О. В. Шехов

ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ ТА ТЕОРІЇ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

2024

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

О. В. Шехов

ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ ТА ТЕОРІЇ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

Конспект лекцій

Харків «ХАІ» 2024

УДК 531/621.01(075.8)
Ш54

Рецензенти: канд. техн. наук, доц. О. В. Устименко,
канд. техн. наук, доц. В. О. Повгородній

Шехов, О. В.

Ш54 Основи теоретичної механіки та теорії механізмів і машин [Електронний ресурс] : консп. лекцій / О. В. Шехов. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2024. – 251 с.

Розглянуто основні положення теоретичної механіки й теорії механізмів і машин. Наведено приклади розв’язання практичних задач і запитання для самостійного контролю засвоєння матеріалів лекції. Викладено алгоритми реалізації структурного, кінематичного та силового аналізу плоских важільних механізмів, які є планом виконання відповідних розділів курсового проєкту.

Для студентів технічних спеціальностей.

Іл. 166. Табл. 4. Бібліогр.: 6 назв

УДК 531/621.01(075.8)

© Шехов О. В., 2024
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2024

ПЕРЕДМОВА

Конспект лекцій складено на основі програми курсу навчальної дисципліни «Основи теоретичної механіки та теорії механізмів і машин», що викладається для студентів напрямів підготовки 13 «Механічна інженерія», 14 «Електрична інженерія» і 27 «Транспорт», які здобувають освітній ступінь бакалавра за прискореним терміном навчання. Водночас конспект лекцій можуть використовувати студенти й немеханічних спеціальностей, що здобувають освітній ступень бакалавра як за прискореним терміном, так і з нормативним терміном навчання чотири роки.

Конспект лекцій складається з трьох розділів: Статика, Кінематика й Динаміка.

У першому розділі «Статика» викладено основні положення теоретичної механіки стосовно дії на тверді тіла різних систем сил, методи перетворення систем сил до простих систем, методи розв’язання задач на рівновагу систем сил, прикладених до твердих тіл.

У другому розділі «Кінематика» сформульовано основні положення теоретичної механіки — кінематики матеріальної точки, твердого тіла й систем твердих тіл, що утворюють механічну систему, яку в теорії механізмів і машин розглядають як механізм. Для аналізу кінематики механізмів викладаються як методи теоретичної механіки, так і методи теорії механізмів і машин.

У третьому розділі «Динаміка» розглянуто питання динаміки матеріальної точки, матеріальних систем, рухів твердого тіла й загальні теореми їх динаміки. Стосовно динаміки руху механізмів розглядається метод кінетостатики (принцип Даламбера) для розв’язання задач силового розрахунку механізмів.

У наведених лекціях також розглядаються приклади розв’язання практичних задач на основі теоретичного матеріалу.

Конспект лекцій призначено для студентів денної й заочної форм навчання. Його було використано при створенні дистанційного навчального курсу в системі «Ментор» університету.

ВСТУП

В українській Вікіпедії наведено таке означення слова: механіка (від *грец.* Μηχανική, mechane) — знаряддя, споруда, мистецтво побудови машин. У загальному розумінні це наука про механічний рух і рівновагу тіл і взаємодію, що виникає при цьому між тілами. Ця наука належить до природничих наук. У фізиці в цьому розділі вивчається закон механічного руху й механічної взаємодії. Механіку поділяють на загальну механіку, механіку суцільних середовищ і прикладну механіку.

Предметом вивчення теоретичної механіки (ТМ) є рух і взаємодія модельних (ідеалізацій) матеріальних об’єктів.

У механіці суцільного середовища розглядаються рухи таких матеріальних тіл, що заповнюють простір безперервно й суцільно, відстані між точками яких під час руху змінюються.

У прикладній механіці вивчається рух і взаємодія реальних матеріальних об'єктів з використанням моделей і результатів теоретичної механіки.

Теоретична механіка — одна з фундаментальних загальнонаукових дисциплін фізико-математичного профілю, яка є науковою базою багатьох областей сучасної техніки й різних інженерних дисциплін (опір матеріалів, теорія механізмів і машин, деталей машин та ін.).

Відкривши українську Вікіпедію, можна прочитати про теорію механізмів і машин таке: теорія механізмів і машин (ТММ) — це наукова дисципліна про загальні методи дослідження будови, кінематики й динаміки механізмів і машин та наукові основи їх проєктування.

Основою теорії механізмів і машин (ТММ) є теоретичні моделі й методи їх дослідження, які розроблено в теоретичній механіці.

Об'єднання двох навчальних дисциплін в одну «Основи теоретичної механіки та теорії механізмів і машин» прийнято з головною метою — донести до студентів основні поняття й методи ТМ для розв’язання практичних задач ТММ.

Розділ 1. СТАТИКА

Лекція 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА АКСІОМИ СТАТИКИ. СИСТЕМА ЗБІЖНИХ СИЛ

План лекції

1. Вступ.
2. Основні поняття й означення.
3. Класифікація сил.
4. Аксіоми статики.
5. Система збіжних сил.
6. Способи визначення рівнодійної системи збіжних сил.
7. Геометричні й аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил.

1. Вступ

Статика — розділ теоретичної механіки, у якому розглядаються властивості сил, що діють на тверде тіло, вивчаються методи перетворення систем сил на еквівалентні системи й установлюються умови рівноваги різних систем сил, які прикладено до твердого тіла.

Статика базується на аксіомах, з яких за законами логіки утворюються нові поняття й висновки для застосування.

2. Основні поняття й визначення

Матеріальною точкою (або матеріальною частинкою) називають таке тіло, розміри якого по всіх напрямках є досить малими, так що різницею в русі окремих точок цього тіла можна знехтувати. Матеріальна точка має масу й здатна взаємодіяти з іншими тілами. Матеріальну точку можна подати у вигляді геометричної точки, наділеної масою.

Механічною системою матеріальних точок називають систему (сукупність, множину) матеріальних точок, рух кожної з яких залежить від положення й руху інших точок системи.

Абсолютно твердим тілом називають таке тіло, відстані між кожними двома точками якого залишаються завжди незмінними. Іншими словами, абсолютно тверде тіло завжди зберігає незмінною свою геометричну форму. Абсолютно тверде тіло є незмінною системою нескінченної кількості матеріальних точок.

Поняття **сили** в теоретичній механіці є основним первинним поняттям.

Сила в механіці — основна міра механічної взаємодії матеріальних тіл, унаслідок чого тіла, що взаємодіють, можуть надавати одне одному прискорення або деформуватись (змінювати свою форму).

Сила — векторна величина: характер її дії на тіло визначається модулем, напрямком і точкою прикладання. Напрямком сили є такий, уздовж якого вільна матеріальна точка, що перебуває в спокої, починає рухатися під дією сили.

Сила — це символ, абстракція, модель. Реально «сила» у природі не існує, на відміну від руху або деформації тіла. Поняття сили було введено для того, щоб характеризувати причину змінення положення тіл у просторі або їх деформування .

У механіці основною одиницею вимірювання сили є Ньютон (*Н*). Для статичного вимірювання сили використовують динамометри.

Приклади задання сили

Приклад 1. Нехай до абсолютно твердого тіла (ТТ) у точці A прикладено силу $\vec{P}$ (вектор сили), числове значення якої дорівнює 100 *Н* (рис. 1.1).

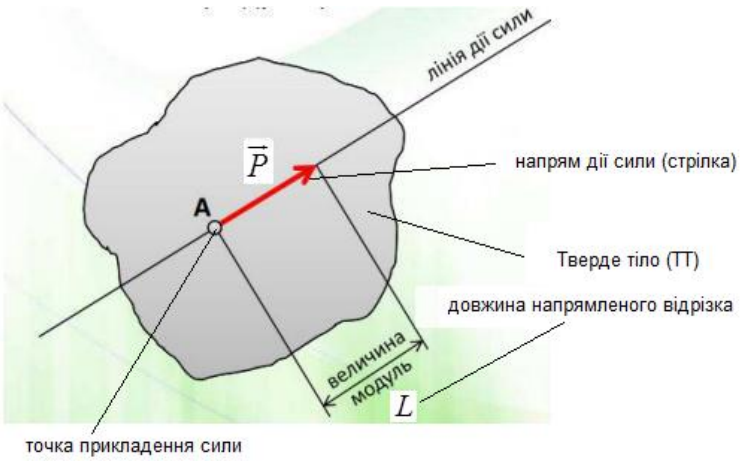


Рис. 1.1

Вектор $\vec{P}$ зображено у вигляді напрямленого відрізка певної довжини L, наприклад 20 мм.

Між модулем сили P і довжиною L є співвідношення

$$P = \left|\vec{P}\right| = k_P L,$$

де $k_p = \left|\vec{P}\right| / L$ — масштабний коефіцієнт зображення вектора сили.

Для цього прикладу $k_p = \dfrac{\left|\vec{P}\right|}{L} = \dfrac{100}{20} = 5\dfrac{H}{мм}$.

Отже, сила визначається (характеризується) трьома елементами:

1) числовим значенням (модулем);

2) напрямком;

3) точкою прикладення.

Пряму, по якій спрямовано силу, називають **лінією дії сили**.

Спосіб задання сили у вигляді напрямленого відрізка називають **графічним способом.**

Приклад 2. До абсолютно твердого тіла (ТТ) у точці A прикладено силу $\vec{P}$ (вектор сили). Зв´яжемо з точкою A прямокутну декартову систему координат $Axyz$. Нехай $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орти координатних осей Ax, Ay, Az відповідно (рис. 1.2).

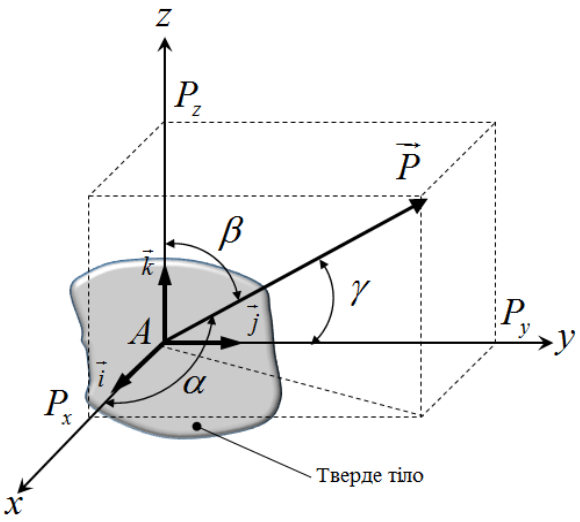


Рис. 1.2

Згідно з аналітичною геометрією маємо

$$\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k},$$

де $P_x = \left(\vec{P}\right)_{npx} = \vec{P}\cdot\vec{i} = P\cos(\alpha)$ — проєкція вектора сили $\vec{P}$ на ось Ax;

$P_y = \left(\vec{P}\right)_{npy} = \vec{P}\cdot\vec{j} = P\cos(\beta)$ — проєкція вектора сили $\vec{P}$ на ось Ay;

$P_z = \left(\vec{P}\right)_{npz} = \vec{P}\cdot\vec{k} = P\cos(\gamma)$ — проєкція вектора сили $\vec{P}$ на ось Az.

Модуль сили (вектора сили)

$$P = \left|\vec{P}\right| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}\,.$$

Кути α, β, γ — це такі кути, які сила $\vec{P}$ утворює з осями Ax, Ay, Az відповідно.

Кути α, β, γ мають назву **напрямних кутів,** а косинуси цих кутів — **напрямних косинусів.**

Таким чином, вектор сили $\vec{P}$ можна задати трьома параметрами (координатами) — проєкціями P_x, P_y, P_z на осі координат.

Отже,

$$\vec{P} = \left(P_x,\ P_y,\ P_z \right).$$

Параметри P_x, P_y, P_z називають ще **координатами вектора сили** $\vec{P}$.

Позначення вектора сили через його координати (проєкції) залежіть від вибору системи координат.

Спосіб задання сили в координатній формі називають **аналітичним способом.**

Система сил — це сукупність декількох сил, що діють на одне тіло або систему тіл.

Для позначення системи сил використовують такий запис:

$$\left(\vec{P_1},\ \vec{P_2},\ ...,\ \vec{P_n} \right).$$

Еквівалентними системами сил називають такі дві системи сил $\left(\vec{P_1},\ \vec{P_2},\ ...,\ \vec{P_n} \right)$ і $\left(\vec{Q_1},\ \vec{Q_2},\ ...,\ \vec{Q_m} \right)$, кожну з яких можна замінити іншою, не порушуючи стану твердого тіла.

Умову еквівалентності двох систем сил записують у вигляді

$$\left(\vec{P_1},\ \vec{P_2},\ ...,\ \vec{P_n} \right) \sim \left(\vec{Q_1},\ \vec{Q_2},\ ...,\ \vec{Q_m} \right).$$

Якщо система сил є еквівалентною нулю, то таку систему називають **зрівноваженою системою сил**, або еквівалентною «нульовій силі» (статичному нулю).

Поняття рівнодійної системи сил. Якщо система сил $\left(\vec{P_1},\ \vec{P_2},\ ...,\ \vec{P_n} \right)$ є еквівалентною одній силі $\vec{R}$, тобто

$$\left(\vec{P_1},\ \vec{P_2},\ ...,\ \vec{P_n} \right) \sim \vec{R},$$

то силу $\vec{R}$ називають **рівнодійною** цієї системи сил. Одна рівнодійна сила може замінити дію всіх цих сил.

Зрівноважувальною силою називають силу $\overrightarrow{P_y}$, модуль якої дорівнює модулю рівнодійної, лінія дії збігається, а напрямок — прямо протилежний:

$$\overrightarrow{P_y} = -\vec{R},\ \left(\vec{P_1},\ \vec{P_2},\ ...,\ \overrightarrow{P_n}\right) \sim -\overrightarrow{P_y}.$$

Не кожна система сил має рівнодійну силу.

3. Класифікація сил

Сили, які діють на механічну систему, поділяють на дві групи: **зовнішні** й **внутрішні** (рис. 1.3).

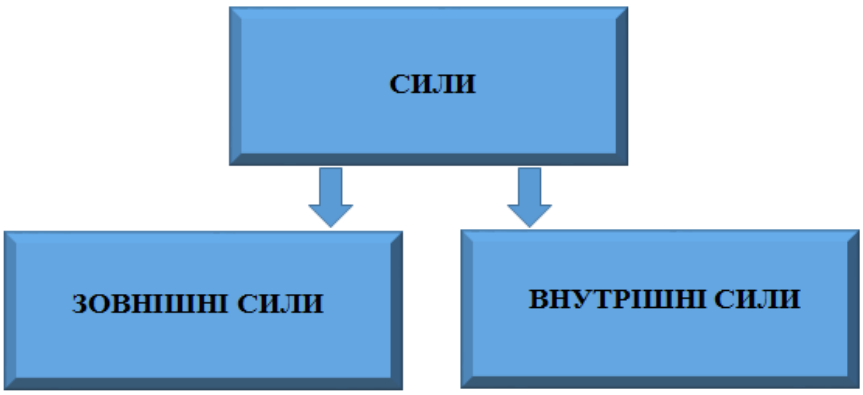


Рис. 1.3

Зовнішніми називають сили, які діють на матеріальні точки (тіла) цієї системи з боку матеріальних точок (тіл), які не належать до цієї системи.

Внутрішніми називають сили взаємодії між матеріальними точками системи, що розглядається.

Тверде тіло називають **вільним**, якщо воно може пересуватися в просторі в будь-якому напрямку.

Тверде тіло, переміщенню якого перешкоджають які-небудь інші тіла, називають **невільним**.

Тіла, які обмежують переміщення деякого тіла, рівновага якого розглядається, називають **в'язями** для цього тіла.

Силу або систему сил, яка виражає механічну дію в'язі на тіло, називають **реакцією в'язі**.

Таким чином, сили, що діють на невільне тверде тіло, можна

поділити на **активні**, які не залежать від реакцій в'язей, і **пасивні,** або **реакції в'язей** (рис. 1.4).

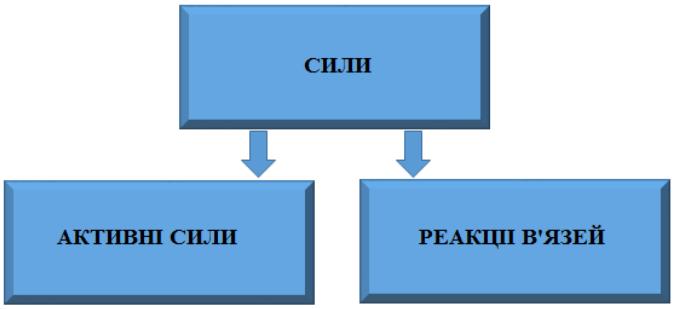


Рис. 1.4

Принцип звільнення твердого тіла від в'язей.

Невільне тверде тіло можна розглядати як вільне, на яке крім заданих сил діють реакції в'язей (рис. 1.5).

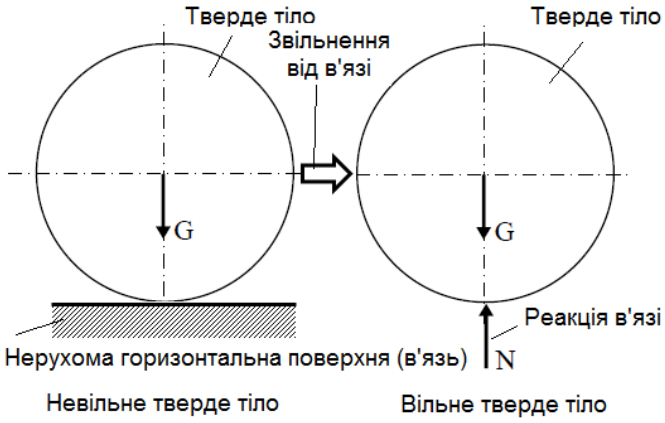


Рис. 1.5

При використанні принципу звільнюваності від в'язей постають два питання:

1) як спрямовано реакцію в'язі?;

2) у якій точці тіла прикладено реакцію в'язі?.

Спрямована реакція в'язі в бік, протилежний тому, куди в'язь не дає переміщуватися тілу.

Реакцію в'язі прикладено в точці тіла, на переміщення якої накладено обмеження.

Приклад. Нехай на тверде тіло накладено гнучку в'язь (нитку, канат), як зображено на (рис. 1.6).

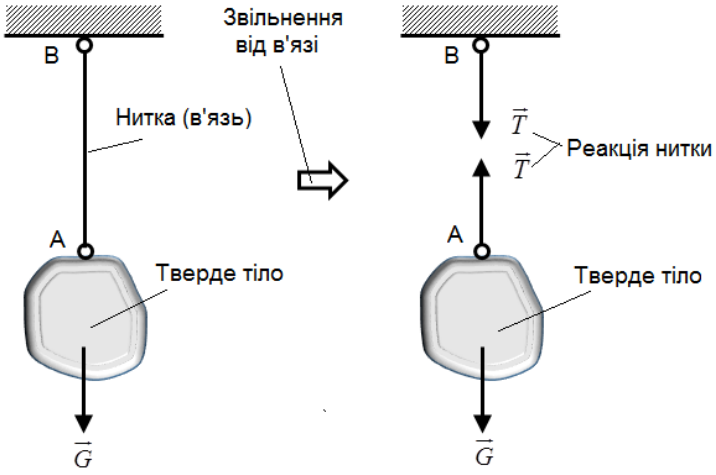


Рис. 1.6

*З прикладами інших видів в'язі ознайомитися самостійно***.**

4. Аксіоми статики

В основу статики покладено аксіоми, тобто деякі твердження, що приймаються без доведення, тому що їх підтверджено багатовіковою практичною діяльністю, дослідами й спостереженнями.

Аксіома 1 (принцип інерції). *Ізольована матеріальна система перебуває в стані спокою або рівномірного й прямолінійного руху*.

Системи відліку, відносно яких виконується принцип інерції, мають назву **інерціальних**.

Аксіома 2 (умова рівноваги двох сил). *Дві сили, які прикладено до твердого тіла, взаємно врівноважуються тільки в тому випадку, якщо їх модулі є однаковими й спрямованими по одній прямій у протилежні боки (рис. 1.7)*.

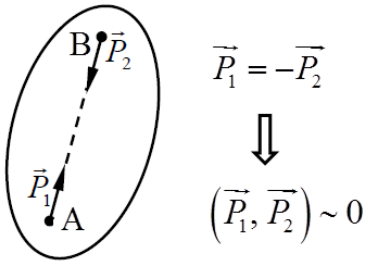


Рис. 1.7

Аксіома 3 (принцип приєднання і виключення врівноважених сил). *Якщо до твердого тіла, яке знаходиться під дією певної системи сил, прикласти або виключити врівноважену систему сил, то утвориться система сил, еквівалентна заданій системі*.

Наслідок. Не змінюючи кінематичного стану твердого тіла, силу можна переносити вздовж лінії її дії, зберігаючи незмінними її модуль і напрямок (рис. 1.8).

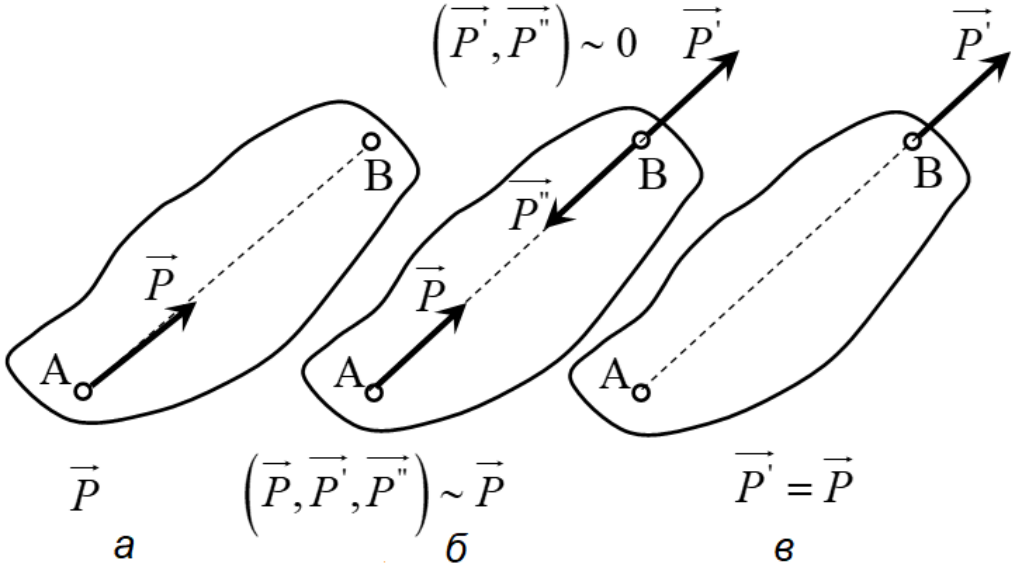


Рис. 1.8

Доведення. Нехай у точці А до тіла прикладено силу $\overrightarrow{P}$ (рис. 1.8, *а*).

Прикладемо в точці В на лінії дії сили $\overrightarrow{P}$ дві врівноважені сили $\overrightarrow{P'}$ і $\overrightarrow{P''}$, причому $\overrightarrow{P}=\overrightarrow{P'}$ (рис. 1.8, *б*). Згідно з аксіомою 2 $\left(\overrightarrow{P},\overrightarrow{P'},\overrightarrow{P''}\right)\sim\overrightarrow{P}$.

Сили $\overrightarrow{P}$ і $\overrightarrow{P''}$ також утворюють врівноважену систему сил, і тому їх можна виключити (рис. 1.8, *в*)

$$\left(\overrightarrow{P'}\right)\sim\overrightarrow{P}.$$

Отже, сила, прикладена до твердого тіла, є ковзним вектором.

Аксіома 4 (правило паралелограма). *Дві сили, прикладені до тіла в одній точці, мають рівнодійну, яку прикладено в цій самій точці й зображено діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах* (рис. 1.9).

Згідно з цією аксіоми маємо:

1) дві сили $\overrightarrow{P_1}$ і $\overrightarrow{P_2}$, прикладені в одній точці A, мають рівнодійну $\overrightarrow{R}$, тобто $\left(\overrightarrow{P_1},\overrightarrow{P_2}\right)\sim\overrightarrow{R}$;

2) $\overrightarrow{R}=\overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{P_2}$, чим і визначаються модуль, напрям і точка прикладення рівнодійної сили.

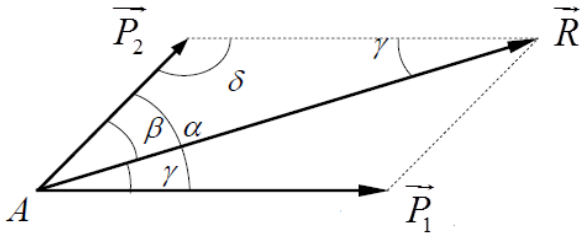


Рис. 1.9

З рис. 1.9 отримуємо

$$\cos(\delta) = \cos(\pi - (\beta + \gamma)) = \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha),\ \ \alpha = \angle(\vec{P}_1, \vec{P}_2),$$

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2\cos(\alpha)},$$

$$R = \sqrt{P_1^2 + P_2^2 - 2P_1P_2\cos(\delta)}.$$

Аксіома 5 (дії та протидії). *Сили взаємодії, з якими два тіла діють одне на одне, є однаковими за модулем і спрямованими вздовж спільної прямої в протилежні боки* (рис. 1.10).

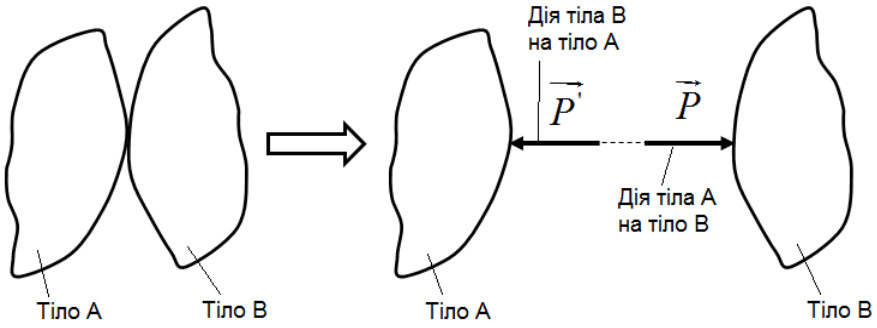


Рис. 1.10

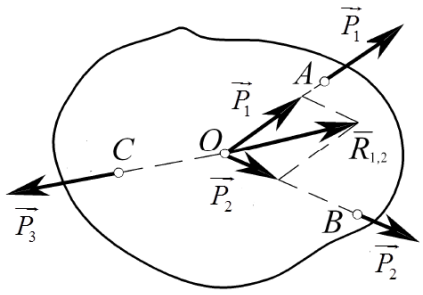
Маємо $\vec{P}' = -\vec{P}$.

Слід зазначити, що сили взаємодії ніколи не врівноважуються, тобто не утворюють врівноважену систему сил, тому, що їх прикладено до різних тіл або до різних точок одного й того самого тіла, що взаємодіють одна з одною.

Аксіома 6 (принцип затверділості). *Тіло, що може змінюватися або деформуватися, буде залишатися в рівновазі, якщо його вважати абсолютно твердим.*

Наприклад, пружина, яка є розтягнутою під дією сили ваги *P* і знаходиться в рівновазі, залишиться в рівновазі, якщо вважати, що вона не може деформуватися, тобто є абсолютно твердим тілом.

