

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

В. О. Ойкін, Т. О. Постельник

МЕХАНІКА МАНІПУЛЯТОРІВ ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ

Навчальний посібник

Харків «ХАІ» 2024

УДК 621.865.8(075.8)
О-48

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. Д. М. Леонтьєв,
д-р техн. наук, проф. О. В. Воропай

Ойкін, В. О.

О-48 **Механіка маніпуляторів промислових роботів [Текст] : навч. посіб. /**
В. О. Ойкін, Т. О. Постельник. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т
ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2024. – 104 с.

ISBN 978-966-662-938-1

Розглянуто методи статичного кінематичного й динамічного дослідження маніпулятора, визначення реакцій (статичних) у кінематичних парах, знаходження величин керувальних впливів (сил моментів), що забезпечують рівновагу маніпулятора в заданому положенні. Викладено методи розв'язання прямої та оберненої задач кінематики маніпулятора. Отримано формули, за якими визначають швидкості характерних точок (центрів тяжіння ланок, центра захоплювального пристрою) маніпулятора, а також диференціальні рівняння руху для маніпуляторів схем, що найчастіше використовуються. Описано методи динамічного синтезу й динамічного аналізу маніпулятора. У кожному розділі наведено приклади досліджень.

Для студентів вищих технічних закладів, що навчаються за спеціальностями «Прикладна механіка», «Галузеве машинобудування». Буде корисним при вивченні дисциплін «Основи гнучкого виробництва», «Інженерія логістичних систем», «Конструювання промислових роботів» та курсів, пов'язаних із застосуванням нових технологій у машинобудуванні та інших галузях промисловості.

Іл. 48. Бібліогр.: 9 назв

УДК 621.865.8(075.8)

ISBN 978-966-662-938-1

© Ойкін В. О., Постельник Т. О., 2024
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2024

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТРУКТУРИ МАНІПУЛЯТОРА

1.1. Складові частини маніпулятора

Маніпулятор являє собою багатоланковий механізм, що складається з таких частин:

- основа (початкова ланка) – нерухома ланка механізму, їй присвоюється номер «0», з яким пов'язується базова (основна) система відліку;
- рухомі ланки, що мають змогу рухатися в базовій системі відліку й відносно одна одної. Будемо вважати, що всі ланки – абсолютно тверді тіла, їх кількість (включаючи початкову ланку) становить $n + 1$. Ланку з робочим органом (захоплювальним пристроєм) називають кінцевою;
- з'єднання ланок. Рухомі з'єднання двох суміжних ланок (наприклад, 0–1, 1–2 і т. д.) називають кінематичними парами (КП).

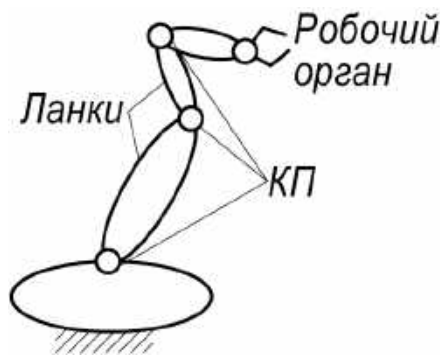


Рис. 1.1. Схема багатоланкового механізму

Призначення маніпулятора полягає в тому, щоб перемістити робочий орган з початкового положення в кінцеве по траєкторії за кінцевий проміжок часу.

Для маніпуляторів найбільш характерними є такі типи завдань на переміщення робочого органу:

1. Переміщення від однієї точки до іншої протягом заданого проміжку часу – позиційне керування. Задаються положення (координати в базовій системі координат) початкової, проміжних і кінцевої точок. Траєкторія і характер руху робочого органу між точками не регламентуються. Якщо задано проміжні точки, то в кожній з них робочий орган має зупинитися, а отже, задачу дослідження руху маніпулятора від початкової до кінцевої точки робочого органу можна подати як $(n + 1)$ підзадач, де n – кількість проміжних точок для робочого органу. При цьому кожну пару сусідніх точок у відповідній підзадачі можна розглядати як початкову й кінцеву.

2. Переміщення робочого органу згідно із заданими кінематичними рівняннями руху (у базовій системі координат) – $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, а також його орієнтація в функції від часу. Орієнтацію робочого органу можна задати з допомогою або кутів Ейлера – $\psi = \psi(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $\theta = \theta(t)$ (див. далі опис), або кутів, утворених осями координат робочого органу з осями базової системи координат.

1.2. Кінематичні пари. Їх класифікація

Як зазначалося раніше маніпулятор робота є багатоланковим, у загальному випадку – просторовим механізмом з розімкненим кінематичним ланцюгом. Кінематичний ланцюг механізму складається з ланок і з'єднань. Ланки є абсолютно твердими тілами, що не змінюють розмірів і форм. Сукупність ланок утворюють кінематичний ланцюг механізму з допомогою поступальних та обертальних кінематичних пар. Кінематична пара (КП) – це з'єднання двох суміжних ланок, при якому допускається певний відносний рух кожної з них. Якщо в КП відносний рух ланок є поступальним, то таку пару називають поступальною і позначають буквою Π (приклад – прямолінійний стрижень прямокутного поперечного перерізу в трубі такого ж перерізу). В обертальній КП відносний рух ланок є обертальним (приклад – шарнірне з'єднання двох тіл), його позначають буквою O .

За кількістю обмежень відносних переміщень суміжні ланки, що належать до кінематичної пари, поділяють на п'ять класів.

1. КП 1-го класу – гладка куля на площині (рис. 1.2), обмеження поступального переміщення вздовж осі z (по нормалі до площини).

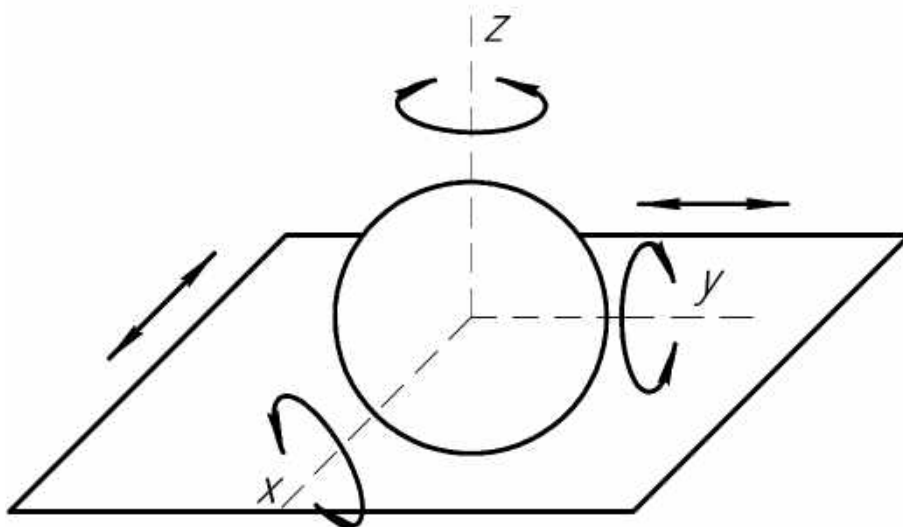


Рис. 1.2. Приклад кінематичної пари 1-го класу

2. КП 2-го класу – гладкий циліндр на площині (рис. 1.3), обмеження поступального переміщення вздовж осі z та обертального переміщення навколо осі y .

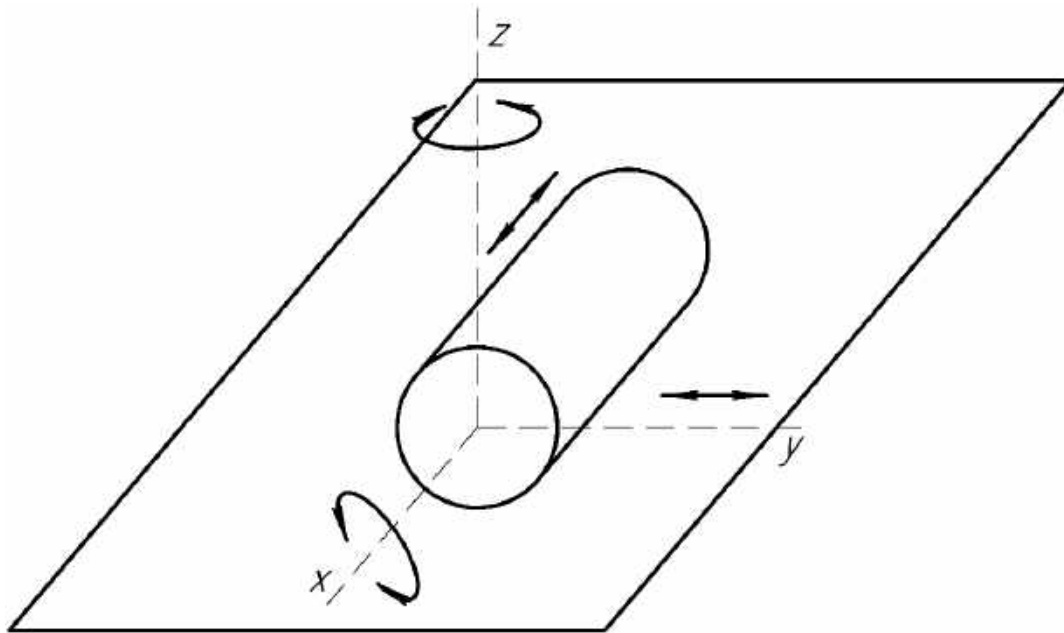


Рис. 1.3. Приклад кінематичної пари 2-го класу

3. КП 3-го класу – кульовий шарнір (рис. 1.4), обмеження поступального переміщення вздовж осей x , y , z .

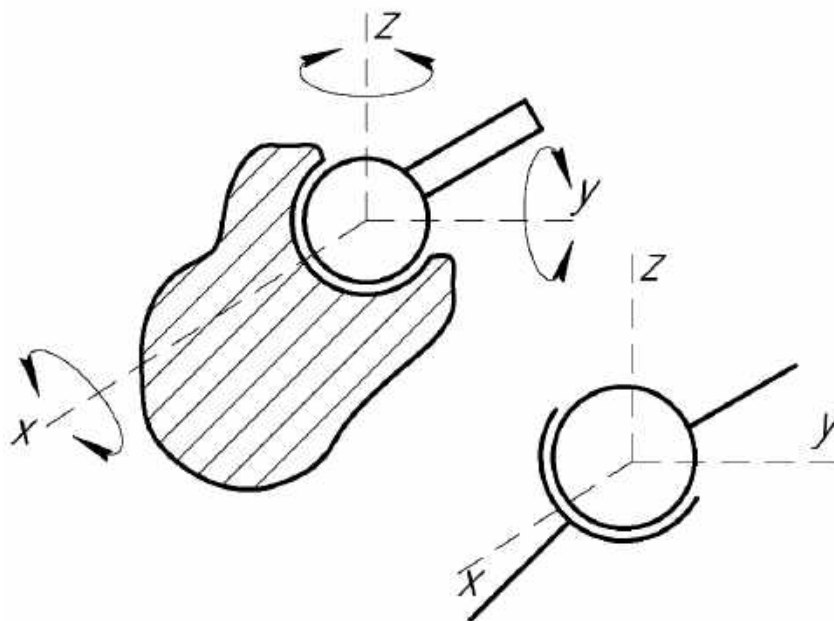


Рис. 1.4. Приклад кінематичної пари 3-го класу

4. КП 4-го класу – циліндр у втулці (рис. 1.5), обмеження поступального переміщення вздовж осей y , z та обертального переміщення навколо тих же осей.

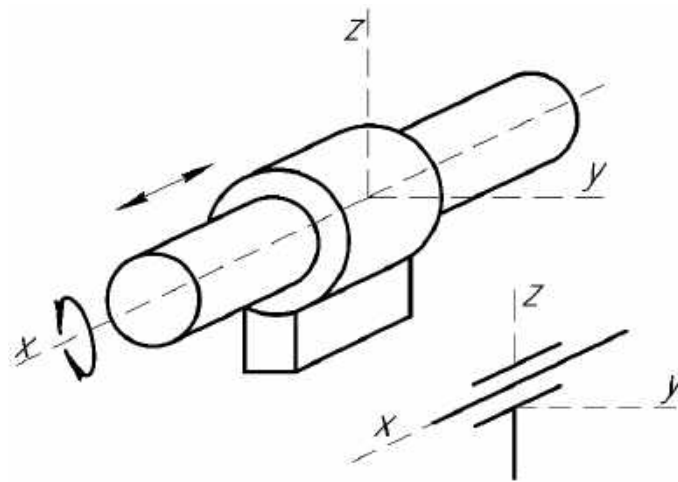


Рис. 1.5. Приклад кінематичної пари 4-го класу

5. КП 5-го класу – стрижень прямокутного поперечного перерізу у втулці такого самого перерізу (рис. 1.6).

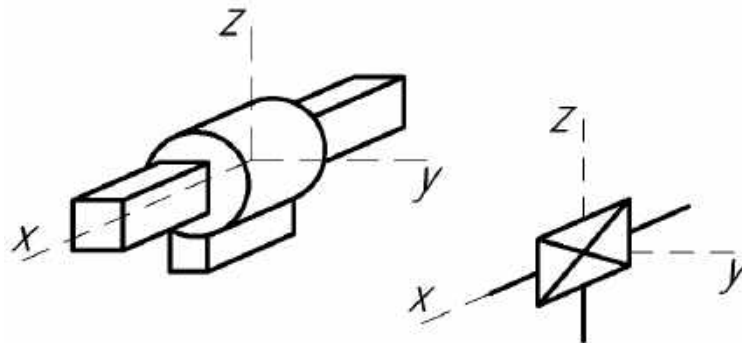


Рис. 1.6. Приклад кінематичної пари 5-го класу

Обмеження всіх переміщень, окрім поступального, вздовж осі x .

Виконувати аналіз механізму (кінематичний, динамічний), зручно використовуючи структурну або кінематичну схему. Структурна схема механізму – це графічне його зображення з умовними зображеннями ланок і кінематичних пар без позначення розмірів ланок.

У кінематичних схемах є додаткова інформація, необхідна для аналізу кінематики й конструкції механізму, про взаємне розташування ланок, їх розміри, взаємне переміщення.

У механізмах маніпуляторів застосовуються кінематичні пари переважно п'ятого класу, рідше – четвертого й зовсім рідко – третього класу. Це пояснюється тим, що пари високих класів (першого, другого й третього) є складнішими з огляду як на конструкцію, так і на керування.

1.3. Ступені рухомості маніпулятора

Уведемо поняття кількості ступенів вільності механічної системи (механізму).

Кількістю ступенів вільності w механічної системи називають кількість незалежних параметрів (змінних), що визначають положення всіх точок

системи у вибраній системі відліку в будь-який момент часу. Вільне тверде тіло має шість ступенів вільності, оскільки його положення у вибраній системі відліку (наприклад, декартовій) можна визначити шістьма параметрами (координати x , y , z довільної, але конкретної, пов'язаної з тілом точки, яка дістала назву полюса, і трьома кутами, наприклад Ейлера, повороту тіла навколо полюса). Вільна точка має три ступені вільності (положення її в будь-який момент часу у вибраній системі відліку можна визначити трьома координатами).

Кількість ступенів вільності w механізму можна визначити такими способами:

1) подумки фіксуємо одну координату (лінійну x , y , s , ... будь-якої точки або кутову φ , ψ , ... для якогось тіла) і оцінюємо стан механізму. Якщо всі точки механізму не мають можливості рухатися, то $w = 1$;

2) в іншому випадку подумки фіксуємо другу координату (незалежну від першої) і оцінюємо стан механізму. Якщо після фіксування двох незалежних координат весь механізм стає нерухомим, то $w = 2$;

3) в іншому випадку подумки фіксуємо третю координату, незалежну від перших двох, і т. д.

Незалежність координат (параметрів) перевіряється таким чином: наприклад вибираємо параметри x , φ . Подумки зафіксувавши x , дивимося, чи може φ змінюватися довільним чином. Якщо так, то x і φ – незалежні.

Приклад. Визначити кількість ступенів вільності w плоского механізму, схему якого зображено на рис. 1.7.

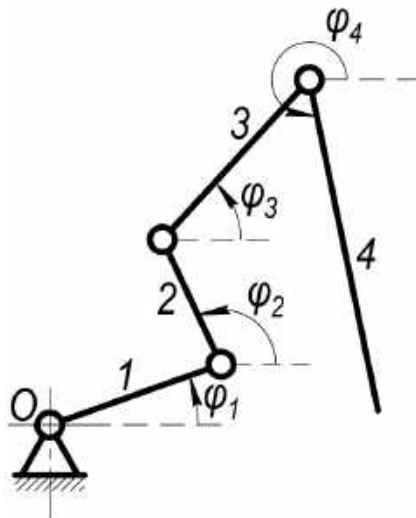


Рис. 1.7. Схема плоского механізму

Розв'язання:

1) подумки фіксуємо координату φ_1 : $\varphi_1 = c_1$; ланка 1 – нерухома, інші ланки можуть рухатися;

2) $\varphi_2 = c_2$; ланки 1, 2 – нерухомі, інші – рухомі;

3) $\varphi_3 = c_3$; ланки 1, 2, 3 – нерухомі, але ланка 4 може обертатися навколо точки 3–4;

4) $\varphi_4 = c_4$; механізм нерухомий.

Усі кути $\varphi_1 - \varphi_4$ (як координати) є незалежними, оскільки при уявному фіксуванні будь-якого з них інші можуть змінюватися довільним чином.

Для того щоб заданий механізм зробити нерухомим ($w = 0$), необхідно (і достатньо) зафіксувати чотири незалежних параметри (координати). Отже, кількість ступенів вільності вихідного механізму $w = 4$.

Якщо на рух тіла (ланки механізму) накладається обмеження з боку іншого тіла (ланки), при цьому одна або кілька перелічених вище координат не можуть змінюватися довільним чином, то кількість ступенів вільності його зменшується відповідно до кількості обмежень:

$$w = 6 - s, \quad (1.1)$$

де s – кількість обмежень або умов зв'язку.

Для маніпулятора як важільного механізму справджується формула Сомова – Малишева

$$w = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1, \quad (1.2)$$

де w – кількість ступенів вільності (ступінь рухомості) маніпулятора;

n – кількість рухомих ланок;

p_k , ($k = 1, 2, \dots, 5$) – кількість кінематичних пар k -го класу.

Якщо до складу маніпулятора входять кінематичні пари тільки п'ятого класу ($p_k = 0$, $k = 1, 2, 3, 4, 5$), то

$$w = 6n - 5p_5. \quad (1.3)$$

У маніпуляторі з послідовним з'єднанням рухомих ланок їх кількість дорівнює кількості кінематичних пар 5-го класу ($n = p_5$), і з (1.3) отримуємо

$$w = p_5, \quad (1.4)$$

тобто в таких маніпуляторах ступінь рухомості (кількість ступенів вільності) дорівнює кількості кінематичних пар і рухомих ланок.

Розрізняють такі види ступенів рухомості маніпулятора: координатні (глобальні) – відповідають за виведення маніпулятора в зону маніпулювання; переносні (робочі) – відповідають за виведення захоплювального пристрою у задані місця робочої зони; орієнтувальні

(локальні) – забезпечують необхідні орієнтації захоплювального пристрою у заданому місці робочої зони.

Надалі основну увагу буде приділено переносним ступеням рухомості.

Якщо робоча зона є просторовою, то маніпулятор повинен мати не менше трьох переносних ступенів рухомості, якщо плоскою – досить двох.

Класифікація переносних ступенів рухомості. Переносні ступені рухомості класифікують за базовими системами координат, у яких зручно вивчати рух центру захоплювального пристрою маніпулятора.

Базову систему координат маніпулятора визначає характер переносних ступенів рухомості, поступальних – Π і обертальних – O .

У механіці маніпулятора застосовують такі системи координат:

1. Прямокутна декартова (рис. 1.8).

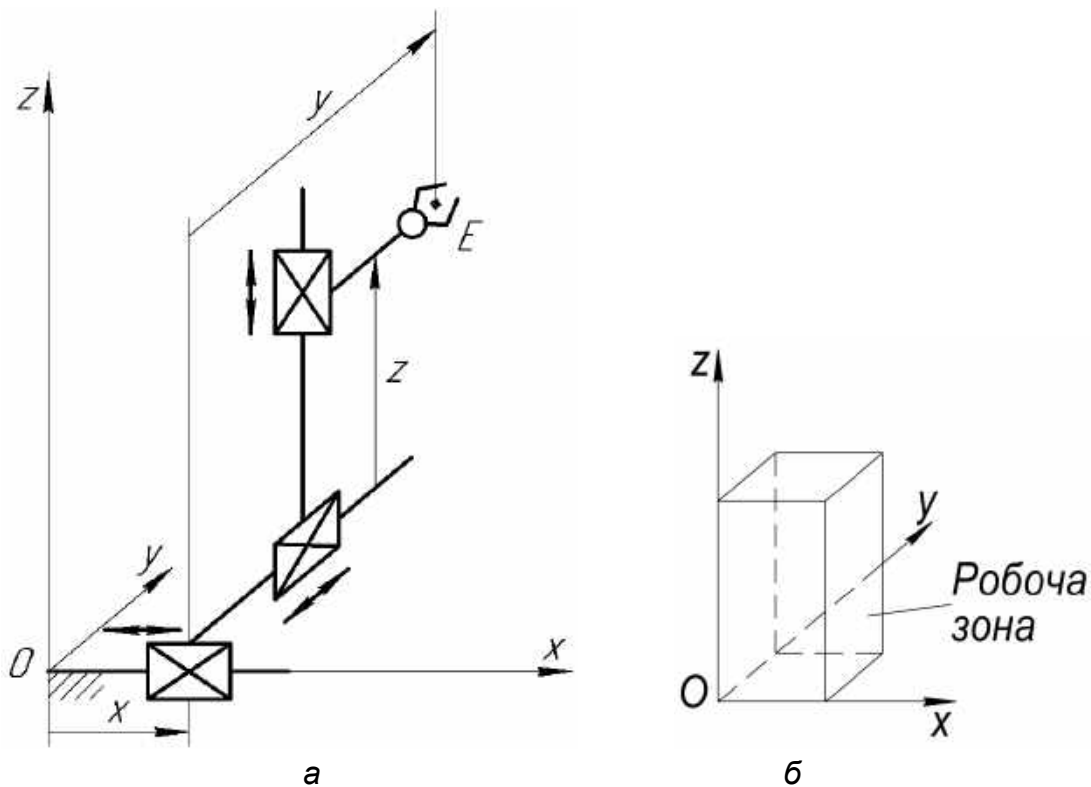


Рис. 1.8. Схема $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ маніпулятора в прямокутній декартовій системі координат

Схема $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$, зображена на рис. 1.8, а, реалізує три поступальних ступеня рухомості в трьох взаємно перпендикулярних напрямках. Положення центра E захоплювального пристрою відносно стояка визначається трьома лінійними (узагальненими) координатами x , y , z .

Форма робочої зони – прямокутний паралелепіпед (рис. 1.8, б).

2. Циліндрична (рис. 1.9).

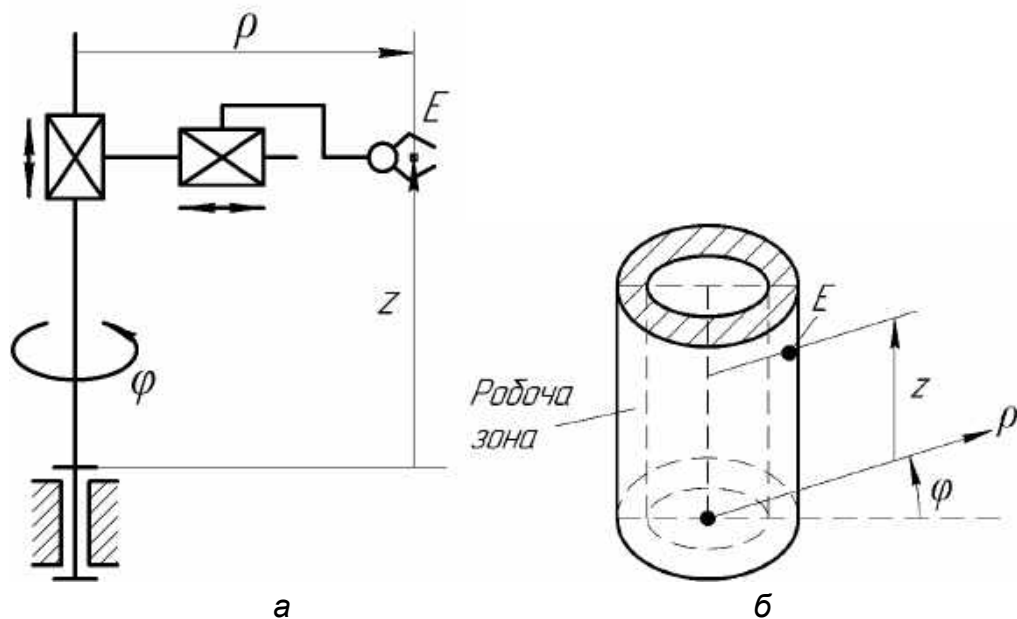


Рис. 1.9. Схема $O \parallel \Pi \perp \Pi$ маніпулятора в циліндричній системі координат

Схема $O \parallel \Pi \perp \Pi$, зображена на рис. 1.9, забезпечує реалізацію одного обертового і двох поступальних переносних ступенів рухомості. Положення центра захоплювального пристрою відносно стояка визначається кутовою координатою φ і двома лінійними координатами z і ρ . Система координат φ, z, ρ – циліндрична. Форму робочої зони або частину її встановлено між двома циліндричними поверхнями.

3. Сферична (рис. 1.10).

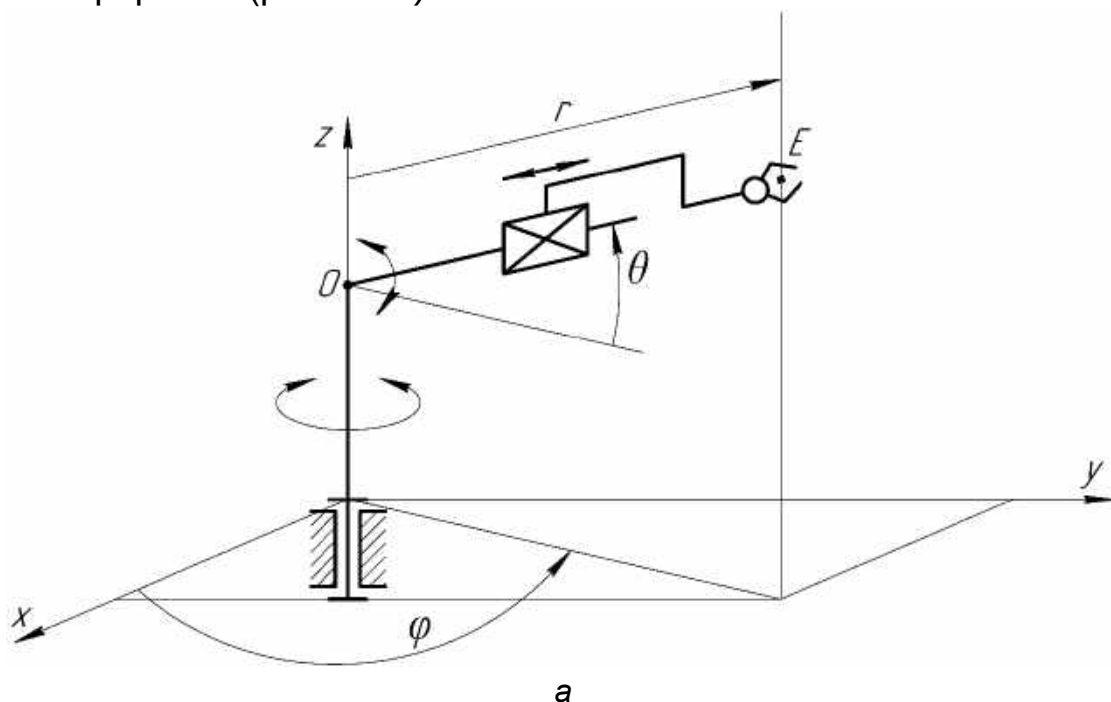


Рис. 1.10. Схема $O \perp O \perp \Pi$ маніпулятора у сферичній системі координат

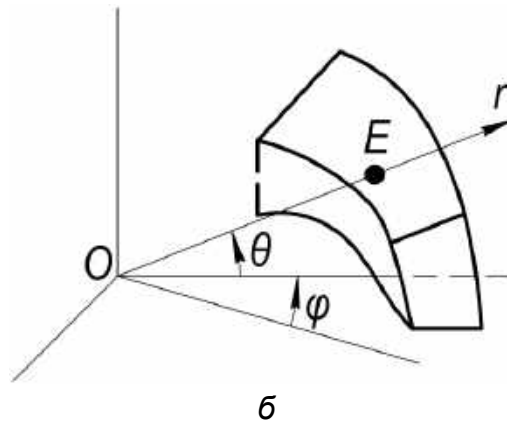


Рис. 1.10. Закінчення

Схема $O \perp O \perp \Pi$, зображена на рис. 1.10, реалізує два обертових ступені рухомості навколо взаємно перпендикулярних осей (ротацію φ відносно вертикальної осі і згин θ у вертикальній площині) і один поступальний r вздовж осі, перпендикулярній до осі згину. Система координат φ, θ, r – сферична. Форма робочої зони – область (або частина її), що знаходиться між двома сферичними поверхнями із загальним центром на осі згину.

4. Ангулярна (кутова) базова (рис. 1.11).

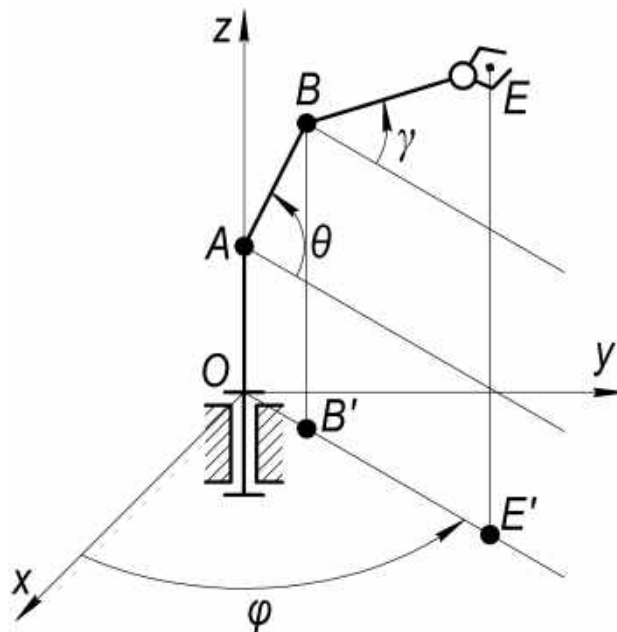


Рис. 1.11. Схема $O \perp O \parallel O$ маніпулятора в ангулярній (кутовій) системі координат

Схема $O \perp O \parallel O$, зображена на рис. 1.11, реалізує три обертових ступені рухомості: ротацію φ першої ланки навколо вертикальної осі і дві ротації θ, γ , унаслідок яких отримуються згини навколо паралельних

горизонтальних осей. Положення центра захоплювального пристрою відносно стояка визначається трьома кутовими координатами – φ , θ , γ , відповідна система координат – кутова або ангулярна. Форма робочої зони являє собою складну область з елементами, укладеними між сферичними поверхнями різних радіусів.

Традиційно механіку маніпулятора поділяють на три розділи – статику, кінематику й динаміку. У кожному з цих розділів ставляться свої завдання й розглядаються методики їх вирішення.

Предметом вивчення статичної механіки маніпулятора є його рівноважний стан під час дії на нього статичних навантажень, в основному сил тяжіння, сил приводів. Методи статичної механіки ґрунтуються на відомих з теоретичної механіки умовах рівноваги абсолютно твердого тіла, механічної системи. До основних завдань статичної механіки маніпулятора належать: визначення реакцій у кінематичних парах, оцінювання ступеня врівноваженості маніпулятора в різних положеннях під час добору противаг і пружин з метою оптимізації навантажень на його приводи; оцінювання статичної піддатливості (або оберненої до неї величини – жорсткості) маніпулятора, що залежить від величини пружних деформацій його ланок під статичним навантаженням. Слід зазначити, що ступінь піддатливості маніпулятора істотно впливає на точність його позиціонування.

У кінематиці маніпулятора вивчається його рух, а також рух його ланок з огляду на геометрію без урахування причин, що викликають цей рух, тобто без урахування силових факторів. Маса ланок маніпулятора також не враховується під час його кінематичного дослідження. У кінематиці маніпулятора предметами вивчення є траєкторії, переміщення, закони руху, лінійні швидкості й пришвидшення окремих його точок, а також закони обертання, кутові швидкості й пришвидшення його ланок.

У динаміці маніпулятора вивчається його рух (і окремих ланок) у зв'язку із взаємодіями з тілами, що його оточують, тобто при динамічному аналізі (або синтезі) маніпулятора враховуються як маси ланок, так і сили (і пари сил з моментами), які діють на ланки. На відміну від кінематики, де в рівнянні руху точок і ланок маніпулятора є якісь координати у функції від часу, у динаміці рухи точок і ланок описуються з допомогою диференціальних рівнянь, у яких є і масо-геометричні характеристики ланок (маси, моменти інерції ланок), і силові навантаження (зосереджені сили, моменти пар сил), що діють на ланки маніпулятора.

Більш детально про задачі в кожному з розділів механіки маніпулятора і про методи їх розв'язання викладено у відповідних розділах посібника.

2. СТАТИКА МАНІПУЛЯТОРА

Предметом вивчення статички маніпулятора M є його поведження під час дії на нього статичних навантажень, таких як сили тяжіння, сили приводів ланок тощо.

До основних завдань статички маніпулятора відносять: визначення реакцій в кінематичних парах, необхідних (і достатніх) величин сил (моментів) приводів для забезпечення рівноваги маніпулятора в заданому його положенні, статичної піддатливості (або оберненої до неї величини – жорсткості) маніпулятора, що залежить від ступеня пружних деформацій ланок під статичним навантаженням.

2.1. Умови рівноваги маніпулятора

Для механізму маніпулятора (у загальному випадку – просторового) умовами рівноваги є такі рівняння:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx}^e = 0, \sum_{k=1}^n F_{ky}^e = 0, \sum_{k=1}^n F_{kz}^e = 0; \\ \sum_{k=1}^n M_x(\bar{F}_k^e) = 0, \sum_{k=1}^n M_y(\bar{F}_k^e) = 0, \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

де $F_{kx}^e, F_{ky}^e, F_{kz}^e$ – проєкції сили $\bar{F}_k^e$ на осі x, y, z (некомпланарні осі);

$M_x(\bar{F}_k^e), M_y(\bar{F}_k^e), M_z(\bar{F}_k^e)$ – моменти сили $\bar{F}_k^e$ відносно осей x, y, z відповідно.

Умови (2.1) можна записати, як для механізму в цілому, так і для окремої його частини (ланки або сукупності суміжних ланок). Назвемо це об'єктом рівноваги.

Передбачається, що до об'єкта прикладено всі активні (задані) сили, і цей об'єкт є звільненим від зовнішніх зв'язків. Під час звільнення від зв'язків їх дія на об'єкт замінюється відповідними реакціями. Отримана сукупність сил (зовнішніх відносно певного об'єкта) – активних і реакцій зв'язків – у разі рівноваги об'єкта являє собою врівноважену (у загальному випадку – довільну) систему сил, тобто

$$(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \bar{F}_n) \sim 0. \quad (2.2)$$

Досліджуючи положення рівноваги маніпулятора або його частини, фактично умови (рівняння) рівноваги (2.1) складаються для системи сил (2.2), прикладених до об'єкта – маніпулятора в цілому або його частини.

Очевидно, що для просторового механізму, до складу якого входять s ланок, можна скласти $6s$ умов (незалежних рівнянь) рівноваги.

