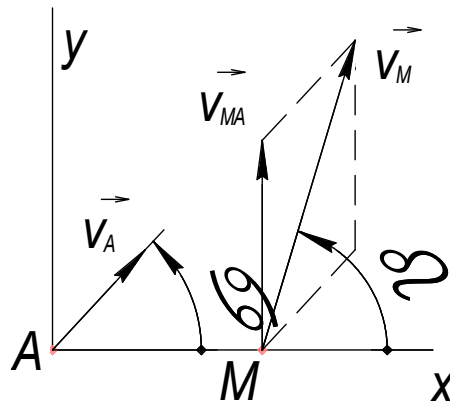
координат $Oxyz$ так, щоб осі Ox і Oy лежали у площині руху, а вісь Oz була перпендикулярною до неї і спрямована на читача. На ці осі (рис. 3.5) споектуємо векторні співвідношення (3.21) і (3.22):

$$V_{Mx} = V_M \cos \beta = V_A \cos \alpha, \quad (3.23)$$

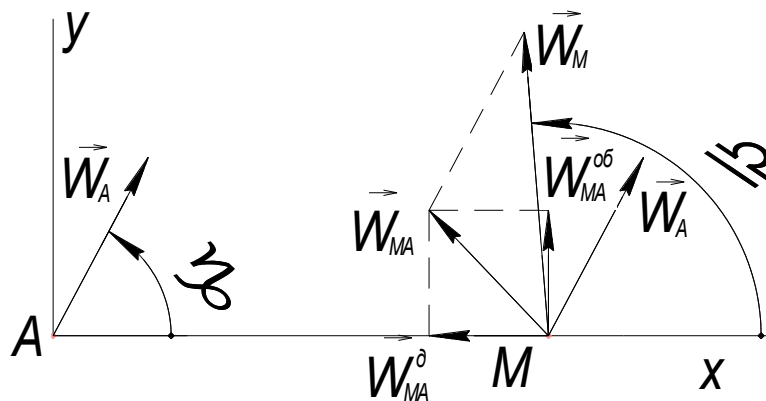
$$V_{My} = V_M \sin \beta = V_A \sin \alpha + |\omega_z| \cdot AM, \quad (3.24)$$

$$W_{Mx} = W \cos \delta = W_A \cos \gamma - \omega_z^2 \cdot AM, \quad (3.25)$$

$$W_{My} = W \sin \delta = W_A \sin \gamma + |\varepsilon_z| \cdot AM. \quad (3.26)$$



а



б

Рис.3.5

Оскільки величини, які належать до правих частин цих співвідношень, є заданими, то можна визначити проекції V_{Mx} , V_{My} , W_{Mx} , W_{My} швидкості й прискорення довільної точки M тіла, а потім – їхні модулі й напрямки:

$$V_M = \sqrt{V_{Mx}^2 + V_{My}^2}, \cos \beta = \frac{V_{Mx}}{V_M}; \quad (3.27)$$

$$W_M = \sqrt{W_{Mx}^2 + W_{My}^2}, \cos \delta = \frac{W_{Mx}}{W_M}; \quad (3.28)$$

2. Якщо величини ω_z і ε_z є невідомими, то треба задати деякі характеристики руху точки М.

Нехай задано швидкість $\vec{V}_A$ і прискорення $\vec{W}_A$ полюса А, а також траєкторію точки М та її положення на траєкторії в певний момент часу. У цьому випадку визначено напрямок вектора швидкості точки М і радіус кривизни траєкторії у заданому положенні точки М є відомим. Отже, за теоремою про проекції швидкостей точок тіла (3.23) можна знайти модуль швидкості точки:

$$V_M = V_A \cos \alpha / \cos \beta, \quad (3.29)$$

а знаючи його і кут β – знайти V_{Mx} і V_{My} . Далі з рівняння (3.24) визначаємо модуль ω , а знак ω_z – за такої умови: $\omega_z > 0$, якщо вектор $\vec{V}_{MA}$ має такий самий напрямок, як при обертанні відрізка АМ навколо А, тобто проти руху стрілки годинника.

Тепер з рівнянь (3.24) і (3.26) можна знайти W_M^r і ε_z , якщо попередньо визначити W_M^n за формулою

$$W_M^n = \frac{V_M^2}{\rho} = \frac{V_A^2 \cos^2 \alpha}{\rho \cos^2 \beta}. \quad (3.30)$$

Обчислимо W_M^r і ε_z з допомогою рівнянь (3.25) і (3.26):

$$W_M^r \cdot \cos \beta + W_M^n \cdot \sin \beta = W_A \cdot \cos \gamma - \omega_z^2 \cdot AM, \quad (3.31)$$

$$W_M^r \cdot \sin \beta - W_M^n \cdot \cos \beta = W_A \cdot \sin \gamma + |\varepsilon_z| \cdot AM \quad (3.32)$$

Одержані при розв'язанні цієї задачі ω_z і ε_z можна використовувати для розрахунку поля швидкостей і прискорень точок певного тіла.

3.3.3. Миттєві центри швидкостей і прискорень та їх використання

Із співвідношення (3.21) при $\omega = 0$ випливає, що швидкості усіх точок тіла в певний момент часу є однаковими, як і при поступальному русі твердого тіла. Тому стан тіла у випадку $\omega = 0$ називають миттєво-

поступальним рухом (це стосується лише розподілу швидкостей!).

Якщо $\omega \neq 0$, то існує миттєвий центр швидкостей (МЦШ) – єдина точка плоскої фігури або нескінченної, незмінно зв'язаної з нею рухомої площини, швидкість якої дорівнює нулю.

Позначимо цю точку буквою **P**. Очевидно, що швидкості всіх точок прямої, яка проходить через **P** перпендикулярно до площини руху, також дорівнюють нулю, а тому цю пряму можна назвати миттєвою віссю обертання тіла. Отже, плоскопаралельний рух у кожний момент часу можна розглядати як миттєве обертання навколо цієї осі. При цьому русі розподіл швидкостей точок твердого тіла цілком відповідає їх розподілу при обертанні тіла навколо нерухомої осі. Дійсно, з виразу (3.21) при $\vec{V}_P = 0$ випливає, що $\vec{V}_M = \vec{V}_{MP} = \vec{\omega} \times \overline{PM}$, тобто швидкість кожної точки **M** є перпендикулярною до відрізка, який з'єднує її з миттєвим центром швидкостей, або миттєвий центр швидкостей тіла можна визначити як точку перетину перпендикулярів до напрямків швидкостей його точок.