Наслідки з аксіом статики (теорема про три непаралельні сили). Якщо три непаралельні сили, що діють на тверде тіло, перебувають у рівновазі й лежать в одній площині, то лінії дії цих сил перетинаються в одній точці (рис. 1.11).



$$\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\right) \sim 0$$

Рис. 1.11

Інколи трапляється таке формулювання: *якщо три сили, що діють на тверде тіло, перебувають у рівновазі та лінії дії двох сил перетинаються, то всі сили лежать в одній площині та їх лінії дії перетинаються в одній точці.*

5. Система збіжних сил

З**біжними** називають сили, лінії дії яких перетинаються в одній точці (рис. 1.12).

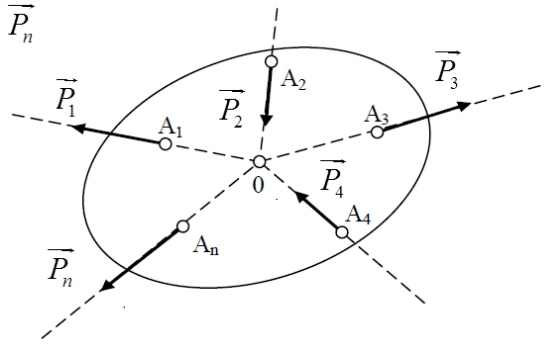


Рис. 1.12

Теорема (без доведення). *Система збіжних сил є еквівалентною одній силі (рівнодійній), яка дорівнює сумі всіх цих сил і проходить через точку перетину їх ліній дії*:

$$\left(\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ ...,\ \vec{P}_n\right) \sim \vec{R};$$

$$\vec{R} = \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + ... + \vec{P}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i\ .$$

Застосовуючи послідовно аксіому паралелограма сил, доведемо теорему про зведення збіжної системи сил до рівнодійної.

Якщо лінії дій збіжних сил розташовано в просторі, то ці сили утворюють **просторову систему збіжних сил.**

Якщо всі збіжні сили, що діють на тіло, лежать в одній площині, то вони утворюють **плоску систему збіжних сил**.

Якщо лінії дій збіжних сил розташовано вздовж однієї прямої, то ці сили утворюють **одноосьову систему збіжних сил.**

6. Способи визначення рівнодійної системи збіжних сил

Для знаходження рівнодійної можна замість паралелограмів побудувати силовий многокутник (рис. 1.13)

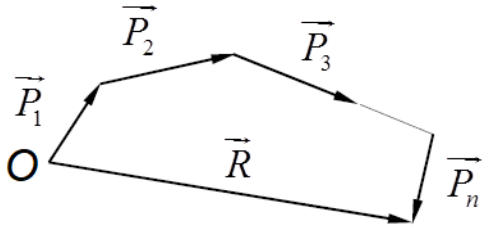


Рис. 1.13

Якщо для знаходження рівнодійної з допомогою силового многокутника використовуються правила геометрії і тригонометрії, то такий **спосіб називають геометричним**.

Найбільш загальним способом знаходження модуля й напрямку рівнодійної **є аналітичний**.

Застосувавши відповідні формули аналітичної геометрії та векторної алгебри, можна без додаткових пояснень легко записати:

$$\vec{R} = R_x \vec{i} + R_y \vec{j} + R_z \vec{k};$$

$$R_x = \left(\vec{R}\right)_{np.\text{x}} = \left(\sum_i \vec{P}_i\right)_{np.x} = \sum_i \left(\vec{P}_i\right)_{np.\text{x}} = \sum_i P_{ix};$$

$$R_y = \left(\vec{R}\right)_{np.\text{y}} = \left(\sum_i \vec{P}_i\right)_{np.\text{y}} = \sum_i \left(\vec{P}_i\right)_{np.\text{y}} = \sum_i P_{iy};$$

$$R_z = \left(\vec{R}\right)_{np.\text{z}} = \left(\sum_i \vec{P}_i\right)_{np.\text{z}} = \sum_i \left(\vec{P}_i\right)_{np.\text{z}} = \sum_i P_{iz};$$

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2};$$

$$\cos(\vec{R},\ x) = R_x / R,\ \cos(\vec{R},\ \text{y}) = R_y / R,\ \cos(\vec{R},\ \text{z}) = R_z / R.$$

7. Геометричні й аналітичні умови рівноваги системи збіжних сил

Оскільки $\left(\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ ...,\ \vec{P}_n\right) \sim \vec{R}$, то для рівноваги (тобто для еквівалентності нулю) системи збіжних сил $\left(\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ ...,\ \vec{P}_n\right)$ необхідно й достатньо, щоб її рівнодійна сила дорівнювала нулю:

$$\vec{R} = 0.$$

Це — умова рівноваги у **векторній формі**.

Умову рівноваги в **геометричній формі** можна сформулювати так: для рівноваги системи збіжних сил необхідно й достатньо, щоб силовий багатокутник був замкненим, тобто щоб кінець останньої сили збігався з початком першої сили.

Умови рівноваги в аналітичній формі мають такий вигляд:

$$R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = 0$$

або

$$\sum_i P_{ix} = 0,\ \sum_i P_{iy} = 0,\ \sum_i P_{iz} = 0.$$

Задачу називають **статично визначеною**, якщо кількість невідомих дорівнює кількості незалежних рівнянь рівноваги. Якщо ж кількість невідомих величин перевищує кількість незалежних умов рівноваги, то задачу називають **статично невизначною**, а відповідну систему — статично невизначеною (статично невизначуваною). Звичайно невідомими є реакції в’язей.

Окремий випадок. Якщо всі збіжні сили, що діють на тіло, лежать в одній площині, то вони утворюють плоску систему збіжних сил. Зв'язавши з цією площиною координатну систему Oxy, отримаємо лише дві умови рівноваги:

$$\sum_i P_{ix} = 0,\ \sum_i P_{iy} = 0.$$

Методика розв'язання задач на рівновагу сил, прикладених до твердого тіла

Послідовність розв'язання задач статики на рівновагу сил є такою:

1. Вибрати тіло (тіла), рівновагу сил, прикладених до якого, має бути розглянуто для знаходження невідомих величин.
2. Проаналізувати активні сили, що діють на тіло, і зобразити їх схематично на рисунку.
3. Якщо тверде тіло є невільним, то, застосувавши принцип звільнюваності від в'язей, прикласти до нього відповідним чином спрямовані реакції в'язей.
4. Розглянути рівновагу сил, прикладених до певного невільного твердого тіла як вільного, що перебуває під дією активних сил і реакцій в'язей, і скласти умови рівноваги сил.
5. Знайти невідомі величини, розв'язавши умови рівноваги геометричним способом або (і) аналітично.

Виконати розв'язання задачі докладно із застосуванням алгоритму

Приклад

Два невагомих стрижні 1 і 2, з'єднаних у точці C шарніром (рис. 1.14, *а*), утримують в рівновазі вантаж P = 50 Н, який на нитці 3 підвішений до шарніра C. Знайти зусилля в стержнях 1 і 2, якщо кут α = 60°.

Розв'язання

Розв'яжемо задачу *аналітичним способом*.

1. Розглянемо рівновагу шарніра C.
2. Використовуючи принцип звільнення від в'язей, замінимо дію стрижнів 1 (CA), 2 (CB) і нитки 3 (CP) на шарнір C реакціями $\vec{\mathbf{N}}_1$, $\vec{\mathbf{N}}_2$ і $\vec{\mathbf{T}}$ (рис. 1.14, *б*). Уважаємо стрижні розтягнутими, спрямовуючи зусилля в них від вузла C. Спрямовуємо реакцію нитки 3 теж від вузла C. Ураховуємо, що $T = P$ = 80 Н.

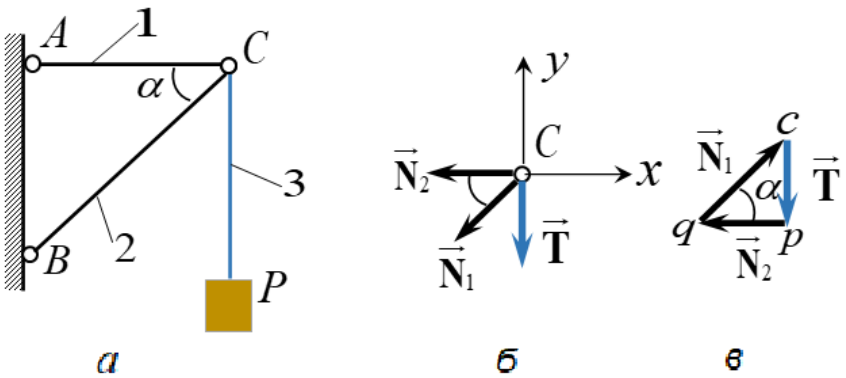


Рис. 1.14

3. На вузол C діє плоска збіжна система сил, для якої запишемо рівняння рівноваги. Осі координат Cx, Cy спрямуємо відповідно вздовж взаємно перпендикулярних сил $\vec{\mathbf{N}}_1$ і $\vec{\mathbf{T}}$ (рис. 1.14, *б*).

4. Складемо рівняння рівноваги у вигляді

$$\sum_{i=1}^{3} P_{ix} = -N_1 - N_2 \cos\alpha = 0\,,\ \sum_{i=1}^{3} P_{iy} = -N_2 \sin\alpha - T = 0\,.$$

5. Розв'язавши рівняння відносно невідомих, знайдемо шукані реакції:

$$N_2 = -\frac{T}{\sin\alpha} = -\frac{80}{\sin(60°)} = -92{,}38\ H\,,$$

$$N_1 = -N_2 \cos\alpha = -(-92{,}38\cos(60°) = 46{,}19\ H\,.$$

Знаки показують, що стрижень 1 є розтягнутим (додатне значення), а стрижень 2 — стиснутим (від'ємне значення).

Розв'яжемо задачу *геометричним способом.* Для цього побудуємо замкнений силовий трикутник (рис. 1.14, *в*).

1. З довільної точки *c* проводимо вектор $\overrightarrow{cp}$, паралельний до сили $\vec{\mathbf{T}}$, довжина якого у вибраному масштабі відображає величину цієї сили.

2. Через точки c і p проведемо дві прямі, паралельні до сил $\vec{\mathbf{N}}_1$ і $\vec{\mathbf{N}}_2$, до їх перетину в точці q. Одержимо прямокутний трикутник cpq.

3. Вектори $\overrightarrow{pq}$ і $\overrightarrow{qc}$ силового трикутника відображають сили $\vec{\mathbf{N}}_1$ і $\vec{\mathbf{N}}_2$.

Величини (модулі) сил $\vec{\mathbf{N}}_1$ і $\vec{\mathbf{N}}_2$ можна визначити із прямокутного трикутника cpq, у якому відомо $cp = T$ і кут при вершині q:

$$N_2 = -\frac{T}{\sin\alpha} = \frac{80}{\sin(60°)} = 92{,}38\ H;$$

$$N_1 = N_2 \cos\alpha = 92{,}38\cos(60°) = 46{,}19\ H.$$

Щоб визначити напрямки невідомих сил $\vec{\mathbf{N}}_1$ і $\vec{\mathbf{N}}_2$, необхідно обійти силовий трикутник по його периметру так, щоб він замкнувся (напрямок цього обходу визначається напрямком сили $\vec{\mathbf{T}}$).

На рис. 1.14, ***в*** показано замкнений силовий прямокутний трикутник.

Запитання для самоконтролю

1. Що є предметом вивчення механіки?
2. Що називають механічною взаємодією?
3. Що є предметом вивчення теоретичної (загальної) механіки?
4. Що є предметом вивчення статики?
5. Що таке матеріальна точка, абсолютно тверде тіло й механічна система (матеріальна система)?
6. Що називають силою? Якими параметрами характеризують її дію на тіло?
7. Чи існує сила «реально»?
8. Що називають системою сил?
9. Що називають рівнодійною системи сил?
10. Що називають еквівалентними системами сил?
11. Що називають зрівноважувальною силою?
12. Якою є різниця між внутрішніми й зовнішніми силами?
13. Що називають активною силою? реакцією в’язі?
14. У чому полягає принцип (аксіома) звільнюваності від в’язей?
15. Сформулюйте аксіоми статики.
16. Наведіть означення системи збіжних сил і її класифікацію.
17. Як можна побудувати рівнодійну системи збіжних сил?
18. Чи може система збіжних сил бути еквівалентною одній силі?
19. Сформулюйте умови рівноваги системи збіжних сил у векторній, геометричній та аналітичній формах.
20. Якою є методика розв’язання задач на рівновагу сил, прикладених до абсолютно твердого тіла?

Лекція 2. МОМЕНТ СИЛИ ВІДНОСНО ТОЧКИ І ОСІ. ПАРА СИЛ

План лекції

1. Вступ.
2. Визначення моменту сили відносно точки.
3. Момент сил відносно осі.
4. Момент пари сил і його властивості.
5. Теореми про пари сил.
6. Зведення системи пар сил до простішого вигляду. Умови рівноваги довільної системи пар сил.
7. Властивості пар сил

1. Вступ

Дія сили на тіло характеризується вектором сили й точкою її прикладення.

Розглянемо приклади дії сили на тверде тіло, яке прикріплено в одній точці з допомогою циліндричного шарніра, у якому його ось є нерухомою прямою лінією (рис. 1.15).

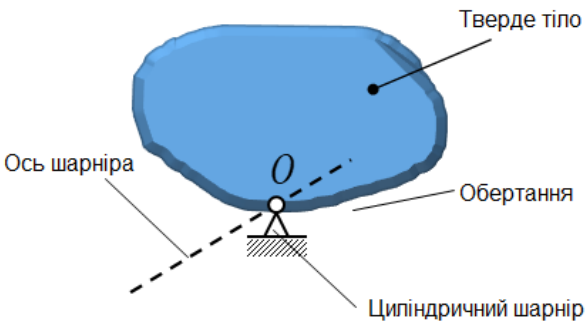


Рис. 1.15

Тверде тіло (ТТ) може тільки повертатись відносно осі шарніра, а точка O (точка тіла) не може при цьому переміститись ні в якому напрямку.

Розглянемо два випадки дії сили на ТТ (рис. 1.16).

*Випадок 1 (*рис. 1.16, а*)*. Силу $\vec{P}$ прикладено в точці A твердого тіла. Лінія дії сили не проходить через точку O. ТТ обертається навколо осі шарніра, поворот здійснюється в площині рисунка проти руху годинникової стрілки (на рисунку цей поворот зображено у вигляді дугової стрілки).

*Випадок 2 (*рис. 1.16, б*)*. Силу $\vec{P}$ прикладено в точці B твердого тіла. Лінія дії сили проходить через точку O. ТТ не обертається навколо осі шарніра.

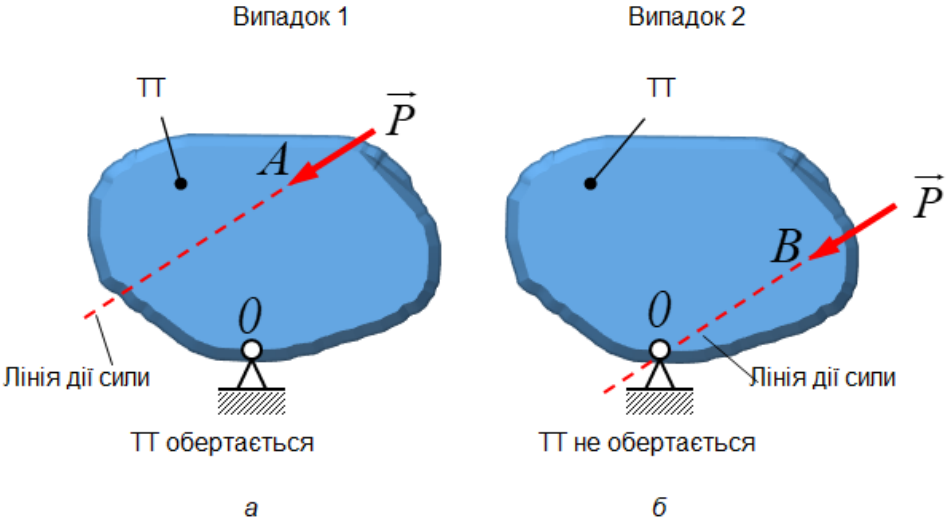


Рис. 1.16

Таким чином, якщо лінія дії сили не проходить через точку O, то сила намагається повернути тверде тіло навколо точки O, тобто сила має обертальний ефект.

Обертальний ефект сили характеризують її **моментом**.

Слово «момент» — від латинського слова *momentum* означає «вплив». Поєднання слів «момент сили» означає, що йдеться про вплив сили на обертання тіла.

2. Визначення моменту сили відносно точки

Нехай силу $\vec{P}$ прикладено в точці A (рис. 1.17), її радіус-вектор $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ відносно довільної точки O.

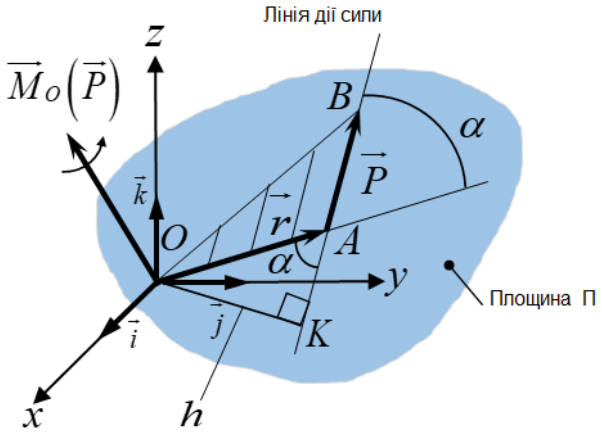


Рис. 1.17

Моментом сили $\vec{P}$ відносно точки *O* називають векторний добуток радіуса-вектора $\vec{r}$ точки прикладення A на вектор сили:

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{P}\right)=\vec{r}\times\vec{P}. \tag{1.1}$$

На рис. 1.17 кут між векторами $\vec{r}$ і $\vec{P}$ позначено як α:

$$0\le\alpha=\angle\left(\vec{r},\vec{P}\right)=\angle\left(\vec{P},\vec{r}\right)\le\pi.$$

Вектори $\vec{r}$ і $\vec{P}$ утворюють площину П (трикутник *OAB*).

Вектор моменту сили відносно точки є прикладеним в цій точці й спрямованим перпендикулярно до площини П, у якій він діє, а також напрямлений у той бік, звідки видно, що сила намагається обертати тіло навколо точки O (моментної точки) проти руху годинникової стрілки.

Модуль вектора моменту сили (див. рис. 1.17)

$$\left|\overrightarrow{M_O}\left(\vec{P}\right)\right|=\left|\vec{r}\times\vec{P}\right|=rP\sin(\alpha)=Ph=2S_{\Delta OAB}, \tag{1.2}$$

де $h=r\sin\left(\alpha\right)$ — плече сили;

$S_{\Delta OAB}$ — площина трикутника OAB.

Плечем h **сили** $\vec{P}$ відносно точки O називають відстань точки O від лінії дії сили $\vec{P}$.

Плече h — довжина перпендикуляра OK, який проведено від точки O до лінії дії сили $\vec{P}$.

Вектор моменту сили відносно точки будемо позначати як $\overrightarrow{M_O}\left(\vec{P}\right)$ або $\overrightarrow{M_O}$.

Уведемо далі прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Нехай $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орти координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно. Координати точки A (початкова точка вектора сили) у цій системи координат є x, y і z. Проєкції сили на координатні осі Ox, Oy та Oz позначимо через P_x, P_y і P_z, тобто

$$\vec{P}=P_x\vec{i}+P_y\vec{j}+P_z\vec{k}=\left(P_x,P_y,P_z\right);\ \vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}=\left(x,y,z\right).$$

Скористаємося відомим з векторної алгебри способом знаходження векторного добутку двох векторів:

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{P}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ P_x & P_y & P_z\end{vmatrix}=\left(yP_z-zP_y\right)\vec{i}+\left(zP_x-xP_z\right)\vec{j}+\left(xP_y-yP_x\right)\vec{k}. \quad (1.3)$$

Коефіцієнти перед одиничними векторами у виразі (1.3) є проєкціями вектора моменту сили відносно точки на осі координат x, y, z, тобто скалярними величинами й аналітичними виразами проєкцій:

$$np_x\overrightarrow{M}_O\left(\vec{P}\right)=M_x\left(\vec{P}\right)=yP_z-zP_y;$$

$$np_y\overrightarrow{M}_O\left(\vec{P}\right)=M_y\left(\vec{P}\right)=zP_x-xP_z; \quad (1.4)$$

$$np_z\overrightarrow{M}_O\left(\vec{P}\right)=M_z\left(\vec{P}\right)=xP_y-yP_x.$$

На основі виразів (1.4)

$$\overrightarrow{M}_O\left(\vec{P}\right)=M_x\left(\vec{P}\right)\vec{i}+M_y\left(\vec{P}\right)\vec{j}+M_z\left(\vec{P}\right)\vec{k}. \quad (1.5)$$

Величини $M_x\left(\vec{P}\right)$, $M_y\left(\vec{P}\right)$, $M_z\left(\vec{P}\right)$ називають **моментами сили** $\vec{P}$ **відносно осей** Ox, Oy, Oz відповідно.

Модуль векторного моменту $\overrightarrow{M}_O\left(\vec{P}\right)$ і його напрямні косинуси одержимо з виразу (1.5):

$$\left|\overrightarrow{M}_O\left(\vec{P}\right)\right|=M_O\left(\vec{P}\right)=\sqrt{M_x^2\left(\vec{P}\right)+M_y^2\left(\vec{P}\right)+M_z^2\left(\vec{P}\right)}; \quad (1.6)$$

$$\cos\left(x,\overrightarrow{\mathrm{M}}\left(\overline{P}\right)\right)=\frac{M_x\left(\vec{P}\right)}{M\left(\vec{P}\right)},\ \cos\left(\mathrm{y},\overrightarrow{\mathrm{M}}\left(\overline{P}\right)\right)=\frac{M_y\left(\vec{P}\right)}{M\left(\vec{P}\right)},\ \cos\left(\mathrm{z},\overrightarrow{\mathrm{M}}\left(\overline{P}\right)\right)=\frac{M_z\left(\vec{P}\right)}{M\left(\vec{P}\right)}. \quad (1.7)$$

Вирази (1.6) і (1.7) аналітично визначають модуль і напрям

векторного моменту сили, прикладеної до точки твердого тіла, відносно заданого центра.

Векторний момент сили $\overrightarrow{M}_O\left(\vec{P}\right)$ відносно точки є **зв'язаним вектором**, тобто закріпленим у моментній точці, і за всіма трьома параметрами визначає обертальний ефект сили, прикладеної до твердого тіла:

– лінія дії векторного моменту визначає **площину дії моменту** (за перпендикуляром);

– спрямованість вектора (за перпендикуляром) визначає **напрямок повороту** за ходом годинникової стрілки або проти її ходу;

– довжина вектора в певному масштабі визначає **модуль моменту**.

Якщо сили, для яких необхідно визначити моменти відносно точки, лежать у площині, то вводять поняття «*алгебричного моменту сили відносно точки*».

Алгебричним моментом сили відносно точки називають величину, яка дорівнює добутку модуля сили на плече, узятого зі знаком «плюс» або «мінус»:

$$M_O\left(\vec{P}\right) = \pm Ph. \tag{1.8}$$

Алгебричний момент уважається додатним, якщо сила намагається повернути тіло відносно моментної точки проти руху годинникової стрілки, і від'ємним — за її рухом (рис. 1.18).

$M_O\left(\vec{P}\right) = Ph$ $M_O\left(\vec{P}\right) = -Ph$

Рис. 1.18

Алгебричний момент сили — це добуток сили на лінійну величину — довжину плеча. Отже, одиницею виміру моменту в СІ є ньютон на метр (1Н·м).

Властивості моменту сили відносно точки:

1. Якщо переміщувати точку прикладення сили вздовж лінії її дії, то момент сили відносно точки не зміниться.

2. Момент сили відносно точки дорівнює нулю, якщо лінія дії сили проходить через цю точку ($h = 0$).

3. Момент сили відносно точки чисельно дорівнює подвійній площі трикутника OAB (див. рис. 1.17), тобто $M_O\left(\vec{P}\right) = 2S_{\Delta OAB}$.

3. Момент сил відносно осі

Для оцінювання спроможності сили обертати тіло навколо осі вводять поняття «момент сили відносно осі».

Моментом сили відносно осі називають скалярну величину, що дорівнює моменту проєкції цієї сили на площину, перпендикулярну до осі, відносно точки перетину осі з площиною (рис. 1.19). тобто

$$M_z\left(\vec{P}\right) = M_O\left(\overrightarrow{P_{xy}}\right) = \pm P_{xy} h, \qquad (1.9)$$

де $\overrightarrow{P_{xy}}$ — вектор проекції сили $\vec{P}$ на площину П;

h — найкоротша відстань між лінією дії вектора проєкції сили на площину $\overrightarrow{P_{xy}}$ і точкою перетину осі z з площиною П (плече моменту проєкції $\overrightarrow{P_{xy}}$).

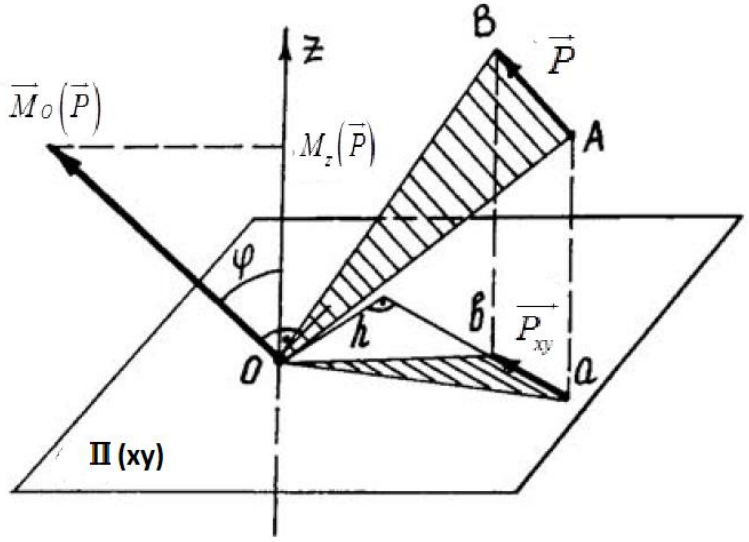


Рис. 1.19

Як видно з рис. 1.19, знак моменту визначається за таким правилом: момент сили відносно осі вважається додатним, якщо при погляді з додатного кінця осі сила намагається обертати тіло відносно осі проти руху годинникової стрілки, в іншому випадку момент є від'ємним.

Якщо момент є додатним, то його зображають відрізком, напрямленим

уверх по осі z від точки O, а якщо від'ємним — то вниз по осі.

Формула (1.9) має також інший вигляд:

$$M_z\left(\vec{P}\right) = M_O\left(\overrightarrow{P_{xy}}\right) = \pm 2S_{\Delta Oab}. \qquad (1.10)$$

Отже, для того щоб знайти момент сили відносно осі z, необхідно:

1. Провести (подумки або на рисунку) через будь-яку точку O на осі z площину П, перпендикулярну до осі z.

2. Спроєктувати силу $\vec{P}$ на площину П.

3. Визначити момент проекції $\overrightarrow{P_{xy}}$ сили $\vec{P}$ на цю площину відносно точки O.

З формули (1.9) випливає, що момент сили відносно осі дорівнює нулю в двох випадках:

а) лінія дії сили є паралельною до осі z;

б) лінія дії сили перетинає вісь z.

Оскільки момент сили відносно осі не залежить від вибору точки на осі (точки O), то замість позначення $M_{Oz}\left(\vec{P}\right)$ будемо позначати $M_z\left(\vec{P}\right)$ або M_z.

Покажемо, що момент сили відносно осі дорівнює проєкції на цю ось моменту сили відносно будь-якої точки, розміщеної на цій осі.