Для плоского механізму (усі осі його ланок і навантаження розташовано у фіксованій площині, наприклад xy) система сил (2.2) – плоска й умови рівноваги мають такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx}^e &= 0; \\ \sum_{k=1}^n F_{ky}^e &= 0; \\ \sum_{k=1}^n M_z(\bar{F}_k^e) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

Для такого механізму, утвореного s ланками, незалежних рівнянь рівноваги має бути $3s$.

2.2. Приклади статичного розрахунку маніпулятора

Приклад 1. Задано схему $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ (з прямокутною декартовою системою координат). Осі Ox , Oy – горизонтальні, вісь Oz спрямована вертикально вгору (рис. 2.1).

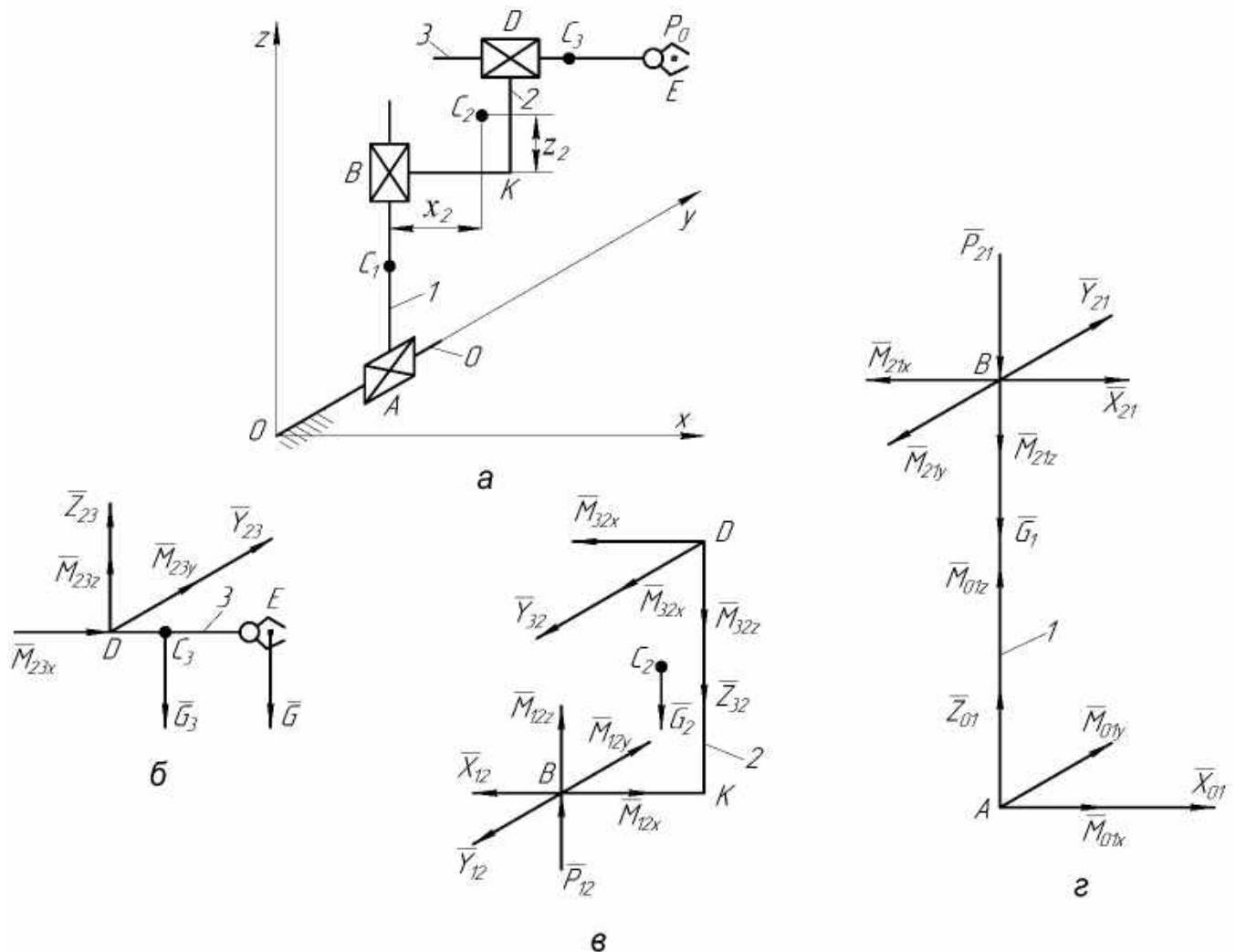


Рис. 2.1. Схеми статичного розрахунку маніпулятора (схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$)

На рис. 2.1, а, зображено схему маніпулятора з трьома поступальними кінематичними парами А, В, D.

У положенні рівноваги вважаємо заданими:

G_1, G_2, G_3 – ваги ланок (на рис. 2.1 ланки пронумеровано),

G – вага робочого органу (захоплювального пристрою) разом з вантажем E ,

C_1, C_2, C_3 – центри тяжіння ланок; розміри OA, AB, BK, KD, DE, C_3E вважаємо відомими.

Визначити реакції в кінематичних парах А, В, D.

Тертям в кінематичних парах знехтувати.

Розв'язання

Розіб'ємо маніпуляційну систему (див. рис. 2.1, а) на частини й розглянемо рівновагу кожної ланки окремо. На рис. 2.1, б – г показано такі сили:

$\bar{G}, \bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3$ – сили тяжіння вантажу E із захоплювальним пристроєм ланок 1, 2, 3 відповідно;

$\bar{P}$ – сила приводу, що забезпечує рівновагу;

$\bar{X}_{ik}, \bar{Y}_{ik}, \bar{Z}_{ik}$ ($i = 0, 1, 2; k = i + 1$) – складові зосередженої реакції $\bar{R}_{ik}$ уздовж осей x, y, z відповідно в кінематичній парі, що з'єднує ланки з номерами i, k . Наприклад, $\bar{Y}_{23}$ – складова вздовж осі y реакції $\bar{R}_{23}$, що діє з боку ланки 2 на ланку 3.

Коли немає тертя в кінематичних парах у разі рівноваги маніпулятора, керувальних дій, що переміщують робочий орган по горизонталі, також немає, тому сили P_{01} і P_{12} , які характеризують ці дії, дорівнюють нулю. На рис. 2.1 їх не показано.

Коли немає тертя в кінематичних парах, реакції мають розподілений, спрямований по нормалі до осі пари характер. Замінюємо кожну з розподілених реакцій однією силою $\bar{R}_{ik} = \bar{X}_{ik} + \bar{Y}_{ik} + \bar{Z}_{ik}$, прикладеною посередині довжини втулки.

$M_{ikx}, M_{iky}, M_{ikz}$ ($i = 0, 1, 2; k = i + 1$) – осьові реактивні моменти (проекції на осі x, y, z відповідно момента $\bar{M}_{ik}$ реактивної пари, що діє з боку ланки з номером i на ланку з номером k). Наприклад, M_{01z} – складова вздовж осі z векторного моменту реактивної пари, що діє з боку ланки 0 на ланку 1.

Очевидно, для оптимізації розв'язання рівнянь рівноваги послідовність складання їх має бути такою: спочатку для ланки 3, потім для ланки 2, потім для ланки 1.

Складемо умови (рівняння) рівноваги (2.1).

Для ланки 3 (див. рис. 2.1, б)

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0; 0 = 0; \\ \sum F_y &= 0; Y_{23} = 0; \\ \sum F_z &= 0; -G - G_3 + Z_{23} = 0; \\ \sum M_{Dx} &= 0; M_{23x} = 0; \\ \sum M_{Dy} &= 0; G \cdot DE + G_3 \cdot DC_3 + M_{23y} = 0; \\ \sum M_{Dz} &= 0; M_{23z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

Із системи рівнянь (2.4) отримаємо

$$\left. \begin{aligned} Y_{23} &= 0; Z_{23} = G + G_3; M_{23x} = 0; \\ M_{23y} &= -G \cdot DE - G_3 \cdot DC_3; M_{23z} = 0. \end{aligned} \right| \quad (2.5)$$

Для ланки 2 (див. рис. 2.1, в)

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0; X_{12} = 0; \\ \sum F_y &= 0; -Y_{32} - Y_{12} = 0; \\ \sum F_z &= 0; -G_2 + P_{12} - Z_{32} = 0; \\ \sum M_{Bx} &= 0; -M_{32x} + M_{12x} = 0; \\ \sum M_{By} &= 0; -M_{32y} + M_{12y} + G_2 x_2 + Z_{32} \cdot BK - Y_{32} \cdot DK = 0; \\ \sum M_{Bz} &= 0; M_{12z} - M_{32z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Розв'язавши рівняння рівноваги для ланки 2, отримаємо

$$\left. \begin{aligned} X_{12} &= 0, Y_{12} = -Y_{32} = 0, P_{12} = G_2 + Z_{32} = G_2 + G + G_3; \\ M_{12x} &= M_{32x} = 0, M_{12z} = M_{32z} = 0; \\ M_{12y} &= M_{32y} - G_2 \cdot x_2 - Z_{32} \cdot BK + Y_{32} \cdot DK = \\ &= -G \cdot DE - G_3 \cdot DC_3 - G_2 \cdot x_2 - (G + G_3) \cdot BK. \end{aligned} \right| \quad (2.7)$$

Для ланки 1 (див. рис. 2.1, а)

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0; X_{01} + X_{21} = 0; \\ \sum F_y &= 0; Y_{21} = 0; \\ \sum F_z &= 0; -G_1 - P_{21} + Z_{01} = 0; \\ \sum M_{Ax} &= 0; M_{01x} - Y_{21} \cdot AB - M_{21x} = 0; \\ \sum M_{Ay} &= 0; M_{01y} + X_{21} \cdot AB - M_{21y} = 0; \\ \sum M_{Az} &= 0; M_{01z} - M_{21z} = 0; \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

З рівнянь для ланки 1 отримаємо

$$\left. \begin{aligned} X_{01} &= -X_{21} = 0, Y_{21} = 0, Z_{01} = G_1 + P_{21} = G + G_1 + G_2 + G_3; \\ M_{01x} &= Y_{21} \cdot AB + M_{21x} = 0; \\ M_{01y} &= -X_{21} \cdot AB + M_{21y} = \\ &= -G \cdot DE - G_3 \cdot DC_3 - G_2 x_2 - (G + G_3) \cdot BK; \\ M_{01z} &= M_{21z} = 0. \end{aligned} \right| \quad (2.9)$$

Таким чином, унаслідок розв'язання задачі отримано такі значення реакцій:

– у кінематичній парі *A* (0–1)

$$\left. \begin{aligned} X_{01} &= Y_{01} = 0; \\ Z_{01} &= P_{21} + G_1 = P_{12} + G_1 = G_1 + G_2 + G_3 + G; \\ M_{01x} &= M_{01z} = 0; \\ M_{01y} &= -G(DE + BK) - G_2 x_2 - G_3(BK + DC_3); \end{aligned} \right| \quad (2.10)$$

– у кінематичній парі *B* (1–2 або 2–1)

$$\left. \begin{aligned} X_{21} &= X_{12} = 0, Y_{21} = Y_{12} = 0, M_{12x} = M_{21x} = 0, M_{12z} = M_{21z} = 0; \\ M_{12y} &= M_{21y} = -G(DE + BK) - G_2 x_2 - G_3(BK + DC_3); \end{aligned} \right| \quad (2.11)$$

– у кінематичній парі *D* (2–3 або 3–2)

$$\left. \begin{aligned} Y_{23} &= Y_{32} = 0, Z_{23} = Z_{32} = G + G_3, M_{23x} = M_{32x} = 0; \\ M_{23z} &= M_{32z} = 0, M_{23y} = M_{32y} = -(G \cdot DE + G_3 \cdot DC_3). \end{aligned} \right| \quad (2.12)$$

Величина сили приводу, що утримує в рівновазі маніпулятор, $P = P_{12} = P_{21} = G + G_2 + G_3$.

Підставивши в отримані результати числові значення розмірів (DE , BK , DC_3) і величини сил тяжіння (G , G_1 , G_2 , G_3), знайдемо значення всіх реакцій у кінематичних парах A , B , D .

Зауваження. Значення реакцій M_{01y} , M_{12y} , M_{23y} , очевидно, будуть від'ємними. Це означає, що дійсний напрямок кожної з них є протилежним вибраному на відповідній схемі. Наприклад: $M_{12y} < 0$ (формули (2.10) – (2.12)). На схемі (див. рис. 2.1, в) M_{12y} має напрямок, що збігається з напрямком осі Oy . Дійсний напрямок цього моменту є протилежним напрямку Oy , тобто з кінця осі Oy дію цієї пари сил (з моментом M_{12y}) подають спрямованим за рухом стрілки годинника.

Приклад 2. Задано схему $O \parallel O$ (рис. 2.2, а).

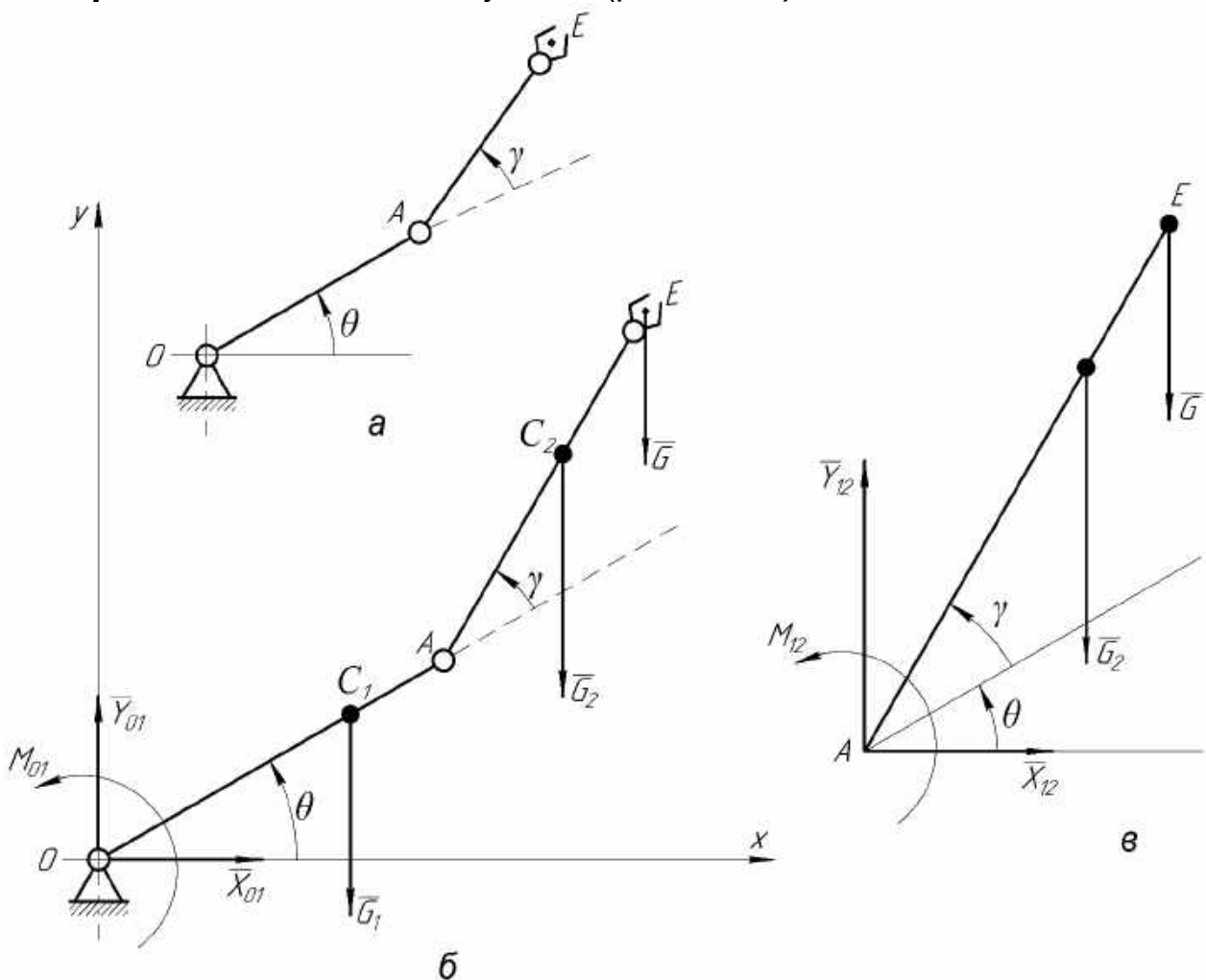


Рис. 2.2. Статичний розрахунок маніпулятора схеми $O \parallel O$ (ангулярна система координат)

Знайти реакції в кінематичних парах O , A і величини моментів M_1 , M_2 приводів, що утримують у рівновазі плоский маніпулятор (рис. 2.2, а) в положенні $\theta = \theta_0$, $\gamma = \gamma_0$. Вважати відомими:

$$OA = \ell_1; AE = \ell_2; OC_1 = a_1; AC_2 = a_2;$$

C_1, C_2 – центри тяжіння ланок 1, 2 відповідно;

G_1, G_2, G – ваги ланок 1, 2 і захоплювального пристрою E з вантажем відповідно. Тертя в кінематичних парах не враховувати. Механізм маніпулятора розташований у вертикальній площині.

Розв'язання

На рис. 2.2, б показано схему механізму маніпулятора з зовнішніми навантаженнями, що діють на нього.

Запишемо рівняння рівноваги для механізму в цілому:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0: X_{01} &= 0; \\ \sum F_y = 0: Y_{01} - G_1 - G_2 - G &= 0; \\ \sum M_0 = 0: M_{01} - G_1 \alpha_1 \cos \theta - G_2(\ell_1 \cos \theta + \alpha_2 \cos(\theta + \gamma)) - \\ - G(\ell_1 \cos \theta + \ell_2 \cos(\theta + \gamma)) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Нагадаємо, що в рівняння рівноваги для механічної системи мають входити тільки зовнішні (відносно неї) навантаження. Пара сил з моментом M_2 (рис. 2.3), що забезпечує рівновагу ланки 2 відносно 1, є внутрішнім навантаженням (взаємодії між ланками механізму), тому в рівняння момент M_2 не додається:

$$M_{21} = M_{12} = M_2.$$

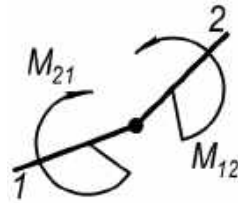


Рис. 2.3. Схема взаємодії ланки 1, на якій установлено привід із суміжною ланкою 2 при з'єднанні ланок обертальною кінематичною парою

Розв'язавши систему рівнянь (2.13), отримаємо

$$\left. \begin{aligned} X_{01} &= 0; Y_{01} = G_1 + G_2 + G; \\ M_1 = M_{01} &= G_1 \alpha_1 \cos \theta + G_2(\ell_1 \cos \theta + \alpha_2 \cos(\theta + \gamma)) + \\ &+ G(\ell_1 \cos \theta + \ell_2 \cos(\theta + \gamma)). \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Рівняння рівноваги для ланки 2 (рис. 2.2, в) мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x = 0: X_{12} &= 0; \\ \sum F_y = 0: Y_{12} - G_2 - G &= 0; \\ \sum M_A = 0: M_{12} - G_2 \alpha_2 \cos(\theta + \gamma) - G \ell_2 \cos(\theta + \gamma) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

Розв'язання системи рівнянь (2.15) має такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} X_{12} = X_{21} = 0; Y_{12} = Y_{21} = G_1 + G_2; \\ M_2 = M_{12} = M_{21} = G_2 \alpha_2 \cos(\theta + \gamma) + G \ell_2 \cos(\theta + \gamma). \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

Тут X_{12}, Y_{12} – дія ланки 1 на ланку 2, X_{21}, Y_{21} – дія ланки 2 на ланку 1, X_{01}, Y_{01} – реакції стояка на ланку 1.

Приклад 3. Задано схему $O \parallel \Pi \perp \Pi$ (з циліндричною системою координат) (рис. 2.4, а).

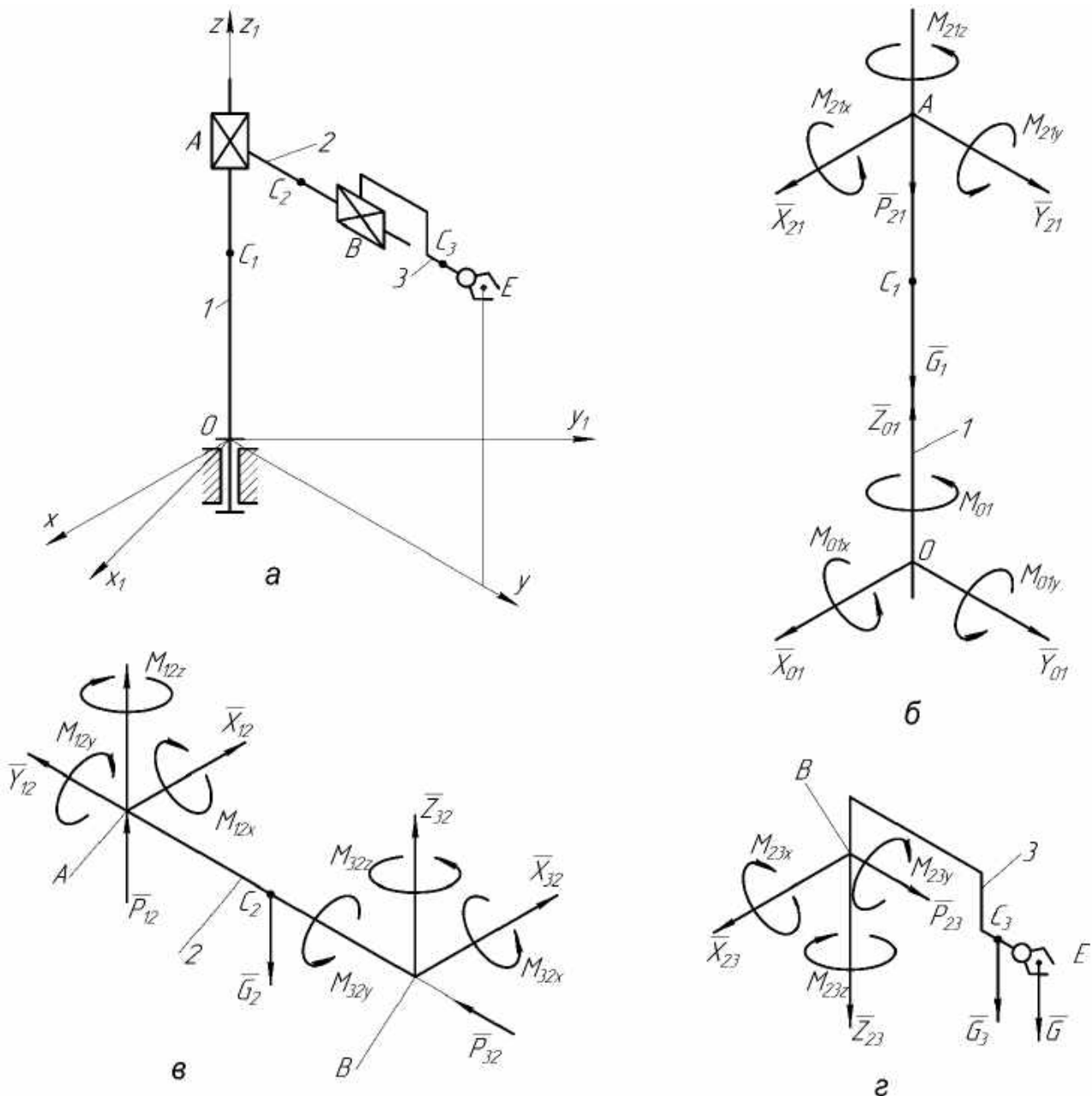


Рис. 2.4. Статичний розрахунок маніпулятора схеми $O \parallel \Pi \perp \Pi$ (з циліндричною системою координат)

На рис. 2.4, а зображено схему триланкового (треступеневого) маніпулятора (вважаємо, що робочий орган з вантажем E належить до третьої ланки). Система координат $Ox_1y_1z_1$ є нерухомою й пов'язаною зі стояком O . Система $Oxyz$ пов'язана з ланкою 1 маніпулятора і є такою, що поздовжні геометричні осі ланок 1, 2, 3 маніпулятора знаходяться в координатній площині yOz . Вісь Ox цієї системи координат спрямована перпендикулярно до площини yOz так, що система $Oxyz$ є правою.

На рис. 2.4, б – г показано розрахункові схеми для складання рівнянь рівноваги ланок 1, 2, 3 відповідно. Переріз виконано за кінематичними парами O, A, B .

На рис 2.4, б: $\bar{X}_{01}, \bar{Y}_{01}, \bar{Z}_{01}$ – складові реакції стояка O на ланку 1; M_{01x}, M_{01y} – проєкції на осі Ox, Oy векторного реактивного моменту стояка O на ланку 1; $\bar{X}_{21}, \bar{Y}_{21}$ – складові реакції ланки 2 на ланку 1, $M_{21x}, M_{21y}, M_{21z}$ – проєкції на осі Ox, Oy, Oz відповідно векторного моменту пари сил, що діють з боку ланки 2 на ланку 1 (A – поступальна кінематична пара). $\bar{P}_{21}$ – «відповідь» на дію приводу рушійної ланки 2 по вертикалі.

На рис 2.4, в: $\bar{X}_{12}, \bar{Y}_{12}$ – складові реакції ланки 1 на ланку 2, $M_{12x}, M_{12y}, M_{12z}$ – проєкції на осі Ox, Oy, Oz векторного моменту пари сил, що діють з боку ланки 1 на ланку 2; $\bar{X}_{32}, \bar{Z}_{32}$ – складові реакції ланки 3 на ланку 2; $M_{32x}, M_{32y}, M_{32z}$ – проєкції на осі Ox, Oy, Oz векторного моменту пари сил, що діють з боку ланки 3 на ланку 2; $\bar{G}_2$ – вага ланки 2; $\bar{P}_{12}$ – сила приводу, що рухає ланку 2 ввєрх-униз; $\bar{P}_{32}$ – «відповідь» на дію приводу, що рухає ланку 3 відносно ланки 2.

На рис. 2.4, г: $\bar{X}_{23}, \bar{Z}_{23}$ – складові реакції ланки 2 на ланку 3; $M_{23x}, M_{23y}, M_{23z}$ – проєкції на осі Ox, Oy, Oz векторного моменту пари сил, що діє з боку ланки 2 на ланку 3; $\bar{G}_3, \bar{G}$ – ваги ланки 3 і захоплювального пристрою з вантажем E ; $\bar{P}_{23}$ – сила приводу, що рухає ланку 3 відносно ланки 2. Усі реакції в кінематичних парах A, B як внутрішні для маніпулятора (як механічної системи) сили задовольняють умови рівності й протидії – однакові за модулем і спрямовані вздовж однієї прямої в протилежні боки, тобто

$$\left. \begin{aligned} X_{ik} &= X_{ki}, Y_{ik} = Y_{ki}, Z_{ik} = Z_{ki}, M_{ikx} = M_{kix}, \\ M_{iky} &= M_{kiy}, M_{ikz} = M_{kiz}, (i = 0, 1, 2; k = i + 1). \end{aligned} \right| \quad (2.17)$$

Протилежність напрямків ураховано на рис. 2.4, б – г.

Складемо рівняння рівноваги (2.1) для кожної з ланок. Очевидно, що для спрощення розв'язання рівнянь слід розглядати рівновагу в такому порядку: ланка 3, ланка 2, ланка 1.

Для ланки 3:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0; X_{23} = 0; \\ \sum F_y &= 0; P_{23} = 0; \\ \sum F_z &= 0; -G_3 - G - Z_{23} = 0; \\ \sum M_{Bx} &= 0; -G \cdot BE - G_3 \cdot BC_3 - M_{23x} = 0; \\ \sum M_{By} &= 0; -M_{23y} = 0; \\ \sum M_{Bz} &= 0; -M_{23z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.18)$$

Розв'язання системи рівнянь (2.18) дає такий результат:

$$\left. \begin{aligned} X_{23} &= 0; Z_{23} = -(G + G_3); \\ M_{23y} &= M_{23z} = 0; M_{23x} = -(G \cdot BE + G_3 \cdot BC); \\ P_{23} &= 0. \end{aligned} \right| \quad (2.19)$$

Аналіз результатів:

1) $P_{23} = 0$. Це означає, що в разі рівноваги маніпулятора привод, який рухає ланку 3 відносно ланки 2, є вимкненим;

2) усі навантаження, що діють на ланку 3, у разі рівноваги розташовано в площині yOz (вертикальній).

Реакції Z_{23} і M_{23x} спрямовано протилежно показаним на рис. 2.4, а.

Для ланки 2. Рівняння рівноваги є такими:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0; -X_{12} - X_{32} = 0; \\ \sum F_y &= 0; -Y_{12} - P_{32} = 0; \\ \sum F_z &= 0; P_{12} - G_2 + Z_{32} = 0; \\ \sum M_{Ax} &= 0; -M_{12x} - G_2 \cdot AC_2 + Z_{32} \cdot AB = 0; \\ \sum M_{Ay} &= 0; -M_{12y} + M_{32y} = 0; \\ \sum M_{Az} &= 0; -M_{12z} + M_{32z} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Розв'язавши систему рівнянь (2.20) з урахуванням результатів (2.19) і умов (2.17), отримаємо

$$\left. \begin{aligned} X_{12} &= -X_{32} = 0; M_{12y} = M_{32y} = 0; M_{12z} = M_{32z} = 0; \\ Y_{12} &= -P_{32} = -P_{23} = 0; \\ P_{12} &= G_2 - Z_{32} = G_2 + G + G_3; \\ M_{12x} &= -G_2 \cdot AC_2 + Z_{32} \cdot AB = -G_2 \cdot AC_2 - (G + G_3) \cdot AB. \end{aligned} \right| \quad (2.21)$$

Аналіз результатів:

1) щоб забезпечити рівновагу досліджуваного маніпулятора в довільному положенні, достатньо зусилля приводу 1–2, однакового за модулем із сумою ваг ланок 2, 3 і робочого органу з вантажем;

2) дійсний напрямок дії пари сил з моментом M_{12x} є протилежним показаному на рис 2.4, в.

Як і для ланки 3, усі статичні навантаження, у тому числі реакції в кінематичних парах A, B , розташовано в площині yOz .

Для ланки 1 система рівнянь рівноваги є такою:

$$\left. \begin{aligned} \sum F_x &= 0; X_{01} + X_{21} = 0; \\ \sum F_y &= 0; Y_{01} + Y_{21} = 0; \\ \sum F_z &= 0; -G_1 + Z_{01} - P_{21} = 0; \\ \sum M_{Ax} &= 0; M_{21x} + M_{01x} + Y_{01} \cdot OA = 0; \\ \sum M_{Ay} &= 0; M_{21y} + M_{01y} - X_{01} \cdot OA = 0; \\ \sum M_{Az} &= 0; M_{21z} + M_{01} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.22)$$

Розв'язавши систему рівнянь рівноваги (2.22) з урахуванням (2.21) і співвідношень (2.17), отримаємо

$$\left. \begin{aligned} X_{01} &= -X_{21} = 0; Y_{01} = -Y_{21} = 0; M_{01} = -M_{21z} = 0; \\ Z_{01} &= P_{21} + G_1 = G_1 + G_2 + G_3 + G; \\ M_{01x} &= -M_{21x} = -M_{12x} = G_2 \cdot AC_2 + (G + G_3) \cdot AB; \\ M_{01z} &= -M_{21z} = 0. \end{aligned} \right| \quad (2.23)$$

Аналіз результатів: ненульові значення реакцій (Z_{01}, M_{01x}) є додатними, отже, їх напрямки, показані на рис. 2.4, б, відповідають дійсності.

2.3. Знаходження керувальних впливів (сил, моментів), що забезпечують задане положення рівноваги маніпулятора з допомогою принципу віртуальних переміщень

Принципи віртуальних переміщень (ПВП). На початку розділу «Статика маніпулятора» було сформульовано умови рівноваги механічної

системи, які полягають в рівності нулю сум проєкцій на три некомпланарних осі й сум моментів відносно цих осей всіх зовнішніх сил, що діють на розглянуту механічну систему. Для невідільної механічної системи (прикладом якої є маніпулятор) ці умови, записані для всієї системи або для будь-якої її частини, були рівняннями для визначення статичних реакцій. З рівнянь рівноваги, записаних для маніпулятора в цілому і для окремих його ланок, визначалися реакції в кінематичних парах, рушійні сили й моменти приводів. Для просторового маніпулятора, до складу якого входять, наприклад, три ланки для визначення реакцій у КП і рушійних сил (і моментів), необхідно було в загальному випадку вирішити систему з 18 рівнянь (по шість для кожної ланки) з 18 невідомими. Разом з тим є спосіб, що дає змогу знайти будь-яке невідоме (реакцію, рушійну силу, момент), склавши лише одне рівняння. Цей спосіб базується на принципі віртуальних переміщень. Наведемо його формулювання: *для рівноваги сил у кожній точці механічної системи, підпорядкованої ідеальним, двостороннім стаціонарним зв'язкам, необхідно й достатньо, щоб алгебрична сума елементарних робіт активних сил, що діють на систему, на будь-якому з віртуальних переміщень системи дорівнювала нулю:*

$$\sum_k \delta A(\bar{F}_k) = \sum_k \bar{F}_k \delta \bar{r}_k + \sum_i \bar{M}_i \delta \bar{\varphi}_i = 0, \quad (2.24)$$

де $\bar{F}_k$, $\bar{M}_i$, – активні сили й моменти, що діють на ланки маніпулятора (тут і далі під механічною системою будемо мати на увазі маніпулятор);

$\delta \bar{r}_k$ – лінійне віртуальне переміщення точки, у якій прикладено зосереджену силу $\bar{F}_k$;

$\delta \bar{\varphi}_i$ – обертальне віртуальне переміщення тіла, до якого прикладено пару сил з моментом $\bar{M}_i$.

У загальному випадку для маніпулятора, ступінь рухомості якого є W , рівність (2.24) дає змогу скласти W незалежних рівнянь рівноваги.

Дійсно, якщо ввести до розгляду узагальнені координати маніпулятора (більш детально про узагальнені координати викладено в розділі «Динаміка маніпулятора») $q_1, q_2, \dots, q_W$ (незалежні змінні, які точно визначають положення всіх рухомих ланок маніпулятора відносно стійки) і виразити всі віртуальні переміщення в (2.24) $\delta r_k, \delta \varphi_i$ через варіації узагальнених координат δq_j ($j = 1, 2, \dots, W$), то рівняння (2.24) набуде вигляду

$$\sum \delta A(\bar{F}) = \sum_{j=1}^W Q_j \delta q_j = 0, \quad (2.25)$$

звідки (оскільки всі δq є незалежними й відмінними від нуля) випливає, що

$$Q_j = 0, j = 1, 2, \dots, W. \quad (2.26)$$

Силу Q_j називають узагальненою силою механічної системи (у цьому випадку – маніпулятора), що відповідає узагальненій координаті q_j . Умови (2.26) мають назву принципу віртуальних переміщень в узагальнених координатах. Механічний зміст рівностей (2.26) полягає в тому, що вони є умовами (рівняннями) рівноваги маніпулятора. Їх кількість дорівнює ступеню рухомості W (кількості ступенів вільності) маніпулятора.

Якщо зв'язки, накладені на ланки маніпулятора, є ідеальними (наприклад, зв'язки без тертя), то рівнянь, отриманих з допомогою ПВП, достатньо для визначення всіх сил і моментів приводів, які забезпечують рівновагу маніпулятора в заданому положенні.

При наявності тертя в кінематичних парах (у випадку, коли тертя є великим і його слід урахувувати) можливими є два варіанти:

1. Коефіцієнт тертя в КП є відомим. У цьому випадку сила тертя в поступальній КП і момент тертя в обертальній КП визначаються формулами

$$F_{\text{тер}} = f R_n, \quad (2.27)$$

$$M_{\text{тер}} = f r R_n, \quad (2.28)$$

де R_n – величина нормальної реакції в КП;

r – радіус циліндричної поверхні обертальної КП. Реакції зв'язків фактично стають заданими навантаженнями. Для визначення R_n у кінематичній парі (наприклад, A) виконується переріз по з'єднанню A , і для кожної з частин маніпулятора, що знаходяться по обидва боки від перерізу A , складаються рівняння рівноваги.