Відстані від точок тіла до миттєвого центра швидкостей визначаються формулами

$$MP = \frac{V_M}{\omega}, \quad AP = \frac{V_A}{\omega}, \quad BP = \frac{V_B}{\omega}, \quad \dots, \quad (3.33)$$

які випливають з того, що швидкості усіх точок є такими

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \times \overline{PM}, \quad \vec{V}_A = \vec{\omega} \times \overline{PA}, \quad \vec{V}_B = \vec{\omega} \times \overline{PB}, \quad \dots \quad (3.34)$$

Із цих же співвідношень видно, що модулі швидкостей точок фігури при плоскопаралельному русі відносяться як відстані від цих точок до миттєвого центра

$$\frac{V_M}{V_A} = \frac{PM}{PA}, \quad \frac{V_A}{V_B} = \frac{PA}{PB}, \quad \frac{V_B}{V_M} = \frac{PB}{PM}, \quad \dots \quad (3.35)$$

Із перелічених властивостей МЦШ можна зробити такі висновки:

– якщо вектори швидкості двох точок фігури не паралельні, то положення МЦШ знаходять як точку перетину перпендикулярів до напрямків швидкостей цих точок (рис. 3.6, а);

– якщо вектори швидкості двох точок фігури є паралельними, а самі точки лежать на прямій, що є перпендикулярною до їхніх векторів швидкостей, то положення МЦШ визначається так, як показано на рис. 3.6, б, в.

– у випадках, коли плоска фігура котиться не ковзаючи по нерухомій кривій (рис. 3.6, г), МЦШ фігури знаходиться у точці дотику до цієї кривої; це випливає з умови кочення без ковзання: швидкості точок

дотику фігури й опорної кривої мають бути однаковими.

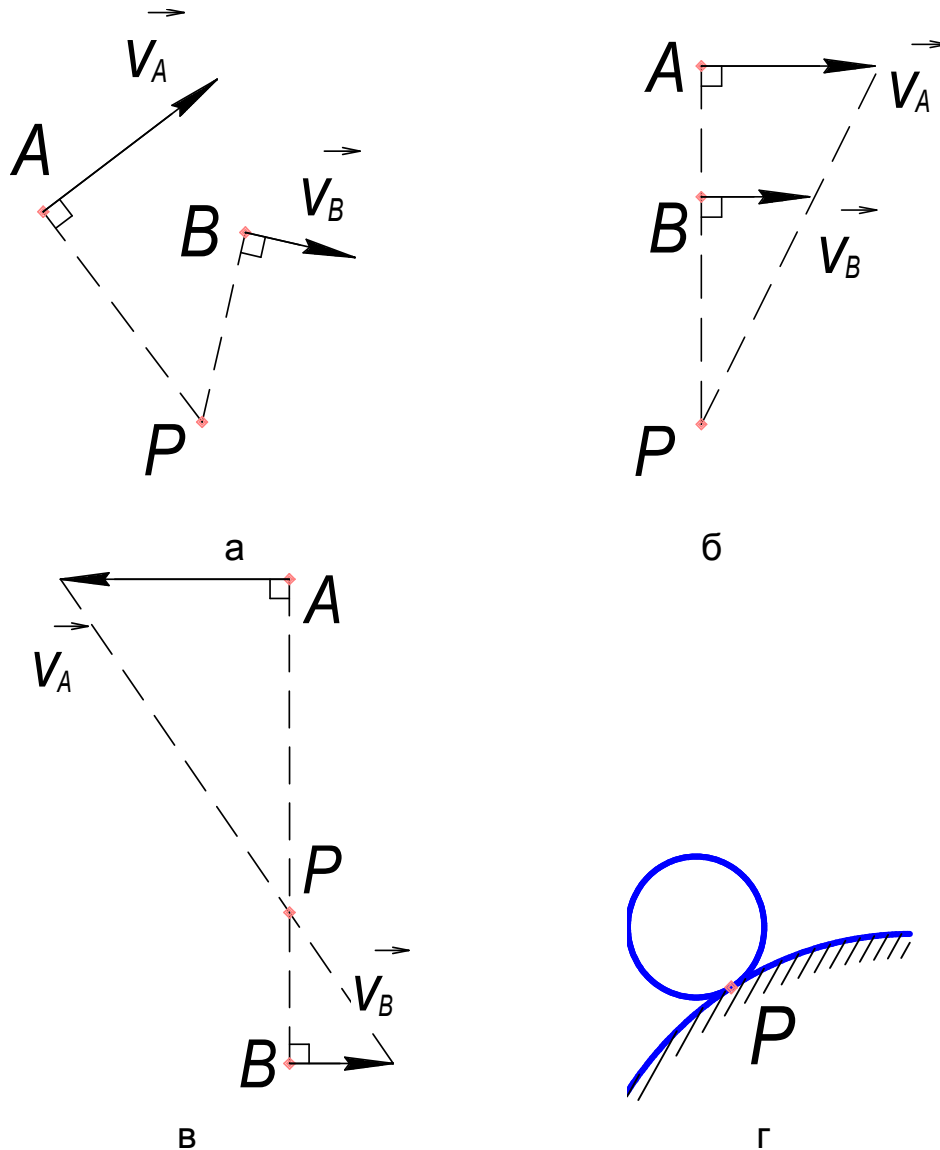


Рис. 3.6

З рівняння (3.22) випливає, що при $\omega = 0$ і $\varepsilon = 0$ $\vec{W}_M = \vec{W}_A$, тобто розподіл прискорень (тільки прискорень!) такий самий, як і при поступальному русі тіла. Якщо ж ω і ε одночасно не дорівнюють нулю, то на фігурі або на рухомій площині, що незмінно з нею зв'язана, є єдина точка, прискорення якої в певний момент часу перетворюється на нуль. Цю точку називають миттєвим центром прискорень (МЦП) плоскої фігури.