Дійсно, проєкція вектора моменту $\overrightarrow{M_O}\left(\vec{P}\right)$ на ось z

$$\overrightarrow{M_O}\left(\vec{P}\right)\cos(\varphi) = 2S_{\Delta OAB}\cos(\varphi) = \pm 2S_{\Delta Oab},$$

оскільки кут між вектором $\overrightarrow{M_O}\left(\vec{P}\right)$ і віссю Oz дорівнює куту між площиною трикутника ΔOAB і площиною П, а площина трикутника ΔOab є проєкцією площини трикутника ΔOAB.

4. Момент пари сил і його властивості

Означення. Парою сил називають систему двох паралельних сил, модулі яких є однаковими, а напрямки протилежними (рис. 1.20).

З аксіоми 1 (див. лекцію 1) випливає, що система пари сил не є зрівноваженою і не має рівнодійної.

Пара сил діє на тверде тіло і прагне надатє йому деякого обертання.

Обертовий ефект пари характеризується векторною величиною, яку називають **моментом пари сил**. Площину, що проходить через лінії дії сил, які утворюють пару сил, називають **площиною дії пари сил**.

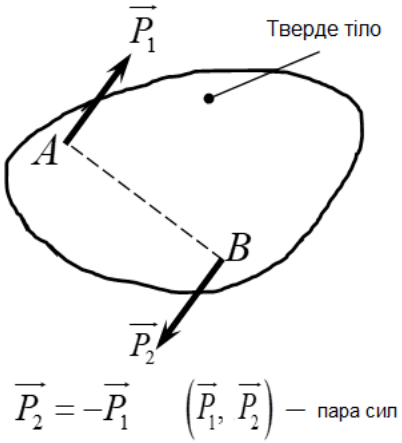


Рис. 1.20

Векторний момент пари сил $\overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}\right)$ є перпендикулярним до площини пари сил П. Цей вектор є напрямленим у той бік, звідки обертання, що здійснює пара сил, видно таким, яке відбувається проти руху годинникової стрілки. Модуль вектора дорівнює добутку модуля однієї із сил на **плече** h **пари сил** (рис. 1.21).

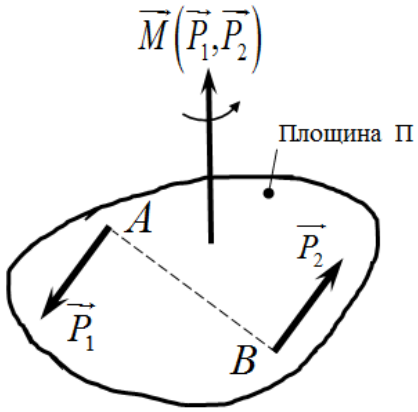


Рис. 1.21

Момент пари сил — *вільний вектор*. Для нього ні точку прикладення, ні лінію дії не визначено: вони можуть бути довільними. Нагадаємо, що сила, прикладена до абсолютно твердого тіла, є *ковзним вектором*.

Знайдемо модуль вектора моменту пари сил:

$$\left|\overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{P_1}, \overrightarrow{P_2}\right)\right| = \left|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{P_1}\right| = \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{P_2}\right| = BA \cdot P_1 \cdot \sin\left(\angle\left(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{P_1}\right)\right) = P_1 h. \quad (1.11)$$

Нехай точка O — довільна точка простору (рис. 1.22), а $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$ — пара сил, прикладених до тіла відповідно в точках A і B.

Використовуючи визначення моменту сили відносно точки, знаходимо суму моментів сил, що являють собою пару сил, відносно точки O:

$$\overrightarrow{M}_o\left(\overrightarrow{P_1}\right)+\overrightarrow{M}_o\left(\overrightarrow{P_2}\right)=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{P_1}+\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{P_2}=$$

$$=\overrightarrow{OA}\times\overrightarrow{P_1}-\overrightarrow{OB}\times\overrightarrow{P_1}=\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}\right)\times\overrightarrow{P_1}=\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{P_1}. \qquad (1.12)$$

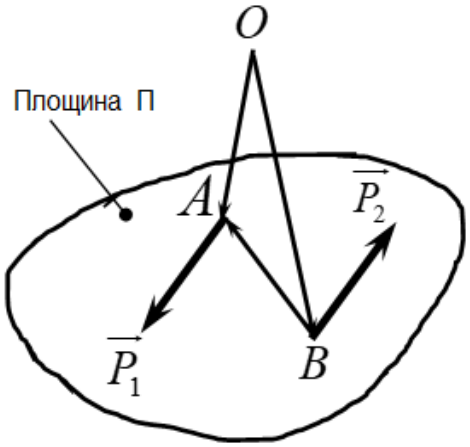


Рис. 1.22

Виявилось, що сума моментів сил, які являють собою пару сил, відносно довільної точки простору зовсім не залежить від положення точки O, відносно якої беруться моменти. Ця сума характеризує лише саму пару сил.

Означення. Векторним моментом пари сил $\overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{P_1},\overrightarrow{P_2}\right)$ називають вектор

$$\overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{P_1},\ \overrightarrow{P_2}\right)=\overrightarrow{M}_o\left(\overrightarrow{P_1}\right)+\overrightarrow{M}_o\left(\overrightarrow{P_2}\right)=$$

$$=\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{P_1}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{P_2}=\overrightarrow{M_B}\left(\overrightarrow{P_1}\right)+\overrightarrow{M_A}\left(\overrightarrow{P_1}\right). \qquad (1.13)$$

Плече пари h **—** відстань між лініями дії сил, що являють собою пару сил (рис. 1.23).

Модуль вектора момента пари сил $\overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{P_1},\ \overrightarrow{P_2}\right)$ у геометричній інтерпретації дорівнює площі паралелограма $ADBC$, або подвійній площі трикутника ADB (рис. 1.23):

$$\left|\overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{P_1},\ \overrightarrow{P_2}\right)\right|=S_{ADBC}=2S_{\Delta ABD}. \qquad (1.14)$$

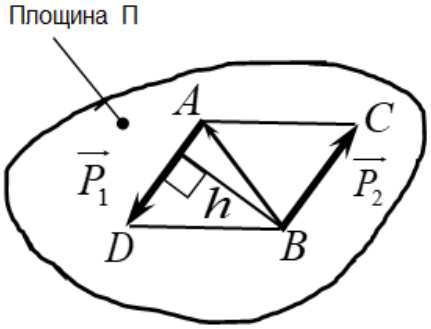


Рис. 1.23

Одиницею виміру моменту пари сил в СІ є ньютон на метр (1Н·м).

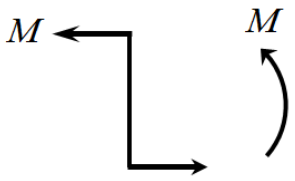
Уведемо поняття *алгебричного моменту пари сил*.

Означення. **Алгебричним моментом пари сил** називають узятий з відповідним знаком добуток однієї із сил пари на плече пари:

$$M\left(\overrightarrow{P_1},\ \overrightarrow{P_2}\right)=M_B\left(\overrightarrow{P_1}\right)=M_A\left(\overrightarrow{P_2}\right)=\pm P_1h=\pm P_2h\,. \qquad (1.15)$$

Момент пари сил уважається додатним, якщо пара намагається повернути тіло проти руху годинникової стрілки, і, навпаки, — від'ємним, якщо пара намагається повернути тіло за рухом годинникової стрілки.

На рисунках конструкцій пара сил зображується одним із таких символів:



Тут M — модуль моменту пари сил.

5. Теореми про пари сил

Наведемо без доказів теореми про пари сил, які дають змогу стверджувати, що момент пари сил є повною характеристикою механічної дії пари сил на тверде тіло, і дії над парами сил можна замінити еквівалентними векторними операціями над їх моментами.

Теорема 1. Дві пари сил, що діють на одне й те ж тверде тіло й розташовані в одній площині, є еквівалентними одній парі, що лежить у тій же площині і має момент, який дорівнює алгебричній сумі моментів пар сил (рис. 1.24).

Якщо еквівалентний момент $M=0$, то маємо систему двох пар сил, яка є еквівалентною статичному нулю, тобто $\left(\overrightarrow{P_1},\ \overrightarrow{P_1'},\ \overrightarrow{P_2},\ \overrightarrow{P_2'}\right)=0$.

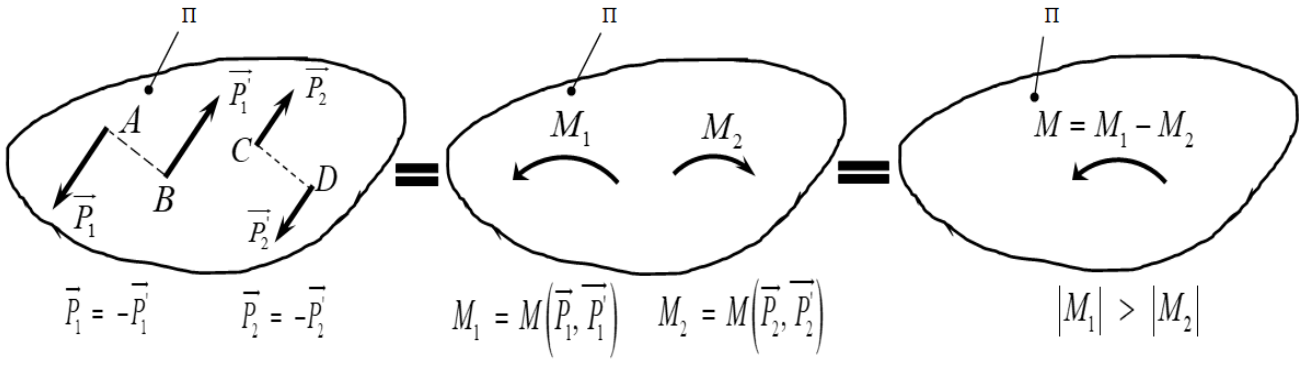


Рис. 1.24

Теорема 2. Дві пари сил, які мають однакові векторні моменти, є еквівалентними (рис. 1.25).

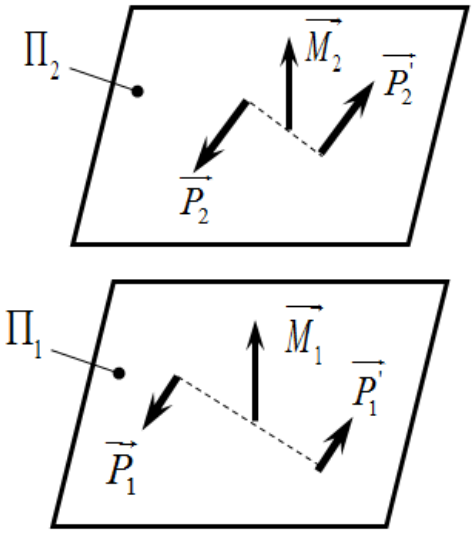


Рис. 1.25

Якщо $\vec{M}_1 = \vec{M}_2$, то маємо дві паралельні площини ($\Pi_1 \parallel \Pi_2$) або одну таку саму.

Наслідок з теореми. Пару сил можна перемістити в довільне інше положення в площині її дії або у площину, паралельну до площини дії пари.

Можна довільним чином змінити модуль сил і плече пари, зберігаючи незмінним їх добуток, тобто модуль моменту пари.

Теорема 3. Дві пари сил, що діють на тверде тіло й розташовані у площинах, які перетинаються, є еквівалентними одній парі з векторним моментом, що дорівнює геометричній сумі векторів моментів цих пар (рис. 1.26).

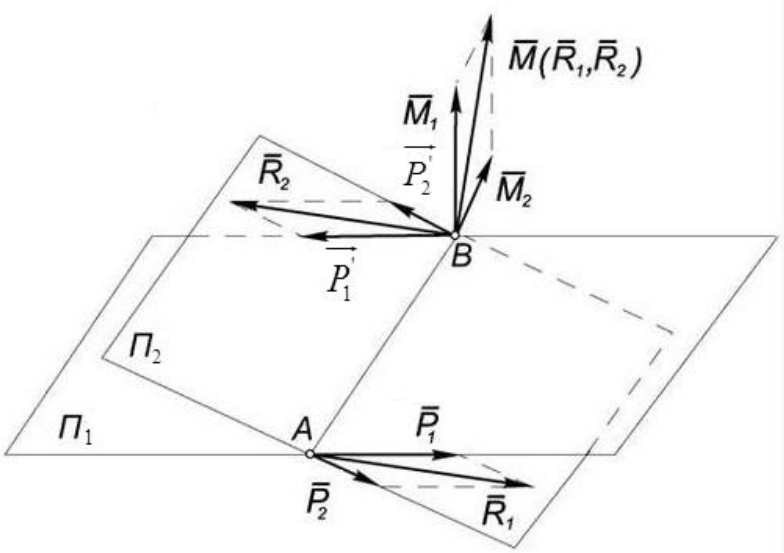


Рис. 1.26

Нехай на тверде тіло у площинах Π_1 і Π_2 діють дві пари сил з моментами $\overrightarrow{M}_1 = \overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{P}_1,\ \overrightarrow{P_1'}\right)$ і $\overrightarrow{M}_2 = \overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{P}_2,\ \overrightarrow{P_2'}\right)$. На лінії перетину цих площин візьмемо відрізок AB. У точках A і B прикладено пари сил $\left(\overrightarrow{P}_1,\ \overrightarrow{P_1'}\right)$ і $\left(\overrightarrow{P}_2,\ \overrightarrow{P_2'}\right)$. Замінюючи сили $\overrightarrow{P}_1$ і $\overrightarrow{P}_2$ рівнодійною $\overrightarrow{R}_1$, а сили $\overrightarrow{P_1'}$ і $\overrightarrow{P_2'}$ — рівнодійною $\overrightarrow{R}_2$, переконуємося, що дійсно дві пари сил можна замінити однією парою сил $\left(\overrightarrow{R}_1,\ \overrightarrow{R}_2\right)$.

Вектор моменту пари сил $\left(\overrightarrow{R}_1,\ \overrightarrow{R}_2\right)$

$$\overrightarrow{M} = \overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{R}_2 = \overrightarrow{BA}\times\left(\overrightarrow{P_1'}+\overrightarrow{P_2'}\right) = \overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{P_1'}+\overrightarrow{BA}\times\overrightarrow{P_2'} = \overrightarrow{M_1}+\overrightarrow{M_2}, \quad (1.16)$$

тобто вектор $\overrightarrow{M}$ зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{M}_1$ і $\overrightarrow{M}_2$ як на сторонах.

Таким чином, розглянуті теореми про пари сил дають змогу зробити важливий висновок: момент пари сил є вільним вектором і повністю характеризує вплив на тверде тіло пари сил.

6. Зведення системи пар сил до простішого виду. Умови рівноваги довільної системи пар сил

Нехай систему пар сил $\left(\overrightarrow{P}_1,\ \overrightarrow{P_1'}\right)$, $\left(\overrightarrow{P}_2,\ \overrightarrow{P_2'}\right)$,..., $\left(\overrightarrow{P}_n,\ \overrightarrow{P_n'}\right)$ довільно розташовано в просторі.

На основі теорем 1 і 3 можна записати

$$\overrightarrow{M_\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_i}, \tag{1.17}$$

де $\overrightarrow{M_i} = \overrightarrow{M}\left(\overrightarrow{P_i}, \overrightarrow{P_i'}\right)$, $i = \overline{1, n}$ — вектор моменту пари сил $\left(\overrightarrow{P_i}, \overrightarrow{P_i'}\right)$.

Уведемо прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Нехай $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орти координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно. Тоді маємо такий вираз:

$$\overrightarrow{M_\Sigma} = M_{\Sigma x}\vec{i} + M_{\Sigma y}\vec{j} + M_{\Sigma z}\vec{k}, \tag{1.18}$$

де $M_{\Sigma x} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix}$, $M_{\Sigma y} = \sum_{i=1}^{n} M_{iy}$, $M_{\Sigma z} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz}$ — проєкції рівнодійного вектора $\overrightarrow{M_\Sigma}$ на відповідні координатні осі.

Модуль рівнодійного вектора $\overrightarrow{M_\Sigma}$ визначають за формулою

$$\left|\overrightarrow{M_\Sigma}\right| = \sqrt{M_{\Sigma x}^2 + M_{\Sigma y}^2 + M_{\Sigma z}^2}. \tag{1.19}$$

Як наслідок, уся система пар сил заміниться однією парою з моментом $\overrightarrow{M_\Sigma}$.

Таким чином, систему пар сил $\left(\overrightarrow{P_i}, \overrightarrow{P_i'}\right)$ можна замінити однією парою сил з моментом, який дорівнює сумі векторів моментів пар сил.

Якщо система пар сил $\left(\overrightarrow{P_i}, \overrightarrow{P_i'}\right)$ є еквівалентною одній парі сил, момент якої дорівнює нулю, то така система пар сил є зрівноваженою.

Тоді умова рівноваги системи пар сил набуде вигляду

$$\overrightarrow{M_\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_i} = 0. \tag{1.20}$$

Векторне рівняння рівноваги системи пар сил (1.20) є еквівалентним трьом скалярним рівнянням:

$$M_{\Sigma x} = 0,\ M_{\Sigma y} = 0,\ M_{\Sigma z} = 0. \tag{1.21}$$

Таким чином, для рівноваги пар сил, прикладених до твердого тіла, необхідно й достатньо, щоб сума проєкцій векторів цих пар на кожну з трьох координатних осей дорівнювала нулю.

Якщо всі пари сил лежать в одній площині або в паралельних площинах, то умову рівноваги можна записати у вигляді

$$M_{\Sigma} = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0. \qquad (1.22)$$

Для рівноваги системи пар сил, що лежать в одній площині або в паралельних площинах, необхідно й достатньо, щоб сума алгебричних моментів складових пар дорівнювала нулю.

7. Властивості пар сил

1. Оскільки систему двох однакових антипаралельних сил не можна звести до рівнодійної, то, як наслідок, пару сил не можливо зрівноважити однією силою.
2. Сума проєкцій сил, які являють собою пару, на будь-яку вісь дорівнює нулю. Тому пара сил не може входити до рівнянь суми проєкцій сил на вісь, а входить тільки до рівнянь суми моментів сил відносно точки (центра).
3. Пару сил можна переносити в площині її дії, у тому числі повертати на будь-який кут.
4. Пару сил можна переносити в будь-яку площину, паралельну до площини дії цієї пари.
5. Сили, які являють собою пару та її плече, можна змінювати, не змінюючи моменту пари.
6. Декілька пар сил, довільно розміщених у просторі, можна замінити однією — результівною парою.

Зауважимо, що механічна дія в статиці характеризується трьома типами векторів:

— силою — ковзним вектором;

— моментом сили відносно точки — прикладеним вектором;

— парою сил — вільним вектором.

Розглянемо розв’язання задачі.

Приклад

Нехай балку AB (рис. 1.27) у точці A закріплено з допомогою циліндричного шарніра (циліндрична шарнірно–нерухома опора). У точці B балка опирається на нерухому похилу площину (поверхню). До балки

прикладено пару сил з моментом M (момент діє в площині рисунку).

Необхідно знайти реакції похилої поверхні й шарнірної опори, які діють на балку.

Розв'язання

1. Розглянемо рівновагу балки AB. До балки прикладено: пару сил, яку задано моментом M; силу реакції похилої поверхні; силу реакції шарнірної опори (див. рис. 1.27).

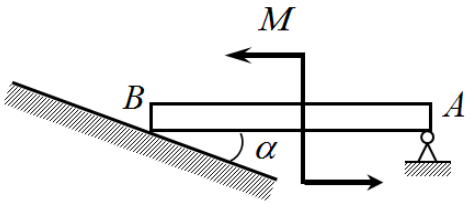


Рис. 1.27

Силу реакції $\overrightarrow{R_B}$ похилої поверхні напрямлено до неї перпендикулярно в точці B. Сила реакції $\overrightarrow{R_A}$ шарніра в точці A разом з реакцією $\overrightarrow{R_B}$ створюють пару сил, яка зрівноважує зовнішній момент M. Таким чином, реакція $\overrightarrow{R_A}$ напрямлена паралельно до реакції $\overrightarrow{R_B}$. Реакції $\overrightarrow{R_A}$ і $\overrightarrow{R_B}$ мають однакові модулі, тобто $\left|\overrightarrow{R_A}\right| = \left|\overrightarrow{R_B}\right|$.

2. Складемо розрахункову схему. На рис. 1.28 показано розрахункову схему, побудовану на основі аксіоми звільнення від в'язей. Напрямок дії пари сил $\left(\overrightarrow{R_A}, \overrightarrow{R_B}\right)$ вибрано протилежним до напрямку дії зовнішнього моменту M.

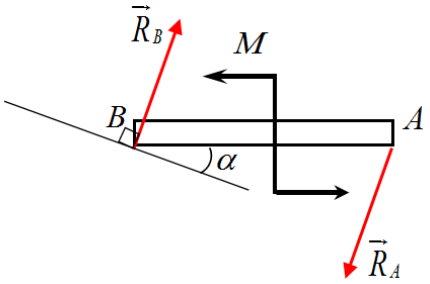


Рис. 1.28

3. Складемо рівняння рівноваги балки AB. Дві пари сил розташовано в одній площині, тому можна записати таке скалярне рівняння рівноваги:

$$M + M(\overrightarrow{R_A}, \overrightarrow{R_B}) = 0,$$

де

$$M(\overrightarrow{R_A},\ \vec{R}_B) = -R_A AB\cos(\alpha).$$

4. Розв'яжемо складене рівняння рівноваги.

Визначимо шуканий модуль реакції:

$$R_A = |M| / (AB\cos(\alpha)).$$

Запитання для самоконтролю

1. Що називають моментом сили відносно точки?
2. Як напрямлено вектор моменту сили відносно точки в просторі?
3. У яких випадках момент сили відносно точки дорівнює нулю?
4. Чи зміниться момент сили відносно точки під час переміщення сили вздовж її лінії дії?
5. Що називають алгебричним моментом сили відносно точки? Як знайти цей момент?
6. Що називають моментом сили відносно осі? Як знайти момент сили відносно осі?
7. Яка залежність існує між вектором моменту сили відносно точки й моментом сили відносно осі, що проходить через цю точку?
8. У яких випадках момент сили відносно осі дорівнює нулю?
9. Що називають парою сил?
10. Чим характеризується дія пари сил на тверде тіло?
11. Якою системою сил можна зрівноважити задану пару сил?
12. Чи має вектор-момент пари сил точку прикладення?
13. Чому дорівнює сума моментів сил, що являють собою пару, відносно довільної точки?
14. Сформулюйте теорему про еквівалентність двох пар сил, що діють в одній площині.
15. Як формулюється теорема про дві пари сил з однаковими векторними моментами?
16. Сформулюйте теорему про еквівалентність двох пар сил, що діють на тверде тіло і які розташовано в площинах, що перетинаються.
17. Як у векторній формі записується умова рівноваги системи пар сил?
18. Наведіть умови рівноваги системи пар сил в скалярній формі.
19. Наведіть умову рівноваги системи пар сил, що діють в одній площині, у скалярній формі.
20. Яким типом векторів (ковзним, прикладеним або вільним) характеризується сила, момент сили відносно точки, момент пари сил?

Лекція 3. ЗВЕДЕННЯ ДОВІЛЬНОЇ СИСТЕМИ СИЛ ДО ПРОСТІШОГО ВИГЛЯДУ. ПЛОСКА СИСТЕМА СИЛ

План лекції

1. Лема про паралельне перенесення сили.
2. Основна теорема статики.
3. Умови рівноваги довільної просторової системи сил.
4. Частинні випадки рівноваги просторової системи сил.
5. Плоска система сил.
6. Форми умов рівноваги плоскої системи сил.
7. Розподілені сили.
8. Задачі статики на рівновагу плоскої системи сил.

1. Лема про паралельне перенесення сили

Лема: силу можна переносити паралельно до самої себе в будь-яку точку твердого тіла, додаючи при цьому пару сил, момент якої дорівнює моменту сили відносно нової точки прикладення сили.

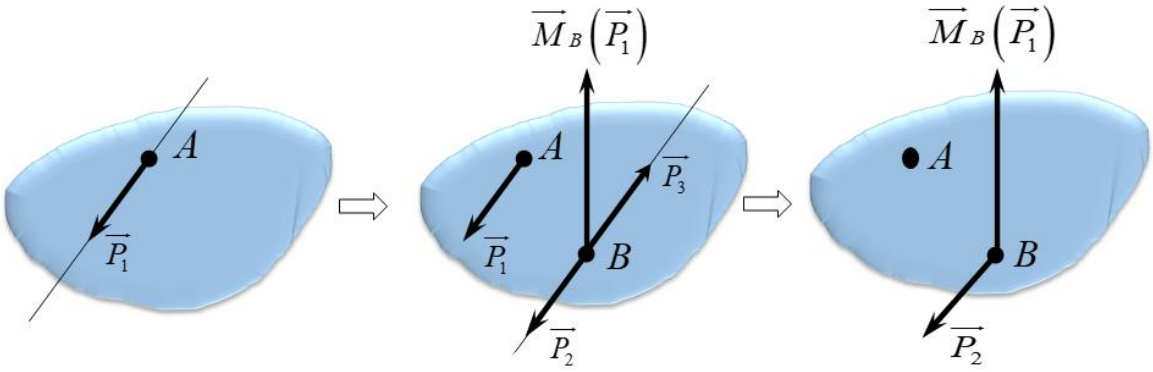


Рис. 1.29

Нехай у точці A прикладено силу $\vec{P}_1$ (рис. 1.29). Прикладемо тепер в точці B тіла систему двох сил $\vec{P}_2$ і $\vec{P}_3$, еквівалентну нулю, причому $\vec{P}_2 = \vec{P}_1$ (отже, $\vec{P}_3 = -\vec{P}_2$). Тоді сила $\vec{P}_1 \sim \left(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\right)$, оскільки система двох сил $\left(\vec{P}_2, \vec{P}_3\right) \sim 0$. Однак, з іншого боку, система сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{P}_3\right)$ є еквівалентною силі $\vec{P}_2$ і парі сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_3\right)$, отже, сила $\vec{P}_1$ є еквівалентною силі $\vec{P}_2$, прикладеній у точці B і парі сил $\left(\vec{P}_1, \vec{P}_3\right)$ з моментом, що дорівнює моменту цієї сили відносно точки B. Одержану таким чином пару

сил $\left(\vec{P}_1,\ \vec{P}_3\right)$ називають *приєднаною парою сил*.

Векторний момент приєднаної пари сил

$$\vec{M}\left(\vec{P}_1,\vec{P}_3\right)=\vec{M}_B\left(\vec{P}_1\right). \qquad (1.23)$$

Наведемо інше формулювання леми про паралельне перенесення сили: *сила, яку прикладено в якій-небудь точці абсолютно твердого тіла, є еквівалентною такій самій силі в парі сил, момент якої дорівнює моменту цієї сили відносно нової точки прикладення сили.*

2. Основна теорема статики

Розглянемо тіло, на яке діє будь-яка просторова система сил $\left(\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ \vec{P}_3,\ ...,\ \vec{P}_n\right)$ (рис. 1.30).