2. Коефіцієнт тертя в КП є невідомим. У цьому випадку кількість рівнянь рівноваги, що базуються на ПВП (2.24), залишається такою, що дорівнює W (ступеню рухомості маніпулятора, або кількості узагальнених координат), а невідомих – більше на кількість КП з тертям. Іншими словами, до рушійних сил (у поступальних КП) і рушійних моментів (в обертальних КП) приводів, які підлягають визначенню, додаються сили (моменти) тертя в кінематичних парах. Тому в цьому випадку задача визначення сил і моментів приводів, які забезпечують рівновагу маніпулятора в необхідному положенні, однозначного розв'язку не має.

Методика визначення керувальних сил і моментів в положенні рівноваги маніпулятора

Будемо вважати, що зв'язки, накладені на ланки маніпулятора, є ідеальними, тобто сума віртуальних робіт реакцій зв'язків дорівнює нулю:

$$\sum \delta A(\bar{R}) = \sum \bar{R} \cdot \delta \bar{r} = 0, \quad (2.29)$$

де $\bar{R}$ – реакція в кінематичній парі;

$\delta \bar{r}$ – віртуальне відносне переміщення точки, у якій прикладено реакцію $\bar{R}$ (при наявності зв'язків з тертям з відомими коефіцієнтами тертя сили,

моменти тертя за описаною вище методикою переводимо з категорії реакцій зв'язків у категорію заданих сил).

У досліджуваному положенні рівноваги маніпулятора:

1) прикладаємо до його ланок задані активні навантаження – сили тяжіння, керувальні сили й моменти;

2) маніпулятору задаємо віртуальне переміщення. Віртуальне переміщення механічної системи (тут – маніпулятора) – це сукупність віртуальних переміщень ланок, тобто сукупність варіацій узагальнених координат $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_W$;

3) записуємо суму віртуальних робіт активних сил і прирівнюємо її до нуля;

4) прирівнявши нулю кожен з коефіцієнтів при незалежних варіаціях узагальнених координат $\delta q_1, \delta q_2, \dots, \delta q_W$, отримуємо систему з W рівнянь з невідомими керувальними силами і (або) моментами;

5) розв'язавши отриману систему рівнянь, знаходимо значення невідомих.

Такою є загальна методика отримання рівнянь рівноваги з допомогою принципу віртуальних переміщень (ПВП).

На практиці зручніше отримувати рівняння рівноваги таким способом.

Припустимо, потрібно визначити керувальну силу (момент), що відповідає узагальненій координаті q_ℓ ($\ell = 1, 2, \dots, W$). Якщо координата q_ℓ є лінійною (наприклад, $x, y, z, s, \dots$), то відповідна кінематична пара – поступальною, а керувальна сила $F_{\ell-1, \ell}$ – зосередженою, що діє з боку ланки з номером $(\ell - 1)$ на ланку з номером ℓ . Якщо ж координата q_ℓ є кутовою (наприклад, $\varphi, \psi, \theta, \alpha, \dots$), то відповідна кінематична пара – обертальною, а керувальним впливом є пара сил з моментом $M_{\ell-1, \ell}$, що діє з боку ланки з номером $(\ell - 1)$ на ланку з номером ℓ .

Повідомляємо маніпулятору віртуальне переміщення таке, що $\delta q_k = 0, k = 1, 2, \dots, W; k \neq \ell; \delta q_\ell \neq 0$, тобто в досліджуваному положенні рівноваги маніпулятора змінюється тільки узагальнена координата q_ℓ , інші залишаються незмінними. Рівняння (2.25) у цьому випадку набуде вигляду

$$\sum_{j=1}^W Q_j \delta q_j = Q_\ell \cdot \delta q_\ell = 0, \quad (2.30)$$

звідки

$$Q_\ell = 0. \quad (2.31)$$

До виразу узагальненої сили Q_ℓ (2.31), що відповідає узагальненій координаті q_ℓ , входить керувальна сила $F_{\ell-1, \ell}$, якщо кінематична пара, утворена ланками з номерами $(\ell - 1), \ell$, – поступальна; або керувальний момент $M_{\ell-1, \ell}$, якщо КП – обертальна. З отриманого рівняння (2.31) визначається величина керувальної сили (або моменту), що забезпечує

рівновагу маніпулятора за ℓ -м ступенем рухомості (за узагальненою координатою q_ℓ), тобто для знаходження величини керувального впливу (сили, моменту) за будь-яким ступенем рухомості досить одного рівняння, складеного описаним вище способом.

Приклад 1. Розглянемо маніпулятор М схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ (прямокутна система координат).

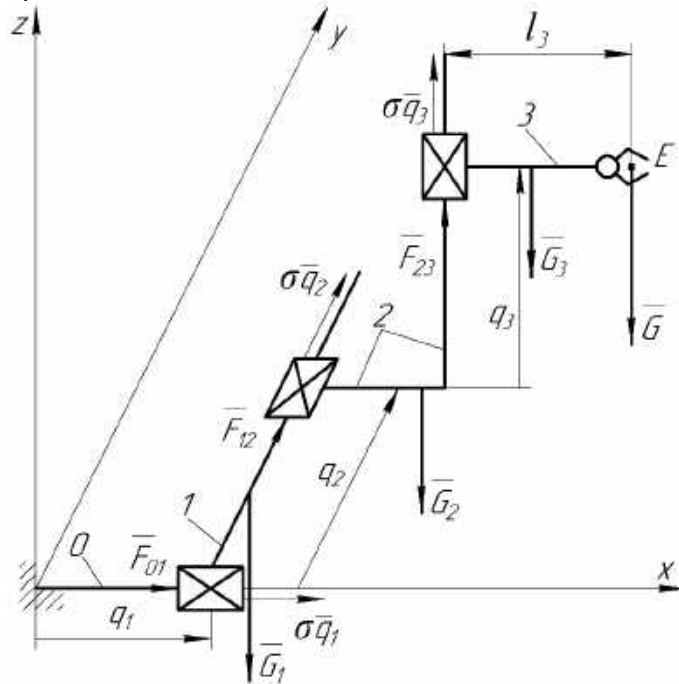


Рис. 2.5. Застосування принципів віртуальних переміщень для визначення керувальних сил, які забезпечують рівновагу маніпулятора схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ у заданому положенні

Знайдемо значення керувальних сил F_{01} , F_{12} , F_{23} , які забезпечують рівновагу маніпулятора М у положенні $q_1 = x_0$, $q_2 = y_0$, $q_3 = z_0$.

Вважаємо заданими величини сил тяжіння G_1 , G_2 , G_3 , G ланок і вантажу E із захоплювальним пристроєм відповідно; положення рівноваги (x_0, y_0, z_0) М у базовій системі координат $Oxyz$. Тертям у кінематичних парах знехтувати.

Розв'язання

1. Як узагальнені виберемо координати q_1 , q_2 , q_3 , указавши для кожної початок і додатний напрямок відліку (рис. 2.5). Очевидно, $q_1 = x - c_1$; $q_2 = y$; $q_3 = z$, де $c_1 = l_2 + l_3$; x , y , z – координати точки E (центру захоплювального пристрою) у базовій системі $Oxyz$.

2. Покажемо на рисунку всі активні сили, що діють на ланки маніпулятора, $-G_1$, G_2 , G_3 , G , F_{01} , F_{12} , F_{23} .

3. Для знаходження сили F_{01} задамо маніпулятору віртуальне переміщення: $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_2 = \delta q_3 = 0$. Такій умові відповідає поступальне переміщення всіх рухомих ланок М як єдиного цілого вправо на δq_1 (рис. 2.5). Зв'язки при цьому не порушуються, що важливо для віртуальних переміщень.

Обчислимо суму елементарних робіт активних сил на цьому віртуальному переміщенні M і прирівняємо її до нуля:

$$\sum \delta A(\vec{F}) = \vec{F}_{01} \cdot \delta \vec{q}_1 = F_{01} \cdot \delta q_1 = 0. \quad (2.32)$$

Робота всіх інших сил на переміщенні $\delta \vec{q}_1$ дорівнює нулю, тому що кожна з них є перпендикулярною до переміщення $\delta \vec{q}_1$.

Оскільки $\delta q_1 \neq 0$ за умовою, з рівності (2.31) випливає, що

$$F_{01} = 0. \quad (2.33)$$

4. Для знаходження величини керувальної сили F_{12} задамо маніпулятору віртуальне переміщення таке, що $\delta q_2 \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_3 = 0$. Такій умові відповідає поступальне переміщення ланок 2, 3 як єдиного цілого в напрямку і на величину $\delta \vec{q}_2$ (див. рис. 2.5).

Сума віртуальних робіт активних сил на наведеному переміщенні

$$\sum \delta A(\vec{F}) = \vec{F}_{12} \cdot \delta \vec{q}_2 = F_{12} \cdot \delta q_2 = 0. \quad (2.34)$$

Оскільки $\delta q_2 \neq 0$ (задали таке віртуальне переміщення), з цього рівняння випливає, що

$$F_{12} = 0. \quad (2.35)$$

5. Для визначення величини сили F_{23} задамо M віртуальне переміщення: $\delta q_3 \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_2 = 0$. Цій умові відповідає поступальне переміщення ланки 3 разом із захоплювальним пристроєм в напрямку вгору і на величину $\delta \vec{q}_3$ (усім іншим ланкам переміститися на $\delta \vec{q}_3$ перешкоджають зв'язки).

Сума віртуальних робіт активних сил на такому переміщенні

$$\sum \delta A(\vec{F}) = \vec{F}_{23} \cdot \delta \vec{q}_3 + (\vec{G}_3 + \vec{G}) \delta \vec{q}_3 = (F_{23} - G_3 - G) \delta q_3 = 0, \quad (2.36)$$

звідки отримуємо (оскільки $\delta q_3 \neq 0$)

$$F_{23} = G_3 + G. \quad (2.37)$$

Одержані результати (2.33), (2.35), (2.37) дають змогу зробити такі висновки.

1. Величини керувальних сил F_{01} , F_{12} , F_{23} не залежать від положення рівноваги (x_0, y_0, z_0) , яке може бути будь-яким.

2. На рис. 2.5 напрямки узагальнених координат (координатних осей x, y, z) є такими: q_3 – по вертикалі вгору, q_1, q_2 – взаємно перпендикулярні горизонтальні. Двигуни 1, 2, які забезпечують пересування ланок M у горизонтальних площинах у положенні рівноваги (будь-якому), є вимкненими. Двигун 3, що забезпечує змінення узагальненої координати q_3 в положенні рівноваги M , надає ланці 3 силу, яка за величиною дорівнює сумі ваг ланки 3 і захоплювального пристрою з вантажем.

Приклад 2. Маніпулятор схеми $O \parallel \Pi \perp \Pi$ (циліндрична схема координат).

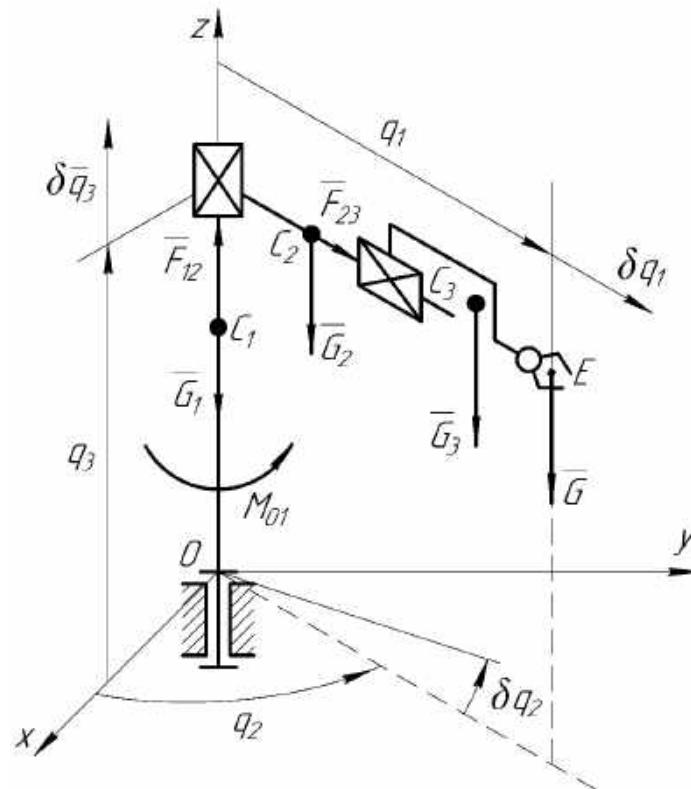


Рис. 2.6. Застосування принципу віртуальних переміщень для визначення керувальних сил і моментів, які забезпечують рівновагу маніпулятора схеми $O \parallel \Pi \perp \Pi$ у заданому положенні

Знайти величини керувальних впливів (сил F_{12} , F_{23} і моменту M_{01}), що забезпечують рівновагу маніпулятора в положенні $q_1 = r_0$, $q_2 = \varphi_0$, $q_3 = z_0$. Вважаємо заданими величини сил тяжіння G_1 , G_2 , G_3 , G ланок і захоплювального пристрою з вантажем відповідно. Тертя в кінематичних парах не враховувати.

Розв'язання

На рис. 2.6 показано всі активні сили, що діють на ланки маніпулятора в його заданому положенні: сили тяжіння – $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_3$, G ; керувальні впливи – пара сил, що діє на ланку 1 з боку стояка (з номером 0) з моментом M_{01} ; сила $\bar{F}_{12}$, що діє з боку ланки 1 на ланку 2; сила $\bar{F}_{23}$, що діє на ланку 3 із захоплювальним пристроєм з боку ланки 2.

1. Узагальнені координати q_1, q_2, q_3 збігаються відповідно з циліндричними координатами r, φ, z . Точка E – центр захоплювального пристрою. На рис. 2.6 показано для кожної з координат початок і додатний напрямок відліку.

2. Докладемо до ланок маніпулятора всі активні сили: сили тяжіння $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \bar{G}_3, G$; керувальні впливи $\bar{F}_{23}, M_{01}, \bar{F}_{12}$, що відповідають узагальненим координатам q_1, q_2, q_3 .

3. Для знаходження сили F_{23} задамо маніпулятору віртуальне переміщення: $\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = \delta q_3 = 0$ (див. рис. 2.6). Такій умові відповідає поступальне переміщення ланки 3 із захоплювальним пристроєм в напрямку і на величину $\delta \bar{q}_1$. Інші ланки залишаються нерухомими. Наведене віртуальне переміщення маніпулятора не порушує зв'язків, накладених на нього. Прирівнюємо нулю суму віртуальних робіт активних сил на зазначеному переміщенні маніпулятора:

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\bar{F}) &= \bar{G}_3 \delta \bar{q}_1 + \bar{G} \delta \bar{q}_1 + \bar{F}_{23} \cdot \delta \bar{q}_1 = \\ &= (G_3 + G) \delta q_1 \cos 90^\circ + F_{23} \cdot \delta q_1 = F_{23} \cdot \delta q_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Звідси (оскільки $\delta q_1 \neq 0$ за умовою)

$$F_{23} = 0. \quad (2.39)$$

4. Для знаходження моменту M_{01} пари, що відповідає за змінення координати q_2 , задамо маніпулятору віртуальне переміщення: $\delta q_2 \neq 0, \delta q_1 = \delta q_3 = 0$. Такій умові відповідає поворот маніпулятора (як твердого тіла) навколо осі z на кут δq_2 . Сума віртуальних робіт активних сил на цьому переміщенні

$$\sum \delta A(\bar{F}) = \sum M_z(\bar{F}) \delta q_2 = M_{01} \cdot \delta q_2 = 0. \quad (2.40)$$

Пояснення до рівняння (2.40):

1) суму віртуальних робіт сил, прикладених до тіла на його обертальному навколо осі z переміщенні, зручно подати в такому вигляді:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \delta A(\bar{F}_k) &= \bar{F}_1 \cdot \delta \bar{r}_1 + \bar{F}_2 \cdot \delta \bar{r}_2 + \dots + \bar{F}_n \cdot \delta \bar{r}_n = \\ &= F_1 \cos \alpha_1 \cdot \delta r_1 + F_2 \cos \alpha_2 \cdot \delta r_2 + \dots + F_n \cos \alpha_n \cdot \delta r_n = \\ &= F_1 \cos \alpha_1 h_1 \cdot \delta \varphi + F_2 \cos \alpha_2 h_2 \cdot \delta \varphi + \dots + F_n \cos \alpha_n h_n \cdot \delta \varphi = \\ &= (M_z(\bar{F}_1) + M_z(\bar{F}_2) + \dots + M_z(\bar{F}_n)) \delta \varphi = \left(\sum_k M_z(\bar{F}_k) \right) \delta \varphi; \end{aligned} \quad (2.41)$$

$$\delta A(\bar{F}_k) = \bar{F}_k \cdot \delta \bar{r}_k = F_k \cdot \delta r_k \cos \alpha_k = F_k \cos \alpha_k h_k \cdot \delta \varphi = M_z(\bar{F}_k) \delta \varphi, \quad (2.42)$$

де δr_k – величина переміщення точки прикладання сили F_k (рис. 2.7),

$$\delta r_k = h_k \cdot \delta \varphi. \quad (2.43)$$

Тут h_k – відстань від точки, у якій прикладено силу $\vec{F}_k$ до осі обертання z ;

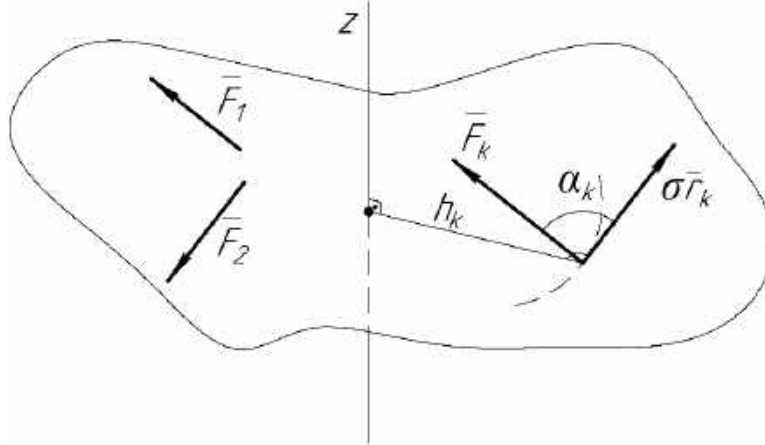


Рис. 2.7. Складання рівняння віртуальних робіт сил, прикладених до твердого тіла

2) моменти відносно осі обертання z сил тяжіння і сил $\vec{F}_{12}$, $\vec{F}_{23}$ дорівнюють нулю, тому що сили $\vec{G}_1$, $\vec{G}_2$, $\vec{G}_3$, $\vec{G}$, $\vec{F}_{12}$ або є паралельними до осі z , або лінія дії сили $\vec{F}_{23}$ перетинає вісь z .

З рівняння (2.43) (оскільки $\delta q_2 \neq 0$ за умовою)

$$M_{01} = 0. \quad (2.44)$$

5. Для знаходження сили $\vec{F}_{12}$, яка забезпечує рівновагу маніпулятора в заданому положенні, задамо йому віртуальне переміщення таке, що $\delta q_3 \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_2 = 0$. Цій умові відповідає поступальне переміщення ланок 2 і 3 як абсолютно твердого тіла на δq_3 (див. рис. 2.6). Інші координати – q_1 , q_2 – є фіксованими.

Сума віртуальних робіт активних сил на такому переміщенні

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\vec{F}) &= \vec{F}_{12} \cdot \delta \vec{q}_3 + \vec{G}_2 \cdot \delta \vec{q}_3 + \vec{G}_3 \cdot \delta \vec{q}_3 + \vec{G} \cdot \delta \vec{q}_3 = \\ &= (F_{12} - G_2 - G_3 - G) \cdot \delta q_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.45)$$

За умовою $\delta q_3 \neq 0$, тому

$$F_{12} = G_2 + G_3 + G. \quad (2.46)$$

З результатів розв'язання рівнянь (2.39), (2.44), (2.46) випливає, що величини керувальних впливів не залежать від положення рівноваги, яке вони забезпечують (до виразів для F_{12} , F_{23} , M_{01} не належать значення координат q_{10} , q_{20} , q_{30} у досліджуваному положенні рівноваги).

Приклад 3. Схема $O \perp O \perp \Pi$ (сферична система координат).

Знайти величини керувальних впливів F_{23} , M_{01} , M_{12} , що забезпечують рівновагу маніпулятора (рис. 2.8) у положенні $q_1 = q_{10}$, $q_2 = q_{20}$, $q_3 = q_{30}$. Вважати заданими: ваги ланок і захоплювального пристрою з вантажем відповідно G_1 , G_2 , G_3 , G , положення центрів тяжіння ланок C_1 , C_2 , C_3 (відстані a_2 , a_3). Тертям у кінематичних парах знехтувати.

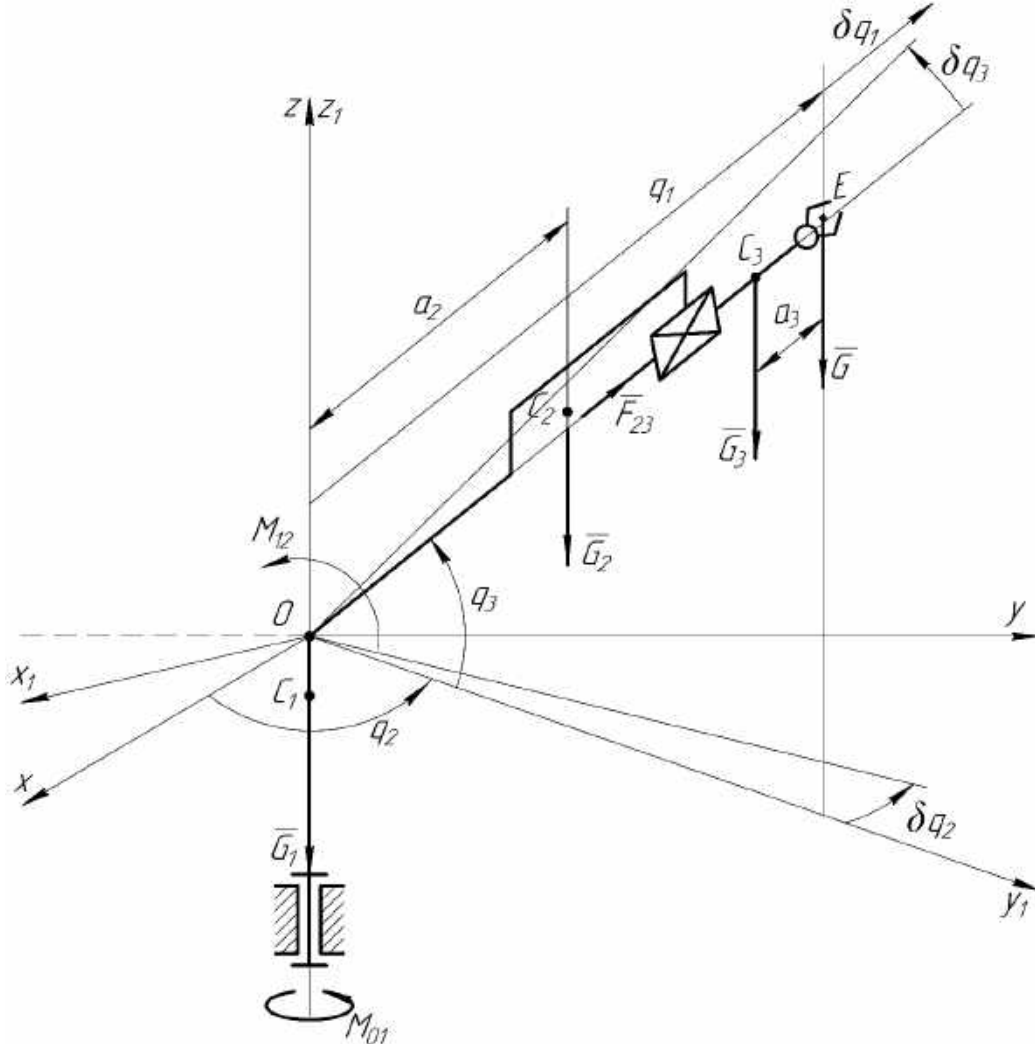


Рис. 2.8. Застосування принципу віртуальних переміщень для визначення керувальних впливів, які забезпечують рівновагу маніпулятора схеми $O \perp O \perp \Pi$ у заданому положенні

Розв'язання

1. Покажемо на рис. 2.8 усі активні сили, що діють на ланки механізму: сили тяжіння $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{G}_3$, $\bar{G}$ і керувальні впливи $\bar{F}_{23}$, $\bar{M}_{01}$, $\bar{M}_{12}$. Узагальнені координати, що визначають (задають) положення маніпулятора в базовій системі координат $Oxyz$, виберемо такими, що збігаються з відповідними сферичними координатами точки E (центру захоплювального пристрою), тобто $q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = \theta$, де r , φ , θ – сферичні координати точки E . Кут q_2 відраховується в горизонтальній площині xOy базової інерційної системи відліку $Oxyz$, вимірюється двогранним кутом між нерухомою площиною xOz і вертикальною площиною zOE .

Кут q_3 відраховується від горизонтальної площини xOy до прямої OE (у вертикальній площині zOE).

2. Спочатку визначимо M_{01} – момент пари сил, що забезпечує обертання колони 1 (разом з ланками 2, 3 і захоплювальним пристроєм) навколо осі Oz , тобто змінення координати q_2 .

Для визначення M_{01} задамо маніпулятору в положенні $q_1 = q_{10}$, $q_2 = q_{20}$, $q_3 = q_{30}$ віртуальне переміщення таке, що $\delta q_2 \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_3 = 0$. Такій умові відповідає поворот маніпулятора як абсолютно твердого тіла навколо осі Oz на кут δq_2 . На такому переміщенні сума віртуальних робіт активних сил запишеться (аналогічно до методики, описаної в прикладі 2) так:

$$\sum_k \delta A(\bar{F}) = \sum_k M_z(\bar{F}_k) \delta \varphi_2 = M_{01} \cdot \delta q_2 = 0. \quad (2.47)$$

Моменти відносно осі Oz інших навантажень дорівнюють нулю (сили, паралельні до осі Oz – сили тяжіння, або сила, що перетинає вісь, – F_{23}). Робота моменту M_{12} на переміщенні δq_2 дорівнює нулю як скалярний добуток двох взаємно перпендикулярних векторів:

$$\delta A(\bar{M}_{12}) = \bar{M}_{12} \cdot \delta \bar{q}_2 = M_{12} \cdot \delta q_2 \cos 90^\circ = 0 \quad (2.48)$$

(вектор $\delta \bar{q}_2$ спрямовано вздовж осі Oz).

З рівняння (2.47) (оскільки $\delta q_2 \neq 0$) отримаємо

$$M_{01} = 0. \quad (2.49)$$

3. Для знаходження M_{12} задамо маніпулятору віртуальне переміщення: $\delta q_3 \neq 0$, $\delta q_1 = \delta q_2 = 0$. Цій умові відповідає поворот на кут δq_3 ланок 2, 3 (як твердого тіла) у вертикальній площині zOE навколо осі Ox_1 . Прямокутна декартова система координат $Ox_1y_1z_1$ є такою, що вісь Oz_1 збігається з віссю Oz , а площина y_1Oz_1 – з площиною zOE .

Суму віртуальних робіт активних сил на наведеному віртуальному переміщенні прирівнюємо до нуля:

$$\begin{aligned} \sum_k \delta A(\bar{F}_k) &= \sum_k M_{x1}(\bar{F}_k) \delta q_3 = -G_2 h_2 \cdot \delta q_3 - G_3 h_3 \cdot \delta q_3 - \\ &\quad - G \cdot h \cdot \delta q_3 + M_{12} \cdot \delta q_3 = \\ &= (-G_2 \cdot a_2 \cdot \cos q_3 - G_3 \cdot (q_1 - a_3) \cos q_3 - G \cdot q_1 \cos q_3 + M_{12}) \delta q_3 = 0. \end{aligned} \quad (2.50)$$

З рівняння (2.50) з урахуванням значень координат у досліджуваному положенні рівноваги ($q_1 = q_{10}$, $q_3 = q_{30}$) і умови $\delta q_3 \neq 0$ отримаємо

$$M_{12} = (G_2 a_2 + (G_3 + G) q_{10} - G_3 a_3) \cos q_{30}. \quad (2.51)$$

4. Для визначення сили $\bar{F}_{23}$, що відповідає координаті q_1 , задамо маніпулятору віртуальне переміщення: $\delta q_1 \neq 0$, $\delta q_2 = \delta q_3 = 0$. Такому поєднанню значень варіацій узагальнених координат відповідає нескінченно мале поступальне переміщення ланки 3 із захоплювальним пристроєм з положення (q_{10}, q_{20}, q_{30}) на $\delta \bar{q}_1$ (див. рис. 2.8). При цьому інші ланки залишаються нерухомими.

Сума віртуальних робіт активних сил на такому переміщенні маніпулятора

$$\begin{aligned} \sum_k \delta A(\bar{F}_k) &= \bar{F}_{23} \cdot \delta \bar{q}_1 + \bar{G}_3 \cdot \delta \bar{q}_1 + \bar{G} \cdot \delta \bar{q}_1 = \\ &= (F_{23} - (G_3 + G) \sin q_3) \delta q_1 = 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

З рівняння (2.52) з урахуванням того, що $\delta q_1 \neq 0$ і в досліджуваному положенні рівноваги маніпулятора $q_3 = q_{30}$, отримаємо

$$F_{23} = (G_3 + G) \sin q_{30}. \quad (2.53)$$

Аналіз результатів:

1. Рівності (2.49), (2.51), (2.53) дають відповіді на поставлені в завданні запитання.

2. На відміну від попередніх прикладів, у яких величини керувальних сил і моментів, що забезпечують рівновагу маніпулятора, не залежать від положення рівноваги. Для маніпулятора, розглянутого в цьому прикладі, величини моменту й сили (див. формули (2.51), (2.53)) залежать від положення рівноваги, яке описується значеннями узагальнених координат q_{10}, q_{30} .

3. Момент $M_{12} = 0$ (двигун, який забезпечує обертальний рух ланок 2 і 3 відносно ланки 1, є вимкненим), якщо $q_{30} = \frac{\pi}{2}$ або $\frac{3\pi}{2}$ (див. (2.51)), тобто в досліджуваному положенні рівноваги ланки 2, 3 є вертикальними.

4. Максимальні значення рушійних навантажень: для сили F_{23} – при $q_{30} = \frac{\pi}{2}$, або $\frac{3\pi}{2}$ (ланки 2, 3 є вертикальними); для моменту M_{12} – при $q_{30} = 0$ або π (ланки 2, 3 є горизонтальними).

Приклад 4. Схема $0 \perp 0 \parallel 0$ (ангулярна система координат).

Знайти величини керувальних впливів M_{01}, M_{12}, M_{23} , що забезпечують рівновагу маніпулятора схеми $0 \perp 0 \parallel 0$ (ангулярної системи координат) у положенні, що визначається узагальненими координатами (рис. 2.9) $q_1 = q_{10}, q_2 = q_{20}, q_3 = q_{30}$. Масові, геометричні характеристики ($m_1, m_2, m_3, m, l_2, l_3, a_2, a_3$) маніпулятора вважати відомими. Тертям в кінематичних парах знехтувати.

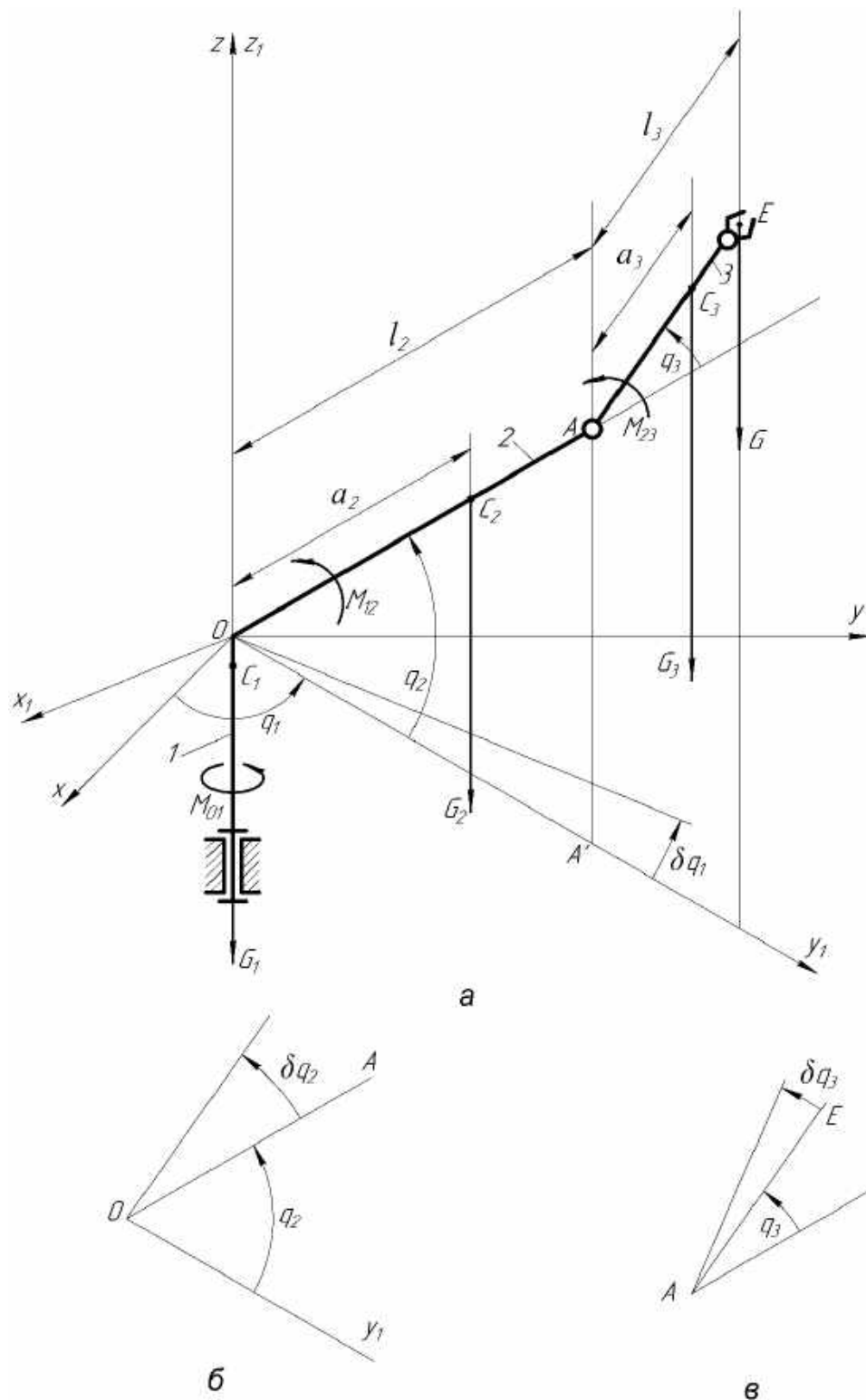


Рис. 2.9. Приклад застосування принципу віртуальних переміщень для визначення керувальних впливів, які забезпечують рівновагу маніпулятора схеми $O \perp O \parallel O$ у заданому положенні

Розв'язання

1. На рис. 2.9 показано усі активні навантаження, що діють на ланки механізму маніпулятора: сили тяжіння ланок $\bar{G}_k = m_k \bar{g}$, $k = 1, 2, 3$; сила тяжіння захоплювального пристрою з вантажем $\bar{G} = m \bar{g}$, моменти приводів M_{01} , M_{12} , M_{23} . Як узагальнені вибрано кутові координати q_1 , q_2 , q_3 , що

задають положення ланок 1, 2, 3 відповідно в базовій системі координат $Oxyz$.