Положення цієї точки, яку позначено буквою Q, визначимо з допомогою співвідношення (3.22). Нехай прискорення цієї точки дорівнює нулю, тоді

$$\vec{W}_Q = 0 = \vec{W}_A + \vec{W}_{QA} = \vec{W}_A + \vec{W}_{QA}^{об} + \vec{W}_{QA}^{ос},$$

звідки $\vec{W}_A = -\vec{W}_{QA}$, тобто обидва ці вектори утворюють з відрізком QA однаковий кут μ (рис. 3.7), який знаходимо за формулою $\operatorname{tg} \mu = \frac{|\vec{W}_{QA}^{ob}|}{|\vec{W}_{QA}^{oc}|} = \frac{|\vec{\varepsilon}|}{\omega^2}$.

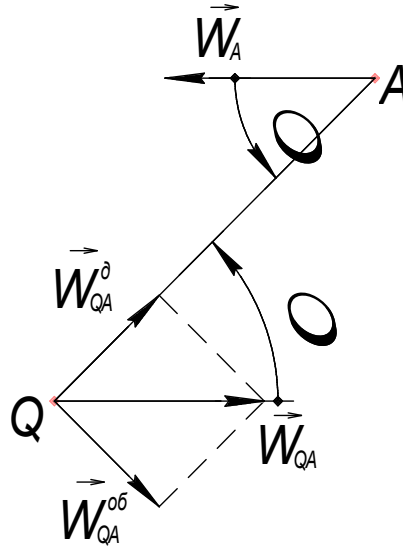


Рис. 3.7

Відстань QA визначимо з умови $|\vec{W}_A| = |\vec{W}_{QA}|$:

$$|\vec{W}_A| = |QA| \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \quad (3.37)$$

звідки

$$QA = \frac{|\vec{W}_A|}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}. \quad (3.38)$$

Таким чином, для будування МЦП треба знати прискорення якої-небудь точки фігури, а також її кутової швидкості ω і кутового прискорення ε . Використовуючи ці величини, за формулами (3.36) і (3.38) обчислюємо кут μ і відстань QA. Потім відкладаємо від напрямку $\vec{W}_A$ кут μ проти руху годинникової стрілки, якщо $\varepsilon_z > 0$, і за рухом стрілки годинника, якщо $\varepsilon_z < 0$. Під цим кутом проводимо промінь, на якому відкладаємо відстань QA (3.38).

Якщо за полюс вибрати МЦП, то для прискорень інших точок рухомої фігури правильними є співвідношення

$$\begin{aligned} \vec{W}_A &= \vec{W}_{QA}, \quad |\vec{W}_A| = QA \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \\ \vec{W}_B &= \vec{W}_{QB}, \quad |\vec{W}_B| = QB \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}, \end{aligned}$$

звідки

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{QA}{QB}. \quad (3.39)$$

Отже, модулі прискорень точок тіла при плоскопаралельному русі відносяться як відстані від цих точок до МЦП, а напрями їхніх векторів утворюють однакові кути μ з відрізками, які з'єднують ці точки з МЦП (рис. 3.8).

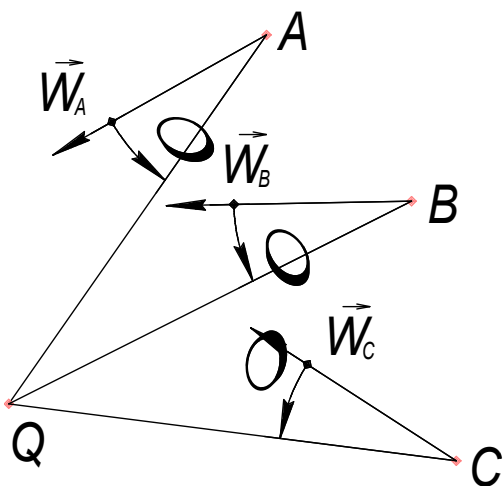


Рис. 3.8

Якщо положення МЦП і прискорення хоча б однієї точки фігури є відомими, то за формулою (3.39) можна знайти прискорення усіх інших її точок. Проте використання поняття МЦП при розв'язанні конкретних задач обмежується необхідністю неодноразового розрахунку косокутних трикутників для визначення відстані від МЦП до точок, прискорення яких треба обчислити. Наведемо деякі окремі випадки, коли будування МЦП і обчислення з його допомогою прискорень точок фігури значно спрощуються:

- а) $\omega = 0$, $\varepsilon \neq 0$, $\mu = \pi/2$;
- б) $\omega \neq 0$, $\varepsilon = 0$, $\mu = 0$;
- в) $\omega = 0$, $\varepsilon = 0$; МЦП не існує, прискорення усіх точок є геометрично однаковими;

г) $\vec{W}_A \neq \vec{W}_B$; МЦП є точкою перетину відрізка АВ і відрізка, що з'єднує кінці векторів прискорень точок А і В.

Випадки будування МЦП, що відповідають розглянутим, зображено на рис. 3.9.