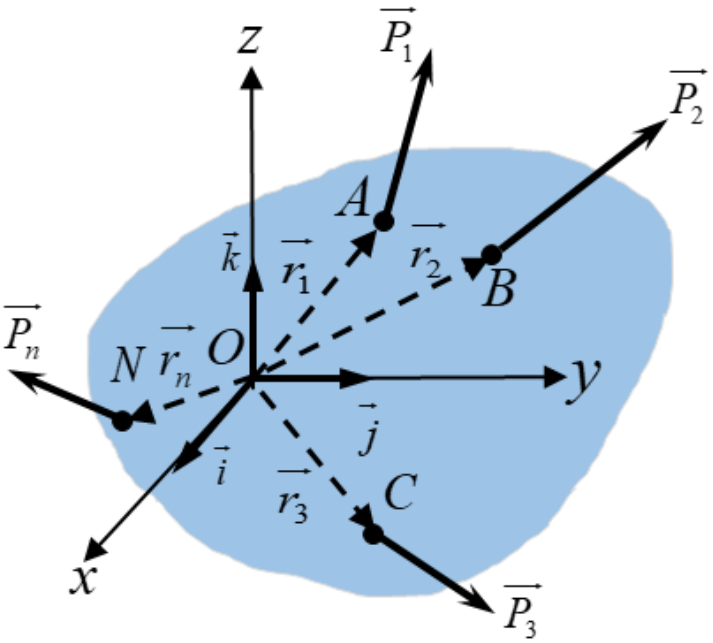


Рис. 1.30

Виберемо будь-яку точку O за центр зведення. Перенесемо усі сили системи $\left(\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ \vec{P}_3,\ ...,\ \vec{P}_n\right)$ у точку O, одночасно приклавши до тіла приєднані пари сил $\left(\vec{P}_1,\ \vec{P}_1^{'}\right)$, $\left(\vec{P}_2,\ \vec{P}_2^{'}\right)$, …, $\left(\vec{P}_n,\ \vec{P}_n^{'}\right)$ моменти яких дорівнюють моментам цих сил відносно точки O (рис. 1.31).

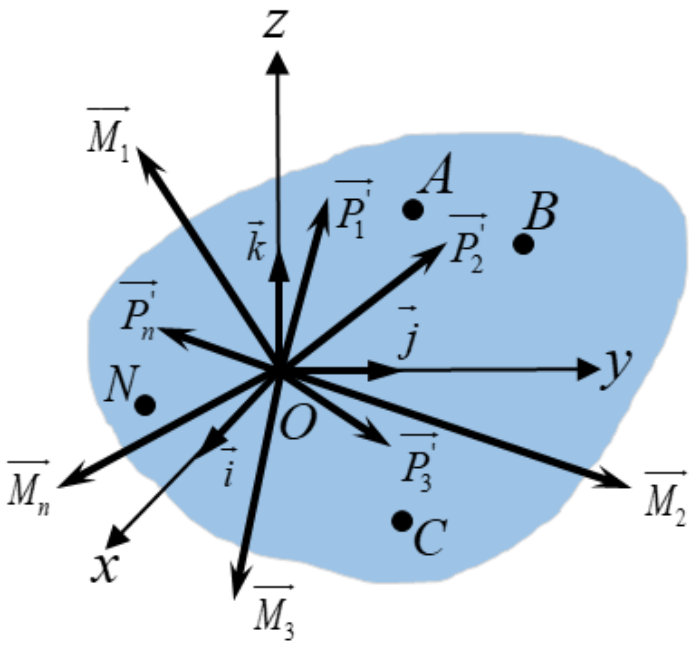


Рис. 1.31

Унаслідок цього система сил $\left(\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ \vec{P}_3,\ ...,\ \vec{P}_n\right)$ стала еквівалентною системі сил $\left(\overrightarrow{P_1'},\ \overrightarrow{P_2'},\ \overrightarrow{P_3'},\ ...,\ \overrightarrow{P_n'}\right)$, прикладених у точці O (рис. 1.31) і приєднаних пар сил $\left(\vec{P}_1,\ \overrightarrow{P_1''}\right)$, $\left(\vec{P}_2,\ \overrightarrow{P_2''}\right)$, ..., $\left(\vec{P}_n,\ \overrightarrow{P_n''}\right)$ (їх на рис. 1.31 не показано), моменти яких $\overrightarrow{M_1}$, $\overrightarrow{M_2}$, …, $\overrightarrow{M_n}$ (див. рис. 1.29) мають вигляд

$$\overrightarrow{M_1}=\overrightarrow{M}\left(\vec{P}_1,\ \overrightarrow{P_1''}\right)=\vec{r}_1\times\vec{P}_1=\overrightarrow{M_O}\left(\vec{P}_1\right);$$

$$\overrightarrow{M_2}=\overrightarrow{M}\left(\vec{P}_2,\ \overrightarrow{P_2''}\right)=\vec{r}_2\times\vec{P}_2=\overrightarrow{M_O}\left(\vec{P}_2\right);$$

…… (1.24)

$$\overrightarrow{M_n}=\overrightarrow{M}\left(\vec{P}_n,\ \overrightarrow{P_n''}\right)=\vec{r}_n\times\vec{P}_n=\overrightarrow{M_O}\left(\vec{P}_n\right),$$

де $\vec{r}_i$ — радіуси-вектори (рис. 1.30), проведені з центра зведення в точки прикладення сил $\vec{P}_i$.

Система сил $\left(\overrightarrow{P_1'},\ \overrightarrow{P_2'},\ \overrightarrow{P_3'},\ ...,\ \overrightarrow{P_n'}\right)$ є системою збіжних сил, прикладених у

точці O. Цю систему можна замінити однією силою $\vec{P}$, яку визначають за формулою

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i . \qquad (1.25)$$

Систему пар сил можна скласти й замінити однією парою:

$$\overrightarrow{M_O} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_i} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{M_O}\left(\vec{P}_i\right). \qquad (1.26)$$

На рис. 1.32 показано еквівалентну систему сил, утворену вектором сили $\vec{P}$, прикладеним у точці O, і парою сил, яка має векторний момент $\overrightarrow{M_O}$.

Геометричну суму всіх сил $\vec{P}$ *називають* ***головним вектором системи****, а геометричну суму векторів моментів пар сил* $\overrightarrow{M_O}$ *—* ***головним моментом системи відносно точки*** *O.*

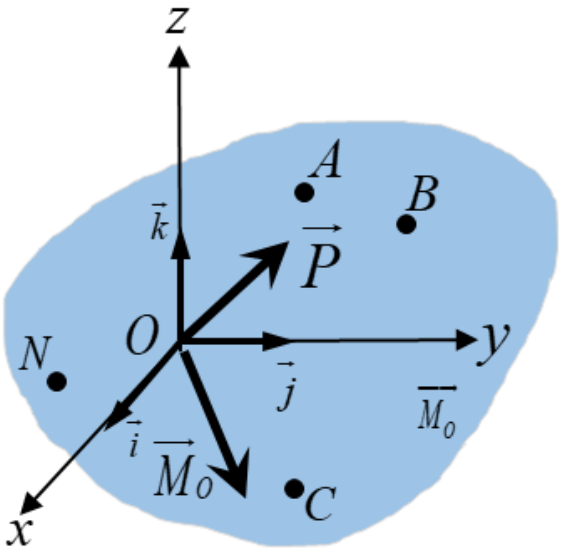


Рис. 1.32

Основна теорема статики (теорема Пуансо): *будь-яку систему сил, що діє на абсолютно тверде тіло, можна замінити однією силою* $\vec{P}$*, що дорівнює головному вектору системи і яку прикладено в будь-якій точці* O*, і однією парою сил з моментом* $\overrightarrow{M_O}$*, який дорівнює головному моменту системи відносно центра зведення (точки* O*).*

Визначимо вектори $\vec{P}$ і $\overrightarrow{M_O}$ аналітично, тобто за їх проекціями на осі координат.

Є відомими такі формули:

$$\vec{P} = P_x\vec{i} + P_y\vec{j} + P_z\vec{k}_z;\ \overrightarrow{M_O} = M_{Ox}\vec{i} + M_{Oy}\vec{j} + M_{Oz}\vec{k}_z;$$

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix};\ P_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy};\ P_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz};$$

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix};\ M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{iy};\ M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz};$$

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2};$$

$$\cos\left(\angle\left(\vec{i},\vec{P}\right)\right) = \frac{P_x}{P};\ \cos\left(\angle\left(\vec{j},\vec{P}\right)\right) = \frac{P_y}{P};\ \cos\left(\angle\left(\vec{k},\vec{P}\right)\right) = \frac{P_z}{P};$$

$$M_O = \sqrt{M_{Ox}^2 + M_{Oy}^2 + M_{Oz}^2};$$

$$\cos\left(\angle\left(\vec{i},\overrightarrow{M_O}\right)\right) = \frac{M_{Ox}}{M_O};\ \cos\left(\angle\left(\vec{j},\overrightarrow{M_O}\right)\right) = \frac{M_{Oy}}{M_O};\ \cos\left(\angle\left(\vec{k},\overrightarrow{M_O}\right)\right) = \frac{M_{Oz}}{M_O}.$$

Оскільки сили системи розташовано в просторі цілком довільно, то головний момент $\overrightarrow{M_O}$ відносно головного вектора $\vec{P}$ може бути напрямленим під будь-яким кутом.

Властивості головного вектора й головного момента системи сил:

1. Головний вектор системи сил $\vec{P}$ не залежіть від вибору центра зведення, адже після зведення сил до будь-якого центра додаються однакові системи збіжних сил.

2. Головний момент системи сил залежіть від вибору центра зведення, адже момент кожної із сил системи залежно від положення центра зведення може бути іншим.

Нехай за центр зведення системи сил, яка діє на тверде тіло, вибрано точку O. Отже, маємо головний вектор системи $\vec{P}$ і головний момент системи $\overrightarrow{M_O}$, які прикладено в точці O (рис. 1.33).

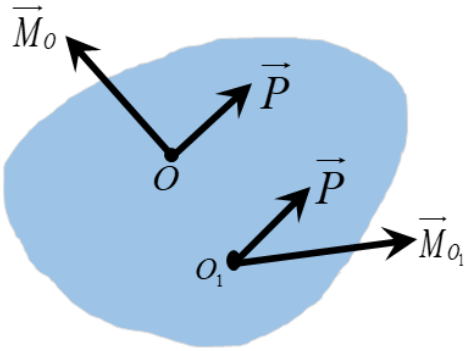


Рис. 1.33

Якщо за центр зведення вибрати нову точку O_1, то отримаємо головний вектор системи $\vec{P}$ і головний момент системи $\overrightarrow{M_{O_1}}$, які прикладено в точці O_1. При цьому вектор моменту $\overrightarrow{M_{O_1}}$ визначається формулою

$$\vec{M}_{O_1} = \vec{M}_O + \vec{M}_{O_1}(\vec{P}). \qquad (1.27)$$

Таким чином, *при зміненні центра зведення головний момент змінюється на величину, що дорівнює моменту головного вектора відносно нового центра зведення.*

3. Умови рівноваги довільної просторової системи сил

Означення. *Для рівноваги довільної просторової системи сил необхідно й достатньо, щоб головний вектор і головний момент системи сил відносно довільної точки простору дорівнювали нулю*:

$$\vec{P} = 0,\ \overrightarrow{M_O} = 0. \qquad (1.28)$$

Розглянемо геометричні умови рівноваги довільної просторової системи сил, тобто геометричну інтерпретацію умов (1.28).

Багатокутник сил, прикладених до твердого тіла, і багатокутник моментів цих сил відносно довільної точки простору мають бути замкненими.

Аналітичні умови рівноваги довільної просторової системи сил мають такий вигляд:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0;\ P_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0;\ P_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0;$$

$$M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0;\ M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0;\ M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0. \qquad (1.29)$$

Таким чином, шість скалярних рівнянь рівноваги (1.29) є еквівалентними двом векторним рівнянням (1.28).

4. Частинні випадки рівноваги просторової системи сил

Просторова система паралельних сил. Нехай система сил $\left(\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ \vec{P}_3,\ ...,\ \vec{P}_n\right)$ є паралельною до осі z (рис. 1.34), тоді проєкції сил на перпендикулярні їм осі Ox і Oy дорівнюють нулю. Окрім того, момент сил відносно паралельної осі *z* також дорівнює нулю.

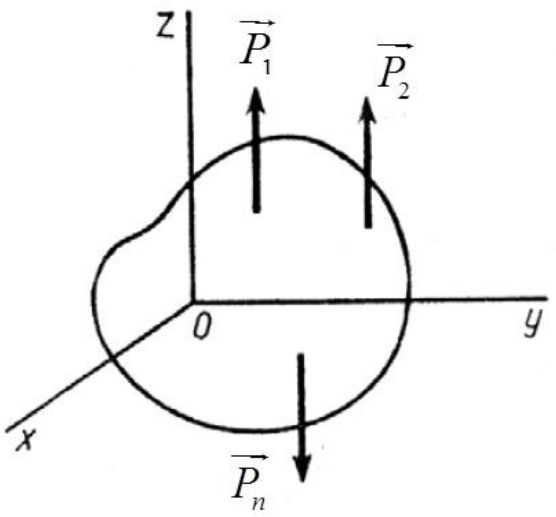


Рис. 1.34

Отже, умови $P_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0$, $P_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0$, $M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0$ також перетворюються на тотожність. Відкидаючи умови рівноваги, які виконуються тотожно, з формул (1.29) отримаємо такі три умови рівноваги:

$$P_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0;\ M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0;\ M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0. \qquad (1.30)$$

Плоска система сил. Нехай система сил $\left(\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ \vec{P}_3,\ ...,\ \vec{P}_n\right)$ діє в площині П (рис. 1.35).

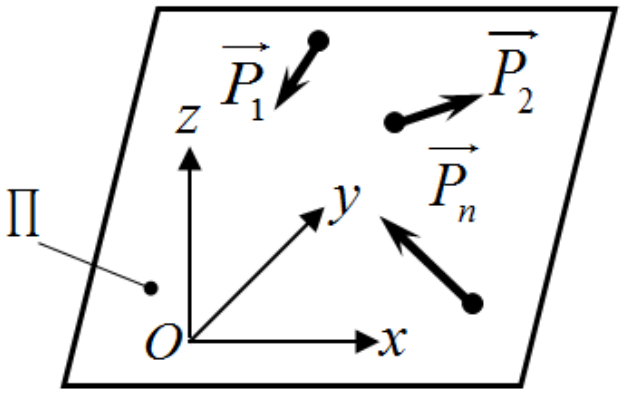


Рис. 1.35

Розташуємо осі Ox і Oy у площині дії сил. У зв'язку з тим, що ось Oz є перпендикулярною до сил, то $P_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0$. Крім того, усі сили розташовано в одній площині з осями Ox і Oy, і тому їх моменти відносно цих осей дорівнюють нулю, тобто $M_{Ox} = \sum_{i=1}^{n} M_{ix} = 0$, $M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0$. Моменти сил відносно осі Oz дорівнюють алгебричним моментам сил відносно точки O, $M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{P}_i\right)$. Таким чином, із формул (1.29) для плоскої системи сил після відкидання тотожностей, маємо такі три умови рівноваги:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0;\ P_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0;\ M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{P}_i\right) = 0. \qquad (1.31)$$

Умови (1.31) формулюються таким чином. *Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно й достатньо, щоб алгебричні суми проєкцій усіх сил на координатні осі, що лежать в площині дії цих сил, а також алгебрична сума моментів цих сил відносно довільної точки цієї площини дорівнювали нулю*.

Плоска система паралельних сил. Система паралельних сил $\left(\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ \vec{P}_3,\ ...,\ \vec{P}_n\right)$ діє в площині xOy (рис. 1.36). При цьому сили діють паралельно до координатної осі Oy. У зв'язку з тим, що ось Ox є перпендикулярною до сил, тоді $P_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0$.

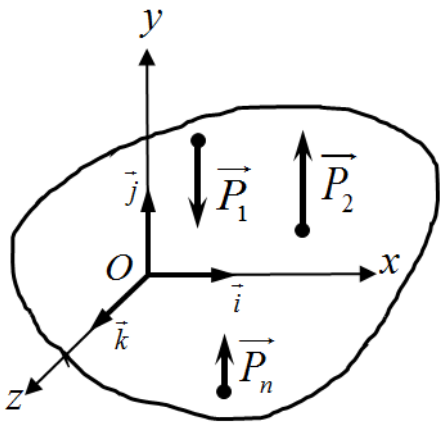


Рис. 1.36

Таким чином, із трьох умов рівноваги (1.31) залишаться тільки дві умови:

$$P_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0 : \; M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{P}_i\right) = 0 . \qquad (1.32)$$

Система сил, що діє вздовж однієї лінії. Система сил $\left(\vec{P}_1,\ \vec{P}_2,\ \vec{P}_3,\ ...,\ \vec{P}_n\right)$ діє вздовж однієї лінії (рис. 1.37). Цю систему сил можна розглядати як систему збіжних сил, які діють вздовж однієї лінії.

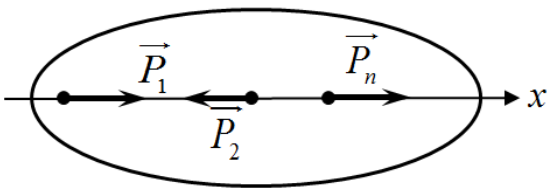


Рис. 1.37

Згідно з умовами рівноваги системи збіжних сил, розташованої в просторі (див. лекцію 1), маємо одне рівняння рівноваги:

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0 , \qquad (1.33)$$

де P_{xi} — проєкція сили $\vec{P}_i$ на лінію, вздовж якої проведено ось *x*.

Система паралельних пар сил. Нехай на тверде тіло діє система пар сил, розташована в паралельних площинах $\Pi_1,\ \Pi_2,\ \ldots,\ \Pi_n$ (рис. 1.38). Кожна пара сил, розташована у площині Π_i, має векторний момент $\vec{M}_i$, де $i = \overline{1,\ n}$.

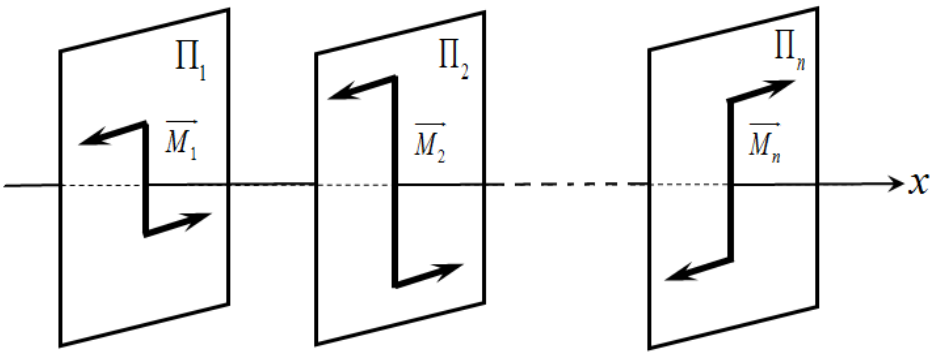


Рис. 1.38

Координатна ось *x* є перпендикулярною до площин Π_i.

Умови $P_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0$, $P_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0$, $P_z = \sum_{i=1}^{n} P_{iz} = 0$, $M_{Oy} = \sum_{i=1}^{n} M_{iy} = 0$, $M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_{iz} = 0$ перетворюються на тотожності. Таким чином, із формул (1.29) після відкидання тотожностей маємо таку одну умову рівноваги:

$$M_x = \sum_{i=1}^{n} M_i = 0. \qquad (1.34)$$

Умова (1.34) формулюється таким чином: *для рівноваги системи пар сил, розташованих у паралельних площинах, необхідно й достатньо, щоб алгебрична сума моментів цих пар сил відносно осі, перпендикулярної до цих площин, дорівнювала нулю*.

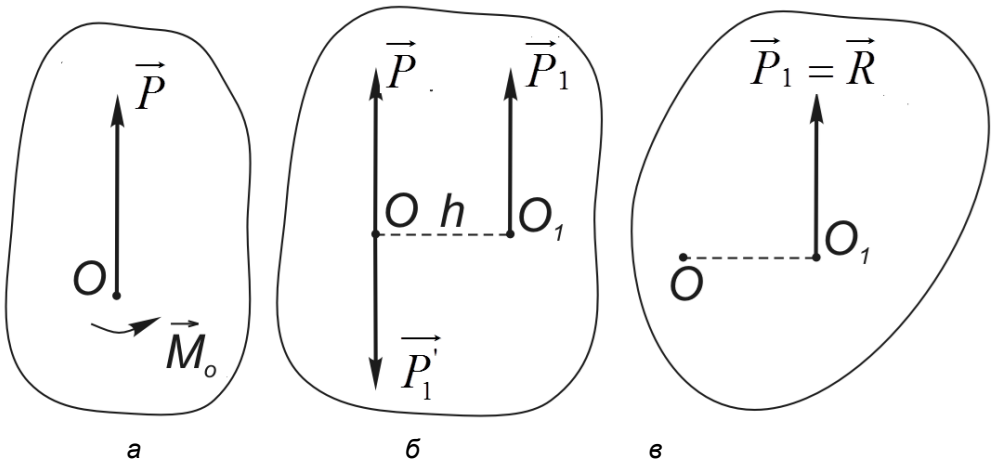
5. Плоска система сил

Зведення плоскої системи сил до рівнодійної

Теорема. Якщо головний вектор і головний момент плоскої системи сил не дорівнюють нулю, то ця система є еквівалентною одній силі, тобто зводиться до рівнодійної.

Нехай для вибраного центра зведення головний вектор і головний момент не дорівнюють нулю, тобто $\vec{P} \neq 0$ і $\overrightarrow{M_O} \neq 0$ (рис. 1.39, *а*). Дуговою стрілкою на рис. 1.39, *а* символічно зображують пару з моментом $\overrightarrow{M_O} \neq 0$.

Пару сил, момент якої дорівнює головному моменту, подаємо у вигляді двох сил $\vec{P}_1$ і $\vec{P}_1'$, що дорівнюють за модулем головному вектору $\vec{P}$, тобто $P = P_1 = P_1'$.



а *б* *в*

Рис. 1.39

Очевидно, що відстань h можна знайти з умови $\left|\overrightarrow{M}_o\right| = hP = hP_1$, тобто $h = \left|\overrightarrow{M}_o\right| \Big/ P$. При цьому одну із сил пари $\vec{P}_1'$ прикладемо в центрі зведення *O* і спрямуємо в бік, протилежний силі $\vec{P}$ (рис. 1.39, *б*). Тоді система сил $\left(\vec{P},\ \vec{P}_1'\right)$ буде еквівалентною нулю і її можна відкинути.

Отже, задана система сил є еквівалентною одній силі $\vec{P}_1$, прикладеній у точці O_1. Ця сила і є рівнодійною, яку позначимо $\vec{R}$ (рис. 1.39, ***в***).

Зведення плоскої системи сил до простішого вигляду

При зведенні плоскої системи сил до центра (точки) можливими є такі випадки:

1. $\vec{P} \neq 0$, $\overrightarrow{M}_O \neq 0$. У цьому випадку систему сил можна звести до однієї сили (рівнодійної), як це показано на рис. 1.39, ***в***.
2. $\vec{P} \neq 0$, $\overrightarrow{M}_O = 0$, при цьому система сил зводиться до однієї сили (рівнодійної), що проходить через цей центр зведення.
3. $\vec{P} = 0$, $\overrightarrow{M}_O \neq 0$. У цьому випадку система сил є еквівалентною одній парі сил.
4. $\vec{P} = 0$, $\overrightarrow{M}_O = 0$. У цьому випадку система сил є еквівалентною нулю, тобто сили системи є взаємно врівноваженими.

6. Форми умов рівноваги плоскої системи сил

Основна (перша) форма умов рівноваги

Загальні умови рівноваги плоскої системи сил, що діють на тверде тіло,

$$P_x = \sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0;\ P_y = \sum_{i=1}^{n} P_{iy} = 0;\ M_{Oz} = \sum_{i=1}^{n} M_O\left(\vec{P}_i\right) = 0 \qquad (1.35)$$

називають ще умовами рівноваги першої, або основної, форми.

Механічний зміст перших двох умов виявляє необхідність того, щоб тіло не рухалося вздовж осей координат, а третя умова являє собою відсутність обертань у площині xOy.

Існують ще дві форми умов рівноваги, що є випливають з основної.

Друга форма умов рівноваги

Для рівноваги довільної плоскої системи сил необхідно й достатньо, щоб дорівнювали нулю алгебричні суми моментів усіх сил відносно двох будь-яких точок, що лежать у цій площині, а також алгебрична сума проєкцій усіх сил на вісь Ox, що не є перпендикулярною до прямої і проходить через дві вибрані точки:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = 0;\ \sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{P}_i\right) = 0;\ \sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{P}_i\right) = 0. \qquad (1.36)$$

Необхідність цих умов випливає безпосередньо з факту рівноваги системи сил, бо, оскільки у випадку невиконання будь якої умови або $\vec{P} \neq 0$, або $\vec{M}_A \neq 0$ ($\vec{M}_B \neq 0$) і рівноваги не буде.

Третя форма умов рівноваги (рівняння трьох моментів)

Для рівноваги плоскої системи довільно розміщених сил необхідно й достатньо, щоб алгебричні суми моментів усіх сил відносно будь-яких трьох точок площини, що не лежать на одній прямій, дорівнювали нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{P}_i\right) = 0;\ \sum_{i=1}^{n} M_B\left(\vec{P}_i\right) = 0;\ \sum_{i=1}^{n} M_C\left(\vec{P}_i\right) = 0. \qquad (1.37)$$

Необхідність цих умов зумовлена тим, що при рівновазі не має бути обертання. Однієї умови (припустимо, $\vec{M}_A = 0$) недостатньо, оскільки в цьому випадку система сил зводиться до рівнодійної, тобто рівноваги немає. Двох умов (наприклад, $\vec{M}_A = 0$, $\vec{M}_B = 0$) також не вистачає, адже в цьому випадку рівнодійна може проходити через центри зведення A і B одночасно.

Три умови (1.37) разом з додатковою означають, що якщо б система сил не перебувала в рівновазі, то рівнодійна мала би проходити через три точки A, B і C, але це неможливо, оскільки ці точки не лежать на одній прямій.

7. Розподілені сили

Система сил, що діють на тверде тіло, може містити **зосереджені** (ізольовані) і **розподілені сили**.

Розподіленими називають сили, що діють на всі точки твердого тіла (масові або об'ємні сили), або на всі точки певної частини поверхні тіла (поверхневі сили).

До об'ємних сил належать, наприклад, сили тяжіння.

Поверхневі сили виникають під час дії одного тіла на інше безпосереднім співдотиком, і їх прикладено до тієї частини поверхонь тіл, у якій вони дотикаються одне до одного.

Розрізняють сили, розподілені по лінії, поверхні й об'єму тіла.

Тиск циліндричного катка на горизонтальну опорну поверхню являє собою сили, розподілені вздовж лінії (вздовж відрізка прямої) (рис. 1.40).

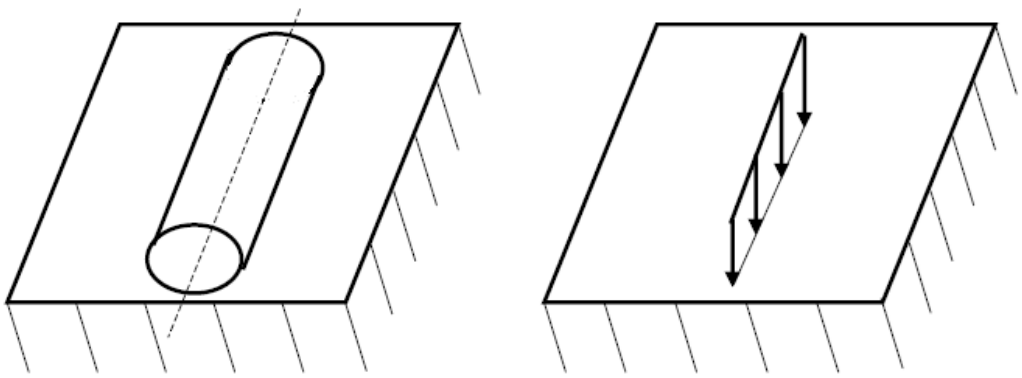


Рис. 1.40

Тиск газу на стінки посудини є прикладом сил, розподілених по поверхні (рис. 1.41).