Систему координат $Ox_1y_1z_1$, зв'язану з маніпулятором, описано в прикладі 3.

Величини керувальних впливів M_{01} , M_{12} , M_{23} будемо визначати з допомогою методики, описаної в попередніх прикладах, що базується на принципі віртуальних переміщень.

2. Для визначення величини моменту M_{01} задамо маніпулятору в положенні q_{10} , q_{20} , q_{30} віртуальне переміщення:

$$\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = \delta q_3 = 0. \quad (2.54)$$

Цій умові відповідає поворот маніпулятора як твердого тіла на нескінченно малий кут δq_1 навколо осі Oz (рис. 2.9). Сума елементарних робіт активних навантажень на віртуальному переміщенні (2.54) маніпулятора

$$\sum \delta A(\bar{F}) = M_{01} \delta q_1 = 0. \quad (2.55)$$

Робота інших навантажень на переміщенні δq_1 дорівнює нулю, оскільки моменти їх відносно осі Oz (навколо якої відбувається поворот δq_1) дорівнюють нулю. З рівняння (2.55) з урахуванням (2.54) випливає

$$M_{01} = 0. \quad (2.56)$$

3. Для визначення величини моменту M_{12} у досліджуваному положенні рівноваги задамо маніпулятору віртуальне переміщення:

$$\delta q_2 \neq 0, \delta q_1 = \delta q_3 = 0. \quad (2.57)$$

Такій умові відповідає поворот ланок 2, 3 як абсолютно твердого тіла на нескінченно малий кут δq_2 у площині y_1Oz_1 навколо осі Ox_1 (рис. 2.9, б). Суму віртуальних робіт активних навантажень знайдемо як суму робіт їх моментів, обчислених відносно осі Ox_1 на віртуальному кутовому переміщенні δq_2 навколо тієї ж осі Ox_1 :

$$\begin{aligned} \sum \delta A(\bar{F}) = & (M_{12} - G_2 a_2 \cos q_2 - G_3 (l_2 \cos q_2 + a_3 \cos(q_1 + q_3))) \delta q_2 - \\ & - (G(l_2 \cos q_2 + l_3 \cos(q_2 + q_3))) \delta q_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.58)$$

З рівняння (2.58) з урахуванням умови $\delta q_2 \neq 0$ для досліджуваного положення рівноваги $q_1 = q_{10}$, $q_2 = q_{20}$, $q_3 = q_{30}$ отримаємо

$$M_{12} = (G_2 a_2 + (G_3 + G) l_2) \cos q_{20} + (G_3 a_3 + G l_3) \cos(q_{20} + q_{30}). \quad (2.59)$$

4. Для знаходження величини моменту M_{23} , що забезпечує рівновагу маніпулятора в заданому його положенні, задамо віртуальне переміщення таке, що

$$\delta q_3 \neq 0, \delta q_1 = \delta q_2 = 0. \quad (2.60)$$

Цій умові відповідає поворот ланки 3 разом із захоплювальним пристроєм на нескінченно малий кут δq_3 (рис. 2.9, в) у площині $y_1 O z_1$ навколо осі, паралельної до осі $O x_1$, що проходить через точку А.

Сума робіт активних навантажень на віртуальному переміщенні (2.60) дорівнює нулю відповідно в ПВП:

$$\sum \delta A(\bar{F}) = (M_{23} - G_3 a_3 \cos(q_2 + q_3) - G l_3 \cos(q_2 + q_3)) \delta q_3 = 0. \quad (2.61)$$

З рівняння (2.61) з урахуванням умови $\delta q_3 \neq 0$ для положення рівноваги (q_{10}, q_{20}, q_{30}) отримаємо

$$M_{23} = (G_3 a_3 + G l_3) \cos(q_{20} + q_{30}). \quad (2.62)$$

Результати (2.56), (2.59), (2.62) дають змогу зробити такі висновки:

1. Узагальнена сила M_{01} на першому ступені рухомості (що відповідає першій узагальненій координаті) – крутий момент навколо осі $O z$ у разі рівноваги маніпулятора незалежно від його положення дорівнює нулю.

2. Узагальнені сили M_{12}, M_{23} на другому і третьому ступенях рухомості цих властивостей не мають. У загальному випадку значення моментів M_{12}, M_{23} визначаються досліджуванням положенням рівноваги (значеннями q_{20}, q_{30}). Для рівності нулю M_{23} (третій двигун є ввімкнутим) має виконуватись умова $q_{20} + q_{30} = \frac{\pi}{2}$ або $q_{20} + q_{30} = \frac{3\pi}{2}$, тобто ланка 3 (її геометрична поздовжня вісь) має бути у вертикальному положенні. Для рівності нулю моментів M_{12}, M_{23} одночасно (обидва двигуни 2, 3 є вимкненими), очевидно, має бути виконано умови

$$q_{20} = \frac{\pi}{2} \text{ або } q_{20} = \frac{3\pi}{2}; \quad q_{20} + q_{30} = \frac{\pi}{2} \text{ або } q_{20} + q_{30} = \frac{3\pi}{2}.$$

Цим умовам відповідає положення, коли ланки 2, 3 є вертикальними.

3. Рівності (2.59), (2.62) пов'язують величини керувальних впливів M_{12}, M_{23} зі значеннями узагальнених координат у положенні рівноваги маніпулятора. Очевидно, їх можна розглядати як рівняння для визначення можливих положень рівноваги q_{20}, q_{30} маніпулятора для заданих значень M_{12}, M_{23} . У цьому випадку рівняння набувають вигляду

$$\left. \begin{aligned} \cos(q_{20} + q_{30}) &= \frac{M_{23}}{G_3 a_3 + G l_3}, \\ \cos q_{20} &= \frac{M_{12} - M_{23}}{G_2 a_2 + (G_3 + G) l_2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

При цьому має бути виконано умови (для M_{12} і M_{23})

$$\begin{aligned} M_{23} &\leq G_3 a_3 + G l_3, \\ |M_{12} - M_{23}| &\leq G_2 a_2 + (G_3 + G) l_2. \end{aligned} \quad (2.64)$$

3. КІНЕМАТИКА МАНІПУЛЯТОРА

Предметом вивчення кінематики маніпулятора є його геометрія руху, тобто величини й напрямки переміщень ланок і окремих точок, а також такі кінематичні характеристики руху, як швидкості й прискорення. Маса ланок і сили, що діють на них, при кінематичному дослідженні не враховуються.

Методами кінематики точки й кінематики твердого тіла визначаються положення ланок, швидкості й прискорення характерних точок, а також кутові швидкості й прискорення ланок механізму маніпулятора (ММ) у базовій (основній, інерційній) системі відліку.

У кінематиці маніпулятора ставляться й розв'язуються дві задачі – пряма й обернена.

Пряма задача: за заданими в базовій системі відліку положеннями ланок у будь-який момент часу визначити місце розташування робочого органу або за заданим рівнянням руху ланок знайти рівняння руху робочого органу.

Власне, наведені вище два формулювання прямої задачі мають один і той же зміст, тому що рух ланок механізму (як і механізму в цілому) вважається заданим у вибраній системі відліку, якщо відомо положення ланок механізму у вибраній системі відліку в будь-який момент руху.

Обернена задача кінематики маніпулятора: за заданим у базовій системі відліку положенням центра робочого органу в довільний момент часу знайти положення ланок у тій же системі відліку в той же момент часу або за заданим рухом (рівнянням руху) робочого органу знайти рух (рівняння руху) ланок маніпулятора.

Оскільки ланкам M надається рух з допомогою приводів (електродвигунів, гідро- або пневмоприводів), то сформулювати дві задачі кінематики маніпулятора можна так:

- пряма задача – за відомими кінематичними характеристиками приводів знайти кінематичні характеристики робочого органу;

- обернена задача – за заданими кінематичними характеристиками робочого органу розрахувати кінематичні характеристики приводів.

При дослідженні руху маніпулятора (кінематики, динаміки) виникає необхідність знаходження швидкостей його характерних точок: центрів тяжіння ланок, центрів обертальних кінематичних пар, центру робочого органу. Розглянемо способи визначення швидкості точки (як окремої, так і тієї, що належить тілу, яке виконує різні види рухів).

3.1. Визначення швидкості точки в різних системах координат

Рух точки задано в прямокутній декартовій системі відліку:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t). \quad (3.1)$$

Проекції вектора швидкості точки на осі x, y, z :

$$v_x = \dot{x}, \quad v_y = \dot{y}, \quad v_z = \dot{z} \quad (3.2)$$

(точка над функцією – похідна від функції за часом: $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$).

Модуль швидкості

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (3.3)$$

Напрямок вектора $\bar{v}$ (напрямні косинуси):

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{\bar{v}, x}) &= \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(\widehat{\bar{v}, y}) &= \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}, \\ \cos(\widehat{\bar{v}, z}) &= \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Рух точки задано в циліндричній системі координат:

$$\rho = \rho(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad z = z(t); \quad (3.5)$$

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho \cdot \dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z}; \quad (3.6)$$

$$v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2 \cdot \dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2}. \quad (3.7)$$

Координатні осі показано на рис. 3.1.

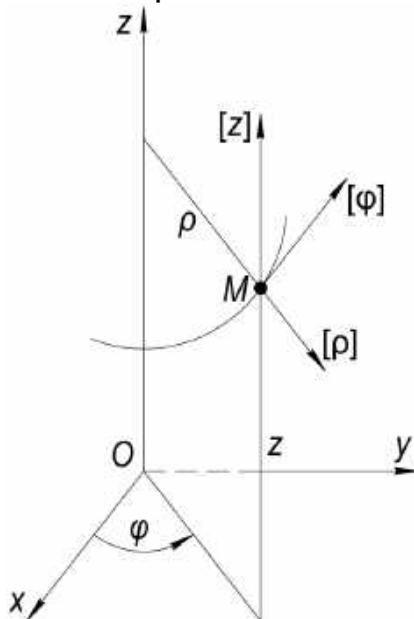


Рис. 3.1. Циліндрична система координат

Якщо точка рухається в площині $z = const$ (полярна система координат $\rho = r, z = 0$), то рівняння руху будуть такими:

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t); \quad (3.8)$$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \cdot \dot{\varphi}^2}. \quad (3.9)$$

Рух точки задано у сферичній системі координат (рис. 3.2):

$$r = r(t), \quad \varphi = \varphi(t), \quad \theta = \theta(t). \quad (3.10)$$

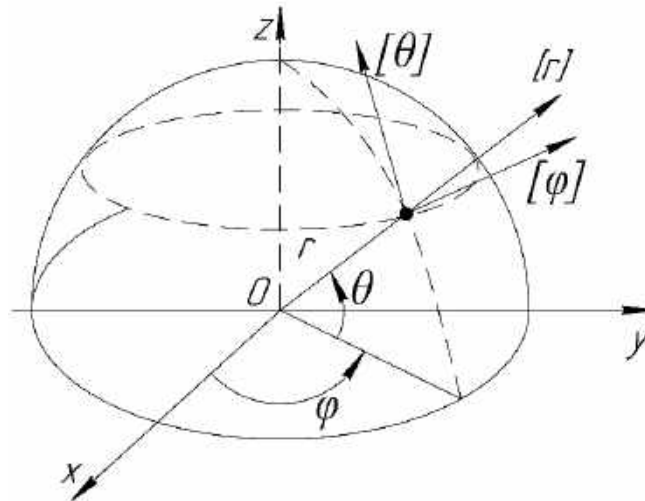


Рис. 3.2. Сферична система координат

Проекції вектора швидкості на осі:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi} \cos \theta, \quad v_\theta = r\dot{\theta}. \quad (3.11)$$

Модуль швидкості

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta + r^2 \dot{\theta}^2}. \quad (3.12)$$

Точка належить твердому тілу, яке може здійснювати один із п'яти видів руху: поступальний; обертання навколо осі; плоский; сферичний; вільний.

Поступальний рух. Кількість ступенів вільності як для точки $w = 3$. Швидкості всіх точок $A, B, C, \dots$ тіла є векторно однаковими:

$$\bar{v}_A = \bar{v}_B = \bar{v}_C = \dots \quad (3.13)$$

Тіло обертається навколо осі Oz . Кількість ступенів вільності $w = 1$. Згідно із законом обертання кут повороту задається функцією від часу:

$$\varphi = \varphi(t). \quad (3.14)$$

Кутова швидкість тіла

$$\bar{\omega} = \bar{k} \omega_z, \quad \omega_z = \dot{\varphi}, \quad (3.15)$$

де $\bar{k}$ – орт осі Oz ;

ω_z – проекція на вісь Oz вектора $\bar{\omega}$.

Швидкість точки M

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \bar{\omega} \times \overline{OM}. \quad (3.16)$$

Модуль швидкості

$$v = \omega \cdot O_1M, \quad (3.17)$$

де O_1M – відстань від точки M до осі обертання. Напрямок вектора швидкості точки показано на рис. 3.3.

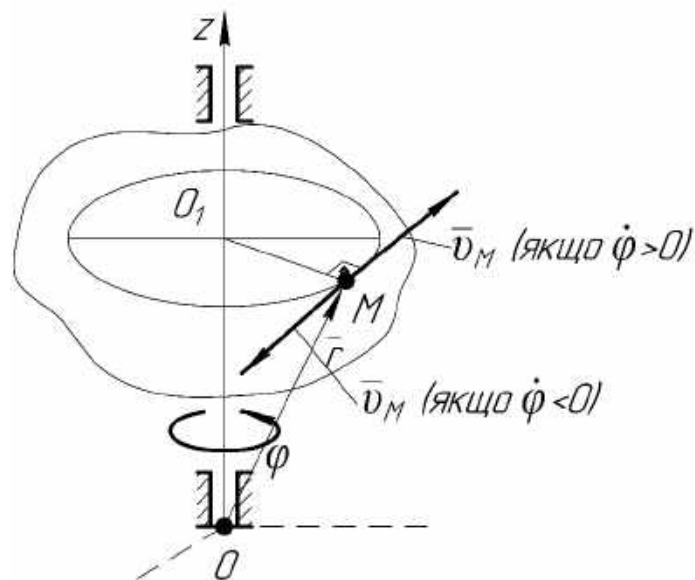


Рис. 3.3. Визначення швидкості точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Тіло здійснює плоский рух (будь-яка точка тіла рухається в площині, паралельній до фіксованої площини).

Дослідити такий рух твердого тіла можна, розглянувши рух плоскої фігури (отриманої внаслідок перерізу тіла площиною, паралельною до зазначеної вище фіксованої площини), у своїй площині. Нехай площина руху – координатна площина xOy , вісь Oz є спрямованою перпендикулярно до площини руху до спостерігача.

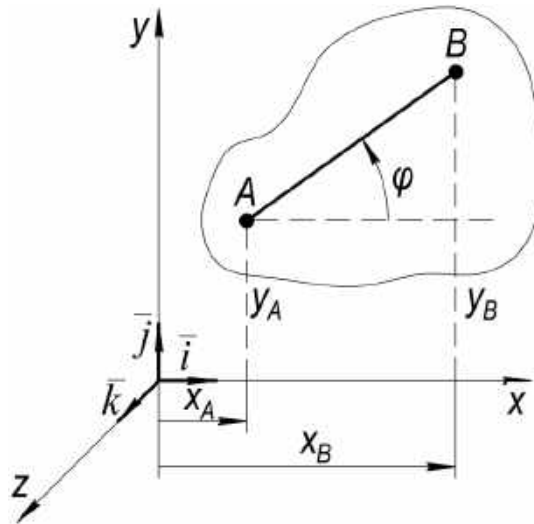


Рис. 3.4. Визначення швидкості точки плоскої фігури, яка рухається у своїй площині

Рівняння руху фігури (ланки AB):

$$\left. \begin{aligned} x_A &= x_A(t) \\ y_A &= y_A(t) \\ \varphi &= \varphi(t) \end{aligned} \right\}, \quad (3.18)$$

де A, B – фіксовані точки фігури, причому A є також полюсом.
Кутова швидкість тіла (плоскої фігури)

$$\bar{\omega} = \bar{k}\omega_z = \bar{k}\dot{\varphi}. \quad (3.19)$$

Швидкість полюса (точки A) можна обчислити за формулами (3.2) – (3.4) за умови $z \equiv 0$.

Швидкість точки B визначається формулою

$$\bar{v}_B = \bar{v}_A + \bar{v}_{BA}, \quad (3.20)$$

де

$$\bar{v}_{BA} = \bar{\omega} \times \overline{AB}. \quad (3.21)$$

Підставивши вектори в рівняння (3.20) розкладеними по осях Ox, Oy і записавши (3.21) у вигляді вектора визначника

$$\bar{\omega} \times \overline{AB} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \end{vmatrix}, \quad (3.22)$$

з урахуванням $\omega_x = \omega_y = 0, z_B = z_A = 0$ отримаємо

$$\bar{v}_B = \bar{i}v_{Bx} + \bar{j}v_{By} = \bar{i}v_{Ax} + \bar{j}v_{Ay} + (\bar{i}(y_A - y_B) - \bar{j}(x_A - x_B))\omega_z, \quad (3.23)$$

звідки

$$\begin{cases} v_{Bx} = v_{Ax} + (y_A - y_B)\omega_z = \dot{x}_A + (y_A - y_B)\dot{\varphi}; \\ v_{By} = v_{Ay} - (x_A - x_B)\omega_z = \dot{y}_A - (x_A - x_B)\dot{\varphi}. \end{cases} \quad (3.24)$$

Такий самий результат випливає з рис. 3.4:

$$\begin{cases} x_B = x_A + AB \cos \varphi; \\ y_B = y_A + AB \sin \varphi; \end{cases} \quad (3.25)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_B = v_{Bx} = \dot{x}_A - AB \sin \varphi \cdot \dot{\varphi}; \\ \dot{y}_B = v_{By} = \dot{y}_A + AB \cos \varphi \cdot \dot{\varphi}. \end{cases} \quad (3.26)$$

Ураховуючи, що $AB \cos \varphi = x_B - x_A$, $AB \sin \varphi = y_B - y_A$, отримаємо формули (3.24).

За отриманими значеннями проєкцій (3.26) знаходимо модуль і напрямок вектора швидкості точки B (див. формулу (3.3)).

Для багатоланкового плоского кінематичного ланцюга (рис. 3.5) маємо

$$\begin{cases} x_{A_n} = x_n = \ell_1 \cos \varphi_1 + \ell_2 \cos \varphi_2 + \dots + \ell_{n-1} \cos \varphi_{n-1} + \ell_n \cos \varphi_n, \\ y_{A_n} = y_n = \ell_1 \sin \varphi_1 + \ell_2 \sin \varphi_2 + \dots + \ell_{n-1} \sin \varphi_{n-1} + \ell_n \sin \varphi_n. \end{cases} \quad (3.27)$$

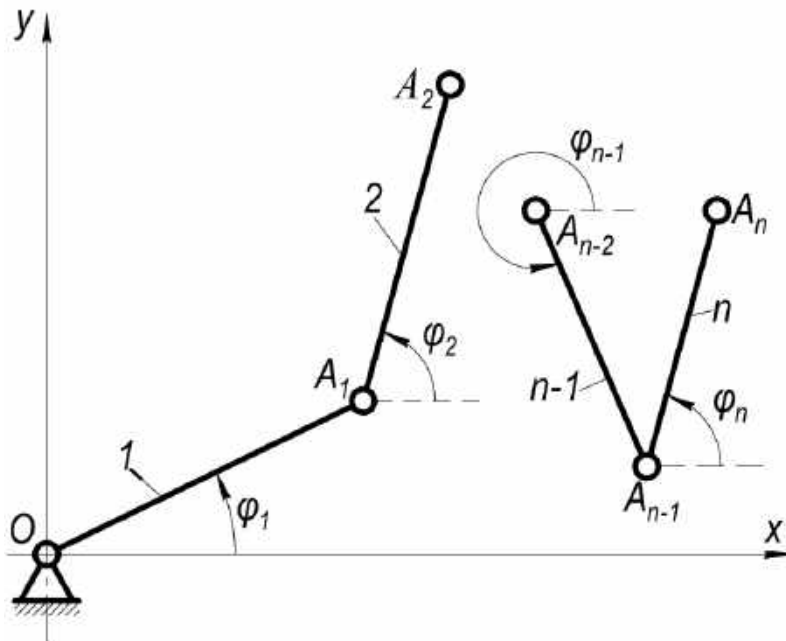


Рис. 3.5. Схема координування ланок багатоланкового механізму з допомогою «абсолютних» кутів $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, кожен з яких відраховується від осі Ox

Диференціюючи (3.27) за часом, отримаємо проєкції на осі Ox, Oy вектора швидкості кінцевої точки (A_n):

$$\left. \begin{aligned} v_{A_n x} = \dot{x}_n &= -\ell_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - \ell_2 \dot{\varphi}_2 \sin \varphi_2 - \dots \\ &\dots - \ell_{n-1} \dot{\varphi}_{n-1} \sin \varphi_{n-1} - \ell_n \dot{\varphi}_n \sin \varphi_n, \\ v_{A_n y} = \dot{y}_n &= \ell_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \ell_2 \dot{\varphi}_2 \cos \varphi_2 + \dots \\ &\dots + \ell_{n-1} \dot{\varphi}_{n-1} \cos \varphi_{n-1} + \ell_n \dot{\varphi}_n \cos \varphi_n. \end{aligned} \right| \quad (3.28)$$

У рівностях (3.27) і (3.28) φ_k ($k = 1, 2, \dots, n$) – кут між вектором $\overline{A_{k-1}A_k}$ і додатним напрямком осі Ox інерціальної системи відліку xOy , тобто кут, що визначає положення ланки з номером k у базовій (нерухомій) системі відліку. Тому $\dot{\varphi}_k = \omega_{kz}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) – проекція на вісь z , спрямовану до спостерігача, вектора «абсолютної» кутової швидкості ланки з номером k .

У маніпуляційних системах ланка з номером k ($k = 1, 2, \dots, n$) приводиться в рух відносно ланки з номером $(k-1)$ приводом, установленим на ланці з номером $(k-1)$, тобто привод надає руху ланці механізму відносно попередньої ланки, параметри цього руху можна визначити відповідними датчиками. У цьому випадку бажано мати інформацію про переміщення й відносні швидкості (лінійні у випадку поступальних кінематичних пар і кутові у випадку обертальних кінематичних пар) відносних.

Формули для координат кінцевої точки кінематичного ланцюга (рис. 3.6) мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} x_{A_n} = x_n &= \ell_1 \cos \varphi_1 + \ell_2 \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \dots + \ell_n \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n), \\ y_{A_n} = y_n &= \ell_1 \sin \varphi_1 + \ell_2 \sin(\varphi_1 + \varphi_2) + \dots + \ell_n \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n), \end{aligned} \right| \quad (3.29)$$

тобто кут, який задає положення ланки з номером n , відраховується від напрямку, пов'язаного з ланкою $(n-1)$.

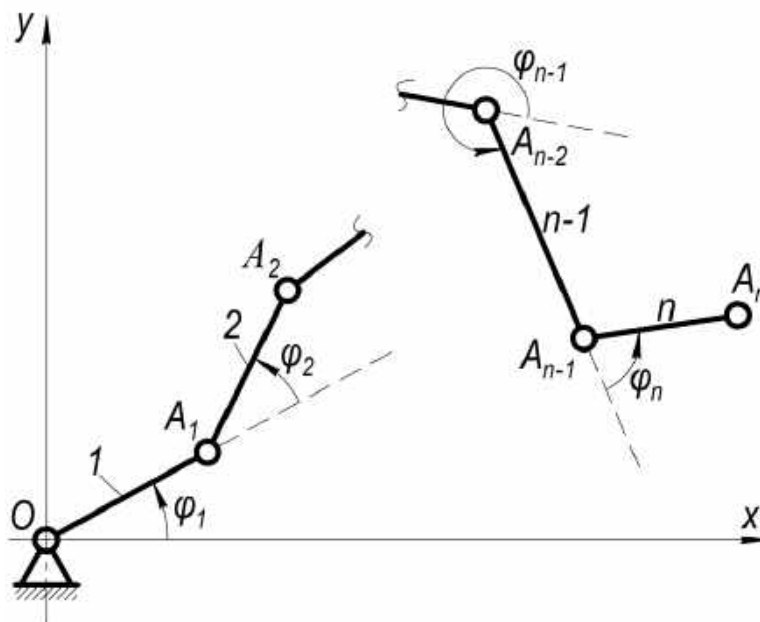


Рис. 3.6. Схема координування положень ланок багатоланкового механізму з допомогою відносних кутів

Для проєкцій швидкості (абсолютної) на осі Ox , Oy кінцевої точки A_n ланцюга шляхом диференціювання (3.29) за часом отримаємо

$$\left. \begin{aligned} v_{A_n x} = \dot{x}_n &= -\ell_1 \dot{\varphi}_1 \sin \varphi_1 - \ell_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \sin(\varphi_1 + \varphi_2) - \dots \\ &\dots - \ell_n (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dots + \dot{\varphi}_n) \sin(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n), \\ v_{A_n y} = \dot{y}_n &= \ell_1 \dot{\varphi}_1 \cos \varphi_1 + \ell_2 (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2) \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + \dots \\ &\dots + \ell_n (\dot{\varphi}_1 + \dot{\varphi}_2 + \dots + \dot{\varphi}_n) \cos(\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n). \end{aligned} \right| \quad (3.30)$$

Тут $\dot{\varphi}_k = \omega_{kz}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) – проєкція на вісь z , спрямовану до спостерігача, вектора кутової швидкості ланки з номером k відносно ланки з номером $(k - 1)$, тобто відносної кутової швидкості.

Тіло здійснює сферичний рух (обертання навколо точки). Кількість ступенів вільності тіла $w = 3$.

У теоретичній механіці положення тіла з нерухомою точкою в нерухомій системі координат задають з допомогою кутів Ейлера (рис. 3.7).

Система координат $Ox_1y_1z_1$ – нерухома (базова, пов'язана з основою). Система $Oxyz$ жорстко пов'язана з рухомим тілом. Обидві системи відліку (координат) – прямокутні декартові. Початки цих систем суміщені в точці O . Координатна площина xOy перетинається з нерухомою площиною x_1Oy_1 по прямій OK , що має назву лінії вузлів.

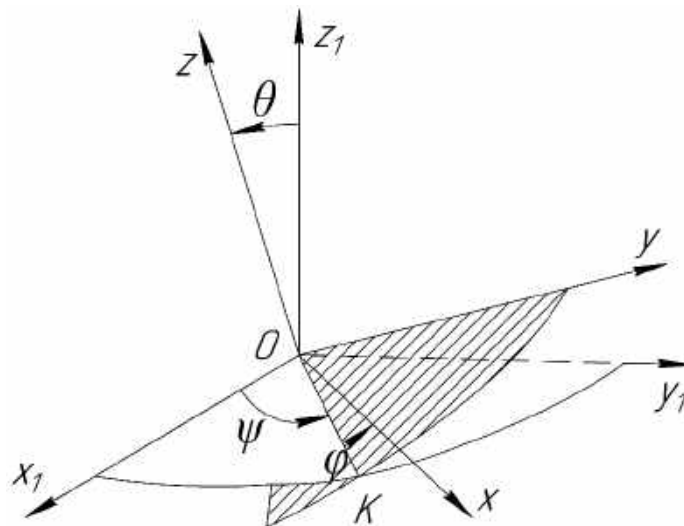


Рис. 3.7. Кути Ейлера

Кут у площині x_1Oy_1 між віссю Ox_1 і лінією вузлів OK називають кутом прецесії й позначають ψ . Кут у рухомій площині xOy між лінією вузлів OK і віссю Ox_1 називають кутом власного обертання й позначають φ . Кут між осями Oz і Oz_1 називають кутом нутації й позначають θ . Додатні напрямки відліку кожного з кутів ψ , φ , θ вибрано проти руху стрілки годинника, що спостерігаються відповідно з кінця осей Oz_1 і Oz і в напрямку від K до O лінії вузлів.

Кути Ейлера ψ , φ , θ однозначно задають положення системи координат $Oxyz$ (а отже, і тіла) у нерухомій системі координат $Ox_1y_1z_1$. Тож, задавши наведені вище кути як функції від часу, задамо рух тіла.

Таким чином, рівняння обертання твердого тіла навколо нерухомої точки (рівняння сферичного руху) мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} \psi &= \psi(t), \\ \varphi &= \varphi(t), \\ \theta &= \theta(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.31)$$

Тверде тіло (ланка механізму) обертається навколо точки (сферичний рух), якщо ця точка (точка O на рис. 3.8) є центром обертальної кінематичної пари 3-го класу (шарового шарніра). З огляду на те, що кінематичні пари третього класу в конструкціях маніпуляційних систем застосовуються надзвичайно рідко, обмежимося коротким викладенням методики визначення швидкості точки тіла.

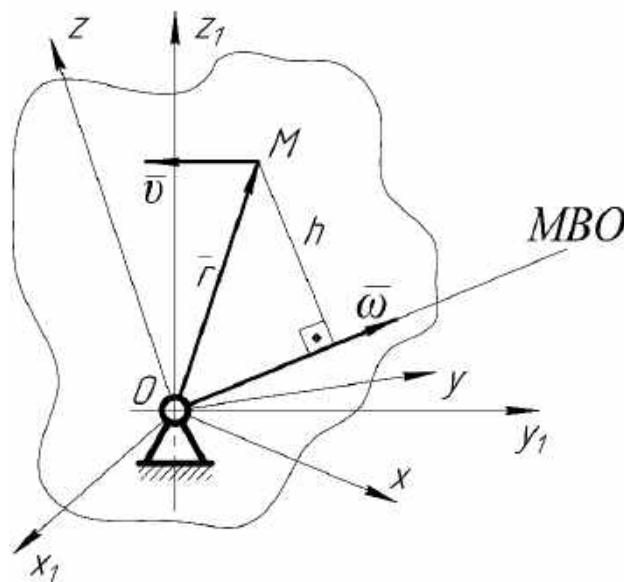


Рис. 3.8. Визначення швидкості точки тіла, яке обертається навколо нерухомої точки

Як і при обертанні твердого тіла навколо осі, швидкість довільної точки M тіла (див. рис. 3.8) визначається формулою

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}, \quad (3.32)$$

де $\bar{\omega}$ – кутова швидкість тіла; $\bar{r} = \overline{OM}$.

Модуль швидкості

$$v = \omega r \sin(\widehat{\bar{\omega}, \bar{r}}) = \omega h. \quad (3.33)$$

Миттєва вісь обертання тіла (МВО) – геометричне місце точок рухомого простору (пов'язаного з рухомим тілом), швидкості яких у певний момент часу дорівнюють нулю. Вектор $\bar{\omega}$ є спрямованим уздовж МВО в той бік, звідки обертання тіла видно в напрямку проти руху стрілки годинника.

Формули проекцій вектора кутової швидкості тіла на осі, жорстко пов'язані з рухомим тілом через кути Ейлера, і їх похідні за часом мають такий вигляд:

$$\left. \begin{aligned} \omega_x &= \dot{\psi} \sin \varphi \sin \theta + \dot{\theta} \cos \varphi; \\ \omega_y &= \dot{\psi} \cos \varphi \sin \theta - \dot{\theta} \sin \varphi; \\ \omega_z &= \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\varphi}. \end{aligned} \right\} \quad (3.34)$$

Проекції на осі нерухомої системи координат вектора кутової швидкості тіла є такими:

$$\left. \begin{aligned} \omega_{x_1} &= \dot{\theta} \cos \psi + \dot{\varphi} \sin \psi \sin \theta, \\ \omega_{y_1} &= \dot{\theta} \sin \psi - \dot{\varphi} \cos \psi \sin \theta, \\ \omega_{z_1} &= \dot{\psi} + \dot{\varphi} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (3.35)$$

Швидкість довільної точки M тіла можна подати:

– у рухомій системі координат ($Oxyz$)

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}(z\omega_y - y\omega_z) + \bar{j}(x\omega_z - z\omega_x) + \bar{k}(y\omega_x - x\omega_y); \end{aligned} \quad (3.36)$$

– у нерухомій системі координат ($Ox_1y_1z_1$)

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \omega_{x_1} & \omega_{y_1} & \omega_{z_1} \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{vmatrix} = \\ &= \bar{i}_1(z_1\omega_{y_1} - y_1\omega_{z_1}) + \bar{j}_1(x_1\omega_{z_1} - z_1\omega_{x_1}) + \bar{k}_1(y_1\omega_{x_1} - x_1\omega_{y_1}). \end{aligned} \quad (3.37)$$

Таким чином, за заданими рівняннями руху тіла (3.31) формули (3.34), (3.36) або (3.35), (3.37) дають змогу знайти проекції швидкості довільної точки тіла на осі рухомої (жорстко пов'язаної з тілом) або нерухомої (інерційної) системи відліку.

Проекції вектора швидкості точки M (див. рис. 3.8) на осі рухомої системи відліку отримаємо з (3.36):

$$\left. \begin{aligned} v_x &= z\omega_y - y\omega_z; \\ v_y &= x\omega_z - z\omega_x; \\ v_z &= y\omega_x - x\omega_y. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

на осі нерухомої системи – з (3.37):

$$\left. \begin{aligned} v_{x_1} &= z_1\omega_{y_1} - y_1\omega_{z_1}; \\ v_{y_1} &= x_1\omega_{z_1} - z_1\omega_{x_1}; \\ v_{z_1} &= y_1\omega_{x_1} - x_1\omega_{y_1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.39)$$

Модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}, \quad (3.40)$$

або

$$v = \sqrt{v_{x_1}^2 + v_{y_1}^2 + v_{z_1}^2}. \quad (3.41)$$

Косинуси кутів між вектором швидкості $\vec{v}$ та осями x , y , z (рухомої системи відліку) є такими:

$$\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{i}}) = \frac{v_x}{v}, ; \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{j}}) = \frac{v_y}{v}; \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{k}}) = \frac{v_z}{v}. \quad (3.42)$$

Напрямки вектора швидкості точки в нерухомій системі відліку:

$$\cos(\widehat{\vec{v}, \vec{i}_1}) = \frac{v_{x_1}}{v}; \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{j}_1}) = \frac{v_{y_1}}{v}; \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{k}_1}) = \frac{v_{z_1}}{v}. \quad (3.43)$$

Вільний рух твердого тіла. У механізмах (у тому числі в маніпуляторах) немає таких ланок, які здійснювали б цей вид руху (не існує такої кінематичної пари, яка реалізовувала б такий рух ланки). Стисло опишемо його. Вільний рух твердого тіла можна подати як суму двох рухів: поступального разом з полюсом та обертального (сферичного) навколо полюса. Відповідно рівняннями руху тіла можна вважати сукупність рівнянь руху (3.1) полюса А і рівнянь обертання (2.31) навколо полюса, тобто

$$\left. \begin{aligned} x_A &= x_A(t); \\ y_A &= y_A(t); \\ z_A &= z_A(t); \\ \psi &= \psi(t); \\ \varphi &= \varphi(t); \\ \theta &= \theta(t). \end{aligned} \right\} \quad (3.44)$$

Детальніше можна подивитися, наприклад, у посібнику [2].

Точка здійснює складний рух. Уведемо такі поняття: основна й допоміжна системи відліку (координат).

Основна система – базова, нерухома, пов'язана з нерухомим (у розглядуваній задачі) середовищем.

Допоміжна система відліку пов'язана із середовищем, що переносить точку (здійснює складний рух). Абсолютна швидкість точки ($\bar{v}_a$) – її швидкість у базовій системі відліку. Відносна швидкість точки ($\bar{v}_r$) – її швидкість у допоміжній системі відліку. Переносна швидкість точки ($\bar{v}_e$) – швидкість тієї точки допоміжної системи відліку (рухомого середовища), з якою в певний момент часу збігається швидкість розглядуваної точки.