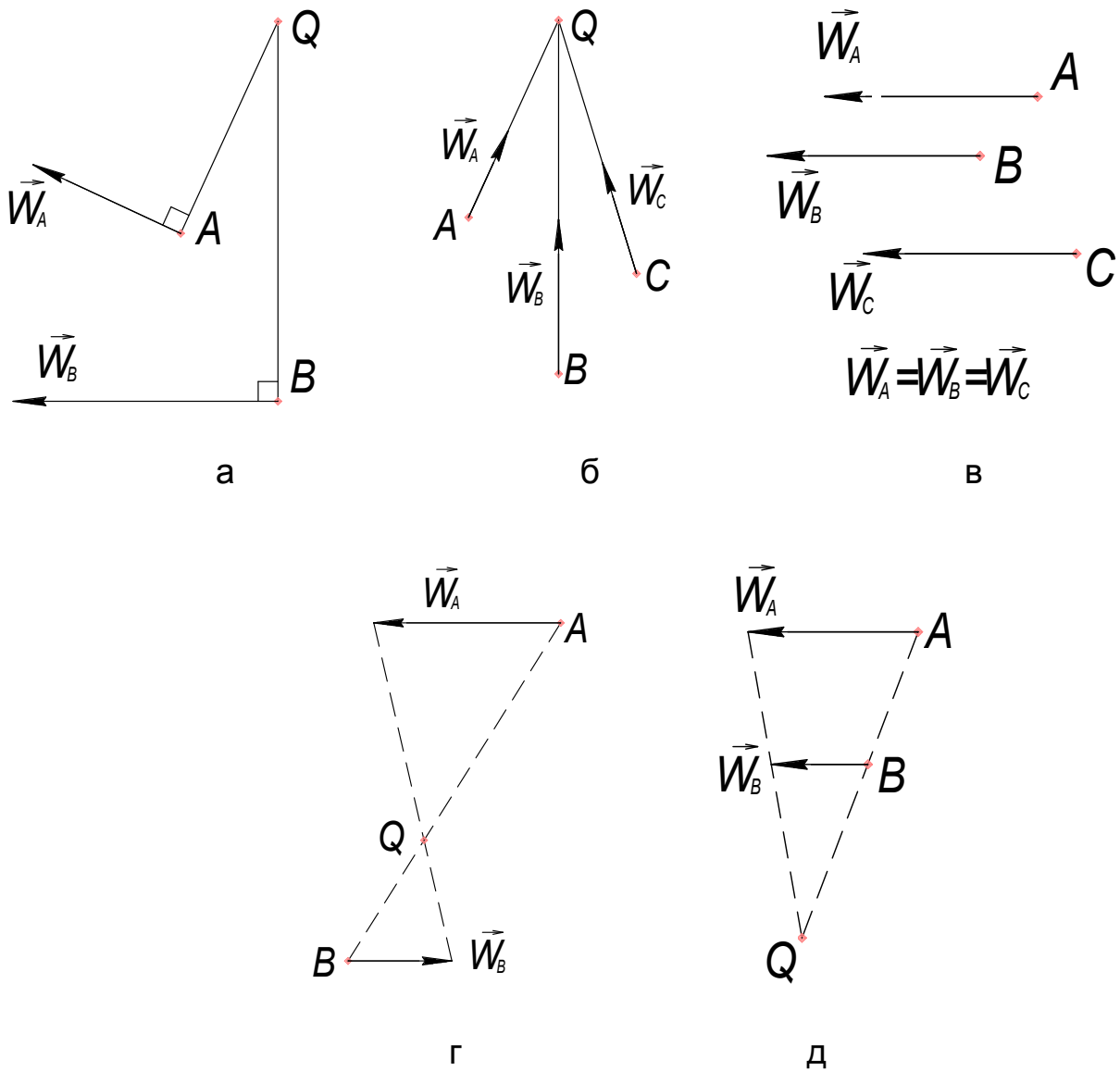


Рис. 3.9

3.4. Сферичний рух твердого тіла

Рух твердого тіла, коли лише одна його точка весь час залишається нерухомою, називають сферичним. Така назва пов'язана з тим, що під час руху кожна точка тіла знаходиться на поверхні сфери постійного радіуса, тобто її траєкторія є сферичною кривою.

При сферичному русі рівняння (2.9) набувають вигляду

$$\varphi = \varphi(t), \quad \psi = \psi(t), \quad \theta = \theta(t), \quad (3.40)$$

оскільки $x_{01} = 0$, $x_{02} = 0$, $x_{03} = 0$ у випадку, коли початки нерухомої і зв'язаної систем координат суміщені з нерухомою точкою О тіла.

Сферичний рух цілком описується трьома незалежними

параметрами (φ, ψ, θ) , тому тіло при такому русі має три ступені свободи, а рівняння $x_{01} = 0$, $x_{02} = 0$, $x_{03} = 0$ є рівняннями в'язей.

Швидкість довільної точки такого твердого тіла розраховується із співвідношення (2.39), якщо в ньому взяти $\vec{V}_O = 0$, що відповідає сферичному руху тіла:

$$\vec{V}_M = \dot{\vec{r}}_M = \vec{\omega} \times \overline{OM}, \quad (3.41)$$

де $\vec{r}_M$ – радіус-вектор точки М, проведений з нерухомої точки О; $\vec{\omega}$ – кутова швидкість тіла відносно нерухомої системи координат.

Якщо візьмемо $\vec{V}_M = 0$, то одержимо рівняння геометричного місця точок, швидкості яких у певний момент часу дорівнюють нулю:

$$\vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{j}_1 & \vec{j}_2 & \vec{j}_3 \\ \omega_{x1} & \omega_{x2} & \omega_{x3} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \omega_{\xi1} & \omega_{\xi2} & \omega_{\xi3} \\ \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 \end{vmatrix}, \quad (3.42)$$

або

$$\frac{x_1}{\omega_{x1}} = \frac{x_2}{\omega_{x2}} = \frac{x_3}{\omega_{x3}}, \quad \frac{\xi_1}{\omega_{\xi1}} = \frac{\xi_2}{\omega_{\xi2}} = \frac{\xi_3}{\omega_{\xi3}}. \quad (3.43)$$

Рівняння (3.43) (у нерухомій і зв'язаній системах координат відповідно) є рівнянням прямої лінії, що проходить через нерухому точку О, напрямком якої збігається з напрямком вектора кутової швидкості тіла $\vec{\omega}$. Цю пряму називають миттєвою віссю обертання (МВО) тіла при сферичному русі. Вектор кутової швидкості має такий напрямок вздовж МВО, що з його кінця миттєве обертання тіла видно проти руху годинникової стрілки.

Визначимо модуль швидкості точки М:

$$V_M = \omega \rho_M \sin(\vec{\omega}, \hat{\vec{r}}_M) = \omega h_M, \quad (3.44)$$

де h_M – найкоротша відстань від цієї точки до МВО (рис. 3.10).

Зі сказаного вище випливає, що розподіл швидкостей точок твердого тіла при сферичному русі в кожний момент часу є таким, нібито тіло здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі, що збігається з МВО.

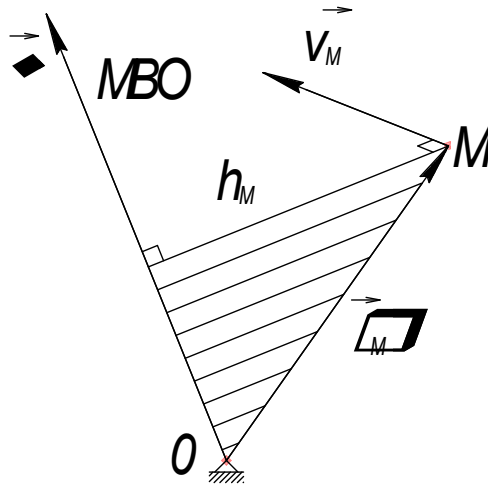


Рис. 3.10

За означенням кутове прискорення тіла $\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt$, але на відміну від обертання його навколо нерухомої осі при сферичному русі напрямок не збігається з лінією дії вектора кутової швидкості, оскільки цей вектор змінюється не тільки за величиною, але й за напрямком.