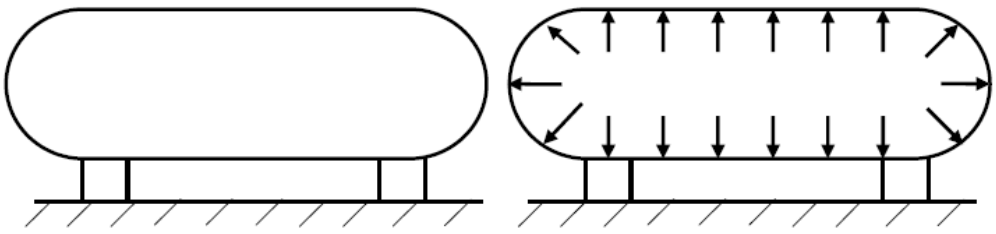


Рис. 1.41

Дія сил тяжіння (рис. 1.42) є прикладом дії об'ємних сил.

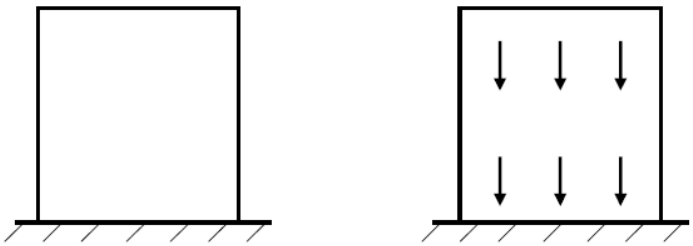


Рис.1.42

Розподілені сили характеризуються **інтенсивністю *q***.

Інтенсивність сили, розподіленою по об’єму (по просторовій області), у певній точці тіла визначать за формулою

$$q = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta V},$$

де ΔP — сила (модуль сили), що діє на елемент об’ємом ΔV;

ΔV — об’єм елемента, виділеного в околі точки.

Одиницею виміру цієї інтенсивності є 1 Н/м^3.

Для сил, розподілених по поверхні, маємо інтенсивність їх дії *q*, Н/м^2, тобто силу, яка припадає на одиницю площі.

Для сил, розподілених по лінії, маємо інтенсивність їх дії *q*, Н/м, тобто силу, яка припадає на одиницю довжини.

Розрізняють *рівномірно* і *нерівномірно розподілене навантаження*.

У випадку *рівномірно розподіленого навантаження* інтенсивність визначається простим діленням повної сили тиску на довжину, площу або об’єм ділянки її прикладення. Для таких сил при статичних розрахунках цю систему можна замінити рівнодійною $\vec{Q}$. Наприклад, для сил, рівномірно розподілених уздовж відрізка прямої довжини l (рис. 1.43), модуль цієї сили $Q = ql$, а саму силу $\vec{Q}$ прикладено в середині відрізка AB.

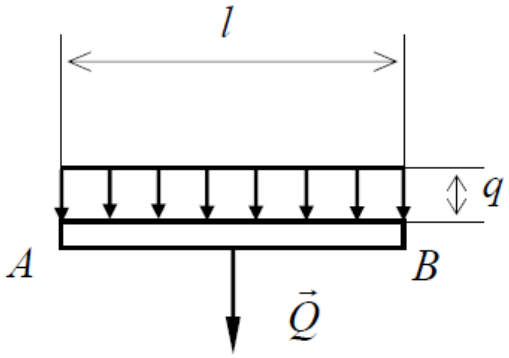


Рис. 1.43

При нерівномірному розподілі навантаження, для якого інтенсивність q є лінійною функцією x, рівнодійна сила $\vec{Q}$ визначається згідно з рис. 1.44.

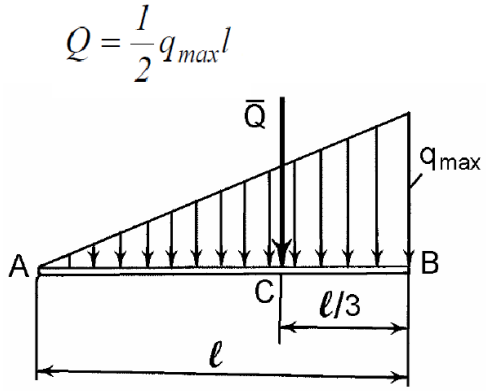


Рис. 1.44

8. Задачі статики на рівновагу плоскої системи сил

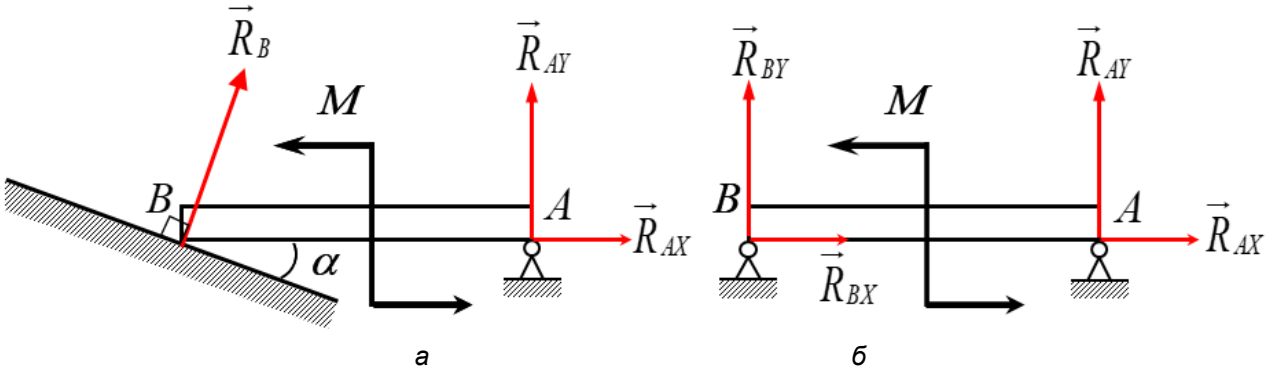
При розгляді умов рівноваги різних систем сил, прикладених до абсолютно твердого тіла, було одержано ту чи іншу кількість рівнянь рівноваги. Так, наприклад, для плоскої системи збіжних сил є два рівняння рівноваги, для просторової системи збіжних сил — три, для просторової системи довільно розміщених сил — шість.

Коли ми розглядаємо невільне тіло, то на основі принципу звільнення твердих тіл від в'язей замінюємо їх дію силами реакцій в'язей. *Якщо кількість невідомих реакцій буде більшою за кількість рівнянь рівноваги, то це означає, що методами статики задачу розв'язати не можна.*

Задачу, у якій кількість невідомих реакцій не перевищує відповідних рівнянь рівноваги, називають **статично визначеною задачею.**

Статично невизначеною задачею називають таку, у якій кількість невідомих реакцій є більшою за кількість рівнянь рівноваги.

Як приклад розглянемо задачу на визначення реакцій в'язей, накладених на балку AB у двох варіантах її кріплення (рис. 1.45).



а *б*

Рис. 1.45

У першому випадку (рис. 1.45, *а*) балка кріпиться до горизонтальної поверхні нерухомим шарніром A, а в точці B опирається на нерухому похилу площину. Оскільки реакція нерухомого циліндричного шарніра має дві складові $\vec{R}_{AY}$ і $\vec{R}_{AX}$, а реакція $\vec{R}_B$ нерухомої похилої площини є перпендикулярною до цієї площини, то в цьому варіанті закріплення балки маємо три невідомі: $\vec{R}_B$, $\vec{R}_{AX}$, $\vec{R}_{AY}$. На балку діє плоска пара сил, для якої можна скласти три незалежних рівняння рівноваги, тобто задача є *статично визначеною*.

Якщо балку AB прикріпити до горизонтальної поверхні двома нерухомими шарнірами (рис. 1.45, *б*), то задача буде *статично невизначеною*, оскільки кількість невідомих реакцій ($\vec{R}_{AX}$, $\vec{R}_{AY}$, $\vec{R}_{BX}$, $\vec{R}_{BY}$) дорівнює чотирьом, а для плоскої системи сил, яка діє на балку, можна скласти три незалежних рівняння рівноваги. Для розв'язання такої задачі необхідно врахувати пружні властивості тіла AB, його деформацію, що не належить до компетенції теоретичної механіки.

Приклад

На балку, зображену на рис. 1.46, діє зосереджена сила P = 2 кН, рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q = 0,5 кН/м і пара сил з моментом M = 4 кН·м. Кут α = 30°, a = 2 м, b = 3 м, c = 5 м.

Треба знайти реакції опор A і B.

Розв'язання

Розглянемо рівновагу навантаженої й закрапленої балки.

1. Виконаємо розрахункову схему, зобразивши на ній задані активні навантаження (зосереджена сила $\vec{P}$, розподілені сили інтенсивністю q і пара сил з моментом M).

Виберемо осі координат xy, розташувавши їх найбільш зручним способом (див. рис. 1.46).

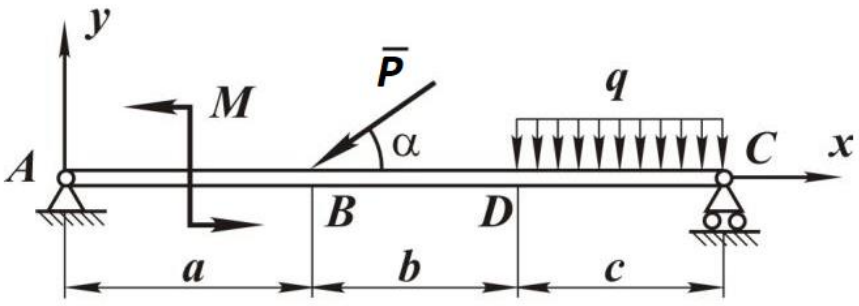


Рис. 1.46

Розподілене навантаження замінимо рівнодійною $Q = qc$, прикладеною в середині відрізка DC. Звільнимо балку від в'язей, замінюючи їх дію реакціями $\vec{X}_A$, $\vec{Y}_A$ і $\vec{R}_C$.

Побудуємо розрахункову схему (рис. 1.47).

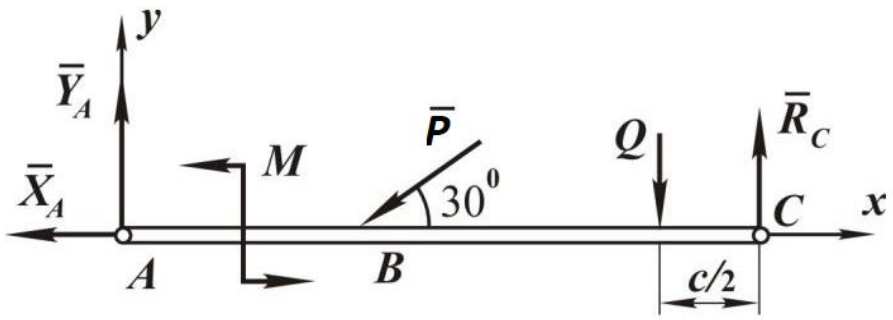


Рис. 1.47

2. Складемо рівняння рівноваги для плоскої системи сил:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{ix} = -X_A - P\cos\alpha = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_A\left(\vec{P}_i, M_i\right) = M - Pa\sin\alpha - Q\left(a+b+c/2\right) + R_C\left(a+b+c\right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n} M_C\left(\vec{P}_i, M_i\right) = Q\frac{c}{2} + F\sin\alpha\left(b+c\right) + M - Y_A\left(a+b+c\right) = 0.$$

3. Підставимо числові значення в рівняння рівноваги і знайдемо значення реакцій:

$$X_A = -P\cos\alpha = -\sqrt{3} \text{ кН};$$

$$R_C = \frac{Pa\sin\alpha + Q\left(a+b+c/2\right) - M}{a+b+c} = 1{,}675 \text{ кН};$$

$$Y_A = \frac{Q\frac{c}{2} + F\sin\alpha\left(b+c\right) + M}{a+b+c} = 1{,}825 \text{ кН}.$$

Реакція X_A має знак «мінус». Це свідчить про те, що насправді вона напрямлена в протилежний бік, тобто в бік додатного напрямку осі x.

4. Виконаємо перевірку знайдених розв'язків. Складемо рівняння суми проєкцій усіх сил на вертикальну вісь y:

$$\sum_{i=1}^{n} P_{iн} = Y_A - P\sin\alpha - Q + R_C = 1{,}825 - 1 - 2{,}5 + 1{,}675 = 0.$$

Отже, шукані сили реакції визначено правильно.

Відповідь: $X_A = 1{,}732$ кН, $Y_A = 1{,}825$ кН, $R_A = 2{,}516$ кН і $R_C = 1{,}625$ кН.

Запитання для самоконтролю

1. Як формулюється лема про паралельне перенесення сили? Чому дорівнює момент приєднаної пари?
2. Що називають головним вектором системи сил? Якою є різниця між поняттями головного вектора й рівнодійної?
3. Що називають головним моментом системи сил відносно заданої точки?
4. Чому дорівнюють проєкції головного вектора й головного моменту на осі декартової системи координат?
5. Як формулюється основна теорема статики?
6. Чи зміниться головний вектор заданої системи сил при зміненні положення точки (центра) зведення?
7. Як виражають головний момент відносно нового центра зведення через головний момент відносно початкової точки зведення?
8. У чому полягає необхідна й достатня умова рівноваги просторової системи довільно розміщених сил?
9. Скільки є незалежних рівнянь рівноваги і які з них можна записати для просторової системи довільно розміщених сил, плоскої системи довільно розміщених сил?
10. Напишіть три форми рівнянь рівноваги для плоскої системи довільно розміщених сил.
11. Які задачі статики називають статично визначеними й статично невизначеними?

Розділ 2. КІНЕМАТИКА

Лекція 4. КІНЕМАТИКА ТОЧКИ

План лекції

1. Вступ до кінематики.
2. Способи задання руху точки.
3. Похідна вектора за скалярним аргументом.
4. Швидкість точки.
5. Натуральний тріедр кривої лінії. Кривина і радіус кривини плоскої кривої.
6. Прискорення точки.
7. Окремі випадки руху точки.

1. Вступ до кінематики

Кінематика — це розділ теоретичної механіки, у якому вивчаються геометричні властивості рухів без урахування інертності (маси) рухомих тіл і прикладених до них сил.

Кінематика — це геометрія рухів, тоді як статика – це алгебра сил.

Рухом називають змінення положення тіла з плином часу відносно якого небудь іншого тіла. Це друге тіло, стосовно якого вивчається рух рухомого тіла, називають *тілом відліку*.

Сукупність тіла відліку, пов’язаної з ним системи координат і приладу для вимірювання часу (годинника) називають *системою відліку*.

Будь який рух завжди є відносним згідно з принципом відносності руху.

Принцип відносності руху — характер спостережуваного руху істотно залежить від системи відліку, і в різних системах відліку є різним.

У класичній механіці (механіці І. Ньютона) простір уважається тривимірним евклідовим, який не залежить від часу й руху матеріальних об'єктів, що рухаються в ньому. Простір є однорідним та ізотропним у всіх напрямках. Час беруть універсальним, що не є пов'язаним із простором і не залежить від вибору системи відліку, тобто вважається абсолютним.

Основною задачею кінематики точки є встановлення способу задання її руху відносно вибраної системі відліку і з урахуванням цього знаходження методів визначення її кінематичних характеристик.

Основними кінематичними характеристиками руху точки є її *положення, швидкість* і *прискорення*.

Задати рух кінематично або задати закон руху точки означає вказати такий спосіб, який дає можливість визначити положення цієї точки відносно даної системи відліку у будь-який момент часу.

2. Способи задання руху точки

Існує три способи задання руху точки: ***векторний***, ***координатний*** і ***натуральний*.**

Векторний спосіб

Припустимо, що довільна матеріальна точка M рухається в просторі за деякою кривою AB, яку називають **траєкторією** (рис. 2.1).

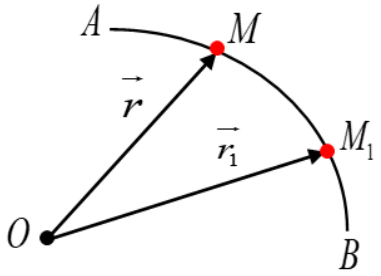


Рис. 2.1

Візьмемо в просторі довільну нерухому точку O і проведемо до рухомої точки M радіус-вектор $\vec{r}$, який точно визначає положення точки.

Під час руху точки M її радіус-вектор $\vec{r}$ змінюється за величиною (модулем) і напрямком, тобто кожному моменту часу відповідає свій радіус-вектор. Моменту часу t_1 відповідає радіус-вектор $\vec{r}_1$ точки M_1.

Таким чином, якщо задається закон змінення радіуса-вектора $\vec{r}$ рухомої точки M у функції часу, то закон руху матеріальної точки вважається заданим векторним способом:

$$\vec{r} = \vec{r}(t). \qquad (2.1)$$

Співвідношення (2.1) називають **кінематичним рівнянням** руху матеріальної точки у векторній формі, яке визначає положення точки в просторі в будь який момент часу.

Одночасно (2.1) можна розглядати як рівняння і траєкторії точки, і просторової кривої у векторній формі.

Функція $\vec{r}(t)$ має бути монотонною, неперервною і принаймні двічі диференційованою функцією часу.

Траєкторією точки називають геометричне місце положення точки під час руху в заданій системі відліку.

Годографом векторної функції $\vec{r}(t)$ за скалярним аргументом t (час) називають криву, яка накреслюється кінцем радіуса-вектора $\vec{r}$ у разі неперервного змінення аргументу t за умови, що початки цих векторів з'єднано у фіксованій нерухомій точці O.

Таким чином, траєкторія точки є годографом радіуса-вектора $\vec{r}(t)$.

Координатний спосіб

Зв'яжемо з точкою O прямокутну декартову систему координат $Oxyz$ (див. рис. 2.2). Нехай $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орти координатних осей Ox, Oy, Oz відповідно, а x, y, z — абсциса, ордината й апліката точки M. Координатами радіуса-вектора точки є координати його кінця: $\vec{r} = \{x, y, z\}$.

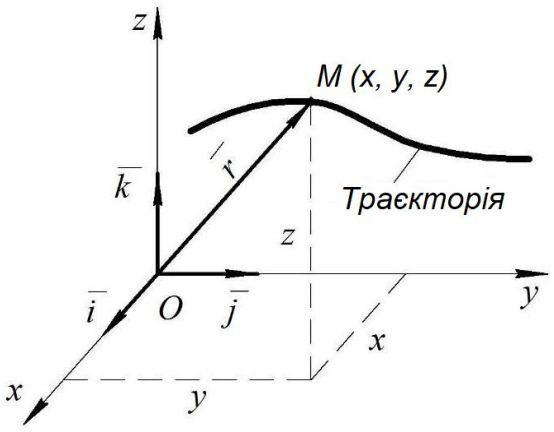


Рис. 2.2

Розкладемо за базисом $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ радіус-вектор $\vec{r}$ точки M:

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \qquad (2.2)$$

Одночасно зі зміненням радіуса-вектора рухомої точки змінюються її координати:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}. \qquad (2.3)$$

На основі рівнянь (2.2) і (2.3) маємо

$$x = x(t);\ \ \mathrm{y} = \mathrm{y}(t);\ z = z(t). \qquad (2.4)$$

Рівності (2.4) визначають закон руху точки в координатній (скалярній) формі, інколи їх називають також кінематичними рівняннями руху точки.

У тривимірному просторі величин x, y і z система скінченних рівнянь (2.4) описує криву лінію — траєкторію точки M. Незалежна змінна (аргумент) t функцій $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$ є параметром. Тому систему (2.4) називають також *рівняннями траєкторії точки в параметричній формі*.

Якщо з нелінійних (у загальному випадку) рівнянь (2.4) удасться яким-небудь чином виключити параметр t, то одержимо траєкторію точки як лінію перетину двох поверхонь:

$$\left.\begin{aligned} f_1(x,y,z)=0;\\ f_2(x,y,z)=0. \end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

Натуральний спосіб

Натуральний спосіб застосовують, коли попередньо є відомою траєкторія точки. Необхідно задати:

1) траєкторію AB точки (рис. 2.3);

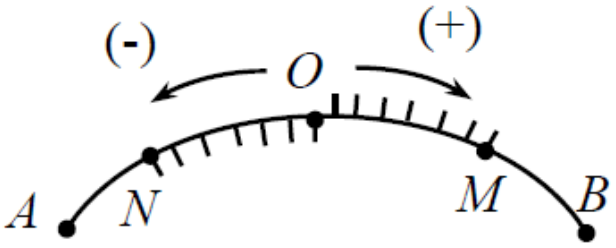


Рис. 2.3

2) початок O відліку довжин дуг на траєкторії, указавши додатний і від'ємний напрямки відліку. Довжину відповідної дуги, взятої зі знаком плюс або мінус, називають **дуговою координатою точки** σ:

$$\cup M(\sigma),\ \sigma=OM>0;\ \cup N(\sigma),\ \sigma=-ON<0;$$

3) закон руху точки вздовж траєкторії:

$$\sigma=\sigma(t). \tag{2.6}$$

Якщо рух відбувається в бік збільшення довжини дуги σ, тобто функція

$\sigma(t)$ у виразі (2.6) зростає, то диференціал дугової координати є додатним: $d\sigma = \dot{\sigma}(t)\,dt > 0$. Якщо ж рух відбувається в бік зменшення довжини дуги σ, то $d\sigma = \dot{\sigma}(t)\,dt < 0$.

Слід розрізняти шлях s, що є величиною завжди додатною, від дугової координати σ, яка може бути й від'ємною. Шлях s, який проходить точка, збільшується незалежно від напрямку руху точки, тобто $ds = |d\sigma|$.

Наприклад, точка, рухаючись із початкового положення O (рис. 2.4), доходить до положення B, а потім, переміщуючись у зворотному напрямку, приходить у положення M, і в цей момент її дугова координата $\sigma = OM$.

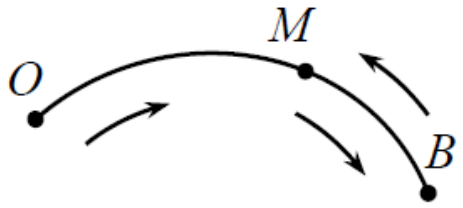


Рис. 2.4

Шлях, пройдений точкою за час руху

$$s = \cup OB + \cup BM = \cup OM + 2 \cup BM .$$

Перехід від одного способу задання руху точки до іншого

1. *Перехід від координатного способу до векторного*. Нехай рух точки задано координатним способом: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. У цьому випадку радіус-вектор $\vec{r}$ можна визначити за формулою (2.3).

Модуль і напрямні косинуси вектора $\vec{r}$ знаходимо за формулами

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,; \tag{2.7}$$

$$\cos(x,\ \vec{r}) = x/r\,;\ \cos(y,\ \vec{r}) = y/r\,;\ \cos(z,\ \vec{r}) = z/r\,. \tag{2.8}$$

2. *Перехід від координатного способу до натурального*. Траєкторію руху точки знаходимо шляхом виключення з рівнянь функцій $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ параметра часу t.

Диференціал дуги $d\sigma$ можна знайти через диференціали координат точки $dx = \dot{x}\,dt$, $dy = \dot{y}\,dt$, $dz = \dot{z}\,dt$:

$$d\sigma = \pm\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,. \tag{2.9}$$

Знак плюс береться в тому разі, коли точка рухається в бік вибраного додатного відліку довжини дуги, в іншому випадку береться знак мінус.

Інтегруємо вираз (2.9) в інтервалі від $t = 0$ (початок руху) до будь-якого моменту t, одержуємо закон руху:

$$\sigma(t) = \pm\int_0^t \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,dt + \sigma_0\,, \tag{2.10}$$

де σ_0 — положення рухомої точки в початковий момент часу $t = 0$.

Якщо положенню рухомої точки в початковий момент часу $t = 0$ відповідало нульове значення дугової координати σ_0, то

$$\sigma(t) = \pm\int_0^t \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\,dt\,. \tag{2.11}$$

3. Похідна вектора за скалярним аргументом

Нехай вектор $\vec{\mathrm{A}}$ задано як безперервну функцію скалярного аргументу u:

$$\vec{\mathrm{A}} = \vec{\mathrm{A}}(u)\,.$$

Згідно з означенням похідної

$$\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\Delta\vec{\mathrm{A}}(u)}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0}\frac{\vec{\mathrm{A}}(u+\Delta u) - \vec{\mathrm{A}}(u)}{\Delta u}\,. \tag{2.12}$$

Приріст вектора $\Delta\vec{\mathrm{A}}(u)$ має напрямок, що збігається з січною годографа вектора (рис. 2.5). При $\Delta u \to 0$ січна перебуватиме в граничному положенні, яке збігається з дотичною до годографа.

Отже, похідна вектора за скалярним аргументом завжди є напрямленою за дотичною до годографа цього вектора.

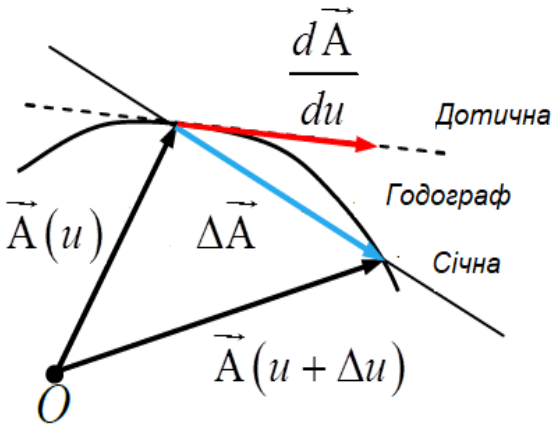


Рис. 2.5

З огляду на геометрію вектор $d\vec{A}/du$ є напрямленим уздовж дотичної до годографа функції в бік збільшення параметра *u*.

Наведемо деякі властивості похідної вектора за скалярним аргументом.

1. Похідна постійного за величиною і напрямком вектора дорівнює нулю. Похідна постійного за величиною вектора є напрямленою перпендикулярно до вектора.

2. Похідна суми векторів дорівнює сумі похідних

$$\frac{d\left(\vec{A}+\vec{B}\right)}{du}=\frac{d\vec{A}}{du}+\frac{d\vec{B}}{du}. \tag{2.13}$$

3. Похідна скалярного добутку визначається формулою

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{du}\cdot\vec{B}+\vec{A}\cdot\frac{d\vec{B}}{du}. \tag{2.14}$$

4. Похідна векторного добутку обчислюється за формулою

$$\frac{d}{du}\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\frac{d\vec{A}}{du}\times\vec{B}+\vec{A}\times\frac{d\vec{B}}{du}. \tag{2.15}$$

Нехай вектор $\vec{A}$ визначено в системі координат xyz:

$$\vec{A}=A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k},$$

де A_x, A_y, A_z — проєкції вектора $\vec{A}$ на осі координат.

Оскільки орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ є постійними векторами,

$$\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{du}=\frac{d\mathrm{A}_x}{du}\vec{i}+\frac{d\mathrm{A}_y}{du}\vec{j}+\frac{d\mathrm{A}_z}{du}\vec{k}. \tag{2.16}$$

Водночас похідну можна подати у вигляді

$$\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{du}=\left(\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{du}\right)_x\vec{i}+\left(\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{du}\right)_y\vec{j}+\left(\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{du}\right)_z\vec{k}. \tag{2.17}$$

Отже, проєкції похідної вектора на нерухомі осі дорівнюють похідним відповідних проєкцій вектора.

Розглянемо інший підхід у визначенні похідної вектора за скалярним аргументом.