Має місце теорема додавання швидкостей під час складного руху точки: абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі її відносної й переносної швидкостей:

$$\bar{v}_a = \bar{v}_r + \bar{v}_e. \quad (3.45)$$

Розглянемо приклад визначення абсолютної швидкості точки.

Повзун 1 (точка А) здійснює складний рух – рухається вздовж стрижня 2, який своєю чергою обертається в площині навколо точки О (рис. 3.9). Тут $\bar{v}_r$ – швидкість повзуна 1 (точки A_1) відносно стрижня 2; $\bar{v}_e$ – швидкість точки A_2 (точки стрижня 2, що знаходиться під повзуном); $\bar{v}_a$ – абсолютна швидкість точки А повзуна, тобто швидкість точки А в системі координат, пов'язаній зі стояком О.

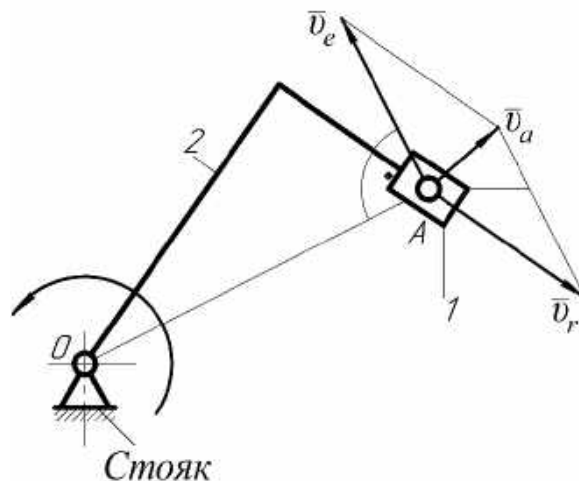


Рис. 3.9. Визначення абсолютної швидкості точки А (повзуна) під час її складного руху

3.2. Складний рух твердого тіла. Додавання рухів

Постановка задачі: тіло рухається в системі відліку $O_1x_1y_1z_1$ (відносний рух), яка пов'язана з тілом, що здійснює рух у системі відліку $Oxyz$ (переносний рух), яка вважається нерухомою (базовою). При цьому як

рух розглядуваного тіла в системі $O_1x_1y_1z_1$, так і рух самої системи в базовій системі відліку може бути поступальним, обертанням навколо осі, плоским, сферичним, вільним. Таким чином, можливими є 25 варіантів (комбінацій складових рухів) при вивченні складного руху твердого тіла, наприклад: сферичний рух + поступальний рух, тобто досліджуване тіло обертається навколо точки в системі відліку $O_1x_1y_1z_1$, яка, своєю чергою, рухається поступально в базовій системі відліку $Oxyz$.

З огляду на те, що в маніпуляторах застосовуються переважно кінематичні пари п'ятого класу – поступальні ($\square$) й обертальні ($\bigcirc$), обмежимося розглядом складного руху твердого тіла, для якого складовими є поступальний рух і обертання навколо осі.

Виходячи з того, що основними кінематичними характеристиками руху твердого тіла є лінійні швидкість і прискорення довільної точки тіла, а також його кутові швидкість і прискорення, завдання вивчення складного руху твердого тіла, що містить знаходження залежностей між характеристиками складових рухів і результтивного (складного) руху, зводиться до встановлення співвідношень (зв'язків) між лінійними швидкостями (і прискореннями) довільної точки тіла в складових рухах і тими ж характеристиками в складному русі, а також між кутовими швидкостями (і прискореннями) складових рухів і складного руху.

Далі під час динамічного аналізу й синтезу маніпулятора будуть застосовуватися рівняння Лагранжа 2-го роду, у яких з кінематичних характеристик твердого тіла враховуються тільки лінійні швидкості й переміщення точок та кутові швидкості й переміщення ланок.

Тому при вивченні складного руху (складання рухів) твердого тіла обмежимося встановленням зв'язків між лінійними швидкостями точок і кутовими швидкостями тіл.

Розглянемо деякі окремі випадки складання рухів твердого тіла.

1. *Додавання поступальних рухів твердого тіла.* Постановка задачі: тверде тіло рухається поступально в системі відліку $O_2x_2y_2z_2$ зі швидкістю $\bar{v}_2$, система відліку $O_2x_2y_2z_2$ рухається поступально зі швидкістю $\bar{v}_1$ у нерухомій системі відліку $O_1x_1y_1z_1$ (рис. 3.10). Якою буде швидкість довільної точки тіла в системі відліку $O_1x_1y_1z_1$ (тобто під час результтивного або абсолютного руху)?

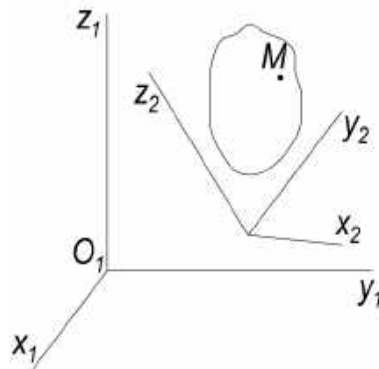


Рис. 3.10. Складний рух тіла

Довільна точка M тіла здійснює складний рух. За теоремою додавання швидкостей (3.45) під час складного руху точки маємо

$$\begin{aligned}\bar{v}_M &= \bar{v}_M^r + \bar{v}_M^e, \\ \bar{v}_M^r &= \bar{v}_2, \quad \bar{v}_M^e = \bar{v}_1.\end{aligned}\quad (3.46)$$

Оскільки під час поступального руху тіла швидкості всіх його точок є векторно однаковими, маємо

$$\bar{v}_M = \bar{v}_1 + \bar{v}_2. \quad (3.47)$$

Таким чином, абсолютні швидкості всіх точок тіла (точка M – довільна) будуть векторно однаковими. Цю властивість має тільки поступальний рух. Отже, при складанні двох поступальних рухів твердого тіла результативним є також поступальний рух зі швидкістю, що дорівнює векторній сумі швидкостей складових рухів.

Складових рухів може бути n . У цьому випадку, послідовно додаючи складові рухи (застосовуючи формулу (3.48)), отримаємо

$$\bar{v}_M = \sum_{k=1}^n \bar{v}_k. \quad (3.48)$$

При додаванні n поступальних рухів результативним (абсолютним) буде також поступальний рух зі швидкістю, яка дорівнює векторній сумі n швидкостей складових рухів.

2. *Додавання обертань навколо осей, які перетинаються.* Тіло обертається навколо осі O_2z_2 системи відліку $O_2x_2y_2z_2$ з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_2$, а система $O_2x_2y_2z_2$ обертається навколо осі O_1z_1 нерухомої системи відліку $O_1x_1y_1z_1$ з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_1$. Осі O_2z_2 і O_1z_1 перетинаються в точці O . На рис. 3.11 показано тільки осі Oz_1 і Oz_2 .

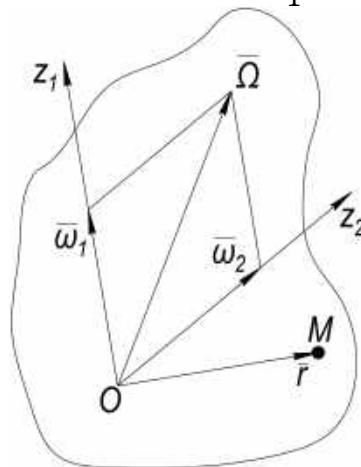


Рис. 3.11. Складання кутових швидкостей тіла під час його складного руху (кутові швидкості перетинаються)

Точка O тіла – нерухома (тому що лежить на нерухомій осі z_1), отже, результівний (абсолютний) рух тіла – обертання навколо нерухомої точки (сферичний рух). Швидкість точки M під час такого руху тіла визначається за формулою (3.32):

$$\bar{v}_M = \bar{\Omega} \times \bar{r}. \quad (3.49)$$

З іншого боку, тіло (отже, і точка M) здійснює складний рух. Абсолютна швидкість довільної точки M тіла

$$\bar{v}_M = \bar{v}_M^r + \bar{v}_M^e = \bar{\omega}_2 \times \bar{r} + \bar{\omega}_1 \times \bar{r} = (\bar{\omega}_2 + \bar{\omega}_1) \times \bar{r}. \quad (3.50)$$

Порівнявши формули (3.49) і (3.50), отримаємо

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2. \quad (3.51)$$

Отриманий результат (3.51) дає змогу зробити такий висновок: сукупність двох обертань тіла навколо осей, що перетинаються, є еквівалентною обертанню навколо спільної точки осей складових обертань з миттєвою кутовою швидкістю, що дорівнює векторній сумі кутових швидкостей складових обертань.

У випадку n складових обертань навколо осей, що перетинаються в одній точці, результівним буде обертання тіла навколо нерухомої точки (точки перетину осей складових обертань) з миттєвою кутовою швидкістю, що дорівнює векторній сумі кутових швидкостей складових обертань:

$$\bar{\Omega} = \sum_{k=1}^n \bar{\omega}_k. \quad (3.52)$$

В окремому випадку, коли $\bar{\omega}_2 = -\bar{\omega}_1$ (складові обертання – відносно й переносне – протилежних напрямків навколо загальної осі з однаковими за модулем кутовими швидкостями), сукупність таких обертань є еквівалентною спокою, оскільки з (3.50) випливає, що швидкість довільної точки M дорівнює нулю.

3. Складання обертань навколо паралельних осей.

Пара обертань (рис. 3.12).

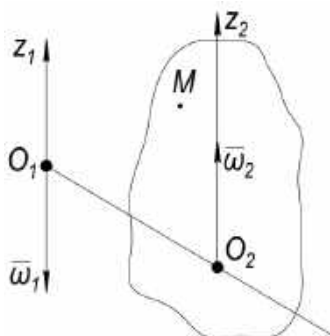


Рис. 3.12. Складання кутових швидкостей тіла під час його складного руху, за умови, що кутові швидкості складових рухів є паралельними

Тіло обертається навколо осі O_2z_2 з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_2$, вісь O_2z_2 обертається навколо нерухомої осі O_1z_1 з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_1$. Кутові швидкості складових обертань зв'язані співвідношенням

$$\bar{\omega}_2 = -\bar{\omega}_1. \quad (3.53)$$

Цей випадок називають парою обертань. Довільна точка M тіла здійснює складний рух. Застосувавши теорему додавання швидкостей (3.15) для точки M і враховуючи рівність (3.53), отримаємо

$$\bar{v}_M = \overline{O_1O_2} \times \bar{\omega}_2 = \overline{O_2O_1} \times \bar{\omega}_1. \quad (3.54)$$

У формулі (3.54) для абсолютної швидкості довільної точки M жодним чином не враховано її положення (координати або радіус-вектор), отже, усі точки тіла мають однакову швидкість, яка визначається рівністю (3.54). Таку властивість (швидкості всіх точок тіла є векторно однаковими) має тільки поступальний рух твердого тіла.

Висновок: для пари обертань результативним є поступальний рух зі швидкістю, що дорівнює моменту пари обертань (векторний добуток у правій частині рівності (3.54) називають моментом пари обертань).

Випадок, коли виключаються пари обертань (рис. 3.13).

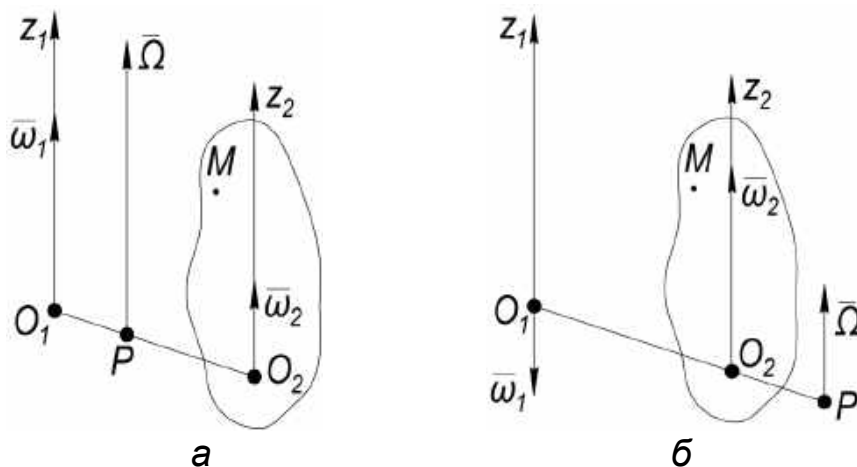


Рис. 3.13. Складання двох обертань тіла навколо паралельних осей:
а – обертання в одному напрямку; б – обертання в протилежних напрямках

Тіло обертається навколо осі O_2z_2 з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_2$, вісь O_2z_2 обертається навколо нерухомої осі O_1z_1 з кутовою швидкістю $\bar{\omega}_1$. Осі складових обертань є паралельними, напрямки обертань – однаковими (рис. 3.13, а) і протилежними (рис. 3.13, б).

Застосувавши для довільної точки M тіла теорему додавання швидкостей (3.15) і формули, що визначають швидкість точки тіла, яка обертається навколо осі ($\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r}$), отримаємо такі результати:

$$\bar{v}_M = \bar{\Omega} \times \overline{PM}; \quad (3.55)$$

$$\bar{\Omega} = \bar{\omega}_1 + \bar{\omega}_2; \quad (3.56)$$

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{\omega_2}{\omega_1}. \quad (3.57)$$

Висновок: сукупність двох обертань тіла навколо паралельних осей (що не являють собою пару обертань) є еквівалентною миттєвому обертанню, кутова швидкість якого дорівнює векторній сумі кутових швидкостей складових обертань (3.56); миттєве обертання відбувається навколо осі, паралельної до осей складових обертань. Вісь результативного обертання проходить через точку P , яка ділить відрізок O_1O_2 між осями складових обертань внутрішньо (при обертаннях в одному напрямку) (див. рис. 3.13, а) і зовнішньо (при обертаннях у протилежних напрямках) (див. рис. 3.13, б) на частини, що є обернено пропорційними до величин кутових швидкостей (ω_1, ω_2) складових обертань (3.57).

3.3. Розв'язання прямої задачі кінематики маніпулятора і визначення швидкості центра захоплювального пристрою

Розглянемо розв'язання прямої задачі кінематики маніпулятора з трьома переносними ступенями рухомості для різних його схем.

Постановка задачі. За заданими кінематичними рівняннями руху ланок (за заданими узагальненими координатами) знайти рівняння руху центра E робочого органу (захоплювального пристрою).

Приклад 1. Задано схему $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ (прямокутна декартова система координат) (рис. 3.14).

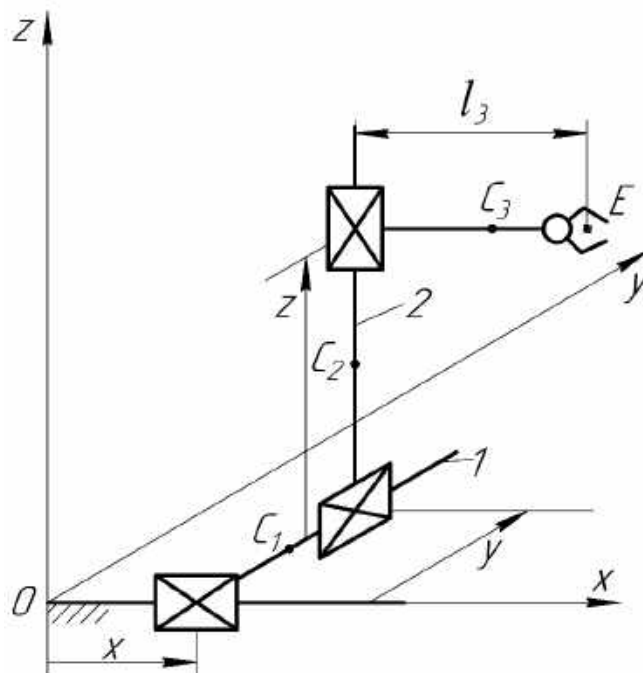


Рис. 3.14. До розв'язання прямої задачі кінематики маніпулятора схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$

Вважаємо заданими узагальнені координати:

$$q_1(t) = x(t); \quad q_2(t) = y(t); \quad q_3(t) = z(t). \quad (3.58)$$

Знайти координати в базовій системі відліку $Oxyz$ центра E робочого органу маніпулятора як функції часу $x_E(t)$, $y_E(t)$, $z_E(t)$.

Розв'язання

З рис. 3.14

$$\left. \begin{aligned} x_E(t) &= x(t) + \ell_3 = q_1(t) + \ell_3; \\ y_E(t) &= y(t) = q_2(t); \\ z_E(t) &= z(t) = q_3(t). \end{aligned} \right| \quad (3.59)$$

Рівняння (3.59) і є розв'язанням прямої задачі кінематики маніпулятора схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$.

Швидкість точки E (центра захоплювального пристрою)

$$v_x = \dot{x} = \dot{q}_1; \quad v_y = \dot{y} = \dot{q}_2; \quad v_z = \dot{z} = \dot{q}_3. \quad (3.60)$$

Величина (модуль) швидкості

$$v_E = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2}. \quad (3.61)$$

Напрямок вектора швидкості (напрямні косинуси)

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{\bar{v}}, x) &= \frac{v_x}{v} = \frac{\dot{q}_1}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2}}; \\ \cos(\widehat{\bar{v}}, y) &= \frac{v_y}{v} = \frac{\dot{q}_2}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2}}; \\ \cos(\widehat{\bar{v}}, z) &= \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{q}_3}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2}}. \end{aligned} \right| \quad (3.62)$$

Визначимо швидкості центрів тяжіння C_1 , C_2 , C_3 ланок. Кожна з ланок маніпулятора рухається поступально, тому

$$v_{C_1} = \dot{x} = \dot{q}_1; \quad (3.63)$$

$$\bar{v}_{C_2} = \bar{v}_1 + \bar{v}_{21}; \quad v_1 = \dot{x} = \dot{q}_1; \quad v_{21} = \dot{y} = \dot{q}_2;$$

$$v_{C_2} = \sqrt{v_1^2 + v_{21}^2} = \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2}; \quad (3.64)$$

$$v_{C_3} = v_E = \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2}, \quad (3.65)$$

де v_{21} – швидкість ланки 2 відносно ланки 1.

Приклад 2. Задано схему $O \parallel \Pi \perp \Pi$ (циліндрична система координат) (рис. 3.15).

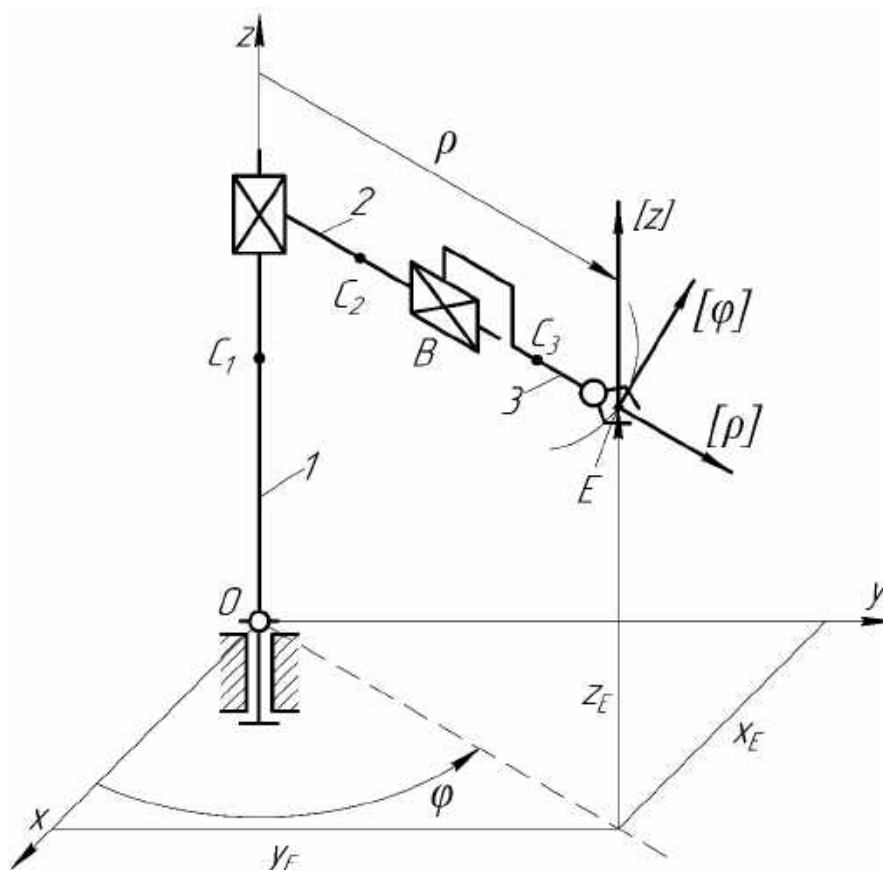


Рис. 3.15. До розв'язання прямої задачі кінематики маніпулятора схеми $O \parallel \Pi \perp \Pi$

Вважаємо заданими узагальнені координати

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= \rho(t) \\ q_2(t) &= \varphi(t) \\ q_3(t) &= z(t) \end{aligned} \right| \quad (3.66)$$

Координати точки E в базовій системі відліку $Oxyz$ (див. рис. 3.15):

$$\left. \begin{aligned} x_E(t) &= \rho(t) \cos \varphi(t) = q_1(t) \cos q_2(t); \\ y_E(t) &= \rho(t) \sin \varphi(t) = q_1(t) \sin q_2(t); \\ z_E(t) &= z(t) = q_3(t). \end{aligned} \right| \quad (3.67)$$

Проекції вектора швидкості $\bar{v}$ точки на взаємно перпендикулярні напрямки $[\bar{\rho}]$, $[\bar{\varphi}]$, $[\bar{z}]$ відповідно (див. рис. 3.15):

$$v_\rho = \dot{\rho} = \dot{q}_1; \quad v_\varphi = \rho \dot{\varphi} = q_1 \dot{q}_2; \quad v_z = \dot{z} = \dot{q}_3. \quad (3.68)$$

Модуль швидкості

$$v = \sqrt{v_\rho^2 + v_\varphi^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{q}_1^2 + q_1^2 \cdot \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2}. \quad (3.69)$$

Напрямні косинуси вектора швидкості точки E :

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{\rho}}) &= \frac{v_\rho}{v} = \frac{\dot{q}_1}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + q_1^2 \cdot \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2}}; \\ \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{\varphi}}) &= \frac{v_\varphi}{v} = \frac{q_1 \dot{q}_2}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + q_1^2 \cdot \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2}}; \\ \cos(\widehat{\vec{v}, \vec{z}}) &= \frac{v_z}{v} = \frac{\dot{q}_3}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + q_1^2 \cdot \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2}}. \end{aligned} \right| \quad (3.70)$$

Знайдемо швидкості центрів тяжіння C_1, C_2, C_3 ланок.

Проекції швидкостей центрів тяжіння C_1, C_2, C_3 ланок маніпулятора на взаємно перпендикулярні напрямки $[\rho], [\varphi], [z]$:

$$v_{C_1\rho} = v_{C_1\varphi} = v_{C_1z} = 0, \quad v_{C_1} = 0. \quad (3.71)$$

Оскільки центр тяжіння C_1 розташовано на нерухомій осі обертання,

$$v_{C_2\rho} = \dot{\rho}, \quad v_{C_2\varphi} = \dot{\varphi} AC_2, \quad v_{C_2z} = \dot{z}; \quad (3.72)$$

$$v_{C_2} = \sqrt{v_{C_2\rho}^2 + v_{C_2\varphi}^2 + v_{C_2z}^2} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2 AC_2^2 + \dot{z}^2}. \quad (3.73)$$

Для центра тяжіння C_3 ланки 3 маємо

$$v_{C_3\rho} = \dot{\rho}, \quad v_{C_3\varphi} = \dot{\varphi}(AB + BC_3), \quad v_{C_3z} = \dot{z}; \quad (3.74)$$

$$v_{C_3} = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \dot{\varphi}^2(AB + BC_3)^2 + \dot{z}^2}. \quad (3.75)$$

Приклад 3. Задано схему $O \perp O \perp \Pi$ (сферична система координат) (рис. 3.16 і 3.17).

Узагальнені координати – сферичні координати точки E :

$$q_1(t) = r(t), \quad q_2(t) = \varphi(t), \quad q_3(t) = \theta(t). \quad (3.76)$$

Координати точки E в базовій декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$:

$$\left. \begin{aligned} x_E(t) &= r \cos \theta \cos \varphi = q_1(t) \cos q_3(t) \cos q_2(t); \\ y_E(t) &= r \cos \theta \sin \varphi = q_1(t) \cos q_3(t) \sin q_2(t); \\ z_E(t) &= r \sin \theta = q_1(t) \sin q_3(t). \end{aligned} \right| \quad (3.77)$$

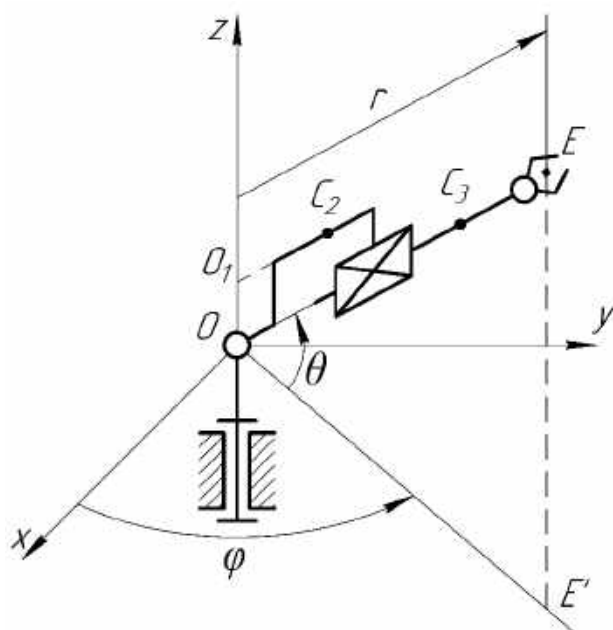


Рис. 3.16. До розв'язання прямої задачі кінематики маніпулятора схеми $O \perp O \perp \Pi$

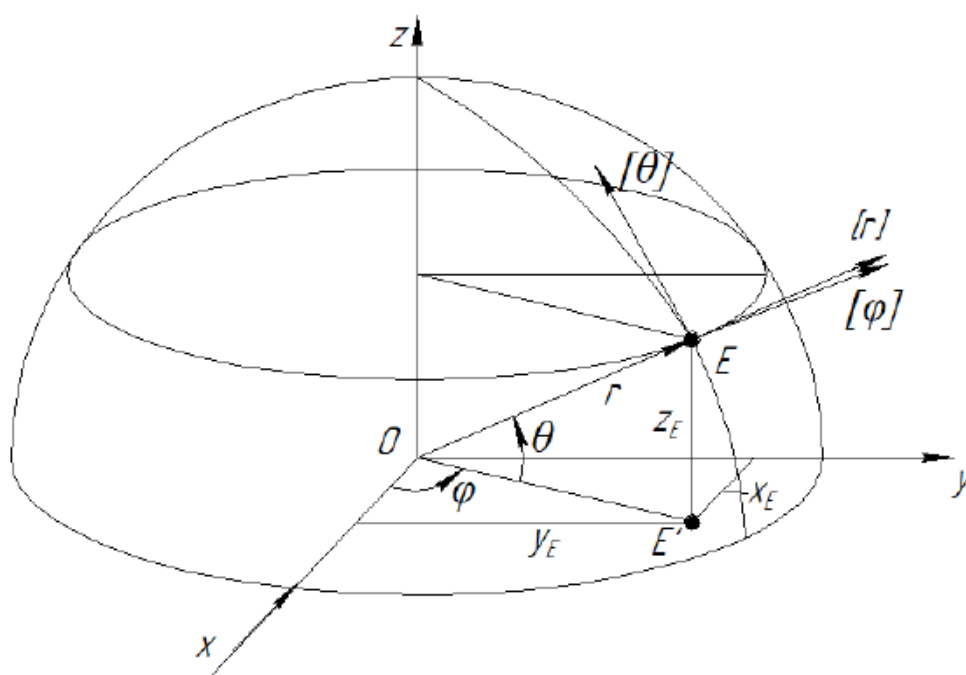


Рис. 3.17. Сферична система координат

Скориставшись формулами (3.11) і (3.12), отримаємо вирази для проєкцій вектора швидкості точки E (центра захоплювального пристрою) на взаємно перпендикулярні напрямки $[r]$, $[\varphi]$, $[\theta]$:

$$v_r = \dot{q}_1, \quad v_\varphi = q_1 \dot{q}_2 \cos q_3, \quad v_\theta = q_1 \dot{q}_3. \quad (3.78)$$

Модуль вектора швидкості

$$v = \sqrt{\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2 \cos^2 q_3 + q_1^2 \dot{q}_3^2}. \quad (3.79)$$

Напрямні косинуси вектора швидкості:

$$\left. \begin{aligned} \cos(\widehat{\vec{v}}, \widehat{\vec{r}}) &= \frac{v_r}{v} = \frac{\dot{q}_1}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2 \cos^2 q_3 + q_1^2 \dot{q}_3^2}}; \\ \cos(\widehat{\vec{v}}, \widehat{\vec{\varphi}}) &= \frac{v_\varphi}{v} = \frac{q_1 \dot{q}_2 \cos q_3}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2 \cos^2 q_3 + q_1^2 \dot{q}_3^2}}; \\ \cos(\widehat{\vec{v}}, \widehat{\vec{z}}) &= \frac{v_z}{v} = \frac{q_1 \cdot \dot{q}_3}{\sqrt{\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2 \cos^2 q_3 + q_1^2 \dot{q}_3^2}}. \end{aligned} \right| \quad (3.80)$$

Знайдемо швидкості центрів тяжіння C_1, C_2, C_3 ланок маніпулятора.

Проекції швидкостей точок C_1, C_2, C_3 на взаємно перпендикулярні напрямки $[r], [\varphi], [\theta]$:

– для центра тяжіння C_1 ланки 1 (стояка)

$$v_{C_1 r} = v_{C_1 \varphi} = v_{C_1 \theta} = 0; \quad (3.81)$$

– для центра тяжіння C_2 ланки 2 (див. рис. 3.16)

$$\left. \begin{aligned} v_{C_2 r} &= 0, \\ v_{C_2 \varphi} &= \dot{\varphi} \cdot O_1 C_2 \cdot \cos \theta = \dot{q}_2 \cdot O_1 C_2 \cdot \cos q_3, \\ v_{C_2 \theta} &= \dot{\theta} \cdot O_1 C_2 = \dot{q}_3 \cdot O_1 C_2. \end{aligned} \right| \quad (3.82)$$

Модуль швидкості

$$v_{C_2} = a_2 \sqrt{\dot{q}_2^2 \cdot \cos^2 q_3 + \dot{q}_3^2}, \quad (3.83)$$

де $O_1 C_2 = a_2$;

– для центра тяжіння C_3 ланки 3

$$\left. \begin{aligned} v_{C_3 r} &= \dot{r} = \dot{q}_1, \\ v_{C_3 \varphi} &= \dot{\varphi}(r - C_3 E) \cos \theta = \dot{q}_2(q_1 - C_3 E) \cos q_3, \\ v_{C_3 \theta} &= \dot{\theta}(r - C_3 E) = (q_1 - C_3 E) \dot{q}_3. \end{aligned} \right| \quad (3.84)$$

Модуль швидкості

$$v_{C_3} = \sqrt{\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 (q_1 - C_3 E)^2 \cdot \cos^2 q_3 + \dot{q}_3^2 (q_1 - C_3 E)^2}. \quad (3.85)$$

Приклад 4. Задано схему $O \perp O \parallel O$ (ангулярну систему координат) (рис. 3.18).

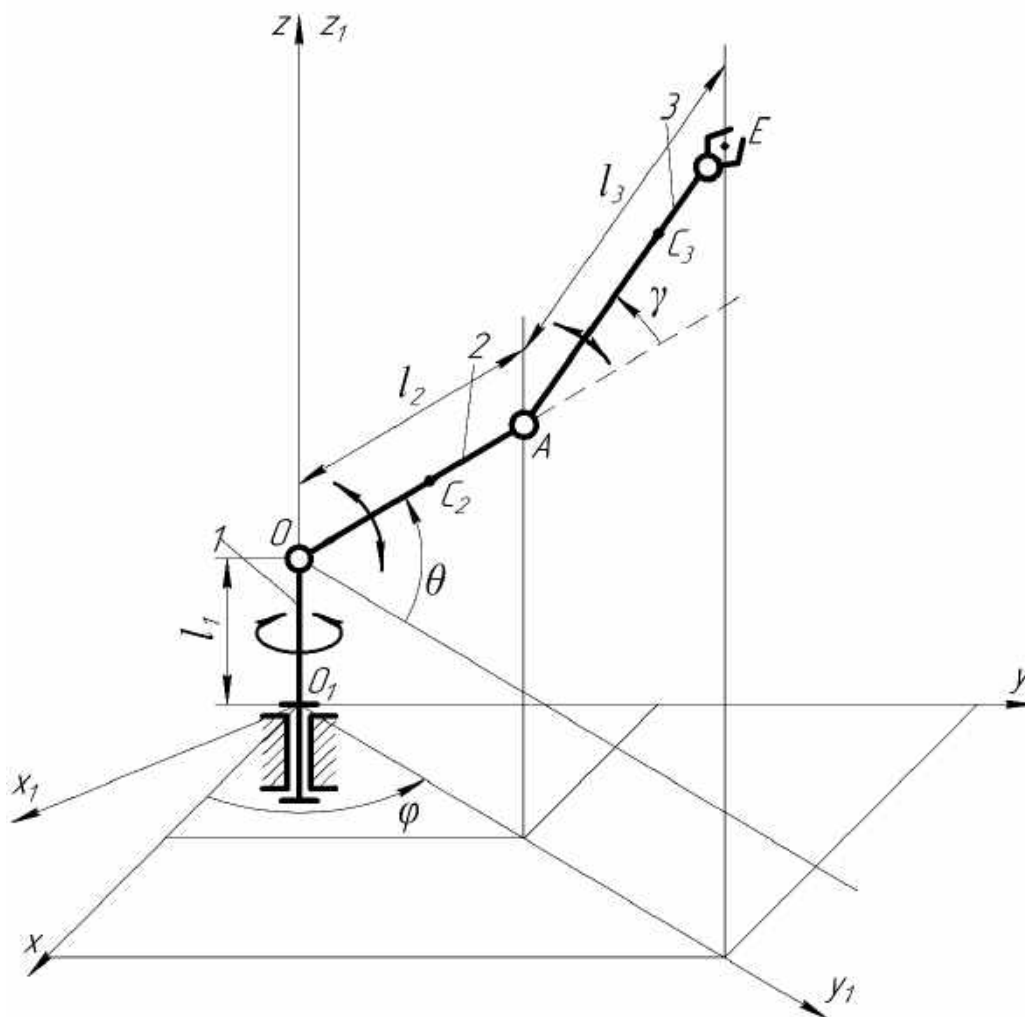


Рис. 3.18. До розв'язання прямої задачі кінематики маніпулятора схеми $O \perp O \parallel O$

Опис рухомої системи відліку $Ox_1y_1z_1$. Вісь Oz_1 поєднана з нерухомою віссю Oz інерціальної системи відліку. Площина y_1Oz_1 є такою, що ланки 2 і 3 маніпулятора весь час його руху знаходяться у цій площині. Вісь Ox_1 є перпендикулярною до площини y_1Oz_1 і в послідовності x_1, y_1, z_1 становить праву систему координат.