Диференціюючи співвідношення (3.42) за часом або беручи у формулі (2.41) $\vec{W}_{O1} = 0$, одержуємо залежність для вектора прискорення довільної точки M тіла при сферичному русі:

$$\vec{W}_M = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_M + \vec{\omega} \times \vec{V}_M, \quad (3.45)$$

де $\vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}_M = \vec{W}_M^{ob}$, $\vec{\omega} \times \vec{V}_M = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{\rho}_M) = \vec{W}_M^{oc}$.

Вектор $\vec{W}_M^{ob}$ обертального прискорення точки M є перпендикулярним до площини векторів $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\rho}_M$, а вектор $\vec{W}_M^{oc}$ доосьового прискорення – до площини векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{V}_M$. Оскільки при сферичному русі вектори $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ у загальному випадку не мають однакових напрямків, не можна ототожнювати $\vec{W}^{ob}$ з $\vec{W}^{\tau}$ і $\vec{W}^{oc}$ з $\vec{W}^n$. Більш того, кут між $\vec{W}_M^{ob}$ і $\vec{W}_M^{oc}$ не дорівнює 90° .

Відповідно до правила обчислення модуля векторного добутку для $\vec{W}_M^{ob}$ і $\vec{W}_M^{oc}$ одержимо

$$W_M^{ob} = \varepsilon \rho_M \sin(\hat{\vec{\varepsilon}, \vec{\rho}_M}) = \varepsilon d_M, \quad (3.46)$$

$$W_M^{oc} = \omega V_M \sin(\hat{\vec{\omega}, \vec{V}_M}) = \omega^2 h_M, \quad (3.47)$$

де d_M – найкоротша відстань від точки M до напрямку вектора кутового прискорення тіла (рис. 3.11).

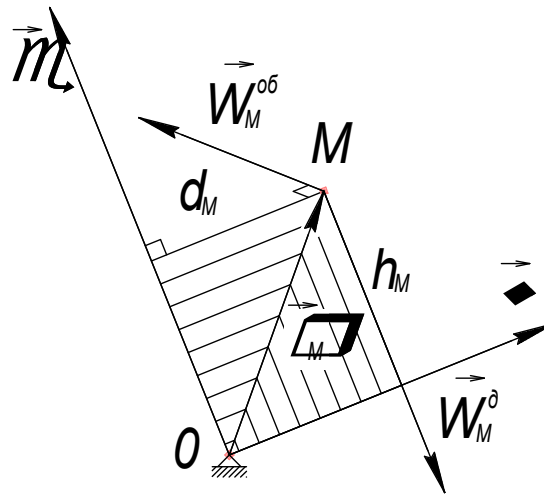


Рис. 3.11

Отже, якщо задано рівняння $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\theta = \theta(t)$, то за кінематичними формулами Ейлера (2.20) або (2.37) можна знайти проекції векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ на осі, які є нерухомими або зв'язаними з тілом, а за формулами (3.41) і (3.45) – швидкості й прискорення необхідних точок. Таким чином буде повністю проаналізовано сферичний рух тіла.

У конкретних задачах рівняння руху тіла можуть бути невідомими, однак з природи руху в кожний момент часу можна визначити положення МВО і швидкість будь-якої точки тіла. Тоді за виразами (3.41) і (3.45) знаходять швидкості й прискорення точок тіла, оскільки $\omega = V/h$, а модуль і напрямок вектора $\vec{\varepsilon}$ – з очевидної аналогії співвідношень

$$\vec{\varepsilon} = d\vec{\omega}/dt, \quad \vec{\omega} = d\vec{V}/dt, \quad (3.48)$$

з яких видно, що вектор $\vec{\varepsilon}$ геометрично дорівнює швидкості кінця вектора $\vec{\omega}$ при неперервному його зміні зі змінням часу.

Таким чином, кутове прискорення тіла при сферичному русі можна визначити як швидкість кінця вектора $\vec{\omega}$ у русі за його годографом. Подальше розв'язання задачі зводиться до обчислення швидкостей і прискорень точок тіла за формулами (3.41) і (3.45).

4. СКЛАДЕНИЙ РУХ ТОЧКИ

Розв'язання багатьох задач механіки суттєво полегшується або набуває більш очевидного фізичного трактування, якщо вводяться одночасно дві або більше систем відліку, що рухаються одна відносно іншої.

В одних задачах має розглядатися рух об'єкта відносно системи відліку, що певним чином рухається відносно іншої, яка умовно вважається

нерухомою. Так, водій автомобіля, судноводій, пілот літака мусять мати чітке уявлення про свій рух відносно інших об'єктів, які рухаються, або про їхній рух відносно себе.

В інших випадках спеціально вибираються рухомі системи відліку, для того щоб рухи, які важко описати в нерухомій системі, подати у вигляді сукупності декількох рухів, відомих наперед, або таких, що простіше описуються і досліджуються. Наприклад, горіння з наступним рухом реактивного струменя через вихідне сопло ракетного двигуна легше описати у системі координат, що зв'язана з корпусом ракети, ніж відносно системи, яка зв'язана з Землею, хоча задача розрахунку траєкторії і закону руху центра мас ракети може нас цікавити й сама по собі. Задачу визначення коливань і деформацій крила літака під час його маневру також простіше розв'язати спостерігачу, який рухається разом з центром мас літака. Також нескладно дослідити й рух гіроскопів, приладів і систем керування літального апарата відносно самого рухомого апарата.

Як і в більшості підручників з теоретичної механіки, використаємо в цьому виданні традиційні термінологію і поняття, хоча можливим є і менш абстрактний виклад за допомогою спостерігачів, зв'язаних з різними системами відліку.

Зазвичай систему координат, рухом якої при розв'язанні конкретної задачі можна знехтувати, називають основною, або абсолютною, а рух, швидкість і прискорення точки відносно цієї системи – абсолютними і позначають індексом a ($\vec{r}_a, \vec{V}_a, \vec{W}_a$).