Позначимо через $d\sigma$ дугу годографа вектора між станами вектора $\vec{\mathrm{A}}(u)$ і $\vec{\mathrm{A}}(u+\Delta u)$:

$$\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{du}=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\vec{\mathrm{A}}}{\Delta u}=\lim_{\Delta u\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{\mathrm{A}}}{\Delta\sigma}\cdot\frac{\Delta\sigma}{\Delta u}\right)=\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\vec{\mathrm{A}}}{\Delta\sigma}\cdot\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta u}.$$

Знаходимо першу межу. Межа відношення дуги до хорди, що стягує її, дорівнює за модулем одиниці, а граничне положення січної збігається з дотичною, тобто

$$\lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\vec{\mathrm{A}}}{\Delta\sigma}=\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{d\sigma}=\vec{\tau},$$

де $\vec{\tau}$ — одиничний вектор дотичної до кривої, напрямлений у бік додатного відліку дуги.

Знаходимо другу межу:

$$\lim_{\Delta u\to 0}\frac{d\sigma}{\Delta u}=\frac{d\sigma}{du}.$$

Таким чином,

$$\frac{d\vec{\mathrm{A}}}{du}=\frac{d\sigma}{du}\vec{\tau}, \tag{2.18}$$

де $\frac{d\sigma}{du} = \sqrt{\left(\frac{d\mathrm{A}_x}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{A}_y}{du}\right)^2 + \left(\frac{d\mathrm{A}_z}{du}\right)^2}$ — модуль похідної.

4. Швидкість точки

Однією з основних характеристик руху точки є її швидкість відносно вибраної системи відліку.

Швидкість — це кінематична міра руху точки, що характеризує швидкість змінення її положення в просторі.

Швидкістю точки (швидкістю руху точки) називають векторну величину, що характеризує швидкість змінення в часі радіуса-вектора рухомої точки.

Швидкістю точки є похідна за часом векторної функції радіуса-вектора $\vec{r}(t)$:

$$\vec{V} = \dot{\vec{r}} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (2.19)$$

Векторний спосіб задання руху точки

Нехай у момент часу t рухома точка перебувала на траєкторії AB у положенні M (рис. 2.6) і за час Δt перейшла в положення M_1.

Положення точки M визначається радіусом-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$, а положення M_1 — радіусом-вектором $\vec{r}_1 = \vec{r}(t + \Delta t)$.

Вектор $\Delta\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$ називатимемо *переміщенням точки за час* Δt.

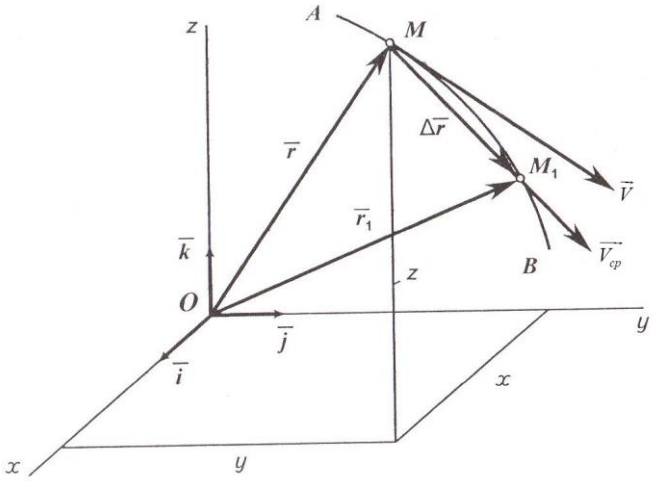


Рис. 2.6

Середньою швидкістю точки за проміжок часу Δt називають відношення переміщення $\Delta\vec{r}$ до проміжку часу Δt, за який воно відбулося:

$$\overrightarrow{V_{ср}} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \qquad (2.20)$$

Вектор середньої швидкості точки є напрямленим по січній MM_1.

Щоб знайти **миттєву швидкість** точки в певний момент часу t, необхідно перейти до межі:

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t\to 0}\overrightarrow{V_{ср}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \qquad (2.21)$$

Оскільки граничним положенням січної (хорди) MM_1 є дотична до кривої в точці M, то ***миттєва швидкість*** *точки є вектором, напрямленим по дотичній до траєкторії в бік руху точки*.

Розмірність швидкості є такою:

$$[V] = [r]/[t] = 1\ м/с.$$

При векторному способі задання руху швидкість матеріальної точки дорівнює першій похідній від радіуса-вектора за часом у заданій системі відліку.

Координатний спосіб задання руху точки

Нехай у декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$ рух точки задано координатними функціями $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$. Тоді можна перейти до векторного способу задання руху точки:

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Диференціюючи вираз для $\vec{r}(t)$ за часом t, одержимо

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}, \qquad (2.22)$$

де враховано, що орти $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ є постійними векторами,

Проєкції вектора швидкості на координатні осі визначаються як похідні відповідних координат за часом:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x},\ V_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y},\ V_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}. \qquad (2.23)$$

Модуль вектора швидкості визначається формулою

$$V = \left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}, \qquad (2.24)$$

а напрямні косинуси вектора швидкості $\vec{V}$ — формулами

$$\cos(\mathrm{x},\vec{V}) = \frac{V_x}{V},\ \cos(\mathrm{y},\vec{V}) = \frac{V_y}{V}, \cos(\mathrm{z},\vec{V}) = V_z/V. \qquad (2.25)$$

Вектор швидкості можна записати у вигляді

$$\vec{V} = V\vec{\tau}. \qquad (2.26)$$

Натуральний спосіб задання руху точки

Нехай законом руху точки по певній траєкторії є функція $\sigma = \sigma(t)$. Згідно з формулою (2.18)

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\sigma}{dt}\vec{\tau}, \qquad (2.27)$$

де $\frac{d\sigma}{dt} = V_\tau$, $\left|V_\tau\right| = V = \left|\vec{V}\right|$ — модуль вектора швидкості;

$\vec{\tau}$ — одиничний вектор дотичної.

Якщо рух точки відбувається в бік збільшення дугової координати, то $V_\tau > 0$, а якщо в бік зменшення — то $V_\tau < 0$.

5. Натуральний тріедр кривої лінії. Кривина і радіус кривини плоскої кривої

Наведемо деякі відомості з диференціальної геометрії.

Розглянемо просторову криву. Нехай $\vec{\tau}$ буде одиничним вектором

дотичної, проведеної в деякій точці M кривої (рис. 2.7).

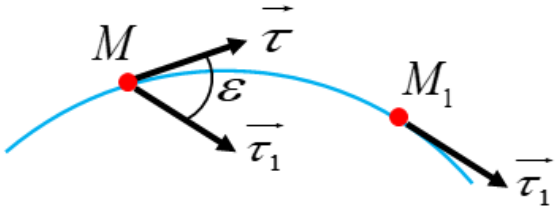


Рис. 2.7

Візьмемо на кривій точку M_1, розташовану близько до точки M і проведемо одиничний вектор $\vec{\tau}_1$ дотичній до кривої в цій точці. Перенесемо вектор $\vec{\tau}_1$ в точку M і проведемо площину через вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$, прикладені в точці M. При наближенні точки M_1 до точки M ця площина буде обертатися навколо $\vec{\tau}$ і на межі займе певне положення. Одержану таким чином площину називають **стичною.**

Через точку M проведемо площину, перпендикулярну до дотичної $\vec{\tau}$. Цю площину називають ***нормальною площиною*** (рис. 2.8).

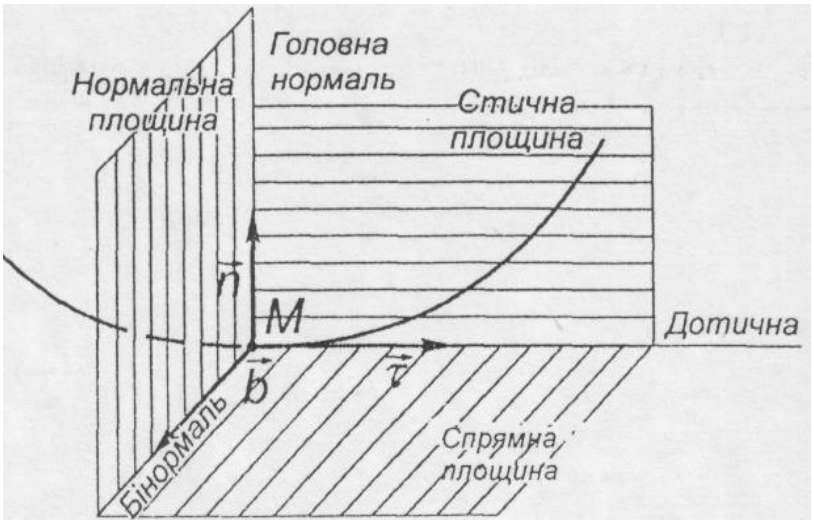


Рис. 2.8

Очевидно, що будь-яка пряма в нормальної площині, яка проходить через точку М, буде перпендикулярною до $\vec{\tau}$, тобто буде нормаллю до кривої. Отже, головна нормаль — це одна з безлічі нормалей до кривої в точці М, яка лежить у стичній площині. Площину, що проходить через точку М перпендикулярно до головної нормалі, називають **спрямною.**

Лінія перетину спрямної й нормальної площин визначає **бінормаль** кривої. Очевидно, що бінормаль буде перпендикулярною до головної нормалі.

Таким чином, у кожній площині кривої можна навести три взаємно перпендикулярні напрямки, по яких можна провести дотичну в бік збільшення дугової координати (орт $\vec{\tau}$), головну нормаль — у бік увігнутості кривої (відповідний орт $\vec{n}$), бінормаль з відповідним ортом $\vec{b}$, напрямлену так, що орти $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ і $\vec{b}$ утворюють праву ортогональну трійку векторів. Прямокутна система координатних осей за ортами $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ з початком у точці M також утворює праву ортогональну трійку векторів.

Прямокутну систему координатних осей за ортами $\vec{\tau}$, $\vec{n}$, $\vec{b}$ з початком у рухомій точці M називають **системою натуральних осей**, **натуральним рухомим тригранником або тріедром**.

Уведемо поняття кривини кривої. Позначимо через ε величину кута між векторами $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau}_1$, проведеними в точці M (див. рис. 2.7). Цей кут називають ***кутом суміжності.***

Кривиною кривої в точці M називають межу відношення кута суміжності до абсолютного значення дуги $MM_1 = \Delta\sigma$

$$k = \lim_{\Delta\sigma\to 0} \frac{\varepsilon}{|\Delta\sigma|}. \tag{2.28}$$

Величину, обернену до кривини в точці M , називають **радіусом кривини**:

$$\rho = \frac{1}{k}. \tag{2.29}$$

Зауважимо, що кривина прямої дорівнює нулю, а радіус — нескінченності. Кривина кола в усіх його точках є однаковою й дорівнює оберненій величині радіуса; радіус кривини дорівнює радіусу кола.

6. Прискорення точки

Прискоренням точки називають векторну величину, що характеризує стрімкість змінення в часі вектора швидкості точки, тобто є похідною швидкості:

$$\vec{W} = \dot{\vec{V}} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)}{\Delta t}. \tag{2.30}$$

Якщо користуватись формулою (2.19) для швидкості точки, то її прискорення в довільний момент часу можна визначити через другу похідну за часом від радіуса-вектора:

$$\overrightarrow{W} = \ddot{\vec{r}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (2.31)$$

Векторний спосіб задання руху точки

Вектор $\Delta\vec{V} = \vec{V}_1 - \vec{V} = \vec{V}(t+\Delta t) - \vec{V}(t)$ є зміненням вектора швидкості за проміжок часу Δt.

Середнім прискоренням точки за проміжок часу Δt називають відношення змінення вектора швидкості до проміжку часу, за який це змінення відбулося:

$$\overrightarrow{W_{cp}} = \frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t}. \qquad (2.32)$$

Щоб знайти **миттєве прискорення** точки в певний момент часу t, необхідно перейти до границі:

$$\overrightarrow{W} = \lim_{\Delta t\to 0}\overrightarrow{W_{cp}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \qquad (2.33)$$

Розмірність прискорення

$$[W] = \frac{[V]}{[t]} = \frac{[r]}{[t]^2} = 1\frac{м}{c^2}.$$

Координатний спосіб задання руху точки

Нехай у декартовій прямокутній системі координат $Oxyz$ рух точки задано координатними функціями $x(t)$, $y(t)$ і $z(t)$.

Знаходимо вектор швидкості:

$$\vec{V} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j} + V_z\vec{k}.$$

Тоді прискорення можна визначити як першу похідну вектора швидкості за часом:

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{dV_x}{dt}\vec{i} + \frac{dV_y}{dt}\vec{j} + \frac{dV_z}{dt}\vec{k} = W_x\vec{i} + W_y\vec{j} + W_z\vec{k}, \qquad (2.34)$$

де $W_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2r_x}{dt^2} = \ddot{x}$, $W_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2r_y}{dt^2} = \ddot{y}$, $W_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2r_z}{dt^2} = \ddot{z}$ — проєкції вектора прискорення на координатні осі.

Модуль вектора прискорення визначається формулою

$$W = \left|\vec{W}\right| = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}, \qquad (2.35)$$

напрямні косинуси вектора швидкості $\vec{W}$ — формулами

$$\cos(\mathrm{x},\vec{W}) = W_x/W,\ \cos(\mathrm{y},\vec{W}) = W_y/W, \cos(\mathrm{z},\vec{W}) = W_z/W. \qquad (2.36)$$

Натуральний спосіб задання руху точки

Вектор швидкості при натуральному способі задання руху точки можна записати у вигляді

$$\vec{V} = V\vec{\tau}.$$

Прискорення визначимо як похідну за часом вектора швидкості

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V\vec{\tau}\right) = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + V_\tau\frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Знайдемо величину й напрямок вектора $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Нехай у момент часу t точка перебуває в положенні M на траєкторії, а в момент $t + \Delta t$ — у положенні M_1. Переносячи вектор $\vec{\tau_1}$ у точку M, знаходимо змінення вектора $\vec{\tau}$ за проміжок часу Δt: $\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau_1} - \vec{\tau}$. Похідна вектора $\vec{\tau}$ за часом

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\left(\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t}\right) = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\sigma}{\Delta t} = \frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}V_\tau.$$

Вектор $\Delta\vec{\tau}/\Delta\sigma$ буде завжди напрямленим у бік увігнутості траєкторії й лежати в площині, що проходить через точку M і вектори $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau_1}$. Знайшовши границю відношення $\Delta\vec{\tau}/\Delta\sigma$, отримаємо вектор $\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}$, який лежить у *стичній площині* (див. рис. 2.8).

Здиференціюємо тотожність $\vec{\tau}^2 = 1$ за σ:

$$2\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}\cdot\vec{\tau} = 0.$$

Скалярний добуток векторів $\vec{\tau}$ і $\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}$ дорівнює нулю. Це означає, що вектор $\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}$ є перпендикулярним до вектора $\vec{\tau}$. Оскільки вектор $\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}$ лежить у стичній площині, можна зробити висновок: напрямок вектора $\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}$ збігається з напрямком одиничного вектора головної нормалі $\vec{n}$.

Знайдемо тепер модуль вектора $\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}$. З рівнобедреного трикутника, побудованого на векторах $\vec{\tau}$ і $\vec{\tau_1}$, отримаємо

$$\left|\Delta\vec{\tau}\right| = 2\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

У цьому випадку

$$\left|\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma}\right| = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta\sigma}\right| = \lim_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\sin(\varepsilon/2)}{(\varepsilon/2)}\frac{\varepsilon}{\Delta\sigma} = k = \frac{1}{\rho},$$

оскільки при $\Delta\sigma\to 0$ і $\varepsilon\to 0$ маємо $\lim\limits_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\sin(\varepsilon/2)}{(\varepsilon/2)} = 1$ і тоді отримаємо $\lim\limits_{\Delta\sigma\to 0}\frac{\varepsilon}{\Delta\sigma} = k$.

З урахуванням того, що $\vec{n}$ – одиничний вектор головної нормалі,

$$\frac{d\vec{\tau}}{d\sigma} = k\vec{n} = \frac{1}{\rho}\vec{n}.$$

Отже,

$$\overrightarrow{W} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + V_\tau \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{V_\tau^2}{\rho}\vec{n} = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau} + \frac{V^2}{\rho}\vec{n}. \qquad (2.37)$$

З цієї формули випливає, що вектор прискорення завжди лежить в стичній площині.

Складові прискорення за напрямками $\vec{\tau}$ і $\vec{n}$ відповідно будуть такими:

$$\overrightarrow{W}_\tau = \frac{dV_\tau}{dt}\vec{\tau},\ \overrightarrow{W}_n = \frac{V^2}{\rho}\vec{n}. \qquad (2.38)$$

Проєкцію прискорення на напрямок дотичної $\vec{\tau}$ називають **дотичним прискоренням**, проєкцію прискорення на головну нормаль $\vec{n}$ —**нормальним прискоренням**.

Вектор прискорення точки лежить у стичній площині траєкторії точки і є напрямленим у бік увігнутості. Дотичне прискорення характеризує змінення модуля швидкості, а нормальне прискорення — змінення швидкості за напрямком.

Вектори $\overrightarrow{W}_\tau$ і $\overrightarrow{W}_n$ є перпендикулярними, тому

$$W = \left|\overrightarrow{W}\right| = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}.$$

7. Окремі випадки руху точки

1. Прямолінійний рух точки. У цьому випадку траєкторія точки є прямою лінією, тому радіус кривини траєкторії $\rho \to \infty$, нормальне прискорення $\overrightarrow{W}_n = 0$ і повне прискорення $\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W}_\tau$.

Таким чином, в умовах прямолінійного руху вектор швидкості $\vec{V}$ матеріальної точки змінюється лише чисельно, за модулем (нормальна проекція прискорення дорівнює нулю).

2. Криволінійний рух точки називають **прискореним**, якщо модуль швидкості точки збільшується, і **сповільненим**, якщо зменшується.

Дійсно, якщо V_τ і W_τ мають однин знак, то модуль швидкості $V = |V_\tau|$ точки збільшується і рух у цьому випадку називають **прискореним** (рис. 2.9).

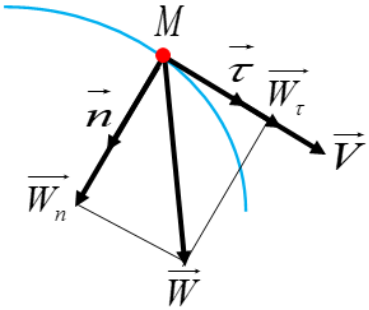


Рис. 2.9

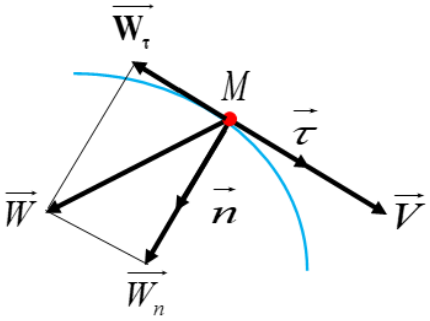


Рис. 2.10

Якщо V_τ і W_τ *мають* різні знаки, то модуль швидкості $V = |V_\tau|$ точки зменшується і рух буде **сповільненим** (рис. 2. 10).

3. Криволінійний рух точки називають **рівномірним**, якщо модуль швидкості точки є сталим:

$$V = |V_\tau| = const \Rightarrow W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = 0,\ \vec{W} = \vec{W}_n .$$

3. Криволінійний рух точки називають **рівнозмінним**, якщо дотичне прискорення залишається весь час однаковим:

$$W_\tau = \frac{dV_\tau}{dt} = const .$$

Характер руху точки визначається величиною кута α між векторами швидкості й прискорення точки (рис. 2.11).

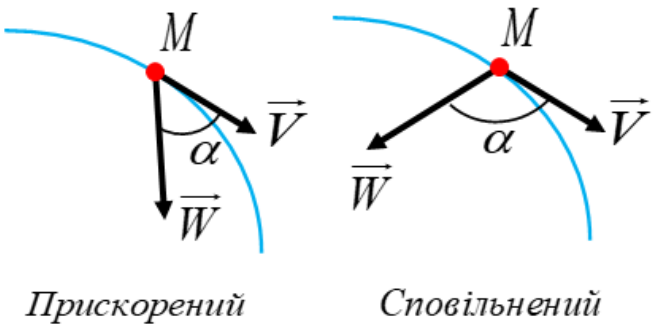


Рис. 2.11

Алгоритм аналізу (теоретичного дослідження) кінематики руху матеріальної точки є таким:

1. За заданим рівнянням руху точки M визначимо її траєкторію.
2. Накреслимо траєкторію й покажемо на ній положення рухомої точки M у заданий момент часу. Визначимо межі можливого перебування рухомої точки M на траєкторії.
3. Для заданого моменту часу обчислимо аналітично швидкості, прискорення та їх складові, визначимо радіус кривини траєкторії.
4. Для заданого моменту часу для точки M побудуємо вектори швидкості й прискорення та їх складові.

Застосування наведеного алгоритму розглядається на відповідному практичному занятті.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке спосіб задання руху матеріальної точки?
2. Які способи задання руху точки існують?
3. Яким є зв'язок між координатним і натуральним способами задання руху.
4. Наведіть поняття траєкторії руху точки. Як визначити рівняння траєкторії?
5. Дайте означення поняття швидкості руху точки.
6. Як вектор швидкості напрямлено відносно траєкторії?
7. Як визначити швидкість точки при векторному способі задання її руху?
8. Визначити швидкості точки при координатному способі задання її руху.
9. Визначити швидкості точки при натуральному способі задання її руху.
10. Наведіть поняття прискорення руху точки.
11. Як вектор прискорення напрямлено відносно траєкторії?
12. Як визначити прискорення руху точки при векторного способі задання її руху.
13. Як визначити прискорення руху точки при координатному способі задання її руху.
14. Що таке натуральний тріедр кривої лінії?
15. Як визначити прискорення руху точки при натуральному способі задання її руху.
16. Чому дорівнюють проєкції прискорення на дотичну, головну нормаль і бінормаль?
17. Яке змінення швидкості характеризує нормальне прискорення?
18. Яке змінення швидкості характеризує дотичне прискорення?
19. Від чого залежить характер криволінійного руху точки?
20. В якому випадку руху точки її дотичне й нормальне прискорення одночасно дорівнюють нулю?

Лекція 5. КІНЕМАТИКА НАЙПРОСТІШИХ РУХІВ ТВЕРДОГО ТІЛА

План лекції

1. Задання руху твердого тіла.
2. Властивості руху точок твердого тіла.
3. Поступальний рух твердого тіла.
4. Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі.
5. Кутова швидкість і кутове прискорення тіла, що обертається навколо нерухомої осі.
6. Траєкторія, швидкість і прискорення точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.

1. Задання руху твердого тіла

Рух твердого тіла може бути ***вільним*** або ***невільним***. У разі невільного руху існують обмежувальні умови, які називають *в'язями*.

Рух твердого тіла задано, якщо існує спосіб визначення положення будь-якої його точки в будь-який момент часу.

Виокремимо в твердому тілі три точки, які не лежать на одній прямій (рис. 2.12).

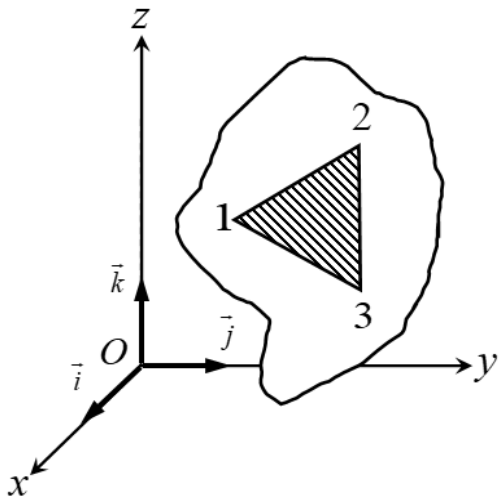


Рис. 2.12

Якщо ці точки закріпити, то тіло буде нерухомим у цій системі відліку. Звільнюючи поступово ці точки, одержимо вільне тіло, положення якого повністю визначається дев'ятьма координатами цих точок: $x_k = x_k(t),\ \mathrm{y}_k = y_k(t),\ \mathrm{z}_k = z_k(t)\ \left(k = 1,\ 2,\ 3\right)$.

Оскільки тіло абсолютно тверде, координати цих точок не є незалежними, вони підпорядковується ***трьом умовам***, що відображають

незмінність відстаней між виокремленими точками:

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2 = l_{12}^2 = const,$$
$$(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2 + (z_3 - z_2)^2 = l_{32}^2 = const,$$
$$(x_1 - x_3)^2 + (y_1 - y_3)^2 + (z_1 - z_3)^2 = l_{13}^2 = const.$$

Вільне тверде тіло має шість ступенів вільності, оскільки його положення в просторі характеризується шістьома незалежними параметрами (координатами).

Невільне тверде тіло має меншу кількість незалежних параметрів (координат).

Кількість незалежних параметрів, задання яких точно визначає положення тіла в просторі, називають **кількістю ступенів вільності**.

Рух твердого тіла буде заданим, якщо є спосіб визначення положення будь-якої його точки в будь-який момент часу відносно вибраної системи координат.

Задачі кінематики твердого тіла полягають у встановленні *способів* визначення його руху й знаходженні кінематичних характеристик тіла в цілому та окремих його точок.

Класифікація рухів твердого тіла. Кількість ступенів вільності не визначає повністю характер руху.

Характер руху визначається візуально й поділяється на п’ять видів:

1. Поступальний.
2. Обертальний навколо нерухомої осі.
3. Плоский (або плоско-паралельний).
4. Обертальний навколо нерухомої точки, або сферичний.
5. Довільний.

2. Властивості руху точок твердого тіла

Ще раз згадаємо, що абсолютно твердим тілом називають тіло, у якому відстані між двома довільними його точками залишаються незмінними незалежно від дії тих чи інших сил. *Ця властивість абсолютно твердого тіла справджується і при будь-якому його русі*.

Загальна теорема. У кожний момент часу будь-якого руху твердого тіла проєкції швидкостей його точок на пряму, яка їх сполучає, є однаковими.

Візьмемо дві довільні точки A і B твердого тіла, що рухається, і з'єднаємо їх прямою лінією (рис. 2.13). Положення точок задамо радіусами-векторами $\vec{r}_A$ і $\vec{r}_B$.

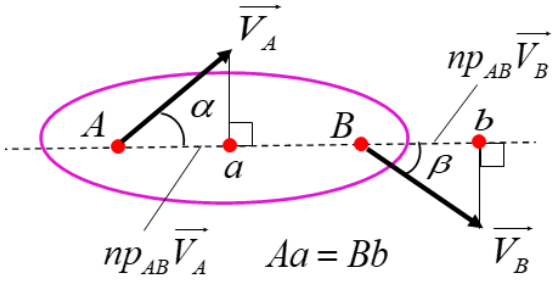


Рис. 2.13

Скористаємося такою залежністю радіусів-векторів точок A і B:

$$\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A} = \overrightarrow{AB} \ \left(\overrightarrow{AB} = \vec{l}\right),$$

де $l = const$ для твердого тіла. Візьмемо обидві частини цього векторного виразу й зведемо до скалярного квадрата:

$$\left(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}\right)\left(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}\right) = \vec{l}^{\,2} = l^2.$$

Диференціюючи за часом цей вираз, що справджується для будь-якого моменту часу, отримаємо

$$2\left(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}\right)\left(\frac{d\overrightarrow{r_B}}{dt} - \frac{d\overrightarrow{r_A}}{dt}\right) = 0.$$

Однак $d\overrightarrow{r_B}/dt = \overrightarrow{V_B}$, $d\overrightarrow{r_A}/dt = \overrightarrow{V_A}$ і $\left(\overrightarrow{r_B} - \overrightarrow{r_A}\right) = \vec{l}$, тоді

$$2\vec{l}\left(\overrightarrow{V_B} - \overrightarrow{V_A}\right) = 0 \text{ або } \vec{l}\cdot\overrightarrow{V_B} = \vec{l}\cdot\overrightarrow{V_A}.$$

Розкриваючи скалярні добутки векторів і скорочуючи на l, отримаємо

$$V_B \cos\beta = V_A \cos\alpha.$$

3. Поступальний рух твердого тіла

Означення. **Поступальним рухом** називають рух твердого тіла, при якому довільна пряма, проведена в тілі, рухається паралельно сама до себе.