Узагальнені координати:

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \theta, \quad q_3 = \gamma. \quad (3.86)$$

Положення центра захоплювального пристрою (точки E) у базовій інерціальній системі відліку $Oxyz$:

$$\left. \begin{aligned} x_E &= (\ell_2 \cos \theta + \ell_3 \cos(\theta + \gamma)) \cos \varphi = (\ell_2 \cos q_2 + \ell_3 \cos(q_2 + q_3)) \cos q_1; \\ y_E &= (\ell_2 \cos \theta + \ell_3 \cos(\theta + \gamma)) \sin \varphi = (\ell_2 \cos q_2 + \ell_3 \cos(q_2 + q_3)) \sin q_1; \\ z_E &= \ell_1 + \ell_2 \sin \theta + \ell_3 \sin(\theta + \gamma) = \ell_1 + \ell_2 \sin q_2 + \ell_3 \sin(q_2 + q_3). \end{aligned} \right\} \quad (3.87)$$

З рис. 3.19 одержимо швидкість точки E (центра захоплювального пристрою)

$$\bar{v}_E = \bar{v}_{Er} + \bar{v}_{Ee}, \quad (3.88)$$

де $\bar{v}_{Er}$ – швидкість точки E відносно центра O , що відповідає змінненню кутів θ і γ . Цей вектор лежить у площині y_1Oz_1 , яка обертається навколо осі Oz з кутовою швидкістю $\dot{\phi}$:

$$\bar{v}_{Er} = \bar{v}_{Ar} + \bar{v}_{EAr}. \quad (3.89)$$

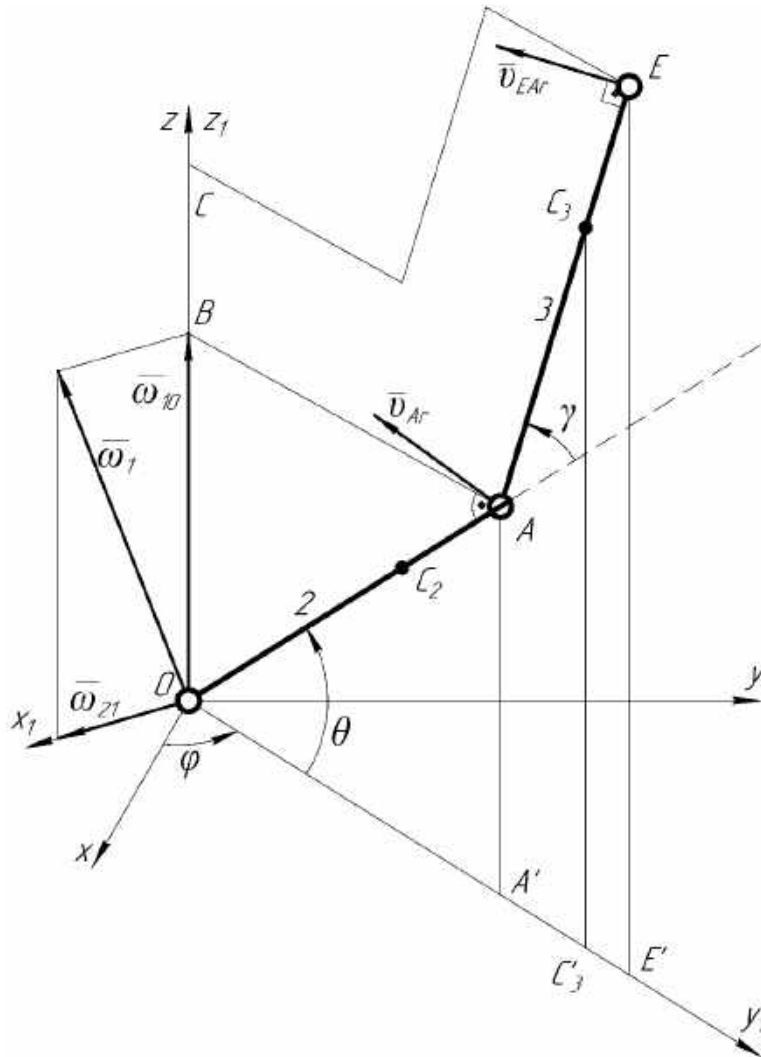


Рис. 3.19. Опис додаткової рухомої системи відліку

Тут $\bar{v}_{Ar}$ – швидкість точки A , що відповідає змінненню кута θ ,

$$\bar{v}_{Ar} = \bar{\omega}_{21} \times \overline{OA}, \quad (3.90)$$

$$\omega_{21x_1} = \dot{\theta}; \quad (3.91)$$

$\bar{v}_{EAr}$ – швидкість точки E відносно полюса A , що відповідає змінненню кута γ ,

$$\bar{v}_{EAr} = \bar{\omega}_{32} \times \overline{AE}, \quad (3.92)$$

$$\omega_{32x_1} = \dot{\gamma}. \quad (3.93)$$

Вектори $\bar{v}_{Ar}$ і $\bar{v}_{EAr}$ лежать у площині y_1Oz_1 , кут між ними дорівнює γ . За теоремою косинусів

$$\begin{aligned} v_{Er}^2 &= v_{Ar}^2 + 2v_{Ar}v_{EAr} \cos \gamma + v_{EAr}^2 = \\ &= (\dot{\theta} \cdot AO)^2 + 2\dot{\theta} \cdot AO \cdot \dot{\gamma} \cdot AE \cdot \cos \gamma + (\dot{\gamma} \cdot AE)^2 = \\ &= \dot{q}_2^2 \ell_2^2 + 2\dot{q}_2 \dot{q}_3 \ell_2 \ell_3 \cos q_3 + \dot{q}_3^2 \ell_3^2. \end{aligned} \quad (3.94)$$

Вектор $\bar{v}_{Er}$ також лежить у площині y_1Oz_1 .

Вектор $\bar{v}_{Ee}$ – швидкість точки E , що відповідає зміненню кута φ (при фіксованих θ, γ):

$$\bar{v}_{Ee} = \bar{\omega}_1 \times \overline{OE}. \quad (3.95)$$

Модуль вектора

$$\begin{aligned} v_{Ee} &= \omega_1 \cdot OE \cdot \sin(\widehat{\bar{\omega}_1, \overline{OE}}) = \omega_1 \cdot EC = \\ &= \dot{\varphi}(\ell_2 \cos \theta + \ell_3 \cos(\theta + \gamma)) = \dot{q}_1(\ell_2 \cos q_2 + \ell_3 \cos(q_2 + q_3)). \end{aligned} \quad (3.96)$$

Вектор $\bar{v}_{Ee}$ є спрямованим перпендикулярно до площини y_1Oz_1 (паралельно до осі Ox_1), тобто $\bar{v}_{Er} \perp \bar{v}_{Ee}$, отже,

$$\begin{aligned} v_E^2 &= v_{Er}^2 + v_{Ee}^2 = \dot{q}_2^2 \ell_2^2 + 2\dot{q}_2 \dot{q}_3 \ell_2 \ell_3 \cos q_3 + \dot{q}_3^2 \ell_3^2 + \\ &+ \dot{q}_1^2 (\ell_2 \cos q_2 + \ell_3 \cos(q_2 + q_3))^2. \end{aligned} \quad (3.97)$$

Аналогічно знайдемо швидкості центрів тяжіння C_1, C_2, C_3 ланок маніпулятора.

Вважаємо, що центр тяжіння C_1 ланки 1 знаходиться на геометричній осі обертання. У цьому випадку $v_{C_1} = 0$.

Для ланки 2. Позначимо $OC_2 = a_2$. Отримаємо

$$v_{C_2} = \sqrt{(\dot{\theta} \cdot OC_2)^2 + (\dot{\varphi} \cdot OC_2 \cdot \cos \theta)^2} = a_2 \sqrt{\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.98)$$

Для ланки 3 (аналогічно знаходженню швидкості вектора v_e центра захоплювального пристрою):

$$\bar{v}_{C_3} = \bar{v}_{C_3r} + \bar{v}_{C_3e} = \bar{v}_{Ar} + \bar{v}_{C_3Ar} + \bar{v}_{C_3e}; \quad (3.99)$$

$$v_{Ar} = \dot{\theta} \ell_2; \quad (3.100)$$

$$v_{C_3Ar} = \dot{\gamma} \cdot AC_3 = \dot{\gamma} a_3. \quad (3.101)$$

Нагадаємо, що в цьому посібнику рух робочого органу (захоплювального пристрою) відносно ланки 3 не враховується, тобто точка E (центр захоплювального пристрою) вважається кінцем ланки 3 ($AE = l_3$). У цьому випадку формулу швидкості v_{C_3} можна отримати з формули для швидкості v_E формальної заміної в останній довжини l_3 на відстань a_3 :

$$v_{C_3}^2 = v_{C_3r}^2 + v_{C_3e}^2 + 2v_{C_3r}v_{C_3e} \cos \gamma = v_{Ar}^2 + 2v_{Ar}v_{C_3Ar} \cos \gamma + v_{C_3Ar}^2 + v_{C_3e}^2. \quad (3.102)$$

Тут v_{C_3e} – швидкість точки C_3 , зумовлена зміненням кута φ (при фіксованих θ і γ) (див. рис. 3.19),

$$v_{C_3e} = \dot{\varphi} \cdot C_3'O = \dot{\varphi}(\ell_2 \cos \theta + a_3 \cos(\theta + \gamma)), \quad (3.103)$$

де $a_3 = AC_3$.

Підставивши вирази (3.100)–(3.102) у (3.103), отримаємо швидкість центра тяжіння ланки 3:

$$\begin{aligned} v_{C_3}^2 &= \dot{\theta}^2 \ell_2^2 + 2\dot{\theta} \ell_2 \dot{\gamma} a_3 \cos \gamma + \dot{\gamma}^2 a_3^2 + \\ &+ \dot{\varphi}^2 (\ell_2 \cos \theta + a_3 \cos(\theta + \gamma))^2 = \dot{q}_2^2 \ell_2^2 + 2\dot{q}_2 \dot{q}_3 \ell_2 \times \\ &\times a_3 \cos q_3 + \dot{q}_3^2 \cdot a_3^2 + \dot{q}_1^2 (\ell_2 \cdot \cos q_2 + a_3 \cos(q_2 + q_3))^2. \end{aligned} \quad (3.104)$$

3.4. Розв'язання оберненої задачі кінематики маніпулятора

Постановка задачі. За заданими кінематичними рівняннями руху центру робочого органу (точки E) в інерціальній (базовій) системі відліку знайти рівняння руху кожної з ланок (закони змінення узагальнених координат – $q_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, w$).

1. Схема $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ (прямокутна декартова система координат) (див. рис. 3.14).

У базовій системі координат $Oxyz$ задано координати точки E :

$$\left. \begin{aligned} x_E &= x(t) + \ell_3; \\ y_E &= y(t); \\ z_E &= z(t). \end{aligned} \right| \quad (3.105)$$

Очевидно, рівняння руху ланок маніпулятора (кожна з них рухається поступально) будуть такими:

– рівняння руху ланки 1 відносно стояка

$$x_1(t) = q_1(t) = x_E(t) - \ell_3; \quad (3.106)$$

– рівняння руху ланки 2 відносно ланки 1

$$y_2(t) = q_2(t) = y_E(t); \quad (3.107)$$

– рівняння руху ланки 3 відносно ланки 2

$$z_3(t) = q_3(t) = z_E(t). \quad (3.108)$$

Отже, узагальнені координати через рівняння руху центра захоплювального пристрою будуть такими:

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= x_E(t) - \ell_3; \\ q_2(t) &= y_E(t); \\ q_3(t) &= z_E(t). \end{aligned} \right| \quad (3.109)$$

2. Схема $O \parallel \Pi \perp \Pi$ (циліндрична система координат) (див. рис. 3.15).

Задано: кінематичні рівняння руху в базовій системі координат $Oxyz$ точки E (центра робочого органу)

$$\left. \begin{aligned} x_E &= x_E(t); \\ y_E &= y_E(t); \\ z_E &= z_E(t). \end{aligned} \right| \quad (3.110)$$

Отримати рівняння руху кожної з ланок, тобто закон змінення від часу кожної з узагальнених координат:

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= \rho(t); \\ q_2(t) &= \varphi(t); \\ q_3(t) &= z(t). \end{aligned} \right| \quad (3.111)$$

Задача розв'язується методами елементарної геометрії (див. рис. 3.15):

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= \rho(t) = \sqrt{(x_E(t))^2 + (y_E(t))^2}; \\ q_2(t) &= \varphi(t) = \arctg \frac{y_E(t)}{x_E(t)}; \\ q_3(t) &= z(t) = z_E(t). \end{aligned} \right| \quad (3.112)$$

3. Схема $O \perp O \perp \Pi$ (сферична система координат).

За заданими в базовій системі відліку $Oxyz$ (див. рис. 3.16, 3.17) кинематичними рівняннями руху (3.105) центра E робочого органу отримати рівняння руху кожної з ланок маніпулятора, тобто залежності узагальнених координат від часу:

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= r(t); \\ q_2(t) &= \varphi(t); \\ q_3(t) &= \theta(t). \end{aligned} \right| \quad (3.113)$$

З рис. 3.16, 3.17 маємо

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= r(t) = \sqrt{(x_E(t))^2 + (y_E(t))^2 + (z_E(t))^2}; \\ q_2(t) &= \varphi(t) = \arctg \frac{y_E(t)}{x_E(t)}; \\ q_3(t) &= \theta(t) = \arctg \frac{z_E(t)}{\sqrt{(x_E(t))^2 + (y_E(t))^2}}. \end{aligned} \right| \quad (3.114)$$

4. Схема $O \perp O \parallel O$ (ангулярна система координат (див. рис. 3.18)).

Уважаємо заданими в базовій системі координат $Oxyz$ кинематичні рівняння руху центра E робочого органу

$$\left. \begin{aligned} x_E &= x_E(t); \\ y_E &= y_E(t); \\ z_E &= z_E(t). \end{aligned} \right| \quad (3.115)$$

Знайти рівняння руху ланок маніпулятора, тобто закони змінення від часу кожної з узагальнених координат:

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= \varphi(t); \\ q_2(t) &= \theta(t); \\ q_3(t) &= \gamma(t). \end{aligned} \right| \quad (3.116)$$

Розв'язання задачі є неоднозначним. Очевидно, для будь-якого положення точки E кожному значенню кута φ відповідають дві пари значень узагальнених координат $q_2 = \theta$ і $q_3 = \gamma$ (крім положень, коли $\gamma = 0$) (рис. 3.20, 3.21).

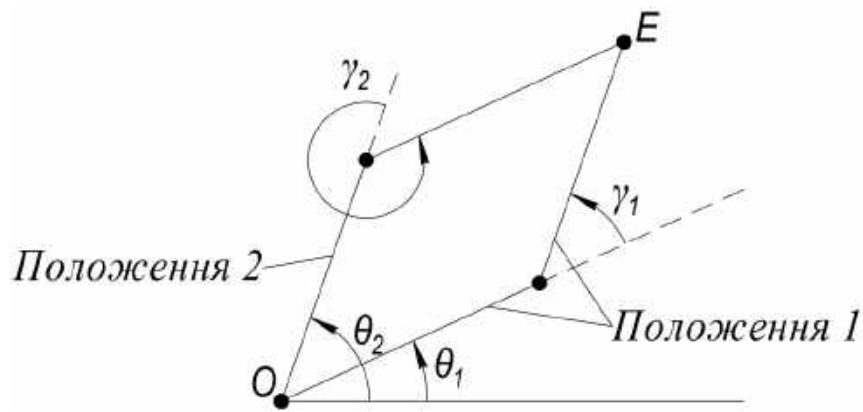


Рис. 3.20. Можливі положення ланок 2, 3 (значення узагальнених координат для типового положення точки E)

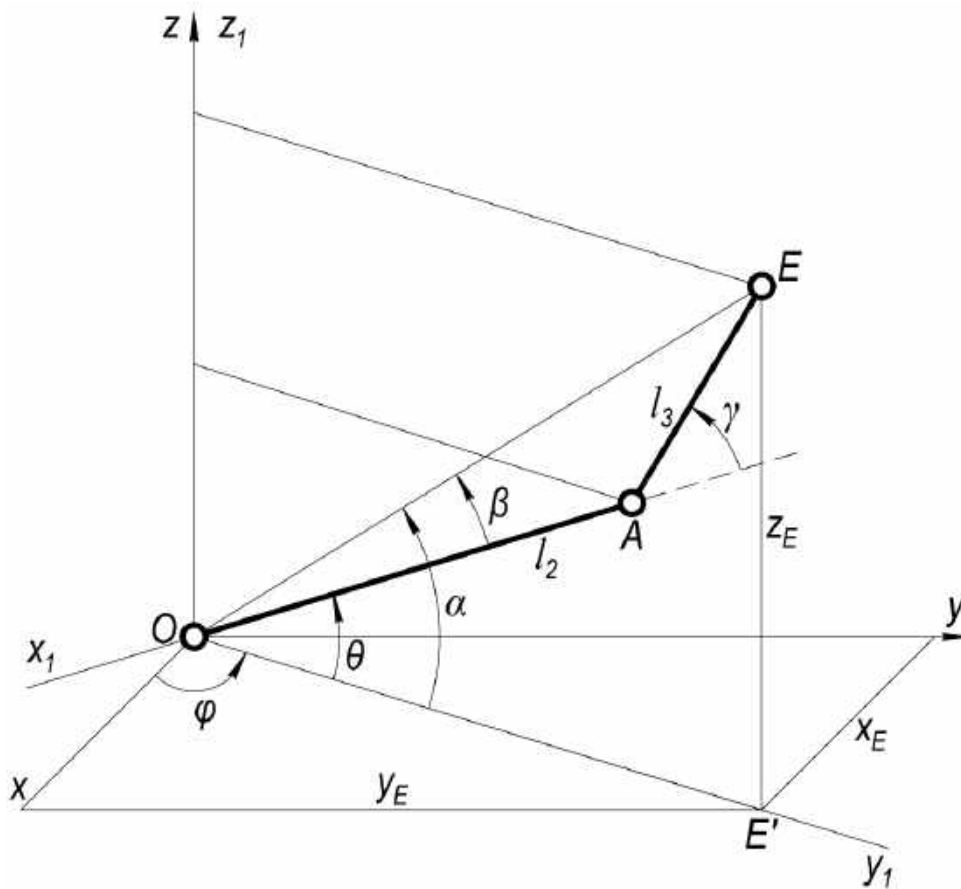


Рис. 3.21. До визначення узагальнених координат q_1, q_2, q_3 через декартові прямокутні координати точки E

Для положення 1 (див. рис. 3.20) виразимо узагальнені координати q_1, q_2, q_3 через декартові прямокутні x_E, y_E, z_E (див. рис. 3.21):

$$q_1(t) = \varphi(t) = \arctg \frac{y_E(t)}{x_E(t)}. \quad (3.117)$$

З трикутника $OE'E$

$$OE^2 = \rho^2 = x_E^2 + y_E^2 + z_E^2, \quad (3.118)$$

з трикутника OAE

$$\alpha = \arctg \frac{z_E}{\sqrt{x_E^2 + y_E^2}}. \quad (3.119)$$

З векторного трикутника OAE

$$\overline{OE} = \overline{OA} + \overline{AE} \text{ або } \bar{\rho} = \bar{\ell}_2 + \bar{\ell}_3, \quad (3.120)$$

звідки

$$\rho^2 = \ell_2^2 + 2\ell_2\ell_3 \cos \gamma + \ell_3^2. \quad (3.121)$$

З останньої рівності отримаємо

$$q_3(t) = \gamma(t) = \arccos \frac{\rho^2 - \ell_2^2 - \ell_3^2}{2\ell_2\ell_3}, \quad (3.122)$$

де

$$\rho^2 = (x_E(t))^2 + (y_E(t))^2 + (z_E(t))^2. \quad (3.123)$$

З рівності (3.116)

$$\bar{\ell}_3 = \bar{\rho} - \bar{\ell}_2. \quad (3.124)$$

Після піднесення до квадрата отримаємо

$$\ell_3^2 = \rho^2 - 2\rho\ell_2 \cos \beta + \ell_2^2. \quad (3.125)$$

Звідси

$$\beta = \arccos \frac{\rho^2 + \ell_2^2 - \ell_3^2}{2\rho \cdot \ell_2}. \quad (3.126)$$

З рис. 3.22 маємо

$$q_2(t) = \theta(t) = \alpha(t) - \beta(t). \quad (3.127)$$

Таким чином, рівності (3.117), (3.127), (3.122) з урахуванням рівностей (3.119), (3.125), (3.126) дають розв'язок оберненої задачі кінематики маніпулятора схеми $0 \perp 0 \parallel 0$.

Для положення 2 (див. рис. 3.20) визначимо узагальнені координати як функції часу (рис. 3.22):

$$q_1(t) = \varphi(t) = \arctg \frac{y_E(t)}{x_E(t)}, \quad (3.128)$$

$$q_2(t) = \theta(t) = \alpha(t) + \beta(t), \quad (3.129)$$

$$q_3(t) = \gamma(t) = \arccos \frac{(\rho(t))^2 - \ell_2^2 - \ell_3^2}{2\ell_2\ell_3}, \quad (3.130)$$

де

$$(\rho(t))^2 = (x_E(t))^2 + (y_E(t))^2 + (z_E(t))^2, \quad (3.131)$$

$$\alpha(t) = \arctg \frac{z_E(t)}{\sqrt{(x_E(t))^2 + (y_E(t))^2}}, \quad (3.132)$$

$$\beta(t) = \arccos \frac{(\rho(t))^2 + \ell_2^2 - \ell_3^2}{2\rho(t)\ell_2}. \quad (3.133)$$

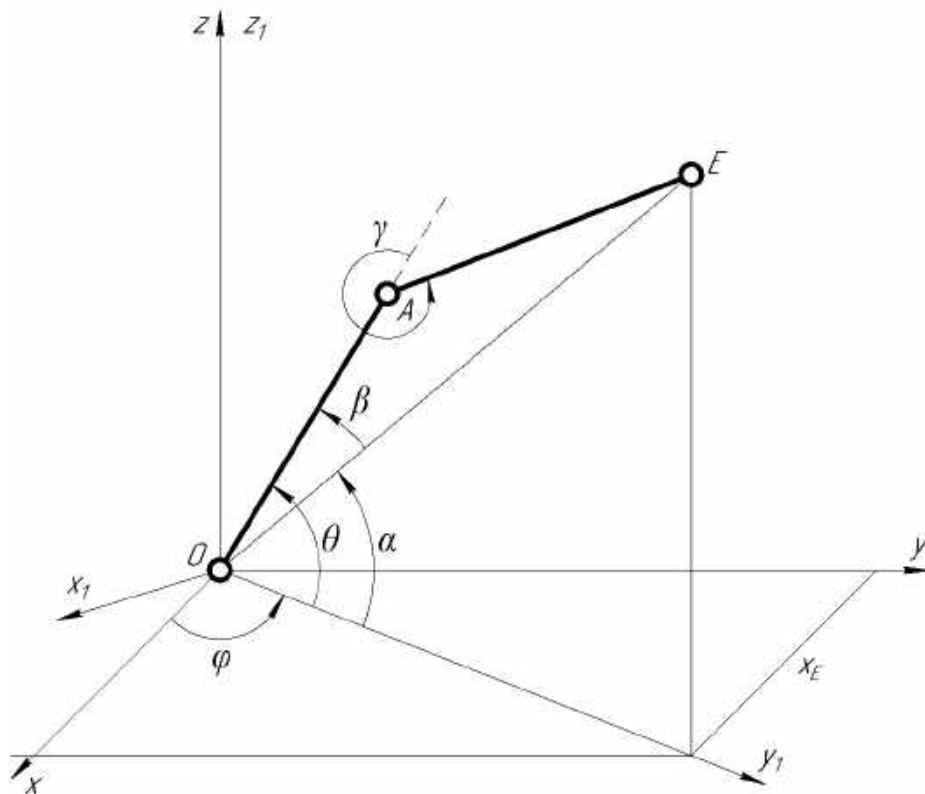


Рис. 3.22. До визначення узагальнених координат $q_1 = \varphi$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \gamma$ через декартові прямокутні координати точки E

Для розв'язання оберненої задачі кінематики маніпулятора можна скористатись і таким способом: у складених рівняннях для розв'язання прямої задачі вважати заданими кінематичні рівняння руху центра E робочого органу – $x_E(t)$, $y_E(t)$, $z_E(t)$, а функціями, що підлягають визначенню, – відповідні узагальнені координати.

Для схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ (див. рис. 3.14) з рівнянь (3.59) знаходимо $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$.

Для схеми $O \parallel \Pi \perp \Pi$ (див. рис. 3.15) з рівнянь (3.67) знаходимо $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$.

Для схеми $O \perp O \perp \Pi$ (див. рис. 3.16–3.18) з рівнянь (3.77) знаходимо $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$.

Для схеми $O \perp O \parallel O$ (див. рис. 3.18, 3.19) систему рівнянь (3.84) слід розв'язувати відносно невідомих $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$, уважаючи відомими $x_E(t)$, $y_E(t)$, $z_E(t)$.

Для схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ (прямокутної декартової системи координат) описаний вище спосіб розв'язання оберненої задачі кінематики маніпулятора є простим. Для інших схем, особливо для схеми $O \perp O \parallel O$ (ангулярної системи координат), знаходження аналітичних залежностей $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ становить значні математичні труднощі, тому що відповідні співвідношення в загальному випадку являють собою системи трьох істотно нелінійних рівнянь з невідомими $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$.

Незважаючи на те, що описаний вище спосіб розв'язання оберненої задачі кінематики маніпулятора базується на загальному підході, теоретично можливому для будь-якої схеми, на практиці його можна реалізувати тільки для простих схем:

– для схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ (див. рис. 3.14) з рівностей (3.59) маємо

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= x_E(t) - \ell_3; \\ q_2(t) &= y_E(t); \\ q_3(t) &= z_E(t); \end{aligned} \right| \quad (3.134)$$

– для схеми $O \parallel \Pi \perp \Pi$ (див. рис. 3.15) з рівнянь (3.67) отримаємо

$$\left. \begin{aligned} q_1(t) &= \sqrt{(x_E(t))^2 + (y_E(t))^2}; \\ q_2(t) &= \arctg \frac{y_E(t)}{x_E(t)}; \\ q_3(t) &= z_E(t). \end{aligned} \right| \quad (3.135)$$

При розв'язанні оберненої задачі кінематики маніпулятора у випадку керування за швидкістю центра робочого органу буває необхідним за заданою швидкістю (або проекціями її на осі базової системи координат) центра робочого органу знайти узагальнені швидкості, тобто

$$\dot{q}_k(t) = \dot{q}_k(\dot{x}_E(t), \dot{y}_E(t), \dot{z}_E(t)), \quad k = 1, 2, \dots, w. \quad (3.136)$$

Подивимося, як вирішується ця задача для різних схем маніпулятора (у різних базових системах координат).

1. Схема $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ (прямокутна декартова система координат). Зв'язок між абсолютними координатами $x_E(t)$, $y_E(t)$, $z_E(t)$ центра робочого органу (точки E) й узагальненими координатами $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ маніпулятора встановлюють рівності (3.106) (див. рис. 3.14).

З рівності (3.97) отримуємо шукані залежності:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= \dot{x}_E(t); \\ \dot{q}_2(t) &= \dot{y}_E(t); \\ \dot{q}_3(t) &= \dot{z}_E(t). \end{aligned} \right| \quad (3.137)$$

2. Схема $O \parallel \Pi \perp \Pi$ (циліндрична система координат). Абсолютні координати $x_E(t)$, $y_E(t)$, $z_E(t)$ центра E робочого органу й узагальнені координати $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ маніпулятора пов'язані формулами (3.109) (див. рис. 3.15). Для отримання залежностей типу (3.136) диференціюємо за часом рівності (3.67):

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_E(t) &= \dot{q}_1(t) \cos q_2(t) - q_1(t) \dot{q}_2(t) \sin q_2(t); \\ \dot{y}_E(t) &= \dot{q}_1(t) \sin q_2(t) + q_1(t) \dot{q}_2(t) \cos q_2(t); \\ \dot{z}_E(t) &= \dot{q}_3(t). \end{aligned} \right| \quad (3.138)$$

Помножимо першу з рівностей (3.138) на $\cos q_2$, а другу – на $\sin q_2$, склавши ліві й праві частини, отримаємо

$$\dot{x}_E(t) \cos q_2(t) + \dot{y}_E(t) \sin q_2(t) = \dot{q}_1(t). \quad (3.139)$$

Тепер помножимо перше з рівнянь (3.138) на $\sin q_2$, а друге – на $\cos q_2$. Віднімемо з другого рівняння перше. Отримаємо

$$\dot{y}_E(t) \cos q_2(t) - \dot{x}_E(t) \sin q_2(t) = q_1(t) \cdot \dot{q}_2(t). \quad (3.140)$$

Остаточно з третьої рівності (3.138) і з рівнянь (3.139), (3.140) отримаємо розв'язок типу (3.136) для схеми $O \parallel \Pi \perp \Pi$:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= \dot{x}_E(t) \cdot \cos q_2(t) + \dot{y}_E(t) \sin q_2(t); \\ \dot{q}_2(t) &= \dot{y}_E(t) \frac{\cos q_2(t)}{q_1(t)} - \dot{x}_E(t) \frac{\sin q_2(t)}{q_1(t)}; \\ \dot{q}_3(t) &= \dot{z}_E(t). \end{aligned} \right| \quad (3.141)$$

3. Схема $O \perp O \perp \Pi$ (сферична система координат). Зв'язок між абсолютними координатами $x_E(t)$, $y_E(t)$, $z_E(t)$ центра E робочого органу й узагальненими координатами $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ маніпулятора дають формули (3.77), (3.114). Диференціюючи за часом співвідношення (3.114), отримуємо значення узагальнених швидкостей через проекції абсолютної швидкості точки E на осі базової системи координат:

$$\left. \begin{aligned} \dot{q}_1(t) &= \frac{2(x_E(t) \cdot \dot{x}_E(t) + y_E(t) \cdot \dot{y}_E(t) + z_E(t) \cdot \dot{z}_E(t))}{\sqrt{(x_E(t))^2 + (y_E(t))^2 + (z_E(t))^2}}; \\ \dot{q}_2(t) &= \frac{x_E(t) \cdot \dot{y}_E(t) - y_E(t) \cdot \dot{x}_E(t)}{(x_E(t))^2}; \\ \dot{q}_3(t) &= \frac{2\dot{z}_E(t) \left((x_E(t))^2 + (y_E(t))^2 \right) - z_E(t) (x_E(t) \cdot \dot{x}_E(t) + y_E(t) \cdot \dot{y}_E(t))}{2 \left((x_E(t))^2 + (y_E(t))^2 + (z_E(t))^2 \right) \sqrt{(x_E(t))^2 + (y_E(t))^2}}, \end{aligned} \right| \quad (3.142)$$

де $x_E(t)$, $y_E(t)$, $z_E(t)$ визначаються формулами (3.77).

4. Схема $O \perp O \parallel O$ (ангулярна система координат). Для просторової ангулярної системи координат вирази узагальнених швидкостей $\dot{q}_1$, $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ через проекції $\dot{x}_E$, $\dot{y}_E$, $\dot{z}_E$ абсолютної швидкості центра E робочого органу є занадто громіздкими (їх можна отримати диференціюванням за часом залежностей (3.128)–(3.130) з урахуванням (3.131)–(3.133)).

Розглянемо плоску ангулярну систему координат.

Вирази абсолютних координат x_E , y_E центра E робочого органу через узагальнені координати маніпулятора (рис. 3.23) мають вигляд

$$\left. \begin{aligned} x_E(t) &= \ell_1 \cos q_1(t) + \ell_2 \cos(q_1(t) + q_2(t)); \\ y_E(t) &= \ell_1 \sin q_1(t) + \ell_2 \sin(q_1(t) + q_2(t)). \end{aligned} \right| \quad (3.143)$$

Необхідно знайти $\dot{q}_1(t)$, $\dot{q}_2(t)$.

Здиференціювавши за часом рівності (3.143), отримаємо

$$\begin{cases} \dot{x}_E(t) = -\ell_1 \dot{q}_1(t) \sin q_1(t) - \ell_2 (\dot{q}_1(t) + \dot{q}_2(t)) \sin(q_1(t) + q_2(t)); \\ \dot{y}_E(t) = \ell_1 \dot{q}_1(t) \cos q_1(t) + \ell_2 (\dot{q}_1(t) + \dot{q}_2(t)) \cos(q_1(t) + q_2(t)). \end{cases} \quad (3.144)$$

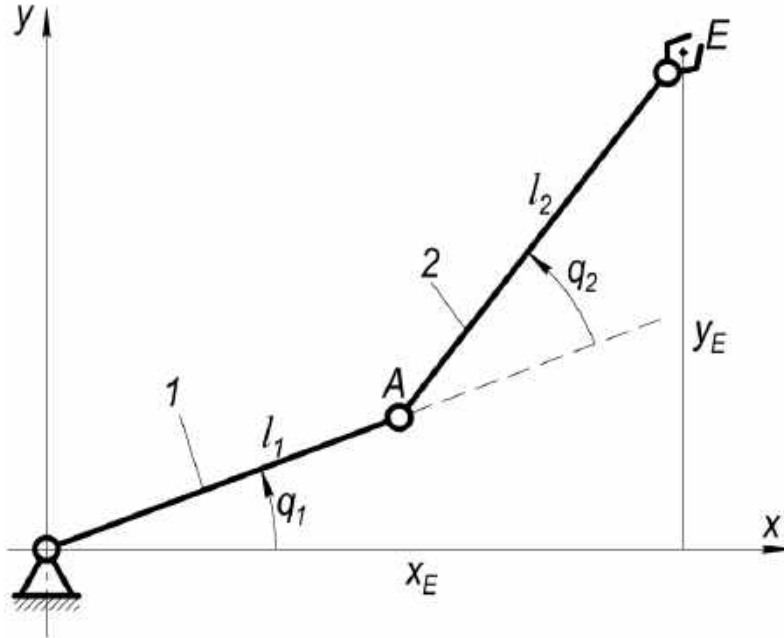


Рис. 3.23. Маніпулятор схеми 0 || 0 (плоска ангулярна система координат)

З отриманих рівностей (3.144) знайдемо спочатку $\dot{q}_1(t)$. Для цього першу з рівностей помножимо на $\cos(q_1(t) + q_2(t))$, а другу – на $\sin(q_1(t) + q_2(t))$ і складемо отримані рівняння:

$$\begin{aligned} & \dot{x}_E(t) \cos(q_1(t) + q_2(t)) + \dot{y}_E(t) \sin(q_1(t) + q_2(t)) = \\ & = \ell_1 \dot{q}_1(t) (-\sin q_1(t) \cos(q_1(t) + q_2(t)) + \cos q_1(t) \sin(q_1(t) + q_2(t))) = \\ & = \ell_1 \cdot \dot{q}_1(t) \cdot \sin q_2(t). \end{aligned} \quad (3.145)$$

Тут застосовано формулу тригонометрії

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta. \quad (3.146)$$

З рівняння (3.145)

$$\dot{q}_2(t) = -\frac{\dot{x}_E(t) \cos(q_1(t) + q_2(t)) + \dot{y}_E(t) \sin(q_1(t) + q_2(t))}{\ell_1 \sin q_2(t)}. \quad (3.147)$$

Для отримання другої узагальненої швидкості $\dot{q}_2(t)$ виключимо з рівностей (3.144) $\dot{q}_1(t)$. Помножимо першу з них на $\cos q_1(t)$, а другу – на $\sin q_1(t)$ і складемо одержані результати. З урахуванням формули (3.146) маємо

$$\dot{x}_E(t) \cos q_1(t) + \dot{y}_E(t) \sin q_1(t) = -\ell_2(\dot{q}_1(t) + \dot{q}_2(t)) \sin q_2(t), \quad (3.148)$$

звідки отримаємо вираз для другої узагальненої швидкості:

$$\begin{aligned} \dot{q}_2(t) = & -\frac{\dot{x}_E(t) \cos(q_1(t) + q_2(t)) + \dot{y}_E(t) \sin(q_1(t) + q_2(t))}{\ell_1 \sin q_2(t)} - \\ & -\frac{\dot{x}_E(t) \cos q_1(t) + \dot{y}_E(t) \sin q_1(t)}{\ell_2 \sin q_2(t)}. \end{aligned} \quad (3.149)$$

Виразу для $\dot{q}_2(t)$ (3.149) можна надати іншого вигляду. Звівши праву частину до спільного знаменника і врахувавши рівності (3.139), одержимо

$$\dot{q}_2(t) = -\frac{\dot{x}_E(t)x_E(t) + \dot{y}_E(t)y_E(t)}{\ell_1 \ell_2 \sin q_2(t)}. \quad (3.150)$$

Отже, формули (3.148) і (3.149) або (3.148) і (3.150) задають узагальнені швидкості дворухомого (двоступеневого) плоского маніпулятора в плоскій ангулярній системі координат і їх виражено через проєкції $\dot{x}_E$, $\dot{y}_E$ на осі прямокутної базової системи координат вектора абсолютної швидкості центра E робочого органу.