Систему координат, що певним чином рухається відносно основної, називають допоміжною, а рух, швидкість і прискорення точки у цій системі – відносними і позначають індексом r ($\vec{r}_r, \vec{V}_r, \vec{W}_r$).

Рух точки разом з допоміжною системою координат як точки абсолютно твердого тіла відносно основної системи називають переносним рухом, а швидкість і прискорення точки при цьому русі – переносними і позначають індексом e ($\vec{r}_e, \vec{V}_e, \vec{W}_e$).

Абсолютний рух точки, одержаний як результат "додавання" відносного й переносного рухів, називають ще складним, або складеним, причому термін «складений» більше відповідає смислові методу, ніж "складний". При означенні абсолютного руху слова «... результат "додавання" відносного і переносного рухів ...» не слід розуміти буквально, тому що для опису й дослідження руху з допомогою запропонованого методу використовуються правила "додавання", які дещо відрізняються від звичних.

Зазначимо, що назви "основна" і "допоміжна" системи відліку, "абсолютний" і "відносний" рухи не слід сприймати як такі, що є властивими якій-небудь координатній системі незмінно. При розв'язанні однієї й тієї ж задачі кожна з вибраних систем координат може бути або основною, або допоміжною залежно від поставленої мети.

4.1. Рівняння складеного руху точки

Рухи об'єктів відносно різних рухомих систем відліку описуються різними математичними формулами. Мета полягає в тому, щоб навчитися переходити від опису руху в одній системі до опису того самого руху в іншій.

За основний об'єкт спостереження візьмемо точку M і уявимо, що вона рухається одночасно відносно двох систем координат: $Ox_1x_2x_3$ – основної і $A\xi_1\xi_2\xi_3$ – допоміжної. Рух цієї точки M відносно першої системи задається радіусом-вектором

$$\vec{r} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{j}_i, \quad x_i = x_i(t), \quad \vec{j}_i = \overline{\text{const}}, \quad (4.1)$$

а відносно другої – вектором

$$\vec{p} = \sum_{k=1}^3 \xi_k \vec{e}_k, \quad \xi_k = \xi_k(t), \quad \vec{e}_k = \vec{e}_k(t). \quad (4.2)$$

Якщо крім цього задано рух системи $A\xi_1\xi_2\xi_3$ відносно осей $Ox_1x_2x_3$, то

$$\vec{r}_A = \sum_{i=1}^3 x_{Ai} \vec{j}_i, \quad x_{Ai} = x_{Ai}(t), \quad \alpha_{ik} = \alpha_{ik}(t), \quad i, k = \overline{1,3}, \quad (4.3)$$

де $\vec{j}_i$ і $\vec{e}_k$ – одиничні вектори нерухомих і рухомих осей; α_{ik} – напрямні косинуси осей $A\xi_1\xi_2\xi_3$; x_i і ξ_k – координати точки M у нерухомій і рухомій системах (визначення α_{ik} через кути Ейлера див. у розд. 2).

Як видно з рис. 4.1, між описами рухів точки M відносно $Ox_1x_2x_3$ і $A\xi_1\xi_2\xi_3$ існує очевидна залежність

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{p} \quad (4.4)$$

звідки проєціюванням на нерухомі осі одержимо

$$x_i = x_{Ai} + \sum_{k=1}^3 \xi_k \alpha_{ik}, \quad (4.5)$$

а розв'язуючи ці співвідношення відносно ξ_k , –

$$\xi_k = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ki} (x_i - x_{Ai}). \quad (4.6)$$

Ці співвідношення дають змогу визначити рівняння абсолютного руху за заданими відносним $\xi_k = \xi_k(t)$ і переносним $\alpha_{ik} = \alpha_{ik}(t)$, $\vec{r}_A = \vec{r}_A(t)$ рухами або навпаки – відносний знайти за заданими абсолютним і переносним. Простим диференціюванням за часом можна обчислити швидкість і прискорення точки M у відповідних рухах.

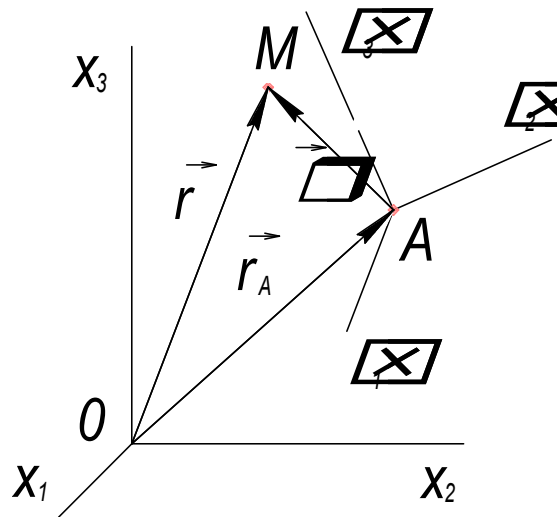


Рис. 4.1

4.2. Залежності між швидкостями і прискореннями точки у складеному русі

Іноді потрібно визначити швидкості й прискорення точки в абсолютному або відносному русі, міняючи стадію формування співвідношень (4.5) і (4.6). Тому одержимо залежності між швидкостями й прискореннями точки в абсолютному і відносному рухах диференціюванням співвідношення (4.4) або (4.5) за часом.

Для того щоб при виконанні математичних перетворень не загубився кінематичний смисл, використаємо двох спостерігачів: першого – незмінно зв'язаного з системою $Ox_1x_2x_3$, яку умовно будемо вважати нерухомою; другого – з такою, що рухається разом із системою $A\xi_1\xi_2\xi_3$ і так само, як і вона.

Для першого спостерігача вектори $\vec{r}$, $\vec{r}_A$, $\vec{\rho}$, $\vec{e}_k$, а також координати ξ_k змінюються з часом. Другий спостерігач, слідкуючи за рухом точки M, буде помічати, що у виразі $\vec{\rho} = \sum_{k=1}^3 \xi_k \vec{e}_k$ змінюються з часом координати ξ_k , а вектори $\vec{e}_k$, $k = \overline{1,3}$ залишаються незмінними.

Якщо необхідно знайти швидкість і прискорення точки М відносно $Ox_1x_2x_3$, тобто абсолютні їхні значення, то співвідношення

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \sum_{k=1}^3 \xi_k \vec{e}_k \quad (4.7)$$

диференціює перший спостерігач.