Нехай тверде тіло рухається поступально відносно нерухомої системи

координат $Oxyz$ (рис. 2.14). Розглянемо два положення тіла: зліва — у момент t і справа — у момент $t + \Delta t$.

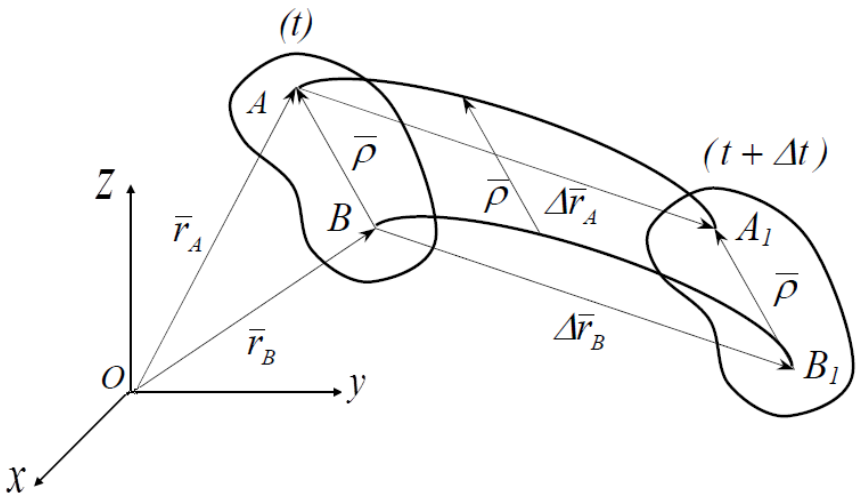


Рис. 2.14

Нехай точка A за час Δt перемістилася в положення A_1, а точка B — в положення B_1. За означенням поступального руху $AB \parallel A_1B_1$. Оскільки відстані між точками абсолютно твердого тіла не змінюються, то $AB = A_1B_1$, тобто $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} = \vec{\rho} = const$.

Позначимо через $\Delta\vec{r}_A = \overrightarrow{AA_1}$ і $\Delta\vec{r}_B = \overrightarrow{BB_1}$ вектори переміщення точок A *і* B за час Δt, тобто $\vec{r}_{A_1} = \vec{r}_A + \Delta\vec{r}_A$ і $\vec{r}_{B_1} = \vec{r}_B + \Delta\vec{r}_B$.

Оскільки $AB \parallel A_1B_1$ і $AB = A_1B_1$, то фігура ABB_1A_1 — паралелограм, тобто

$$\Delta\vec{r}_A = \Delta\vec{r}_B. \qquad (2.39)$$

Під час поступального руху твердого тіла всі його точки мають однакові переміщення.

Визначимо швидкості точок тіла. Радіуси-вектори точок A і B пов'язані співвідношенням

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \qquad (2.40)$$

Здиференціюємо це співвідношення двічі з урахуванням $\vec{\rho} = const$:

$$\frac{d\vec{r}_B}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt}, \text{ або } \vec{V}_B = \vec{V}_A; \tag{2.41}$$

$$\frac{d^2\vec{r}_B}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}_A}{dt^2}, \text{ або } \vec{W}_B = \vec{W}_A. \tag{2.42}$$

При поступальному русі твердого тіла всі його точки: — *мають однакові швидкості й прискорення й описують конгруентні траєкторії*.

Поступальний рух повністю визначається рухом однієї довільної точки тіла, тобто поступальний рух можна задати трьома координатами будь-якої точки тіла, які є функціями часу.

Вивчаючи в попередній лекції кінематику точки, ми одночасно вивчали кінематику поступального руху тіла.

4. Обертальний рух тіла навколо нерухомої осі

Означення. Якщо тверде тіло рухається так, що принаймні дві його точки A і B залишаються нерухомими (рис. 2.15), то рух тіла називають **обертальним навколо нерухомої осі,** а вісь, що проходить через ці точки, — віссю обертання.

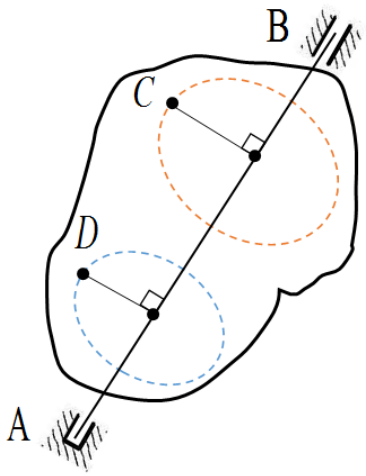


Рис. 2.15

Траєкторіями усіх точок тіла будуть кола з центрами в точках перетину осі обертання й перпендикулярів до неї, проведених від цих точок (точки C, D на рис. 2.15).

Знайдемо кількість необхідних незалежних параметрів для визначення положення твердого тіла, яке здійснює обертальний рух навколо нерухомої осі.

Зв'яжемо з точкою A на осі обертання точку O (початок) нерухомої

прямокутної декартової системи координат $Oxyz$. Положення точок A і B є відомими в цій системі координат. Візьмемо довільну точку C, яка не лежить на осі обертання.

З трьох координат точки C тільки одна координата буде незалежною, оскільки відстані AC і CB під час руху твердого тіла є незмінними, а з цього випливає, що координати будуть пов'язаними такими умовами:

$$\left(x_A - x_C\right)^2 + \left(y_A - y_C\right)^2 + \left(z_A - z_C\right)^2 = AC^2 = const;$$
$$\left(x_B - x_C\right)^2 + \left(y_B - y_C\right)^2 + \left(z_B - z_C\right)^2 = BC^2 = const.$$

Отже, для визначення положення твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі, необхідно задавати один параметр — один ступінь вільності.

Довільна точка M тіла, яка не лежить на осі обертання (рис. 2.16) рухається, описуючи коло з радіусом обертання h і центром на осі обертання. Якщо з тілом скріпити площину π, яка проходить через вісь обертання, то положення тіла однозначно визначається двогранним кутом повороту φ площини π від початкового положення π_0.

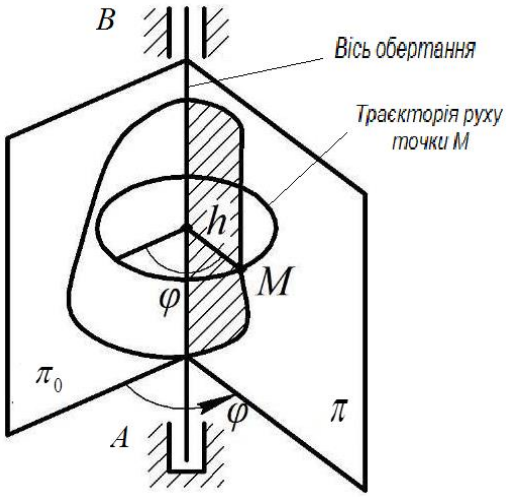


Рис. 2.16

Кінематичне рівняння обертального руху має вигляд

$$\varphi = \varphi\left(t\right). \qquad (2.43)$$

Кут повороту тіла φ вимірюється в радіанах. Відомо, що один оберт відповідає 2π рад.

Запровадимо нерухому систему координат $Ox_1y_1z_1$ так, щоб вісь

Oz сумістилася з віссю обертання, а скріплену з тілом рухому систему координат $Oxyz$ спрямуємо так, щоб вісь Oz збігалася з віссю Oz_1 (рис. 2.17).

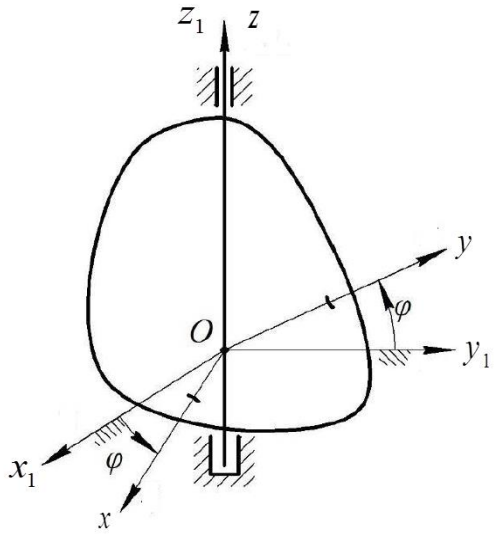


Рис. 2.17

Додатний напрям відліку кута φ відповідає повороту тіла проти ходу годинникової стрілки при погляді на тіло з боку додатного напрямку осі Oz_1. Як видно, додатний напрямок повороту пов'язаний з додатним напрямком осі Oz_1.

5. Кутова швидкість і кутове прискорення тіла, що обертається навколо нерухомої осі

Швидкість змінення функції $\varphi(t)$ називають **кутовою швидкістю** ω тіла.

Нехай у момент часу t кут повороту набув значення $\varphi(t)$, а в момент часу $t+\Delta t$ — $\varphi(t+\Delta t)$. За проміжок часу Δt тіло здійснює поворот на кут $\Delta\varphi = \varphi(t+\Delta t) - \varphi(t)$.

Величину

$$\omega_{ср} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{\varphi(t+\Delta t) - \varphi(\mathrm{t})}{\Delta t} \qquad (2.44)$$

називають **середньою кутовою швидкістю** тіла за проміжок часу Δt.

Щоб знайти кутову швидкість тіла в певний момент часу t, необхідно перейти до границі:

$$\omega = \omega(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \omega_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(t + \Delta t) - \varphi(\mathrm{t})}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}. \quad (2.45)$$

Кутова швидкість тіла в будь-який момент часу дорівнює першій похідній за часом від кута його повороту й характеризує кінематичну міру змінення кута повороту в часі.

Знак кутової швидкості ω визначає напрямок обертання тіла і, своєю чергою, визначається знаком кута повороту φ. Якщо ω > 0, то тіло в певний момент часу обертається в додатному напрямку збільшення кута повороту, тобто проти ходу годинникової стрілки, і навпаки.

Якщо кутова швидкість є сталою величиною, то **обертальний рух тіла буде рівномірним**.

Розмірність кутової швидкості:

$$[\omega] = \frac{1\,рад}{1\,с} = \frac{1}{с} = 1\,с^{-1}.$$

Швидкість змінення функції $\omega(t)$ називають **кутовим прискоренням** ε тіла.

Величину

$$\varepsilon_{ср} = \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(\mathrm{t})}{\Delta t} \quad (2.46)$$

називають **середнім кутовим прискоренням** тіла за проміжок часу Δt.

Щоб знайти кутове прискорення тіла в певний момент часу t, необхідно перейти до границі:

$$\varepsilon = \varepsilon(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon_{ср} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\omega(t + \Delta t) - \omega(\mathrm{t})}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}. \quad (2.47)$$

Кутове прискорення тіла в будь-який момент часу дорівнює першій похідній за часом від кутової швидкості або другій похідній від кута повороту тіла і характеризує кінематичну міру змінення кутової швидкості в часі.

Обертання тіла називають **прискореним,** якщо абсолютне значення кутової швидкості тіла з часом збільшується, і **сповільненим**, якщо $|\omega(t)|$ з часом зменшується.

Розмірність кутового прискорення

$$[\varepsilon]=\frac{1\,рад}{1\,с^2}=\frac{1}{с^2}=1\,с^{-2}.$$

Кутова швидкість ω і кутове прискорення ε твердого тіла часто зображують у вигляді кутових стрілок.

Кутова стрілка кутової швидкість ω відображає напрям збільшення кута повороту φ, тобто напрям обертання твердого тіла навколо нерухомої осі.

Кутова стрілка кутового прискорення ε показує напрямок збільшення кутової швидкості ω.

Вектором кутової швидкості тіла називають вектор $\vec{\omega}=\frac{d\varphi}{dt}\vec{k}$ (рис. 2.18). Його спрямовано вздовж осі обертання в той бік, звідки поворот тіла видно таким, що відбувається проти ходу годинникової стрілки. Точка прикладення вектора $\vec{\omega}$ на осі обертання є довільною, тобто $\vec{\omega}$ — ковзний аксіальний вектор.

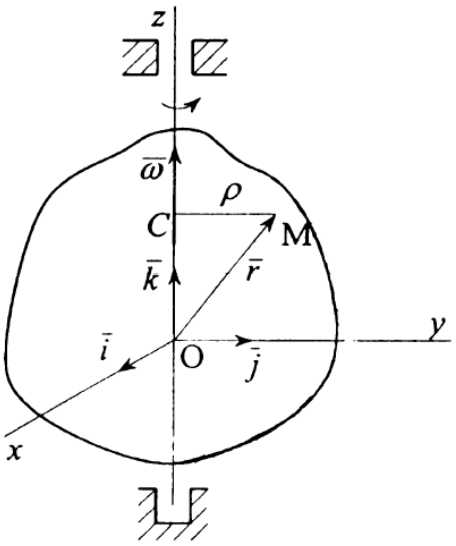


Рис. 2.18

Вектором кутового прискорення тіла називають вектор $\vec{\varepsilon}=\frac{d\vec{\omega}}{dt}=\frac{d\omega}{dt}\vec{k}=\varepsilon\vec{k}$. Напрямок вектора $\vec{\varepsilon}$ збігається з напрямком вектора $\vec{\omega}$, якщо тіло обертається прискорено; напрямок вектора $\vec{\varepsilon}$ є протилежним напрямку вектора $\vec{\omega}$ при сповільненому обертанні (рис. 2.19).

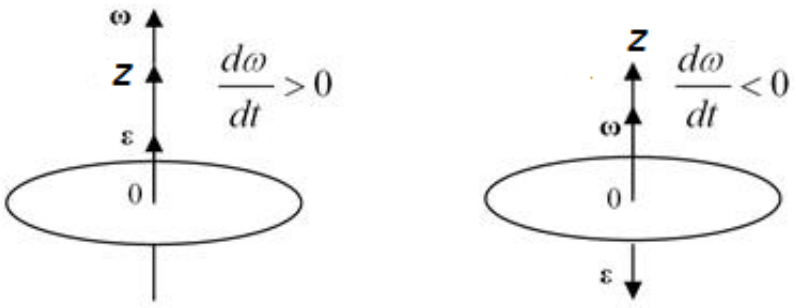


Рис. 2.19

Якщо розглядати різні випадки обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, то напрямки векторів $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ будуть такими, як це показано на рис. 2.20.

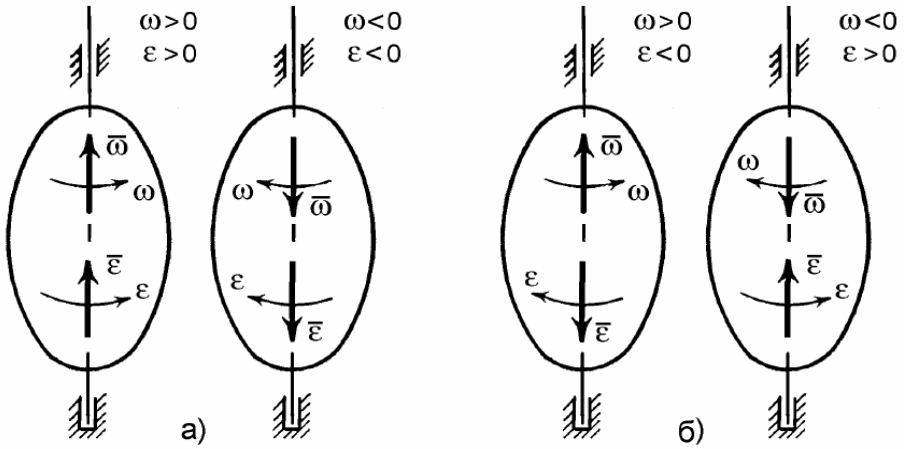


Рис. 2.20

6. Траєкторія, швидкість і прискорення точок тіла, яке обертається навколо нерухомої осі

Визначимо швидкість і прискорення довільної точки твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.

Уведемо нерухому систему координат $Ox_1y_1z_1$ (рис. 2.21). Вісь z_1 збігається з віссю обертання тіла OA. Осі рухомої системи координат $Oxyz$ пов'язані з твердим тілом так, як показано на рис. 2.21, тобто осі z_1 і z збігаються.

Візьмімо довільну точку M твердого тіла, яка не лежіть на осі обертання.

Радіус-вектор точки M у рухомій системі координат має вигляд

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \qquad (2.48)$$

де x, y, z — координати точки M в рухомій системі координат (сталі величини);

$\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орти рухомої системи координат (орти $\vec{i}$ і $\vec{j}$ обертаються, орт $\vec{k}$ — нерухомий).

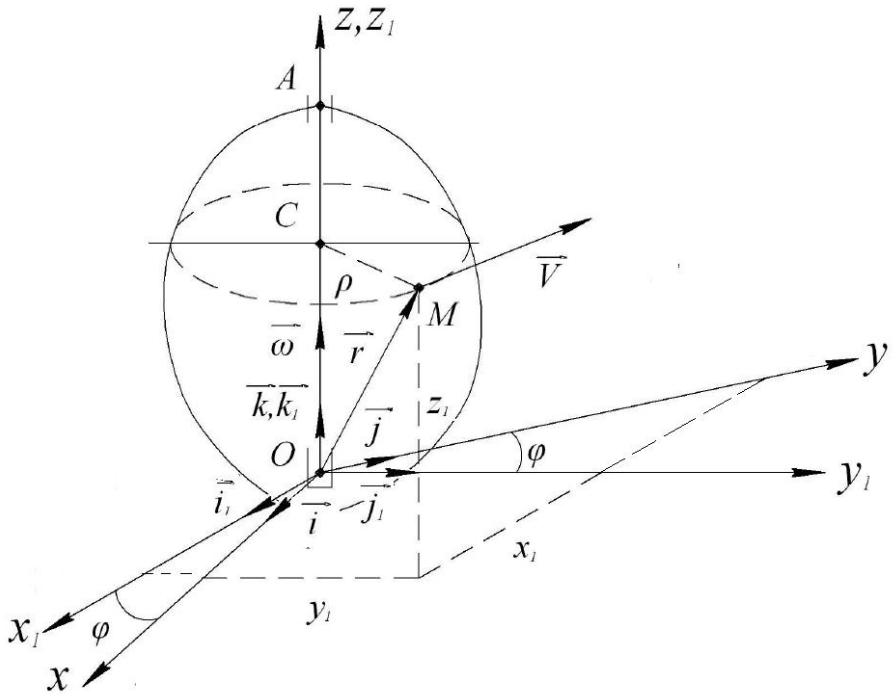


Рис. 2.21

Траєкторія руху точки M тіла в нерухомій системі координат буде колом з центром у точці перетину осі обертання й перпендикуляра, проведеного до неї від цієї точки. Радіус цього кола дорівнює довжині відрізка перпендикуляра CM.

Отже, траєкторіями всіх точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, є кола, які лежать у площинах, перпендикулярних до осі обертання.

Швидкість точки M знаходимо шляхом диференціювання виразу для радіуса-вектора $\vec{r}$:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt}. \qquad (2.49)$$

У (2.49) маємо похідну від орта $\vec{k}$, що дорівнює нулю, тобто $\frac{d\vec{k}}{dt} = 0$ (орт є нерухомим).

Знайдемо похідні $d\vec{i}/dt$ і $d\vec{j}/dt$.

Орти рухомої системи координат можна записати через орти нерухомої:

$$\begin{aligned}\vec{i} &= \cos\varphi\vec{i}_1 + \sin\varphi\vec{j}_1;\\ \vec{j} &= -\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1.\end{aligned} \tag{2.50}$$

Здиференціюємо за часом формули (2.50):

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{i}}{dt} &= \left(-\sin\varphi\vec{i}_1 + \cos\varphi\vec{j}_1\right)\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{j} = \omega_z\vec{j};\\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= \left(-\cos\varphi\vec{i}_1 - \sin\varphi\vec{j}_1\right)\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\vec{i} = -\omega_z\vec{i}.\end{aligned} \tag{2.51}$$

Унаслідок цього диференціювання отримаємо таку формулу для швидкості точки тіла, яке обертається навколо нерухомої осі:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -y\omega_z\vec{i} + x\omega_z\vec{j} = V_x\vec{i} + V_y\vec{j}, \tag{2.52}$$

де $V_y = x\omega_z$ $V_x = -y\omega_z$ — проєкції вектора швидкості точки на осі рухомої системи координат.

Оскільки права частина (2.52) тотожно дорівнює

$$\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 0 & 0 & \omega_z\\ x & y & z\end{vmatrix} = \vec{\omega_z}\times\bar{r},$$

то формулу (2.52) для швидкості точки тіла в обертальному русі навколо нерухомої осі можна подати так:

$$\vec{V} = \vec{\omega}\times\vec{r}\ . \tag{2.53}$$

Це формула Ейлера.

З виразу (2.52) знаходимо вираз для розрахунку модуля лінійної швидкості точки:

$$V = \left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \omega_z \sqrt{y^2 + x^2} = \omega_z \rho, \qquad 2.54)$$

де $\rho = \sqrt{y^2 + x^2}$ — відстань між точками $M\ (x, y, z)$ і $\mathrm{C}\ (0, 0, z)$ (див. рис. 2.20). Іншими словами, ρ є відстанню точки M до осі обертання.

Отже, під час обертання твердого тіла навколо нерухомої осі швидкості точок тіла розподіляються так, що їх модулі є пропорційними відстаням точок до осі обертання.

Поле швидкостей зображено на рис.2.22.

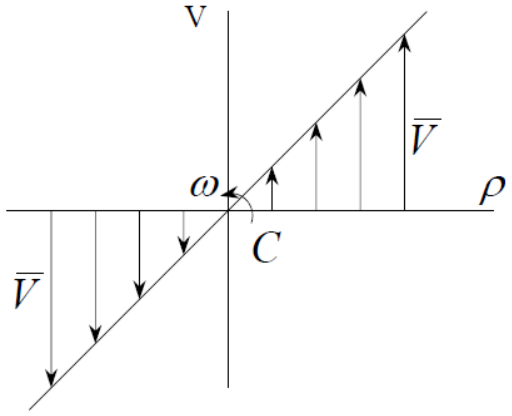


Рис. 2.22

Здиференціюємо за часом обидві частини рівності (2.53):

$$\vec{W} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r} + \vec{\omega} \times \vec{V}. \qquad (2.55)$$

Вектор $\vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ є спрямованим по дотичній до траєкторії руху точки, тобто паралельно до швидкості. Цю складову прискорення називають **дотичним прискоренням**

$$\vec{W_\tau} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}. \qquad (2.56)$$

Вектор $\vec{\omega} \times \vec{V}$ лежить у площині траєкторії руху точки (площина є перпендикулярною до осі обертання) і завжди є спрямованим до осі обертання, тобто по нормалі до траєкторії, і має назву **нормального прискорення**

$$\vec{W_n} = \vec{\omega} \times \vec{V}. \qquad (2.57)$$

Оскільки точка M є точкою твердого тіла, то замість терміна «**дотичне прискорення»** використовують «**обертальне прискорення»** $\overrightarrow{W_{об}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{r}$ і замість «**нормальне прискорення» — «доосьове прискорення»** $\overrightarrow{W_{ос}} = \vec{\omega} \times \vec{V}$.

Числові значення прискорень визначають за формулами

$$W_\tau = W_{об} = \varepsilon\rho\,,\; W_n = W_{ос} = \omega^2\rho\,. \tag{2.58}$$

Кут між векторами прискорень точки *M* обчислюють за виразом

$$tg\,\mu = \frac{W_{об}}{W_{ос}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}\,. \tag{2.59}$$

На рис. 2.23 показано розташування векторів швидкості й прискорення довільної точки M твердого тіла, яке обертається навколо нерухомої осі.

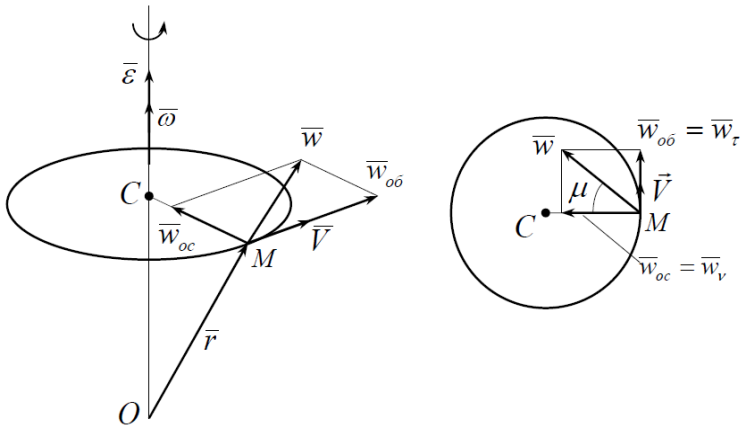


Рис. 2.23

Модуль вектора повного прискорення точки M

$$W = \sqrt{W_{об}^2 + W_{ос}^2} = \sqrt{\varepsilon^2\rho^2 + \omega^4\rho^2} = \rho\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}\,. \tag{2.60}$$

Розглянемо приклад розв’язання задачі про перетворення простих рухів твердих тіл.

Приклад

Два шківи I і II з’єднано нескінченним пасом (рис. 2.24). Радіуси шківів R_1 = 0,25 м і R_2 = 0,5 м. Внутрішній радіус шківа II r_2 = 0,2 м.

Знайти швидкість V точок паса й кутові швидкості обох шківів, якщо рівнянням руху тягаря є $x(t) = 4t^2$ (x — у сантиметрах, t — у секундах).

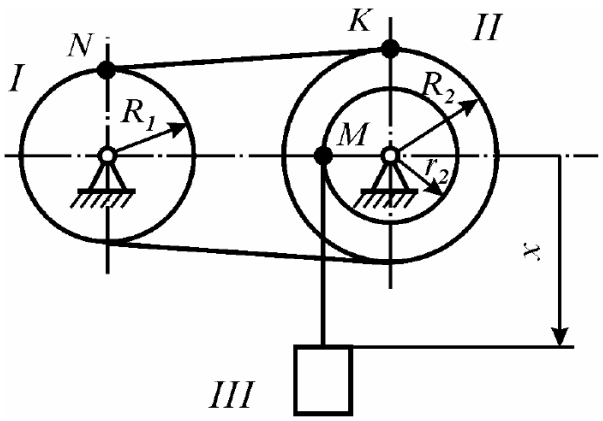


Рис. 2.24

Розв'язання

1. Оскільки трос, на якому підвішено тягар III, є нерозтяжним, швидкість точки M шківа II дорівнює швидкості тягаря III.