При цьому слід ураховувати для кожної зі схем маніпулятора вирази для узагальнених координат q_1 , q_2 , q_3 через координати точки E (центра захоплювального пристрою) у базовій системі координат. Наприклад, для схеми $O \perp O \parallel O$ (ангулярної системи координат) ці залежності можна отримати з формул (3.128)–(3.133).

4. ДИНАМІКА МАНІПУЛЯТОРА

З огляду на теоретичну механіку маніпулятор є механічною системою. Отже, до нього можна застосувати класичні формулювання прямої й оберненої задач динаміки.

Пряма задача: за заданим кінематичним рівнянням руху ланок маніпулятора, тобто за заданими залежностями узагальнених координат від часу $q_1(t), q_2(t), \dots, q_w(t)$, їх масами й активними силами, що діють на ланки, знайти відповідні закони змінення в часі сил (моментів) приводів динамічні реакції в кінематичних парах.

Обернена задача: за заданими активними силами, що діють на ланки, їх масо-геометричними характеристиками й початковими умовами отримати рівняння руху ланок, тобто закон змінення від часу кожної з узагальнених координат $q_1(t), q_2(t), \dots, q_w(t)$, і динамічні реакції зв'язків.

Шукати розв'язок кожної зі сформульованих задач будемо з допомогою рівнянь Лагранжа 2-го роду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j; \quad j = 1, 2, \dots, w, \quad (4.1)$$

де T – кінетична енергія маніпулятора;

$q_j, j = 1, 2, \dots, w$ – узагальнені координати;

$Q_j, j = 1, 2, \dots, w$ – узагальнені сили;

w – кількість ступенів вільності (ступенів рухомості) маніпулятора.

Кінетичну енергію T маніпулятора отримаємо як функцію від узагальнених швидкостей $\dot{q}_j$, узагальнених координат q_j і, можливо, часу t , тобто

$$T = T(\dot{q}, q, t). \quad (4.2)$$

Для маніпулятора, до складу якого належать n рухомих ланок,

$$T = \sum_{k=1}^n T_k, \quad (4.3)$$

де T_k – кінетична енергія ланки з номером k ($k = 1, 2, \dots, n$).

Уважаючи ланки механізму маніпулятора абсолютно твердими тілами, наведемо формули кінетичної енергії твердого тіла для різних видів його руху.

Поступальний рух твердого тіла:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 = \frac{1}{2} M v^2, \quad (4.4)$$

де M – маса тіла;

v – швидкість тіла.

Обертання тіла навколо нерухомої осі (наприклад, z):

$$T = \frac{1}{2} I_z \omega^2, \quad (4.5)$$

де I_z – момент інерції тіла відносно осі обертання;

ω – кутова швидкість тіла.

Плоский (плоскопаралельний) рух тіла:

$$T = \frac{1}{2} M v_C^2 + \frac{1}{2} I_{C_z} \omega^2, \quad (4.6)$$

де M – маса тіла;

v_C – швидкість центра тяжіння тіла;

I_{C_z} – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через його центр тяжіння перпендикулярно до площини руху;

ω – кутова швидкість тіла.

Обертання тіла навколо нерухомої точки O :

$$T = \frac{1}{2} (I_x \omega_x^2 + I_y \omega_y^2 + I_z \omega_z^2 - 2I_{xy} \omega_x \omega_y - 2I_{xz} \omega_x \omega_z - 2I_{yz} \omega_y \omega_z), \quad (4.7)$$

де I_x, I_y, I_z – осьові моменти інерції;

I_{xy}, I_{xz}, I_{yz} – центробіжні моменти інерції тіла в системі координат $Oxyz$, незмінно пов'язаній з рухомим тілом;

$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проєкції на координатні осі вектора кутової швидкості тіла;

O – нерухома точка тіла.

Складний рух тіла. За теоремою Кеніга

$$T = \frac{M v_C^2}{2} + T', \quad (4.8)$$

де M – маса тіла;

v_C – швидкість центра тяжіння тіла;

T' – кінетична енергія тіла під час його руху відносно центра тяжіння.

Узагальнені сили $Q_j, j = 1, 2, \dots, w$ будемо обчислювати окремо: для потенціальних (консервативних) активних сил – Q_j^{Π} , для непотенціальних – Q_j^H , тобто

$$Q_j = Q_j^{\Pi} + Q_j^H, j = 1, 2, \dots, w. \quad (4.9)$$

Для потенціальних активних сил узагальнені сили визначаються формулою

$$Q_j^{\Pi} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_j}, \quad j = 1, 2, \dots, w, \quad (4.10)$$

де Π – потенціальна енергія маніпулятора,

$$\Pi = \Pi(q_1, q_2, \dots, q_w). \quad (4.11)$$

Для непотенціальних активних сил, до яких належать, наприклад, рушійні сили й моменти приводів, узагальнені сили будемо обчислювати за формулою

$$Q_j^{\text{H}} = -\frac{\partial(\sum \delta A(\bar{F}^{\text{H}}))}{\partial(\delta q_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, w, \quad (4.12)$$

де $\sum \delta A(\bar{F}^{\text{H}})$ – сума віртуальних робіт активних непотенціальних сил;

$\frac{\partial}{\partial(\delta q_j)}$ – частинна похідна за варіацією j -ї узагальненої координати δq_j .

Унаслідок застосування рівнянь Лагранжа 2-го роду (4.1) отримаємо систему w звичайних диференціальних рівнянь 2-го порядку, які містять такі змінні: узагальнені прискорення $\ddot{q}$, узагальнені швидкості $\dot{q}$, іноді узагальнені координати q і час t . Ці рівняння описують рух маніпулятора з урахуванням як інертних властивостей (мас, моментів інерції) його ланок, так і сил і моментів, що діють на них.

*Методика застосування рівнянь Лагранжа 2-го роду
для отримання диференціальних рівнянь руху маніпулятора
в узагальнених координатах*

1. Виконаємо аналіз зв'язків, накладених на ланки маніпулятора. Рівняння Лагранжа 2-го роду у вигляді (4.1) справджуються для механічних систем з ідеальними, двосторонніми, стаціонарними, голономними зв'язками. У маніпуляторах з послідовною кінематикою зв'язки, накладені на ланки, – це кінематичні пари 5-го класу, які є двосторонніми, стаціонарними, голономними. За наявності неідеальних зв'язків (зв'язків з тертям) можливими є два варіанти:

а) коефіцієнт тертя f в кінематичній парі (КП) є відомим. Якщо КП – поступальна, то силу тертя з категорії реакції зв'язків переводимо в категорію активних сил за формулою

$$F_{\text{тер}} = f R_n, \quad (4.13)$$

де нормальна реакція R_n визначається з диференціального рівняння руху (відносного) у проєкції на нормаль до відносної швидкості.

Для обертальної КП момент тертя

$$M_{\text{тер}} = f R_n r, \quad (4.14)$$

де r – радіус циліндричної поверхні в КП;

б) коефіцієнт тертя в КП є невідомим. У цьому випадку сила тертя $F_{\text{тер}}$ у поступальній КП і (або) момент тертя $M_{\text{тер}}$ в обертальній КП залишаються додатковими невідомими. Ситуація стає такою, коли кількість рівнянь руху дорівнює W , а невідомих – більше на кількість неідеальних зв'язків ($F_{\text{тер}}, M_{\text{тер}}, \dots$). Єдиного розв'язку система рівнянь не має.

2. Визначимо ступінь рухомості W маніпулятора й виберемо узагальнені координати $q_1, q_2, \dots, q_w$. Дії цього пункту докладно описано в розділі 3 «Кінематика маніпулятора».

У маніпуляторах з послідовною кінематикою (кінематичний ланцюг утворено послідовним з'єднанням ланок кінематичними парами 5-го класу) кожному ступеню рухомості відповідає своя узагальнена координата, тобто кількість узагальнених координат має дорівнювати ступеню рухомості W (кількості ступенів вільності) маніпулятора.

3. Запишемо вираз кінетичної енергії T маніпулятора у вигляді (4.2), використовуючи формули (4.3)–(4.7). При цьому всі фізичні швидкості v, ω (лінійні, кутові) має бути виражено через узагальнені швидкості й координати ($\dot{q}, q$).

4. За формулами (4.9)–(4.12) обчислимо узагальнені сили.

5. Складемо рівняння руху маніпулятора (лагранжів формалізм).

а) складемо рівняння, що відповідає узагальненій координаті q_1 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1^{\Pi} + Q_1^H. \quad (4.15)$$

Обчислимо похідні:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}; \quad \frac{\partial T}{\partial q_1}. \quad (4.16)$$

Підставивши обчислені похідні (4.16) й узагальнені сили Q_1^{Π} і Q_1^H з п. 4 в рівняння (4.15), отримаємо диференціальне рівняння руху маніпулятора, що відповідає узагальненій координаті q_1 ;

б) якщо ступінь рухомості маніпулятора $W > 1$, то складемо рівняння, що відповідає узагальненій координаті q_2 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2^{\Pi} + Q_2^H. \quad (4.17)$$

Обчислимо похідні:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}; \quad \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}; \quad \frac{\partial T}{\partial q_2}. \quad (4.18)$$

Підставивши в (4.17) отримані вирази (4.18) й узагальнені сили з п. 4, отримаємо диференціальні рівняння руху маніпулятора, що відповідають узагальненій координаті q_2 .

Якщо ступінь рухомості маніпулятора $W = 2$, то процес отримання рівнянь руху маніпулятора закінчено, тобто рух двоступеневого (дворухомого) маніпулятора описується системою двох диференціальних рівнянь. В іншому випадку $W > 2$;

в) складемо диференціальне рівняння, що відповідає узагальненій координаті q_3 :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial T}{\partial q_3} = Q_3^{\Pi} + Q_3^H \quad (4.19)$$

і т. д.

При вирішенні задачі динамічного синтезу маніпулятора (пряма задача динаміки) за заданими законами змінення узагальнених координат від часу $q_1(t), q_2(t), \dots$ визначаються закони змінення від часу узагальнених сил $Q_1^H(t), Q_2^H(t)$, що забезпечують задані рухи маніпулятора, тому що узагальнені сили виражаються через рушійні (фізичні) сили й моменти.

Якщо розв'язується задача динамічного аналізу маніпулятора (обернена задача динаміки), то отриману внаслідок застосування рівнянь Лагранжа 2-го роду систему диференціальних рівнянь буде застосовано для визначення (шляхом інтегрування) узагальнених координат $q_1(t), q_2(t), \dots, q_w(t)$ як функцій часу. У цьому випадку має бути задано рушійні сили (і моменти) приводів і початкові умови для кожного зі ступенів рухомості.

4.1. Отримання диференціальних рівнянь руху маніпуляторів деяких схем

Отримаємо диференціальні рівняння руху для деяких структурних схем маніпуляторів, що широко застосовуються.

1. Схema $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ (прямокутна декартова система координат) (рис. 4.1).

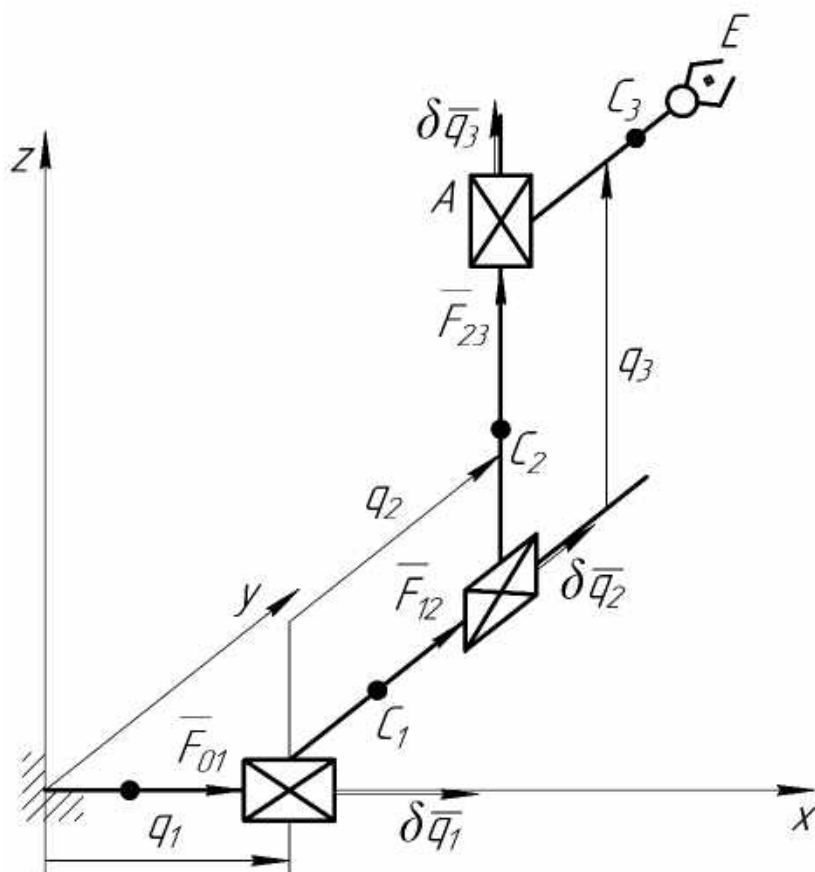


Рис. 4.1. До обчислення узагальнених сил маніпулятора схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$

Вважаємо заданими: маси ланок m_1, m_2, m_3 (m_3 – маса ланки 3 разом з робочим органом і вантажем E), $AE = \ell_3$.

Кількість ступенів вільності $w = 3$.

Узагальнені координати – q_1, q_2, q_3 .

Кінетична енергія маніпулятора

$$T = T_1 + T_2 + T_3. \quad (4.20)$$

Кожна з ланок рухається поступально, тому

$$T_k = \frac{1}{2} m_k v_k^2, \quad k = 1, 2, 3. \quad (4.21)$$

Швидкості ланок будуть такими:

$$v_1^2 = \dot{q}_1^2; \quad (4.22)$$

$$v_2^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2; \quad (4.23)$$

$$v_3^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2. \quad (4.24)$$

Підставивши (4.22)–(4.24) у (4.21) і (4.20), отримаємо

$$T = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) + m_3 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)). \quad (4.25)$$

Обчислимо узагальнені сили:

1) для консервативних активних сил (сил тяжіння ланок):

– потенціальна енергія системи

$$\Pi = m_3 g q_3; \quad (4.26)$$

– узагальнені сили будуть такими:

$$Q_1^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0; \quad (4.27)$$

$$Q_2^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0; \quad (4.28)$$

$$Q_3^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_3} = -m_3 g; \quad (4.29)$$

2) для неконсервативних активних сил (сил приводів $\bar{F}_{01}, \bar{F}_{12}, \bar{F}_{23}$):

– обчислимо Q_1^H , для чого надамо механізму віртуального переміщення такого, при якому зміниться лише узагальнена координата q_1 , тобто візьмемо $\delta q_1 \neq 0, \delta q_2 = \delta q_3 = 0$ й визначимо суму віртуальних робіт сил F на цьому переміщенні:

$$\sum \delta A(\bar{F}) = F_{01} \delta q_1. \quad (4.30)$$

Отже, узагальнена неконсервативна сила, що відповідає узагальненій координаті q_1 ,

$$Q_1^H = F_{01} \quad (4.31)$$

(коефіцієнт при варіації цієї узагальненої координати у виразі суми віртуальних робіт (4.30)).

– обчислимо Q_2^H , для чого візьмемо $\delta q_2 \neq 0, \delta q_1 = \delta q_3 = 0$:

$$\sum \delta A(\bar{F}) = F_{12} \delta q_2. \quad (4.32)$$

Отже,

$$Q_2^H = F_{12}. \quad (4.33)$$

Аналогічно отримаємо вираз для узагальненої сили, що відповідає узагальненій координаті q_3 :

$$Q_3^H = F_{23}. \quad (4.34)$$

Загальний вигляд рівнянь Лагранжа 2-го роду для маніпулятора:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1^\Pi + Q_1^H; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2^\Pi + Q_2^H; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial T}{\partial q_3} &= Q_3^\Pi + Q_3^H. \end{aligned} \right| \quad (4.35)$$

Отримаємо рівняння, що відповідають узагальненій координаті q_1 . Спочатку зробимо обчислення похідних від кінетичної енергії (4.25):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= (m_1 + m_2 + m_3)\dot{q}_1; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1; \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} &= 0. \end{aligned} \right| \quad (4.36)$$

Підставивши вирази (4.36) й узагальнені сили (4.27) і (4.31) у перше з рівнянь (4.35), одержимо

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{q}_1 = F_{01}. \quad (4.37)$$

Для отримання рівнянь, що відповідають узагальненим координатам q_2 , q_3 , виконаємо обчислення:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= (m_2 + m_3)\dot{q}_2; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= (m_2 + m_3)\ddot{q}_2; \\ \frac{\partial T}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned} \right| \quad (4.38)$$

Підставивши в друге з рівнянь (3.35) вирази (4.38), (4.28), (4.33), отримаємо

$$(m_2 + m_3)\ddot{q}_2 = F_{12}. \quad (4.39)$$

Аналогічно отримаємо рівняння, що відповідає третій узагальненій координаті – q_3 :

$$m_3 \ddot{q}_3 = F_{23} - m_3 g. \quad (4.40)$$

Отже, рух маніпулятора схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ описується такими рівняннями:

$$\left. \begin{aligned} (m_1 + m_2 + m_3) \ddot{q}_1 &= F_{01}; \\ (m_2 + m_3) \ddot{q}_2 &= F_{12}; \\ m_3 \ddot{q}_3 &= F_{23} - m_3 g. \end{aligned} \right\} \quad (4.41)$$

Рівняння (4.41) можна використовувати як для динамічного аналізу, так і для динамічного синтезу маніпулятора.

4.2. Розв'язання оберненої задачі динаміки маніпулятора

Під час розв'язання задачі динамічного аналізу маніпулятора (оберненої задачі динаміки) заданими вважаються рушійні сили приводів F_{01} , F_{12} , F_{23} , а визначенню підлягають узагальнені координати $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ як функції від часу.

Як видно з (4.41), усі рівняння є незалежними один від одного (передбачається, що рушійна сила F_{01} не залежить від узагальнених координат q_2 , q_3 , сила F_{12} – від q_1 , q_3 , а сила F_{23} – від q_1 , q_2), і кожне з них можна проінтегрувати незалежно від інших.

Задача розв'язується прямим інтегруванням кожного з рівнянь (4.41):

$$\ddot{q}_1 = \frac{F_{01}}{m}, \quad (4.42)$$

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{m} \int F_{01} dt + C_1, \quad (4.43)$$

$$q_1 = \int \left(\frac{1}{m} \int F_{01} dt + C_1 \right) dt + C_2. \quad (4.44)$$

Тут $m = m_1 + m_2 + m_3$; C_1 , C_2 – довільні постійні інтегрування, які можна визначити, задавши початкові умови.

Зінтегрувавши друге з рівнянь (4.41), отримаємо

$$\ddot{q}_2 = \frac{F_{12}}{m_{23}}, \quad (4.45)$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{m_{23}} \int F_{12} dt + C_3, \quad (4.46)$$

$$q_2 = \int \left(\frac{1}{m_{23}} \int F_{12} dt + C_3 \right) dt + C_4. \quad (4.47)$$

Тут $m_{23} = m_2 + m_3$; C_3, C_4 – довільні постійні інтегрування.

Після інтегрування третього рівняння (4.41) маємо:

$$\ddot{q}_3 = \frac{1}{m_3} (F_{23} - m_3 g); \quad (4.48)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{m_3} \int (F_{23} - m_3 g) dt + C_5; \quad (4.49)$$

$$q_3 = \int \left(\frac{1}{m_3} \int (F_{23} - m_3 g) dt + C_5 \right) + C_6. \quad (4.50)$$

Для визначення постійних інтегрування $C_1, C_2, \dots, C_6$ має бути задано початкові умови (механічний стан маніпулятора в початковий момент руху), тобто початкові значення узагальнених координат і узагальнених швидкостей:

$$\left. \begin{aligned} t = t_0: \quad q_1 &= q_{10}, q_2 = q_{20}, q_3 = q_{30}; \\ \dot{q}_1 &= \dot{q}_{10}, \dot{q}_2 = \dot{q}_{20}, \dot{q}_3 = \dot{q}_{30}. \end{aligned} \right| \quad (4.51)$$

Приклад 1. Отримати кінематичні рівняння руху маніпулятора схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ (див. рис. 4.1) за умови, що приводи передають ланкам постійні зусилля $F_{01} = F_1, F_{12} = F_2, F_{23} = F_3$.

Початкові умови: маси ланок – m_1, m_2, m_3 . $t = 0$: $q_1 = x_0, q_2 = y_0, q_3 = z_0$; $\dot{q}_1 = v_{0x}, \dot{q}_2 = v_{0y}, \dot{q}_3 = v_{0z}$.

Розв'язання

Для отримання рівняння руху за першим ступенем рухомості ($q_1(t)$) скористаємося рівностями (4.43), (4.44):

$$\dot{q}_1 = \frac{1}{m} \int F_1 dt + C_1 = \frac{F_1}{m} t + C_1. \quad (4.52)$$

Знайдемо сталу C_1 з такої умови: при $t = 0, \dot{q}_1 = v_{0x}$

$$C_1 = v_{0x}. \quad (4.53)$$

Підставивши (4.53) в (4.52), одержимо

$$\dot{q}_1 = \frac{F_1}{m} t + v_{0x}. \quad (4.54)$$

З формули (4.38) отримаємо

$$q_1 = \int \left(\frac{F_1}{m} t + v_{0x} \right) dt + C_2 = \frac{F_1}{2m} t^2 + v_{0x} t + C_2. \quad (4.55)$$

Сталу C_2 знаходимо з такої умови: при $t = 0$, $q_1 = x_0$

$$C_2 = x_0. \quad (4.56)$$

Підставивши (4.56) у (4.55) остаточно отримаємо

$$q_1 = \frac{F_1}{2m} t^2 + v_{0x} t + x_0. \quad (4.57)$$

Для одержання кінематичних рівнянь руху $q_2(t)$, $q_3(t)$ слід скористатися рівностями (4.46), (4.47) і (4.49), (4.50).

Дії, аналогічні виконаним для отримання $q_1(t)$, дають такий результат:

$$\dot{q}_2 = \frac{F_2}{m} t + v_{0y}; \quad (4.58)$$

$$q_2 = \frac{F_2}{2m_{23}} t^2 + v_{0y} t + y_0; \quad (4.59)$$

$$\dot{q}_3 = \frac{1}{m_3} (F_3 - m_3 g) t + v_{0z}; \quad (4.60)$$

$$q_3 = \frac{1}{2m_3} (F_3 - m_3 g) t^2 + v_{0z} t + z_0. \quad (4.61)$$

Якщо в початкових умовах як приклад узяти всі початкові узагальнені швидкості такими, що дорівнюють нулю ($\dot{q}_{10} = \dot{q}_{20} = \dot{q}_{30} = 0$), тобто маніпулятор починає рух зі стану спокою, і врахувати зв'язки узагальнених координат q_1, q_2, q_3 з декартовими прямокутними координатами (x_E, y_E, z_E) центра E робочого органу (3.59), виконавши нескладні перетворення (виключивши t^2 з рівнянь руху), то одержимо рівняння траєкторії точки E в базовій системі координат $Oxyz$ (див. рис. 4.1).

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3}{F_1} (x - x_0 - \ell_3) = \frac{m_2 + m_3}{F_2} (y - y_0) = \frac{m_3}{F_3 - m_3 g} (z - z_0). \quad (4.62)$$

Тут x, y, z – поточні координати точки E , усі інші параметри – сталі. З подвійної формули (4.62) отримаємо систему двох лінійних алгебричних рівнянь відносно змінних x, y, z .

Якщо (4.62) записати у вигляді $A = B = C$, то

$$\left. \begin{aligned} A &= B, \\ A &= C \end{aligned} \right\} \quad (4.63)$$

або

$$\left. \begin{aligned} A &= B, \\ B &= C. \end{aligned} \right\} \quad (4.64)$$

Кожне з рівнянь системи (4.63) або (4.64) – лінійне відносно координат x , y , z і є рівнянням площини, система двох рівнянь площин задає пряму. Отже, якщо дії приводів за всіма ступенями рухомості виражаються постійними силами F_1 , F_2 , F_3 при нульових початкових швидкостях, то центр E робочого органу буде переміщатися по прямій лінії.

4.3. Розв'язання прямої задачі динаміки маніпулятора

Під час розв'язання задачі динамічного синтезу маніпулятора (прямої задачі динаміки) задаються кінематичні рівняння руху за всіма ступенями рухомості, тобто $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$. Необхідно визначити рушійні сили F_1 , F_2 , F_3 приводів, що забезпечують заданий рух маніпулятора.

Задачу розв'язуємо з допомогою тих же диференціальних рівнянь руху (4.41) маніпулятора. З них отримуємо

$$\left. \begin{aligned} F_{01} &= \ddot{q}_1(m_1 + m_2 + m_3); \\ F_{12} &= \ddot{q}_2(m_2 + m_3); \\ F_{23} &= (\ddot{q}_3 + g)m_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

Наприклад, для прямолінійного руху точки E (центра робочого органу) з положення $E_0 (x_0, y_0, z_0)$ з рівняннями руху

$$\begin{aligned} q_1(t) &= at^2 + x_0; \\ q_2(t) &= bt^2 + y_0; \\ q_3(t) &= ct^2 + z_0. \end{aligned}$$

Рушійні сили приводів мають бути такими:

$$\begin{aligned} F_{01} &= a(m_1 + m_2 + m_3); \\ F_{12} &= b(m_2 + m_3); \\ F_{23} &= (c + g)m_3, \end{aligned}$$

де a , b , c – задані сталі. Усі сили приводів є постійними.

Схема $O \parallel \Pi \perp \Pi$ (циліндрична система координат) (рис. 4.2).

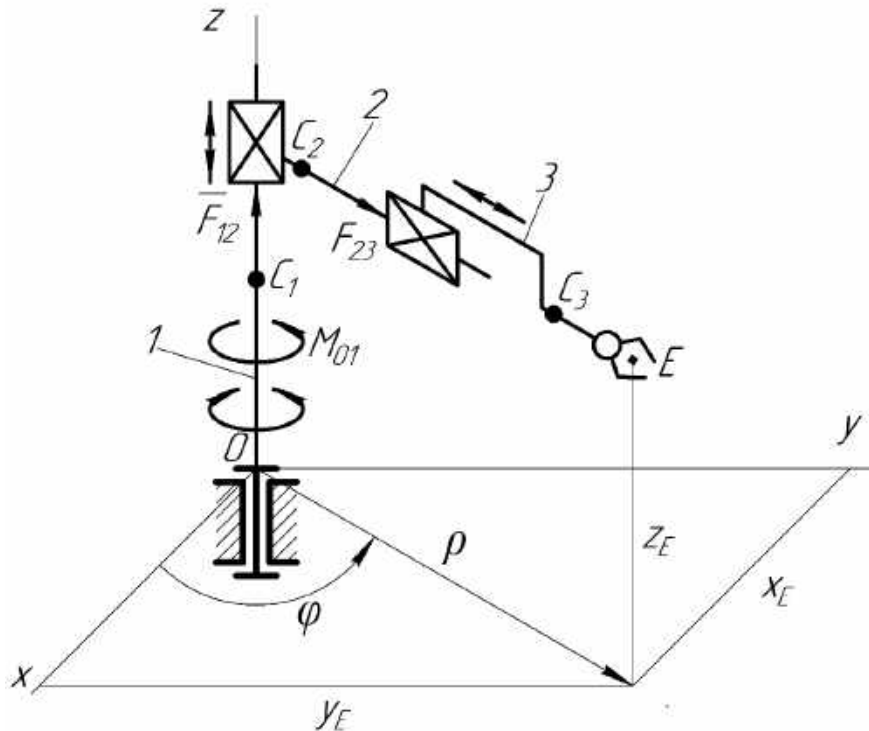


Рис. 4.2. До обчислення узагальнених сил маніпулятора схеми $O \parallel \Pi \perp \Pi$

Вважаємо заданими масогеометричні характеристики ланок: маси, довжини, моменти інерції, положення центрів ваги.

Механізм маніпулятора має три ступені рухомості ($W = 3$). Узагальнені координати:

$$q_1 = \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z. \quad (4.66)$$

Отримаємо диференціальні рівняння руху маніпулятора в узагальнених координатах q_1, q_2, q_3 . Застосуємо рівняння Лагранжа 2-го роду (4.1). Кінетична енергія системи

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_E. \quad (4.67)$$

Ланка 1 (колона) обертається навколо нерухомої осі, тому

$$T_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_{1z} \dot{q}_2^2, \quad (4.68)$$

де I_{1z} – момент інерції першої ланки відносно геометричної осі обертання.

Друга ланка здійснює складний рух, тому кінетичну енергію T_2 знайдемо за теоремою Кеніга:

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{C_2}^2 + \frac{1}{2} I_{C_2 z} \omega_2^2. \quad (4.69)$$

Швидкість центра тяжіння C_2 обчислимо за формулою (3.73):

$$v_{C_2}^2 = \dot{\phi}^2 a_2^2 + \dot{z}^2 = \dot{q}_2^2 a_2^2 + \dot{q}_3^2. \quad (4.70)$$

Кутова швидкість ω_2 дорівнює кутовій швидкості ланки 1, тобто $\omega_2 = \omega_1 = \dot{q}_2$. Таким чином,

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_2^2 a_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} I_{C_2 z} \dot{q}_2^2. \quad (4.71)$$

Тут a_2 – відстань від центра тяжіння C_2 ланки 2 до геометричної осі обертання ланки 1; $I_{C_2 z}$ – момент інерції ланки 2 відносно осі, що проходить через точку C_2 паралельно до осі обертання Oz .

Ланка 3 також здійснює складний рух, тому

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{C_3}^2 + \frac{1}{2} I_{C_3 z} \omega_3^2. \quad (4.72)$$

За формулою (3.75)

$$v_{C_3}^2 = \dot{\rho}^2 + \dot{\phi}^2 (\rho - EC_3)^2 + \dot{z}^2 = \dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 (q_1 - a_3)^2 + \dot{q}_3^2, \quad (4.73)$$

де $a_3 = EC_3$.

Кутова швидкість ланки 3 $\omega_3 = \omega_2 = \omega_1 = \dot{\phi}$. Таким чином, кінетична енергія ланки 3

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 (q_1 - a_3)^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} I_{C_3 z} \dot{q}_2^2, \quad (4.74)$$

де $I_{C_3 z}$ – момент інерції ланки 3 відносно осі, що проходить через точку C_3 паралельно до осі Oz .

Кінетична енергія вантажу E , що переноситься (уважаємо вантаж точковою масою m) (див. формулу (3.69)),

$$T_E = \frac{1}{2} m v_E^2 = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2). \quad (4.75)$$

Кінетична енергія системи (маніпулятора)

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} I_{1z} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_2^2 a_2^2 + \dot{q}_3^2) + \frac{1}{2} I_{C_2 z} \dot{q}_2^2 + \\ & + \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 (q_1 - a_3)^2 + \dot{q}_3^2) + \\ & + \frac{1}{2} I_{C_3 z} \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2). \end{aligned} \quad (4.76)$$

Узагальнені сили системи обчислимо, скориставшись формулами (4.7)–(4.9).

Потенціальна енергія системи дорівнює енергії поля сили ваги:

$$\Pi = (m_2 + m_3 + m)gq_3 + \text{const.} \quad (4.77)$$

Тому узагальнені потенціальні сили будуть такими:

$$Q_1^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = 0; \quad (4.78)$$

$$Q_2^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0; \quad (4.79)$$

$$Q_3^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_3} = -(m_2 + m_3 + m)g. \quad (4.80)$$

Для обчислення узагальнених непотенціальних (неконсервативних) сил застосуємо методику, викладену під час аналізу маніпулятора схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ (див. формули (4.30)–(4.34)), унаслідок чого отримаємо такий результат:

– узагальнена неконсервативна сила, що відповідає координаті q_1 ,

$$Q_1 = F_{23}; \quad (4.81)$$

– узагальнена неконсервативна сила, що відповідає координаті q_2 ,

$$Q_2 = M_{01}; \quad (4.82)$$

– узагальнена неконсервативна сила, що відповідає координаті q_3 ,

$$Q_3 = F_{12}. \quad (4.83)$$

Загальний вигляд рівняння Лагранжа 2-го роду для розглядуваного маніпулятора буде таким же, як і для маніпулятора схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$ (див. рівняння (4.2)). Обчислюємо ліві частини рівнянь:

– для рівняння, що відповідає координаті q_1 :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= (m_3 + m)\dot{q}_1; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} &= (m_3 + m)\ddot{q}_1; \\ \frac{\partial T}{\partial q_1} &= m_3 \dot{q}_2^2 (q_1 - a_3) + m \dot{q}_2^2 \cdot q_1. \end{aligned} \right| \quad (4.84)$$

Підставивши результати (4.84) і (4.81) у перше з рівнянь (4.35), отримаємо диференціальне рівняння руху маніпулятора, що відповідає координаті q_1 (у циліндричній системі координат – ρ):

$$(m_3 + m)\ddot{q}_1 - \dot{q}_2^2(m_3 + m)q_1 - m_3a_3 = F_{23}; \quad (4.85)$$

– для рівняння, що відповідає узагальненій координаті q_2 : диференціюючи (4.76), отримаємо

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_2(m_3(q_1 - a_3)^2 + mq_1^2 + I_\Sigma), \quad (4.86)$$

де m – маса вантажу E , що переноситься:

$$I_\Sigma = I_{1z} + I_{C_2z} + I_{C_3z} + m_2a_2^2; \quad (4.87)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \ddot{q}_2(m_3(q_1 - a_3)^2 + mq_1^2 + I_\Sigma) + 2\dot{q}_1\dot{q}_2(m_3(q_1 - a_3) + m); \quad (4.88)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = 0. \quad (4.89)$$

Підставивши вирази (4.79), (4.82), (4.88), (4.89) у друге з рівнянь (4.35), отримаємо диференціальне рівняння руху маніпулятора схеми $O \parallel \Pi \perp \Pi$, що відповідає узагальненій координаті q_2 :

$$\ddot{q}_2(m_3(q_1 - a_3)^2 + mq_1^2 + I_\Sigma) + 2\dot{q}_1\dot{q}_2(m_3(q_1 - a_3) + m) = M_{01}. \quad (4.90)$$

В отриманому рівнянні (4.90) припускається перший інтеграл, тобто з диференціального рівняння другого порядку (4.90) випливає, що

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = M_{01}, \quad (4.91)$$

звідки отримуємо

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \int M_{01} dt + C, \quad (4.92)$$

тобто диференціальне рівняння першого порядку матиме вигляд

$$\dot{q}_2(m_3(q_1 - a_3)^2 + mq_1^2 + I_\Sigma) = \int M_{01} dt + C_2, \quad (4.93)$$

де C_2 – довільна стала, яка визначається за початковими умовами.