Продиференціювавши вираз (4.7) за часом, тобто

$$\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}_A + \sum_{k=1}^3 \dot{\xi}_k \vec{e}_k + \sum_{k=1}^3 \xi_k \dot{\vec{e}}_k, \quad (4.8)$$

цей спостерігач шляхом кінематичного аналізу результату одержує такі висновки;

$$а) \dot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 x_i \vec{j}_i = \vec{V}_M - \quad (4.9)$$

швидкість точки М відносно $Ox_1x_2x_3$, або абсолютна швидкість;

б) $\dot{\vec{r}}_A = \vec{V}_A$ – швидкість А початку системи $A\xi_1\xi_2\xi_3$ відносно нерухомих осей $Ox_1x_2x_3$; $\dot{\vec{e}}_k = \vec{\omega}_e \times \vec{e}_k$ – на основі формул Пуасона, причому $\vec{\omega}_e$ є кутова швидкість рухомої системи відносно нерухомої, або переносна:

$$\sum_{k=1}^3 \xi_k \dot{\vec{e}}_k = \sum_{k=1}^3 \xi_k (\vec{\omega}_e \times \vec{e}_k) = \vec{\omega}_e \times \sum_{k=1}^3 \xi_k \vec{e}_k = \vec{\omega}_e \times \vec{\rho} = \vec{V}_{M_0A} -$$

швидкість точки М системи $A\xi_1\xi_2\xi_3$ як твердого тіла при нерухомій точці А.

Об'єднуючи все це, перший спостерігач робить висновок, що

$$\dot{\vec{r}}_A + \sum_{k=1}^3 \xi_k \dot{\vec{e}}_k = \vec{V}_A + \vec{V}_{M_0A} = \vec{V}_{M_0} -$$

швидкість точки M_0 системи $A\xi_1\xi_2\xi_3$ у її русі відносно осей $Ox_1x_2x_3$.

Відповідно до раніше прийнятих означень швидкостей того місця M_0 рухомої (допоміжної) системи координат, у якому в певний момент часу знаходиться точка М, будемо називати переносною швидкістю, позначати V_e і визначати так:

$$\vec{V}_e = \vec{V}_A + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho} = \vec{V}_A + \vec{\omega}_e \times \overline{AM}. \quad (4.10)$$

Для першого спостерігача залишається незрозумілим кінематичний

смысл суми $\sum_{k=1}^3 \dot{\xi}_k \bar{e}_k$. Другий спостерігач може дати однозначну відповідь: це не що інше, як швидкість точки М відносно системи координат цього спостерігача. Отже,

$$\sum_{k=1}^3 \dot{\xi}_k \bar{e}_k = \dot{\vec{r}} = \vec{V}_r - \quad (4.11)$$

швидкість точки М відносно осей $A\xi_1\xi_2\xi_3$, яку назовемо відносною (V_r – похідна вектора за часом, яку обчислено другим спостерігачем).

Відповідно до прийнятої термінології і на основі формул (4.8) – (4.11) можна сформулювати теорему про додавання швидкостей: швидкість точки М в її абсолютному русі дорівнює геометричній сумі її переносної і відносної швидкостей:

$$\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r. \quad (4.12)$$

Слід зазначити, що про переносну швидкість точки М як про швидкість допоміжної системи координат відносно основної можна говорити тільки тоді, коли її рух є поступальним, тобто при $\vec{\omega}_e \equiv 0$.

Для визначення залежності між прискореннями точки М у складеному русі продиференціюємо вираз (4.12) за часом:

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \frac{d\vec{V}_e}{dt} + \frac{d\vec{V}_r}{dt}. \quad (4.13)$$

Очевидно, що

$$\frac{d\vec{V}_a}{dt} = \ddot{\vec{r}} = \sum_{i=1}^3 \ddot{x}_i \vec{j}_i = \vec{W}_a - \quad (4.14)$$

абсолютне прискорення точки М, яке фіксує перший спостерігач.

Виходячи з означення переносної швидкості, обчислимо

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}_e}{dt} &= \frac{d}{dt}(\vec{V}_A + \vec{\omega}_e \times \vec{\rho}) = \frac{d\vec{V}_A}{dt} + \frac{d}{dt}\left(\vec{\omega}_e \times \sum_{k=1}^3 \xi_k \bar{e}_k\right) = \\ &= \vec{W}_A + (\dot{\vec{e}}_e \times \vec{\rho}) + \vec{\omega}_e \times \sum_{k=1}^3 \dot{\xi}_k \bar{e}_k + \vec{\omega}_e \times \sum_{k=1}^3 \xi_k \dot{\bar{e}}_k = \\ &= \vec{W}_A + (\dot{\vec{e}}_e \times \vec{\rho}) + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times \left(\sum_{k=1}^3 \xi_k \vec{\omega}_e \times \bar{e}_k\right) = \\ &= \vec{W}_A + (\dot{\vec{e}}_e \times \vec{\rho}) + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Тут

$$\vec{W}_A + (\vec{\varepsilon}_e \times \vec{\rho}) + \vec{\omega}_e \times (\vec{\omega}_e \times \vec{\rho}) = \vec{W}_{MO} = \vec{W}_e - \quad (4.16)$$

прискорення точки M_0 рухомої системи координат відносно нерухомої, тобто переносне прискорення точки M . Продиференціюємо відносну швидкість за часом:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{V}_r}{dt} &= \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^3 \xi_k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^3 \dot{\xi}_k \vec{e}_k + \sum_{k=1}^3 \xi_k \dot{\vec{e}}_k = \overset{**}{\vec{\rho}} + \vec{\omega}_e \times \sum_{k=1}^3 \xi_k \vec{e}_k = \\ &= \overset{**}{\vec{\rho}} + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r = \vec{W}_r + \vec{\omega}_e \times \vec{V}_r. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Підставляючи (4.14), (4.15) і (4.17) в (4.13), одержимо

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r,$$

де додатковий доданок $2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r$ називають прискоренням Коріоліса, або поворотним прискоренням, і позначають $\vec{W}_{Cor}$.

