

Про один клас точних розв'язків рівнянь Нав'є-Стокса

Національний аерокосмічний університет ім. М.Є. Жуковського «ХАІ»

Гідродинаміка здавна привертала до себе пильну увагу вчених різних спеціальностей. Наочність її експериментів, чітка постановка задач, порівняльна простота основних рівнянь давали можливість одержати як кількісний, так і якісний опис цілого ряду динамічних явищ, що відбуваються в рідких середовищах. Однак численні парадокси теоретичної гідродинаміки вказують на необхідність удосконалювання математичних і фізичних моделей аерогідродинамічних процесів і використання існуючих можливостей більш глибокого математичного і чисельного аналізу класичних задач.

Ці можливості пов'язані, по-перше, з наявністю великого парку могутніх ЕОМ. Стали доступними не тільки розрахунки, раніше немислимі через їхню складність, але й експерименти нового типу – чисельні, що мають ряд переваг перед фізичними.

По-друге, останнім часом в аерогідродинаміці відбулося значне розширення арсеналу математичних засобів. Поряд з удосконаленням старих методів з'явилися нові методи узагальнених функцій і теорії рівнянь у частинних похідних усіх типів. Усе більш широко використовують функціональний аналіз.

І, по-третє, прискорення науково-технічного прогресу, розвиток науки і техніки, широкий розмах досліджень у вивченні явищ природи ставлять перед гідродинамікою безліч нових задач.

Значно зросло значення нового підходу до розв'язання задач гідродинаміки і теплообміну, що одержав назву обчислювальної гідромеханіки. Основною особливістю цього обчислювального (або чисельного) підходу є те, що рівняння (найчастіше – рівняння в частинних похідних), що описують фізичний процес, розв'язуються чисельно. Деякі ідеї такого підходу відомі давно. Розробка чисельних методів, у першу чергу, скінченно-різницевого, розв'язання звичайних диференціальних рівнянь і рівнянь у частинних похідних, почалася вже на початку XX століття.

У світлі викладеного має велике методичне і наукове значення ідеологія побудови нових класів точних розв'язків – однієї з ключових задач гідромеханіки.

У класі узагальнених аналітичних функцій у деяких випадках нелінійні рівняння системи Нав'є-Стокса

$$(\nabla, \mathbf{v}) = 0, \quad [\nabla, [\mathbf{\Omega}, \mathbf{v}]] + \nu [\nabla, [\nabla, \mathbf{\Omega}]] = 0 \quad (1)$$

перетворюються на лінійні, а іноді розв'язуються аналітичними методами.

Для того щоб елементарні трубки струму мали нормальні перетини, необхідне існування нормальних до ліній струму поверхонь, а це накладає на поле швидкостей $\mathbf{V}(u, v, w) = \mathbf{V}(r, t)$ обмеження:

$$\mathbf{V} = \lambda \nabla \phi. \quad (2)$$

Звідси в силу перпендикулярності векторного добутку своїм співмножникам відразу впливає ортогональність векторів завихреності $\mathbf{\Omega} = [\nabla, \mathbf{V}]$ і швидкості $\mathbf{V}$:

$$(\mathbf{V}, \mathbf{\Omega}) = 0. \quad (3)$$

У цей час існує необхідність в одержанні точних розв'язків фізичних задач. Наприклад, для ухвалення принципового рішення при проектуванні ливникової системи конструкторами проробляється безліч варіантів ливникових систем, і важливо мати досить просту аналітичну математичну модель для вибору ряду найраціональніших варіантів.