Для отримання рівняння, що відповідає третій узагальненій координаті q_3 , обчислюємо відповідно до третього з рівнянь (4.35) похідні від кінетичної енергії (4.76):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = \dot{q}_3(m_2 + m_3 + m); \quad (4.94)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = \ddot{q}_3(m_2 + m_3 + m); \quad (4.95)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_3} = 0. \quad (4.96)$$

Підставивши вирази (4.80), (4.83), (4.95), (4.966) у третє з рівнянь (4.35), отримаємо

$$\ddot{q}_3(m_2 + m_3 + m) = -(m_2 + m_3 + m)g + F_{12}. \quad (4.97)$$

У рівнянні (4.97) також припускається перший інтеграл:

$$\dot{q}_3(m_2 + m_3 + m) = -(m_2 + m_3 + m)gt + \int F_{12} dt + C_3, \quad (4.98)$$

де C_3 – довільна стала, яка визначається за початковими умовами.

Отже, рух маніпулятора схеми $O \parallel \Pi \perp \Pi$ (у циліндричній системі координат) описується системою трьох диференціальних рівнянь другого порядку в узагальнених координатах, пов'язаних з циліндричними координатами такими рівностями:

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \rho, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = z; \\ \ddot{q}_1(m_3 + m) - \dot{q}_2^2((m_3 + m)q_1 - a_3) &= F_{23}; \\ \ddot{q}_2(m_3(q_1 - a_3)^2 + mq_1^2 + I_\Sigma) + 2\dot{q}_1\dot{q}_2(m_3(q_1 - a_3) + m) &= M_{01}; \\ \ddot{q}_3(m_2 + m_3 + m) &= -(m_2 + m_3 + m)g + F_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (4.99)$$

При розв'язанні прямої задачі динаміки (задачі динамічного синтезу) маніпулятора вважаються заданими масогеометричні його характеристики (довжини і маси ланок, їх моменти інерції, положення центрів тяжіння) і закони змінення узагальнених координат $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$. Підлягають визначенню рушійні сили приводів – F_{23} , M_{01} , F_{12} .

Достатньо обчислити похідні за часом від відомих функцій $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$, підставити в рівняння (4.99) і з отриманих рівностей знайти F_{23} , M_{01} , F_{12} .

Якщо необхідно, то можна знайти динамічні реакції в кінематичних парах. Для цього за відомими функціями $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ слід обчислити

лінійні прискорення характерних точок маніпулятора (центрів ваги ланок і точки E), а також кутові швидкості й прискорення ланок. Записати вирази для сил інерції (у тому числі й моментів інерційних сил) ланок і підставити їх у рівняння кінетостатики, складені для кожної ланки окремо. Наприклад, у рівняння кінетостатики для першої ланки увійдуть активні сили тяжіння ланки $m_1 \bar{g} = \bar{G}_1$ і сили приводу M_{01} для обертальної кінематичної пари (0, 1) або F_0 для поступальної кінематичної пари (0, 1), реакції в КП (0, 1) і (1, 2) і сили інерції ланки 1.

Усі рівняння кінетостатики для матеріального об'єкта (ланки, механізму) впливають зі співвідношення

$$\{\bar{F}, \bar{R}, \bar{\Phi}\} \sim 0, \quad (4.100)$$

де $\bar{F}$ – активні сили; $\bar{R}$ – реакції зв'язків; $\bar{\Phi}$ – сили інерції (тут під словом «сили» слід розуміти і зосереджені сили, і пари сил з моментами M).

Під час розв'язання оберненої задачі динаміки (задачі динамічного аналізу) маніпулятора відомими вважаються його масогеометричні характеристики (маси, моменти інерції, довжини, положення центрів тяжіння ланок), рушійні сили, моменти приводів і початкові умови. Підлягають визначенню узагальнені координати $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ як функції від часу.

Для розв'язання задачі слід проінтегрувати систему (4.99), за початковими умовами знайти значення постійних інтегрування, які увійшли до загального розв'язку системи (4.99), і отримати в результаті закон змінення від часу кожної з узагальнених координат – $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$.

Схема $0 \perp 0 \perp \Pi$ (сферична система координат) (рис. 4.3).

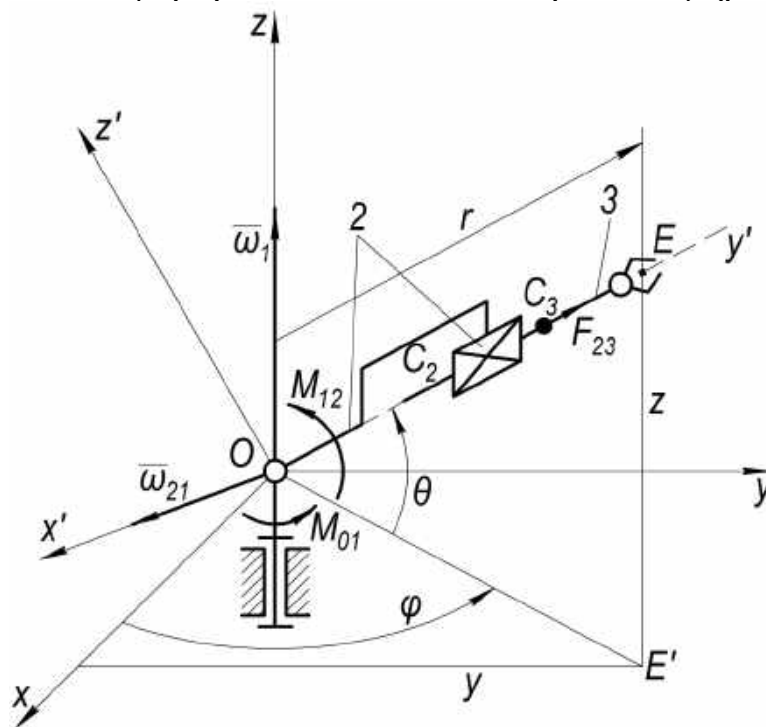


Рис. 4.3. Механізм маніпулятора схеми $0 \perp 0 \perp \Pi$

Механізм маніпулятора має три ступені рухомості (вільності). Узагальнені координати будуть такими:

$$q_1 = r, \quad q_2 = \varphi, \quad q_3 = \theta. \quad (4.101)$$

Для отримання диференціальних рівнянь руху маніпулятора в узагальнених координатах q_1, q_2, q_3 застосуємо рівняння Лагранжа 2-го роду (4.1).

Запишемо вираз кінетичної енергії маніпулятора:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_E. \quad (4.102)$$

Кінетична енергія першої ланки, що обертається навколо нерухомої осі Oz ,

$$T_1 = \frac{1}{2} I_{1z} \omega_1^2 = \frac{1}{2} I_{1z} \dot{\varphi}^2 = \frac{1}{2} I_{1z} \dot{q}_2^2, \quad (4.103)$$

де I_{1z} – момент інерції ланки 1 (колони) відносно її геометричної осі обертання;

ω_1 – кутова швидкість ланки 1.

Уведемо рухому систему координат $Ox'y'z'$, пов'язану з ланкою 2. Вісь Oy' спрямуємо вздовж ланки (по OE), вісь Oz' є спрямованою в площині $y'Oz$ перпендикулярно до осі Oy' . Вісь Ox' спрямовано перпендикулярно до площини $y'Oz'$ так, щоб система координат $Ox'y'z'$ була правою.

Щоб обчислити кінетичну енергію T_2 ланки 2, застосуємо формулу (4.7) для обертання тіла навколо нерухомої точки.

Дійсно, ланка 2 обертається навколо осі Ox' з кутовою швидкістю $\omega_{x'} = \dot{\theta}$ і навколо нерухомої осі Oz з кутовою швидкістю $\omega_z = \dot{\varphi}$. Осі складових обертань перетинаються в точці O , отже, для ланки 2 складаються два обертання тіла навколо осей, що перетинаються. Результатом додавання буде обертання ланки 2 навколо точки O з кутовою швидкістю

$$\bar{\Omega}_2 = \bar{\omega}_{21} + \bar{\omega}_1, \quad (4.104)$$

де

$$\bar{\omega}_{21} = \bar{l}' \cdot \dot{\theta} = \bar{l}' \cdot \dot{q}_3, \quad (4.105)$$

$$\bar{\omega}_1 = \bar{k} \cdot \dot{\varphi} = \bar{k} \cdot \dot{q}_2. \quad (4.106)$$

Тут $\bar{l}'$, $\bar{k}$ – орти осей Ox' , Oz відповідно.

Модуль абсолютної кутової швидкості ланки 2

$$\Omega_2 = \sqrt{\omega_{21}^2 + \omega_1^2} = \sqrt{\dot{q}_3^2 + \dot{q}_2^2}. \quad (4.107)$$

Вектори складових кутових швидкостей є взаємно перпендикулярними.

Формула кінетичної енергії ланки 2 (4.7) для цього випадку має вигляд

$$T_2 = \frac{1}{2} (I_{x'} \Omega_{x'}^2 + I_{y'} \Omega_{y'}^2 + I_{z'} \Omega_{z'}^2 - 2I_{x'y'} \Omega_{x'} \Omega_{y'} - 2I_{x'z'} \Omega_{x'} \Omega_{z'} - 2I_{y'z'} \Omega_{y'} \Omega_{z'}). \quad (4.108)$$

Обчислимо моменти інерції ланки 2 в системі $Ox'y'z'$, зв'язаній з ланкою 2, тому ці моменти будуть постійними. Нагадаємо, що ланки 2 і 3 вважаємо тонкими стрижнями. Маємо

$$\left. \begin{aligned} I_{x'} &= I_{z'} = \frac{1}{3} m_2 \ell_2^2; \\ I_{y'} &= 0; \\ I_{x'y'} &= I_{x'z'} = I_{y'z'} = 0. \end{aligned} \right| \quad (4.109)$$

Проекції кутової швидкості ланки 2 на осі будуть такими:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_{2x'} &= \omega_{21x'} + \omega_{1x'} = \omega_{21x'} = \dot{q}_3; \\ \Omega_{2y'} &= \omega_1 \sin \theta = \dot{q}_2 \sin q_3; \\ \Omega_{2z'} &= \omega_1 \cos \theta = \dot{q}_2 \cos q_3. \end{aligned} \right| \quad (4.110)$$

Підставивши вирази (4.109), (4.110) у формулу (4.108), отримаємо

$$T_2 = \frac{1}{6} m_2 \ell_2^2 (\dot{q}_2^2 \cos^2 q_3 + \dot{q}_3^2). \quad (4.111)$$

Для обчислення кінетичної енергії точкового вантажу E скористаємося формулою

$$T_E = \frac{1}{2} m v_E^2, \quad (4.112)$$

де v_E – швидкість точки E , що визначається формулою (3.79), тоді

$$T_E = \frac{1}{2} m (\dot{q}_1^2 + q_1^2 \dot{q}_2^2 \cos^2 q_3 + q_1^2 \dot{q}_3^2). \quad (4.113)$$

Ланка 3 здійснює складний рух. Для обчислення T_3 застосуємо теорему Кенінга

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 v_{C_3}^2 + T', \quad (4.114)$$

де T' – кінетична енергія ланки 3 під час її руху відносно центра тяжіння C_3 ланки 3, яку можна обчислити за формулами (4.108)–(4.110), тільки $I_{x'}$, $I_{z'}$ у формулах (4.107) слід замінити на

$$I_{C_3x'} = I_{C_3z'} = \frac{1}{12} m_3 \ell_3^2. \quad (4.115)$$

Швидкість центра тяжіння ланки 3 визначиться формулою, аналогічною (3.79), де q_1 слід замінити на $q_1 - a_3$; $a_3 = C_3E$ (див. рис. 4.3). Таким чином,

$$T_3 = \frac{1}{2} m_3 (\dot{q}_1^2 + (q_1 - a_3)^2 \dot{q}_2^2 \cos^2 q_3 + (q_1 - a_3)^2 \dot{q}_3^2) + \frac{1}{24} m_3 \ell_3^2 (\dot{q}_2^2 \cos^2 q_3 + \dot{q}_3^2). \quad (4.116)$$

Підсумувавши (4.104), (4.111), (4.113), (4.116) і перегрупувавши результат за узагальненими швидкостями, отримаємо кінетичну енергію маніпулятора схеми $O \perp O \perp \Pi$ в узагальнених координатах:

$$T = \dot{q}_1^2 m_{03} + \dot{q}_2^2 (I_\Sigma + m_{03} q_1^2 - m_3 a_3 q_1) \cos^2 q_3 + \dot{q}_3^2 (I_\Sigma + m_{03} q_1^2 - m_3 a_3 q_1), \quad (4.117)$$

де

$$m_{03} = \frac{1}{2} (m + m_3), \quad (4.118)$$

$$I_\Sigma = \frac{1}{24} (4m_2 \ell_2^2 + m_3 (\ell_3^2 + 12a_3^2)). \quad (4.119)$$

Обчислення узагальнених сил маніпулятора. Для обчислення узагальнених консервативних сил, якими є сили тяжіння ланок, запишемо вираз потенціальної енергії маніпулятора в узагальнених координатах:

$$\Pi_1 = \Pi(m_1 \bar{g}) = \text{const} = C_1. \quad (4.120)$$

Потенціальна енергія механічної системи (маніпулятора) дорівнює сумі потенціальних енергій сил тяжіння ланок і вантажу E :

$$\Pi = \Pi_1 + \Pi_2 + \Pi_3 + \Pi_E, \quad (4.121)$$

оскільки центр тяжіння ланки 1 по вертикалі не переміщується;

$$\Pi_2 = \Pi(m_2 \bar{g}) = m_2 g \cdot a_2 \cdot \sin \theta + C_2 = m_2 g \cdot a_2 \cdot \sin q_3 + C_2, \quad (4.122)$$

$$\begin{aligned}\Pi_3 &= \Pi(m_3 \bar{g}) = m_3 g(r - a_3) \cdot \sin \theta + C_3 = \\ &= m_3 g(q_1 - a_3) \cdot \sin q_3 + C_3,\end{aligned}\quad (4.123)$$

$$\Pi_E = \Pi(m \bar{g}) = mg \cdot r \cdot \sin \theta + C = mg \cdot q_1 \cdot \sin q_3 + C, \quad (4.124)$$

$$\Pi = C' + g(m_2 a_2 + m_3(q_1 - a_3) + m q_1) \cdot \sin q_3, \quad (4.125)$$

де

$$C' = C_1 + C_2 + C_3 + C = \text{const}_1. \quad (4.126)$$

За формулами (4.8) обчислимо узагальнені консервативні сили:

$$Q_1^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -(m_3 + m)g \cdot \sin q_3, \quad (4.127)$$

$$Q_2^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = 0, \quad (4.128)$$

$$Q_3^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_3} = -g(q_1(m_3 + m) + m_2 a_2 - m_3 a_3) \cos q_3. \quad (4.129)$$

Для неконсервативних, якими можуть бути рушійні сили (моменти) приводів, узагальнені сили дорівнюють відповідним силам приводів, оскільки змінення кожної з узагальнених координат відбувається під дією відповідної сили (або моменту) приводу, тобто сума віртуальних робіт неконсервативних сил

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^3 \delta A(\bar{F}_k^H) &= M_{01} \delta \varphi + M_{12} \delta \theta + F_{23} \delta r = \\ &= F_{23} \delta q_1 + M_{01} \delta q_2 + M_{12} \delta q_3,\end{aligned}\quad (4.130)$$

звідки отримаємо узагальнені неконсервативні сили:

$$Q_1^H = F_{23}, \quad (4.131)$$

$$Q_2^H = M_{01}, \quad (4.132)$$

$$Q_3^H = M_{12}. \quad (4.133)$$

Загальний вигляд рівнянь Лагранжа 2-го роду для розглядуваного маніпулятора є таким самим, як і для будь-якої механічної системи з трьома ступенями рухомості, наприклад для маніпулятора схеми $\Pi \perp \Pi \perp \Pi$:

$$\left. \begin{aligned}\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} &= Q_1^\Pi + Q_1^H; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} &= Q_2^\Pi + Q_2^H; \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} - \frac{\partial T}{\partial q_3} &= Q_3^\Pi + Q_3^H.\end{aligned}\right\} \quad (4.134)$$

Відповідно до алгоритму (4.35) отримаємо диференціальні рівняння руху маніпулятора. Для цього від кінетичної енергії (4.117) обчислимо похідні:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = 2m_{03}\dot{q}_1; \quad (4.135)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = 2m_{03}\ddot{q}_1; \quad (4.136)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial q_1} &= \dot{q}_2^2(2m_{03}q_1 - m_3a_3) \cos^2 q_3 + \dot{q}_3^2(2m_{03}q_1 - m_3a_3) = \\ &= (\dot{q}_2^2 \cos^2 q_3 + \dot{q}_3^2)(2m_{03}q_1 - m_3a_3); \end{aligned} \quad (4.137)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = 2\dot{q}_2(I_\Sigma + m_{03}q_1^2 - m_3a_3q_1) \cos^2 q_3; \quad (4.138)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} &= 2\ddot{q}_2(I_\Sigma + m_{03}q_1^2 - m_3a_3q_1) \cos^2 q_3 + \\ &+ 2\dot{q}_1\dot{q}_2(2m_{03}q_1 - m_3a_3) \cos^2 q_3 - 2\dot{q}_1\dot{q}_2(I_\Sigma + m_{03}q_1^2 - m_3a_3q_1) \sin 2q_3; \end{aligned} \quad (4.139)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = 0; \quad (4.140)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = 2\dot{q}_3(I_\Sigma + m_{03}q_1^2 - m_3a_3q_1); \quad (4.141)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_3} = 2\ddot{q}_3(I_\Sigma + m_{03}q_1^2 - m_3a_3q_1) + 2\dot{q}_1\dot{q}_3(2m_{03}q_1 - m_3a_3); \quad (4.142)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_3} = -\dot{q}_2^2(I_\Sigma + m_{03}q_1^2 - m_3a_3q_1) \sin 2q_3. \quad (4.143)$$

Підставивши вирази (4.136), (4.137), (4.127), (4.131) у перше рівняння (4.35); (4.139), (4.140), (4.128), (4.132) – у друге; (4.142), (4.143), (4.129), (4.133) – у третє, отримаємо систему трьох диференціальних рівнянь руху маніпулятора схеми $O \perp O \perp \Pi$ в узагальнених координатах:

$$\left. \begin{aligned} 2m_{03}\ddot{q}_1 - (\dot{q}_2^2 \cos^2 q_3 + \dot{q}_3^2)A(q_1) + (m_3 + m)g \sin q_3 &= F_{23}; \\ \ddot{q}_2 I'_\Sigma(q_1) \cos^2 q_3 + \dot{q}_1\dot{q}_2 \cdot A(q_1) \cos^2 q_3 - \dot{q}_2\dot{q}_3 I'_\Sigma(q_1) \sin 2q_3 &= \frac{1}{2}M_{01}; \\ 2\ddot{q}_3 I'_\Sigma(q_1) + 2\dot{q}_1\dot{q}_3 \cdot A(q_1) - \dot{q}_2^2 I'_\Sigma \sin 2q_3 + \\ + g(q_1(m_3 + m) + m_2a_2 - m_3a_3) \cos q_3 &= M_{12}, \end{aligned} \right\} \quad (4.144)$$

де

$$I'_\Sigma(q_1) = I_\Sigma + m_{03}q_1^2 - m_3a_3q_1, \quad (4.145)$$

$$A(q_1) = 2m_{03}q_1 - m_3a_3. \quad (4.146)$$

Тут I_Σ описано рівністю (4.119).

Друге рівняння (4.144) може мати перший інтеграл (тобто його можна записати у вигляді диференціального рівняння 1-го порядку). Дійсно, оскільки $\frac{\partial T}{\partial q_2} = 0$ і $Q_2^\Pi = 0$, рівняння зводиться до вигляду

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \ddot{q}_2} = M_{01}, \quad (4.147)$$

звідки

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \int M_{01} dt + C, \quad (4.148)$$

або з урахуванням (4.138)

$$\dot{q}_2 I'_\Sigma(q_1) \cos^2 q_3 = \frac{1}{2} \int M_{01} dt + C. \quad (4.149)$$

Довільна стала C визначається початковими умовами.

Система рівнянь (4.144) (або із заміною другого рівняння на (4.148)) описує рух маніпулятора схеми $O \perp O \perp \Pi$, її можна використати для розв'язання як прямої задачі динаміки маніпулятора (задачі динамічного синтезу), так і оберненої (задачі динамічного аналізу).

Під час розв'язання прямої задачі динаміки маніпулятора задають необхідні рухи його ланок, тобто узагальнені координати у функціях часу $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$. Рушійні сила F_{23} і моменти M_{01} , M_{12} приводів як функції часу обчислюють за рівняннями (4.144).

Під час розв'язання оберненої задачі динаміки при заданих рушійних навантаженнях M_{01} , M_{12} , F_{23} приводів визначають кінематичні рівняння руху ланок (і центру робочого органу), тобто $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$.

Розв'язання задачі зводиться до інтегрування системи трьох нелінійних диференціальних рівнянь 2-го порядку (4.144). В аналітичній формі отримати розв'язок системи (4.144), тобто знайти узагальнені координати $q_1(t)$, $q_2(t)$, $q_3(t)$ як функції від часу, досить важко (якщо взагалі можливо). Тому після підставлення числових значень параметрів (мас, довжин тощо) і після обчислення постійних коефіцієнтів рівнянь (4.144) до їх інтегрування застосовують числові методи.

Схема $O \parallel O$ (ангулярна система координат) (рис. 4.4).

Отримаємо диференціальні рівняння руху плоского двоступеневого маніпулятора M схеми $O \parallel O$.

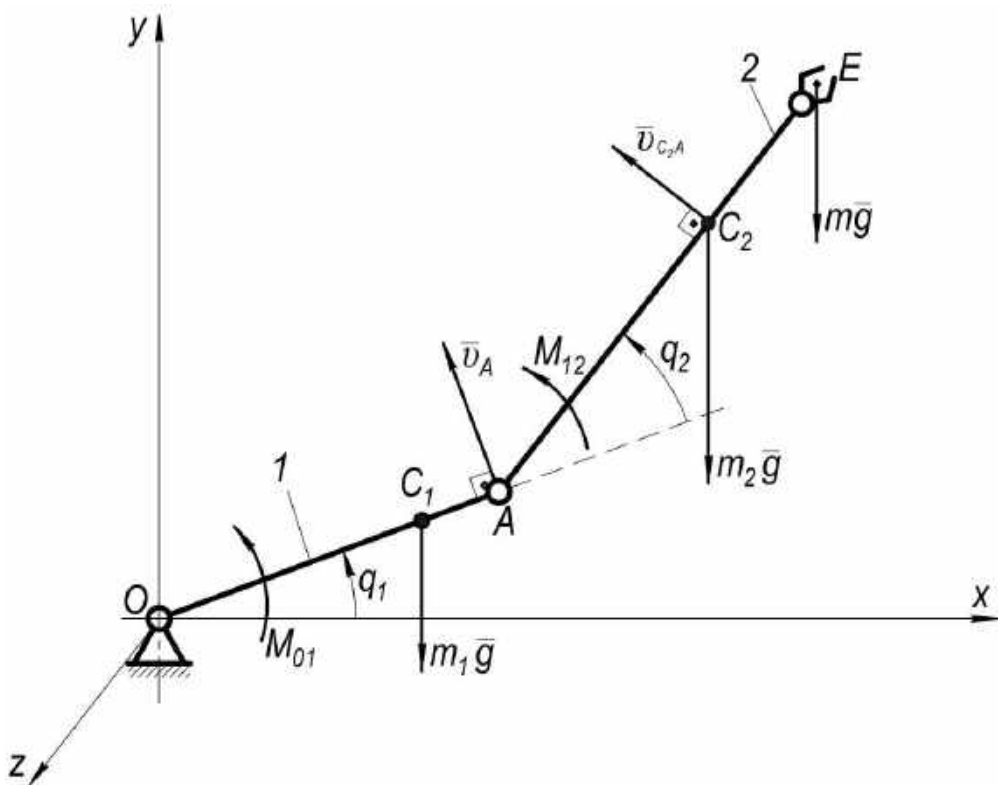


Рис. 4.4. До складання диференціальних рівнянь маніпулятора схеми 0 || 0

Механізм маніпулятора має два ступені рухомості. Уважаємо, що його рух відбувається у вертикальній площині. Узагальненими координатами є $q_1 = \theta$, $q_2 = \gamma$.

Для отримання диференціальних рівнянь руху маніпулятора скористаємося рівняннями Лагранжа 2-го роду (4.1). У цьому випадку рівняння в загальному вигляді запишемо так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial T}{\partial q_1} = Q_1^{\Pi} + Q_1^H; \quad (4.150)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial T}{\partial q_2} = Q_2^{\Pi} + Q_2^H. \quad (4.151)$$

Обчислимо кінетичну енергію маніпулятора:

$$T = T_1 + T_2 + T_E. \quad (4.152)$$

Для першої ланки, що обертається навколо осі O ,

$$T_1 = \frac{1}{2} I_{10} \omega_1^2, \quad (4.153)$$

де I_{10} – момент інерції ланки 1 відносно осі його обертання Oz ;
 ω_1 – кутова швидкість,

$$\omega_1 = \dot{\theta} = \dot{q}_1, \quad (4.154)$$

$$T_1 = \frac{1}{2} I_{10} \dot{q}_1^2. \quad (4.155)$$

Кінетична енергія ланки 2, що здійснює плоский рух,

$$T_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{C_2}^2 + \frac{1}{2} I_{C_2 z} \omega_2^2, \quad (4.156)$$

де $I_{C_2 z}$ – момент інерції ланки 2 відносно осі, що проходить через центр тяжіння C_2 ланки, перпендикулярно до площини руху. Швидкість центра тяжіння C_2

$$\bar{v}_{C_2} = \bar{v}_A + \bar{v}_{C_2 A}, \quad (4.157)$$

де $\bar{v}_{C_2 A}$ – швидкість точки C_2 в обертальному русі ланки 2 навколо полюса A ;

$$v_A = \omega_1 \ell_1 = \dot{\theta} \ell_1; \quad (4.158)$$

$$v_{C_2 A} = \omega_2 \cdot C_2 A = (\dot{\theta} + \dot{\gamma}) a_2; \quad (4.159)$$

$$\begin{aligned} v_{C_2}^2 &= v_A^2 + 2v_A \cdot v_{C_2 A} \cos \gamma + v_{C_2 A}^2 = \\ &= \dot{\theta}^2 \ell_1^2 + 2\dot{\theta}(\dot{\theta} + \dot{\gamma}) \cos \gamma \cdot \ell_1 \cdot a_2 + (\dot{\theta} + \dot{\gamma})^2 \cdot a_2^2 = \\ &= \dot{q}_1^2 \cdot \ell_1^2 + 2\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 \ell_1 a_2 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \cdot a_2^2; \end{aligned} \quad (4.160)$$

$$\omega_2 = \dot{\theta} + \dot{\gamma}. \quad (4.161)$$

Уведемо позначення: $C_2 A = a_2$.

Підставивши співвідношення (4.160), (4.161) у формулу (4.156), отримаємо

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2} m_2 (\dot{q}_1^2 \cdot \ell_1^2 + 2\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 \ell_1 a_2 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 a_2^2) + \\ &\quad + \frac{1}{2} I_{C_2 z} (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2. \end{aligned} \quad (4.162)$$

Кінетична енергія вантажу E , що переноситься (уважаємо вантаж точковим),

$$T_E = \frac{1}{2} m v_E^2. \quad (4.163)$$

Формулу для швидкості точки E отримаємо з формули для v_{c_2} (4.160), замінивши в ній $a_2 = C_2 A$ на ℓ_2 :

$$v_E^2 = \dot{q}_1^2 \ell_1^2 + 2\dot{q}_1(\dot{q}_1 + \dot{q}_2) \cos q_2 \ell_1 \ell_2 + (\dot{q}_1 + \dot{q}_2)^2 \ell_2^2. \quad (4.164)$$

Підставивши v_E^2 у формулу (4.163), підсумувавши потім T_1, T_2, T_E , після перегруповання за узагальненими швидкостями отримаємо

$$T = \frac{1}{2} \dot{q}_1^2 (I_1 + I_3 \cos q_2) + \dot{q}_1 \dot{q}_2 (I_2 + I_3 \cos q_2) + \frac{1}{2} \dot{q}_2^2 I_2. \quad (4.165)$$

Тут уведено такі позначення:

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= I_{01} + I_2 + (m + m_2) \ell_1^2; \\ I_2 &= I_{C_2 Z'} + m \ell_2^2 + m_2 a_2^2; \\ I_3 &= (m \ell_2 + m_2 a_2) \ell_2, \end{aligned} \right| \quad (4.166)$$

де m, m_2 – маси робочого органу з вантажем і ланки 2 відповідно;

I_{01} – момент інерції ланки 1 відносно осі обертання Oz (див. рис. 4.4);

$I_{C_2 Z'}$ – момент інерції ланки 2 відносно осі, що проходить через його центр тяжіння перпендикулярно до площини руху;

ℓ_1, ℓ_2 – довжини ланок 1, 2 відповідно;

$a_2 = C_2 A$.

Обчислення узагальнених сил. Для потенціальних активних сил (тут – сил ваги ланок). Потенціальна енергія маніпулятора

$$\begin{aligned} \Pi &= m_1 g a_1 \sin q_1 + m_2 g (\ell_1 \sin q_1 + a_2 \sin(q_1 + q_2)) + \\ &+ m g (\ell_1 \sin q_1 + \ell_2 \sin(q_1 + q_2)) + \text{const}. \end{aligned} \quad (4.167)$$

Узагальнені консервативні сили є такими:

$$Q_1^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_1} = -g((m_1 a_1 + (m + m_2) \ell_1) \cos q_1 + (m \ell_2 + m_2 a_2) \cos(q_1 + q_2)); \quad (4.168)$$

$$Q_2^\Pi = -\frac{\partial \Pi}{\partial q_2} = -g(m \ell_2 + m_2 a_2) \cos(q_1 + q_2). \quad (4.169)$$

Узагальнені непотенціальні сили:

$$Q_1^H = M_{01}, \quad (4.170)$$

$$Q_2^H = M_{12}. \quad (4.171)$$

Для неконсервативних сил, якими можуть бути рушійні моменти M_{01}, M_{12} , сума віртуальних робіт

$$\sum \sigma \delta A = M_{01} \delta \theta + M_{12} \delta \gamma = M_{01} \delta q_1 + M_{12} \delta q_2. \quad (4.172)$$

Обчислимо ліві частини рівнянь (4.150), (4.151), тобто похідні від кінетичної енергії (4.165):

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1(I_1 + I_3 \cos q_2) + \dot{q}_2(I_2 + I_3 \cos q_2); \quad (4.173)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = \ddot{q}_1(I_1 + I_3 \cos q_2) + \ddot{q}_2(I_2 + I_3 \cos q_2) - (\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) I_3 \sin q_2; \quad (4.174)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0; \quad (4.175)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \dot{q}_1(I_2 + I_3 \cos q_2) + \dot{q}_2 I_2;$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \ddot{q}_1(I_2 + I_3 \cos q_2) + \ddot{q}_2 I_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 I_3 \sin q_2; \quad (4.176)$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = -\left(\frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2\right) I_3 \sin q_2. \quad (4.177)$$

Підставивши співвідношення (4.168), (4.170), (4.174), (4.175) у рівняння (4.150), а (4.169), (4.171), (4.177), (4.178) – у рівняння (4.151), одержимо диференціальні рівняння руху маніпулятора в плоскій ангулярній системі координат:

$$\left. \begin{aligned} &\ddot{q}_1(I_1 + I_3 \cos q_2) + \ddot{q}_2(I_2 + I_3 \cos q_2) - (\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2) I_3 \sin q_2 = \\ &= -g((m_1 a_1 + (m + m_2) \ell_1) \cos q_1 + (m \ell_2 + m_2 a_2) \cos(q_1 + q_2)) + M_1; \\ &\ddot{q}_1(I_2 + I_3 \cos q_2) + \ddot{q}_2 I_2 - \dot{q}_1 \dot{q}_2 I_3 \sin q_2 + \left(\frac{1}{2} \dot{q}_1^2 + \dot{q}_1 \dot{q}_2\right) I_3 \sin q_2 = \\ &= -g(m \ell_2 + m_2 a_2) \cos(q_1 + q_2) + M_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.179)$$

Отримана система диференціальних рівнянь (4.179) дає змогу розв'язувати як пряму задачу динаміки маніпулятора (задачу динамічного синтезу), так і обернену (задачу динамічного аналізу).

Під час розв'язання прямої задачі вважаємо заданими масогеометричні параметри маніпулятора (маси, розміри, моменти інерції ланок), а також залежність від часу узагальнених координат $q_1(t)$, $q_2(t)$. Підлягають визначенню рушійні моменти M_1 , M_2 приводів, що забезпечують задані закони змінення від часу узагальнених координат.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Лошак, Т. В. Прикладна механіка та основи конструювання / Т. В. Лошак. – Київ : НУХТ, 2004. – 77 с.
2. Павловський, М. А. Теоретична механіка : підручник / М. А. Павловський. – Київ : Техніка, 2002. – 512 с.
3. Дорохов, М. Ю. Роботи та маніпулятори : консп. лекцій / М. Ю. Дорохов. – Краматорськ : Донбас. держ. машинобуд. акад., 2019. – 53 с.
4. Дудюк, Д. Л. Гнучке автоматизоване виробництво і роботизовані комплекси : навч. посіб. / Д. Л. Дудюк, С. С. Мазепа, М. М. Мисик. – Львів : Магнолія 2006, 2008. – 278 с.
5. Промислові маніпулятори [Електронний ресурс]. – URL : <https://uk.wikipedia.org>. – 8.05.2023.
6. Ловейкін, В. С. Мехатроніка : навч. посіб. / В. С. Ловейкін, Ю. О. Ромасевич. – Київ, 2012. – 357 с.
7. Цвіркун, Л. І. Робототехніка та мехатроніка : навч. посіб. / Л. І. Цвіркун, Г. Грулер. – Дніпро : НГУ, 2017. – 224 с.
8. Орловський, Б. В. Мехатроніка в галузевому машинобудуванні : навч. посіб. / Б. В. Орловський. – Київ : КНУТД, 2018. – 416 с.
9. Ловейкін, В. С. Мехатроніка : навч. посіб. / В. С. Ловейкін, Ю. О. Ромасевич, Ю. В. Човнюк. – Київ : ЦП «Компринт», 2012. – 358 с.

ЗМІСТ

1. Основні поняття структури маніпулятора.....	3
1.1. Складові частини маніпулятора.....	3
1.2. Кінематичні пари. Їх класифікація.....	4
1.3. Ступені рухомості маніпулятора.....	6
2. Статика маніпулятора.....	13
2.1. Умови рівноваги маніпулятора.....	13
2.2. Приклади статичного розрахунку маніпулятора.....	14
2.3. Знаходження керувальних впливів (сил, моментів), що забезпечують задане положення рівноваги маніпулятора з допомогою принципу віртуальних переміщень.....	23
3. Кінематика маніпулятора.....	38
3.1. Визначення швидкості точки в різних системах координат.....	38
3.2. Складний рух твердого тіла. Додавання рухів.....	49
3.3. Розв'язання прямої задачі кінематики маніпулятора і визначення швидкості центра захоплювального пристрою.....	54
3.4. Розв'язання оберненої задачі кінематики маніпулятора.....	63
4. Динаміка маніпулятора.....	74
4.1. Отримання диференціальних рівнянь руху маніпуляторів деяких схем.....	78
4.2. Розв'язання оберненої задачі динаміки маніпулятора.....	82
4.3. Розв'язання прямої задачі динаміки маніпулятора.....	85
Бібліографічний список.....	102

Навчальне видання

**Ойкін Володимир Олександрович
Постельник Тетяна Олександрівна**

МЕХАНІКА МАНІПУЛЯТОРІВ ПРОМИСЛОВИХ РОБОТІВ

Редактор О. Ф. Серьожкіна

Зв. план, 2024

Підписано до друку 16.12.2024

Формат 60 x 84 1/16. Папір офс. Офс. друк

Ум. друк. арк. 5,6. Обл.-вид. арк. 6,5. Наклад 100 пр.

Замовлення 136-24. Ціна вільна

Видавець і виготовлювач

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського

«Харківський авіаційний інститут»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

<http://www.khai.edu>

Видавничий центр «ХАІ»

61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001