Таким чином, із наведених розрахунків можна сформулювати теорему про додавання прискорень, або теореми Коріоліса: прискорення точки M в абсолютному русі дорівнює геометричній сумі її переносного, відносного й коріолісового прискорень:

$$\vec{W}_a = \vec{W}_r + \vec{W}_e + \vec{W}_{Cor}. \quad (4.18)$$

Відповідно до означення

$$\vec{W}_{Cor} = 2\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r \quad (4.19)$$

вектор коріолісового прискорення перпендикулярний до площини векторів $\vec{\omega}_e$ і $\vec{V}_r$. Напрямок цього вектора такий, що з його кінця поворот від першого до другого вектора видно проти ходу годинникової стрілки по найкоротшій відстані, тобто такий, що вектори $(\vec{W}_{Cor}, \vec{\omega}_e, \vec{V}_r)$ утворюють праву трійку, як і осі декартової системи координат x, y, z (рис. 4.2).

Модуль цього вектора обчислюється за формулою

$$W_{Cor} = 2\omega_e V_r \sin(\vec{\omega}_e, \vec{V}_r). \quad (4.20)$$

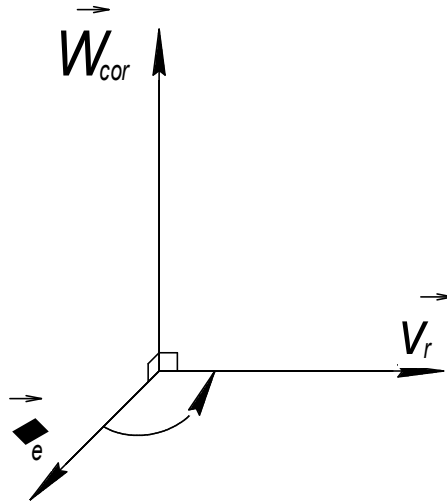


Рис. 4.2

З виразів (4.19) і (4.20) випливає, що коріолісове прискорення перетворюється на нуль у таких випадках:

- 1) вектори $\vec{\omega}_e$ і $\vec{V}_r$ є паралельними;
- 2) допоміжна система рухається відносно основної поступально, $\vec{\omega}_e \equiv 0$;
- 3) точка M є нерухомою у допоміжній системі, $\vec{V}_r \equiv 0$.

Крім того, одержано, що похідна вектора $\vec{a} = \sum_{k=1}^2 a_k \vec{e}_k$, заданого своїми проекціями на осі рухомої системи координат, яку обчислив перший спостерігач, дорівнює сумі похідної того самого вектора, що обчислив другий спостерігач, і векторного добутку $\vec{\omega} \times \vec{a}$, де $\vec{\omega}$ – кутова швидкість рухомої системи відносно нерухомої. Останнє твердження – це лема про локальну похідну вектора. Її доведення

$$\dot{\vec{a}} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^2 a_k \vec{e}_k = \sum_{k=1}^2 \dot{a}_k \vec{e}_k + \sum_{k=1}^2 a_k \dot{\vec{e}}_k = \overset{*}{\vec{p}} + \vec{\omega} \times \sum_{k=1}^2 a_k \vec{e}_k = \overset{*}{\vec{p}} + \vec{\omega} \times \vec{a}$$

можна використовувати для того, щоб одержати співвідношення (4.12) і (4.18).

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

Лойцянский, Л.Г. Курс теоретической механики [Текст] : в 2 т. / Л.Г. Лойцянский, А.И. Лурье. – М. : Наука, 1982. – Т.1 : Статика и кинематика. – 352 с.

Мещерский, И.В. Сборник задач по теоретической механике [Текст] / И.В. Мещерский. – М. : Наука, 1986. – 448 с.

Павловский, М.А. Теоретическая механика [Текст] : учеб. пособие / М.А. Павловский, Т.В. Путята. – К. : Высш. шк., 1985. – 328 с.

Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике [Текст] / под общ. ред. А.А. Яблонского. – М. : Высш. шк., 1985. – 363 с.

Яблонский, А.А. Курс теоретической механики [Текст] : в 2 ч. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова. – М. : Высш. шк., 1966. – Ч. 1 : Статика и кинематика. – 368 с.

ЗМІСТ

ВСТУП.....	3
1. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ.....	4
1.1. Задання положення й руху точки у просторію.....	5
1.2. Швидкість і прискорення точки.....	7
1.3. Визначення швидкості та прискорення при координатному способі задання руху.....	9
1.4. Визначення швидкості та прискорення при натуральному способі задання руху.....	11
1.5. Дослідження характеру руху точки по траєкторії.....	14
1.6. Годограф змінного вектора та його використання.....	15
2. КІНЕМАТИКА ВІЛЬНОГО ТВЕРДОГО ТІЛА.....	17
2.1. Задання положення і орієнтації вільного твердого тіла у просторі.....	18
2.2. Способи задання орієнтації тіла у просторі. Рівняння руху тіла і його точок.....	20
2.3. Вираження напрямних косинусів зв'язаних осей через кути Ейлера.....	24
2.4. Розподіл швидкостей точок вільного твердого тіла. Поняття кутової швидкості й кутового прискорення.....	28
2.5. Вираження кутової швидкості через кути Ейлера та її похідні....	32
2.6. Деякі властивості швидкостей точок твердого тіла.....	33
2.7. Розподіл прискорень точок твердого тіла.....	35
3. НЕВІЛЬНИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА.....	36
3.1. Поступальний рух твердого тіла.....	37
3.2. Обертання твердого тіла навколо нерухомої осі	39
3.3. Плоскопаралельний рух тіла.....	42
3.3.1. Аналітичний опис і дослідження плоскопаралельного руху....	43
3.3.2. Векторне дослідження плоскопаралельного руху твердого тіла.....	44
3.3.3. Миттєві центри швидкостей і прискорень та їх використання.....	46
3.4. Сферичний рух твердого тіла	51
4. СКЛАДЕНИЙ РУХ ТОЧКИ.....	54
4.1. Рівняння складеного руху точки.....	56
4.2. Залежності між швидкостями і прискореннями точки у складеному русі.....	57
БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК	62

Навчальне видання

**Спренне Сергій Володимирович
Бойчук Ігор Петрович
Марунько Ірина Іванівна**

**ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА.
КІНЕМАТИКА**

Редактор О.Ф. Серьожкіна

Зв. план, 2012

Підписано до видання 29.12.2012

Ум. друк. арк. 3,5. Обл.-вид. арк. 4 . Електронний ресурс

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001