2. З рівняння руху тягаря його швидкість визначається формулою

$$V_M = \frac{dx}{dt} = \dot{x} = 8t \; см/с .$$

3. Кутова швидкість обертання шківа II

$$\omega_{II} = \frac{V_M}{r_2} = \frac{8t}{20} = 0,4t \; \text{с}^{-1} .$$

4. Оскільки пас є нерозтяжним і рухається без ковзання, точки обводів шківів мають однакову швидкість: $V_N = V_K = V$, тобто

$$V = \omega_I R_1 = \omega_{II} R_2 = 0,4t \cdot 50 = 20t \;\; см/с ;$$

$$\omega_I = \frac{R_2}{R_1}\omega_{II} = 0,4t \frac{0,5}{0,25} = 0,8t \; \text{с}^{-1} .$$

Відповідь: швидкості точок паса дорівнюють $20t \;\; см/с$, а кутові швидкості шківів — $\omega_I = 0,8t \; \text{с}^{-1}$ і $\omega_{II} = 0,4t \; \text{с}^{-1}$ відповідно.

Запитання для самоконтролю

1. Який рух твердого тіла називають поступальним?
2. Яким є спосіб задання поступального руху твердого тіла?
3. Яку кількість ступенів вільності має тверде тіло, що рухається поступово?
4. Як визначається вектор швидкості довільної точки тіла, що рухається поступово?
5. Як визначається вектор прискорення довільної точки тіла, що рухається поступово?
6. Який рух твердого тіла називають обертальним навколо нерухомої осі?
7. Чи можна звести кінематику поступального руху твердого тіла до кінематики точки?
8. Спосіб задання обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі.
9. Яку кількість ступенів вільності має тверде тіло, що обертається навколо нерухомої осі?
10. Як визначити кутову швидкість і кутове прискорення твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
11. За якою формулою при обчисленні кутової швидкості можна перейти від обертів за хвилину до радіанів за секунду?
12. Яке обертання твердого тіла навколо нерухомої осі називають прискореним?
13. Яке обертання твердого тіла навколо нерухомої осі називають сповільненим?
14. Яке обертання твердого тіла навколо нерухомої осі називають рівнозмінним?
15. Від чого залежіть характер обертання твердого тіла навколо нерухомої осі?
16. Як визначити вектор швидкості довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
17. Як визначити вектор прискорення довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
18. Як визначити величину й напрямок обертального прискорення довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
19. Як визначити величину й напрямок доосьового прискорення довільної точки тіла, що обертається навколо нерухомої осі?
20. Чому під час обертання тіла навколо нерухомої осі обертальна складова прискорення є еквівалентною тангенціальному (дотичному) прискоренню, а нормальна — доосьовому?

Тема 6. ПЛОСКИЙ РУХ ТВЕРДОГО ТІЛА

План лекції

1. Задання плоского руху твердого тіла.
2. Швидкості точок тіла під час плоского руху.
3. Миттєвий центр швидкостей і способи його знаходження.
4. Прискорення точок тіла під час плоского руху.
5. Миттєвий центр прискорень.

1. Задання плоского руху твердого тіла

Означення. Плоским (плоскопаралельним) називають такий рух твердого тіла, під час якого всі його точки рухаються у площинах, паралельних до деякої нерухомої площини, що має назву **основної площини**.

Під час плоского руху тіла будь-яка пряма, перпендикулярна до нерухомої площини π (наприклад, прямі aa', bb' на рис. 2.25), буде здійснювати поступальний рух, отже, усі кінематичні характеристики точок, що лежать на цій прямій, будуть однаковими. Звідси робимо висновок, що для вивчення руху всього тіла достатньо досліджувати, як рухається в площині Oxy переріз цього тіла, що утворює деяку плоску фігуру. Тут площина Oxy є нерухомою й паралельною до площини π.

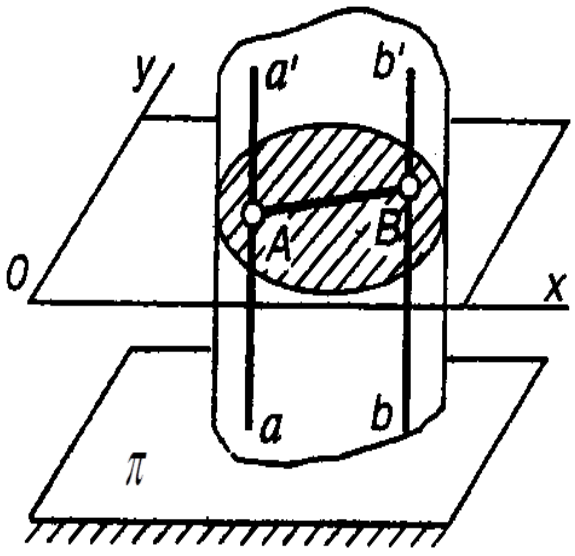


Рис. 2.25

Задання плоского руху тіла зводиться до задання руху одного його плоского перерізу.

Якщо $A(x_A, y_A)$ і $B(x_B, y_B)$ — дві довільні точки плоскої фігури (див. рис. 2.25), то лише *три координати є незалежними*, оскільки відстань AB не змінюється:

$$(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2 = AB^2 = const.$$

Отже, для визначення положення плоского перерізу твердого тіла, яке рухається поступово, необхідно задавати ***три незалежних параметри***.

При введенні третьої точки C уводяться ще дві координати (x_C, y_C) і дві умови, яким мають відповідати ці координати:

$$(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2 + (z_A - z_C)^2 = AC^2 = const;$$
$$(x_B - x_C)^2 + (y_B - y_C)^2 + (z_B - z_C)^2 = BC^2 = const.$$

Таким чином, при заданні трьох параметрів можна визначити положення будь-якої третьої точки за відстанями від перших двох.

Отже, для задання плоского руху твердого тіла необхідно навести три параметри як функції часу.

З плоскою фігурою жорстко зв'яжемо систему координат Axy, яка рухається разом з тілом (рис. 2.26). У точці A введемо систему координат x_2y_2, початок якої переміщується разом з точкою A, а осі залишаються паралельними до осей x_1 і y_1 нерухомої системи координат, тобто ця система здійснює поступальний рух.

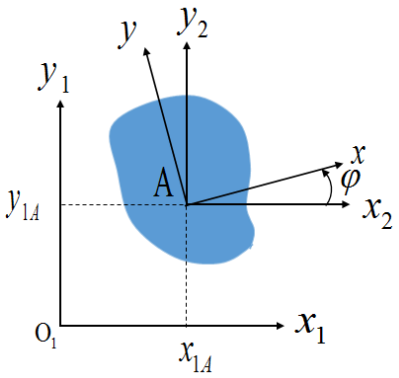


Рис. 2.26

Положення системи Axy, а разом з нею і положення плоскої фігури буде визначено, якщо задати три функції часу: $x_{1A} = x_{1A}(t)$, $y_{1A} = y_{1A}(t)$ і $\varphi = \varphi(t)$.

Ці співвідношення називають ***кінематичним законом плоского руху твердого тіла.***

2. Швидкості точок тіла під час плоского руху

Для задання положення плоскої фигури на площині необхідно визначити три параметри. Для цього вибираємо координати однієї з точок плоскої фігури $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$ у нерухомій системі координат $O_1x_1y_1$ і кут повороту $\varphi = \varphi(t)$ осей рухомої системи координат Axy відносно осі x_1 (рис. 2.27).

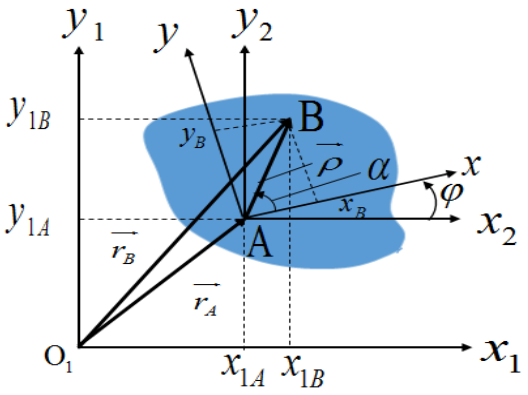


Рис. 2.27

Точку A, яку вибрано для визначення положення плоскої фігури, називають **полюсом**.

Знайдемо положення довільної точки B плоскої фігури. Положення цієї точки в нерухомій системі координат визначається радіусом-вектором $\vec{r}_B$. У рухомій системі координат Axy положення точки B задається радіусом-вектором $\vec{\rho}$. Модуль радіуса-вектора $\vec{\rho}$ як відстань між двома точками твердого тіла з плином часу не змінюється. Положення точки A в нерухомій системі координат визначається радіусом-вектором $\vec{r}_A$. Ці вектори зв'язані між собою співвідношенням

$$\vec{r}_B = \vec{r}_A + \vec{\rho}. \qquad (2.61)$$

Як можна побачити з рис. 2.27, координати x_B і y_B точки B у нерухомій системі координат $O_1x_1y_1$ є такими:

$$x_{1B} = x_{1A} + \rho\cos(\alpha+\varphi);\ \ y_{1B} = y_{1A} + \rho\sin(\alpha+\varphi). \qquad (2.62)$$

Ураховуючи, що

$$\rho = \frac{x_B}{\cos(\alpha)},\ \rho = \frac{y_B}{\sin(\alpha)},$$

і підставляючи у вираз (2.62) ці величини, а також тригонометричні функції суми двох кутів, маємо

$$x_{1B} = x_{1A} + \frac{x_B}{\cos(\alpha)}\left(\cos\alpha\cos\varphi - \sin\alpha\sin\varphi\right);$$

$$\mathrm{y}_{1B} = y_{1A} + \frac{y_B}{\sin(\alpha)}\left(\cos\alpha\sin\varphi + \sin\alpha\cos\varphi\right).$$

Після відповідних скорочень

$$x_{1B} = x_{1A} + x_B\cos(\varphi) - \mathrm{y}_B\sin(\varphi);$$

$$\mathrm{y}_{1B} = y_{1A} + x_B\sin(\varphi) + \mathrm{y}_B\cos(\varphi).$$

Ураховуючи, що координати й кут φ є функціями часу, остаточно маємо

$$\begin{aligned} x_{1B}(t) &= x_{1A}(t) + x_B(t)\cos(\varphi(t)) - \mathrm{y}_B(t)\sin(\varphi(t)); \\ \mathrm{y}_{1B}(t) &= y_{1A}(t) + x_B(t)\sin(\varphi(t)) + \mathrm{y}_B(t)\cos(\varphi(t)). \end{aligned} \qquad (2.63)$$

Рівняння (2.63) є кінематичними рівняннями руху довільної точки тіла (фігури) у її площині й означає, що рух плоскої фігури в її площині є сукупністю двох рухів: поступального, при якому всі точки рухаються так само, як і полюс A, і обертального навколо цього полюса (при цьому фігура обертається навколо осі, що проходить через точку A перпендикулярно до площини руху фігури).

Отже, три функції часу $x_{1A} = x_{1A}(t)$, $y_{1A} = y_{1A}(t)$ і $\varphi = \varphi(t)$ визначають положення плоскої фігури на площині. Перші дві функції описують такий рух, який фігура здійснювала би при $\varphi = const$, тобто якби відрізок AB переміщувався паралельно самому собі. Третя функція описує такий рух, який фігура здійснювала би при $x_{1A} = const$, $y_{1A} = const$, тобто якби точка A залишалась нерухомою.

Здиференціюємо за часом рівність (2.61):

$$\frac{d\vec{r_B}}{dt} = \frac{d\vec{r_A}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \tag{2.64}$$

У цьому виразі $\frac{d\vec{r_B}}{dt} = \overrightarrow{V_B}$ — швидкість точки B; $\frac{d\vec{r_A}}{dt} = \overrightarrow{V_A}$ — швидкість точки A; $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \overrightarrow{V_{BA}} = \frac{d}{dt}\left(\rho_x\vec{i} + \rho_y\vec{j} + \rho_z\vec{k}\right) = \rho_x\frac{d\vec{i}}{dt} + \rho_y\frac{d\vec{j}}{dt} + \rho_z\frac{d\vec{k}}{dt}$ = $= \left(\rho_x\vec{j} - \rho_y\vec{i}\right)\omega_A$ — швидкість точки B фігури відносно точки A, де $\omega_A = \dot{\varphi}$.

Таким чином,

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{BA}}. \tag{2.65}$$

Швидкість $\overrightarrow{V_{BA}}$ визначається за величиною і напрямком так само, якби тіло здійснювало обертальний рух навколо нерухомої осі, що проходить через точку A, тобто

$$\overrightarrow{V_{BA}} = \overrightarrow{\omega_A} \times \vec{\rho} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & \omega_A \\ \rho_x & \rho_y & 0 \end{vmatrix} = -\omega_A\rho_y\vec{i} + \omega_A\rho_x\vec{j}.$$

Скориставшись цією формулою, виразимо швидкість однієї точки через швидкість іншої:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{\omega_A} \times \vec{\rho}. \tag{2.66}$$

Швидкість довільної точки плоскої фігури дорівнює векторній сумі швидкості полюса та швидкості цієї точки в обертальному русі фігури навколо полюса.

Перший доданок у виразі (2.65) визначає поступальну швидкість фігури разом із полюсом, другий — відносну швидкість точки в обертальному русі фігури навколо полюса.

Із властивостей векторного добутку випливає, що $\overrightarrow{V_{BA}} \perp \overrightarrow{AB}$.

Під час розв'язання задач кінематики плоского руху за полюс звичайно вибирають точку з відомим з умови задачі вектором швидкості.

Геометричне пояснення рівняння (2.66) зображено на рис. 2.28.

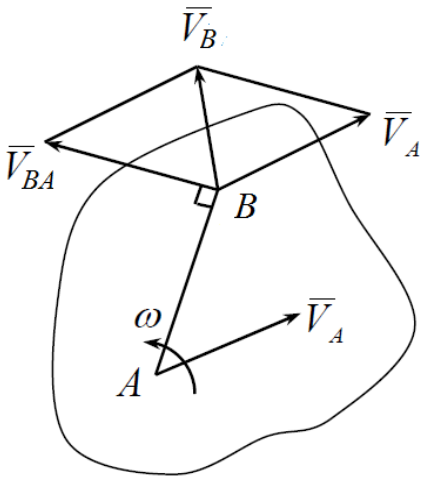


Рис. 2.28

Знайдемо швидкість точки B, узявши за полюс точку A, і швидкість точки A, узявши за полюс точку B:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{\omega_A} \times \vec{\rho},\ \overrightarrow{V_A} = \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{\omega_B} \times (-\vec{\rho}).$$

Складемо ці вирази й отримаємо таке рівняння:

$$(\overrightarrow{\omega_A} - \overrightarrow{\omega_B}) \times \vec{\rho} = 0.$$

Вектори $(\overrightarrow{\omega_A} - \overrightarrow{\omega_B})$ і $\vec{\rho}$ паралельними бути не можуть, а це означає, що векторний добуток може дорівнювати нулю, якщо

$$(\overrightarrow{\omega_A} - \overrightarrow{\omega_B}) = 0, \text{ тобто } \overrightarrow{\omega_A} = \overrightarrow{\omega_B} = \vec{\omega}.$$

Надалі індекс полюса вказувати не будемо.

Таким чином, кутова швидкість твердого тіла не залежить від вибору полюса.

Під час плоского руху проєкції швидкостей двох точок тіла на вісь, що проходить через ці точки, є однаковими:

$$(\overrightarrow{V_B})_{пр.AB} = (\overrightarrow{V_A})_{пр.AB} + (\overrightarrow{\omega_A} \times \vec{\rho})_{пр.AB} \ \rightarrow\ (\overrightarrow{V_B})_{пр.AB} = (\overrightarrow{V_A})_{пр.AB}$$

Доказ цього векторного співвідношення грунтується на загальній теоремі, яку було розглянуто на лекції 5 (див. рис. 2.13).

3. Миттєвий центр швидкостей і способи його знаходження

З аналізу співвідношення між швидкостями двох точок твердого тіла випливає, що принципово можливим є існування точки, швидкість якої в певний момент часу дорівнює нулю.

Означення. *Миттєвим центром швидкостей називають точку рухомої плоскої фігури* P*, швидкість якої в певний момент часу дорівнює нулю*.

Для знаходження миттєвого центра швидкостей необхідно знати напрямки швидкостей двох точок плоскої фігури. Для отримання картини розподілу швидкостей плоскої фігури в певний момент часу необхідно знати швидкість однієї точки й напрямок вектора швидкості іншої точки фігури.

Отже, якщо положення миттєвого центра швидкостей (МЦШ) і швидкість однієї з точок фігури є відомими, то можна визначати величину й напрямок швидкості будь-якої іншої точки плоскої фігури.

У певний момент часу швидкості точок рухомої плоскої фігури розподілено так, немов відбувається обертання фігури з кутовою швидкістю ω навколо осі, що проходить через точку P (МЦШ) (рис. 2.29).

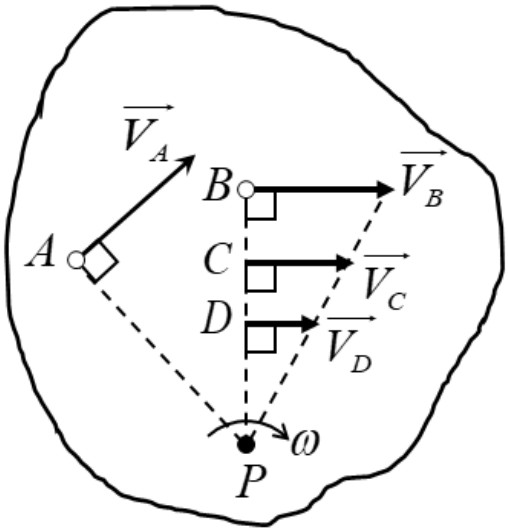


Рис. 2.29

Розглянемо окремі випадки визначення положення миттєвого центра швидкостей.

1. Миттєвий центр швидкостей фігури розміщено на перпендикулярі, який проведено до вектора швидкості деякої точки фігури (рис. 2.30).

2. Миттєвий центр швидкостей фігури знаходиться в точці перетину двох перпендикулярів, які проведено з двох точок фігури до векторів швидкостей цих точок (рис. 2.31).

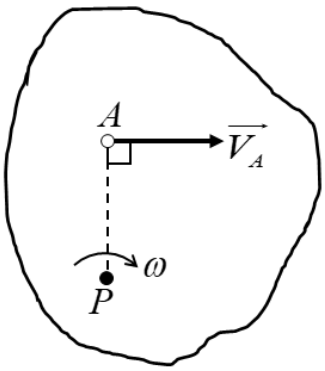


Рис. 2.30

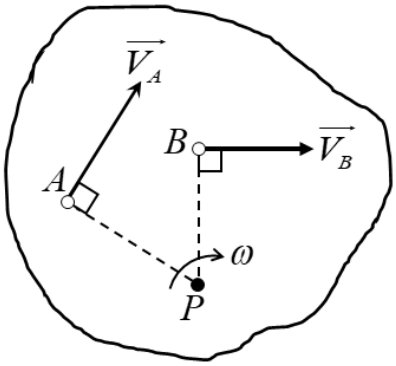


Рис. 2.31

3. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури є паралельними (рис. 2.32), а самі точки не розміщено на одному перпендикулярі до векторів їх швидкостей, то обертання в цей момент немає і фігура здійснює «миттєво-поступальний» рух, а швидкості усіх точок фігури є однаковими. Це є ознакою миттєво-поступального руху тіла.

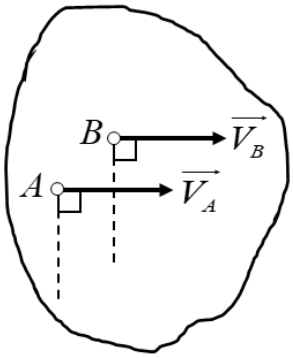


Рис. 2.32

Зазначимо, що миттєво-поступальний і «дійсно» поступальний рухи мають відмінності. Під час поступального руху має місце рівність швидкостей і прискорень усіх точок тіла на кінцевому проміжку часу. У разі миттєво-поступального руху однаковими є лише швидкості точок тіла і тільки в заданий час, тобто лише в певну мить.

4. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури є паралельними, напрямленими в один і той самий бік (рис. 2.33), їх відкладено в певному масштабі, точки розміщено на одному перпендикулярі до векторів їх швидкостей, а модулі швидкостей не є однакові\ими, то миттєвий центр швидкостей розміщується в точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей, з проведеним перпендикуляром.

Тоді, як бачимо з рис. 2.33, можна записати:

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{AP}{BP}.$$

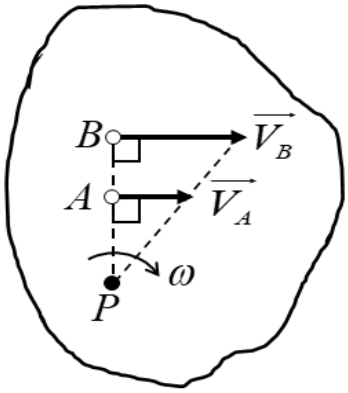


Рис. 2.33

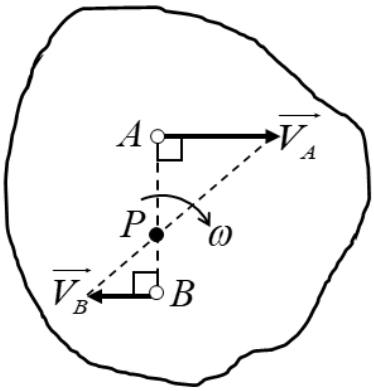


Рис.2.34

5. Якщо вектори швидкостей двох точок фігури є паралельними, напрямленими в різні боки (рис. 2.34), їх відкладено в певному масштабі, точки розміщено на одному перпендикулярі до напрямків їх швидкостей (модулі швидкостей можуть бути однаковими або різними), то миттєвий центр швидкостей також (як у п. 4) розміщено в точці перетину прямої, що з'єднує кінці векторів швидкостей, з проведеним перпендикуляром.

6. У разі кочення фігури (наприклад, колеса) без проковзування по деякій нерухомій лінії миттєвим центром швидкостей є точка контакту фігури з цією лінією (рис. 2.35), а швидкості всіх точок будуть обертальними навколо точки дотику P: $\overrightarrow{V_A} \perp PA$; $\overrightarrow{V_B} \perp PB$; $\overrightarrow{V_C} \perp PC$; $\overrightarrow{V_D} \perp PD$.

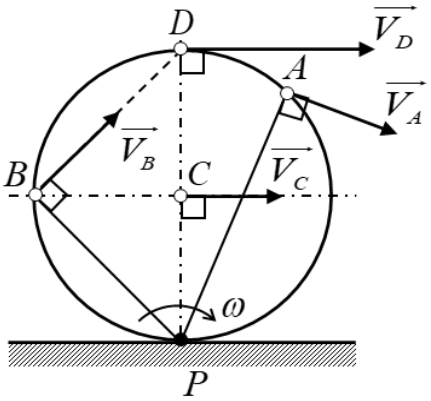


Рис. 2.35

Кутова швидкість фігури в кожний певний момент часу дорівнює відношенню модуля швидкості будь-якої точки фігури й відстаней до миттєвого центра швидкостей:

$$\omega = \frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_C}{CP} = \frac{V_D}{DP}.$$

Сукупність миттєвих центрів швидкостей, віднесених до нерухомої системи координат, називають **нерухомою центроїдою**, а до рухомої системи координат — **рухомою центроїдою**.

Так, на рис. 2.36 нерухомою центроїдою є пряма KN, а рухомою — коло радіусом CP.

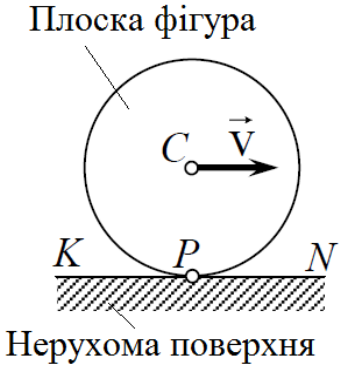


Рис. 2.36

Плоский рух, як випливає з означення центроїда, можна подати як кочення без ковзання рухомої центроїди по нерухомій.

4. Прискорення точок тіла під час плоского руху

Для визначення прискорення точки твердого тіла, рух якого є плоским, здиференціюємо за часом співвідношення для швидкостей $\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}$:

$$\frac{d\overrightarrow{V_B}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{V_A}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt},$$

де $\frac{d\overrightarrow{V_B}}{dt} = \overrightarrow{W_B}$ — прискорення точки B; $\frac{d\overrightarrow{V_A}}{dt} = \overrightarrow{W_A}$ — прискорення точки A; $\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \overrightarrow{V_{BA}}$ — швидкість точки B фігури в її обертальному русі відносно точки A; $\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\vec{k}\right) = \frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{k}$ — кутове прискорення.

Таким чином,

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{V_{BA}} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}}, \qquad (2.67)$$

де $\overrightarrow{W_{BA}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \overrightarrow{V_{BA}} = \overrightarrow{W_{BA}^{\tau}} + \overrightarrow{W_{BA}^{n}}$ — прискорення точки B фігури в її обертальному русі відносно точки A; $\overrightarrow{W_{BA}^{\tau}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}$ — дотичне (тангенціальне) прискорення, вектор якого є напрямленим перпендикулярно до вектора $\vec{\rho}$; $\overrightarrow{W_{BA}^{n}} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{V_{BA}} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho} \right)$ — нормальне (доцентрове) прискорення, вектор якого є напрямленим завжди від точки B до точки A.

Для точок твердого тіла замість дотичного прискорення використовують термін **обертального прискорення**, тоді $\overrightarrow{W_{BA}^{об}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho}$, замість нормального прискорення — термін **доосьового прискорення**, і тоді $\overrightarrow{W_{BA}^{ос}} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{V_{BA}} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho} \right)$.

Отже, для прискорень точок твердого тіла, рух якого є плоским, маємо таке співвідношення:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^{об}} + \overrightarrow{W_{BA}^{ос}}. \qquad (2.68)$$

Прискорення будь-якої точки B плоскої фігури дорівнює сумі прискорення якої-небудь іншої точки A, взятої за полюс, і відносного прискорення, якого точка B набуває під час обертання фігури навколо цього полюса.

Модулі прискорень будуть такими:

$$W_{BA}^{\tau} = W_{BA}^{об} = \varepsilon\rho = \varepsilon AB; \qquad (2.69)$$

$$W_{BA}^{n} = W_{BA}^{ос} = \omega^2\rho = \omega^2 AB; \qquad (2.70)$$

$$W_{BA} = \sqrt{\left(W_{BA}^{\tau}\right)^2 + \left(W_{BA}^{n}\right)^2} = \sqrt{\left(W_{BA}^{об}\right)^2 + \left(W_{BA}^{ос}\right)^2} = AB\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}. \qquad (2.71)$$

Кут між вектором $\overrightarrow{W_{BA}}$ і напрямком на полюс A визначають за формулою

$$tg\alpha = \frac{W_{BA}^{об}}{W_{BA}^{ос}} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}. \qquad (2.72)$$

Кут α може змінюватися в межах від 0 до $\pi/2$ і *не залежить від вибору полюса A й точки B, а залежить від кінематичних характеристик*

обертального руху тіла. Кут α відкладається від вектора $\overrightarrow{W_{BA}}$ до прямої AB за напрямком обертання плоскої фігури, якщо $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\omega}$ є напрямленими в один бік, і в протилежному напрямку, якщо $\vec{\varepsilon}$ і $\vec{\omega}$ є напрямленими в різні боки (рис. 2.37).

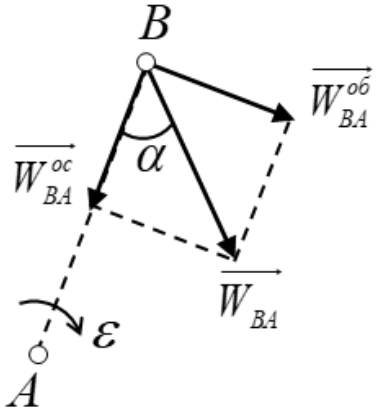


Рис. 2.37

На рис. 2.38 показано геометричне зображення векторного рівняння (2.68).

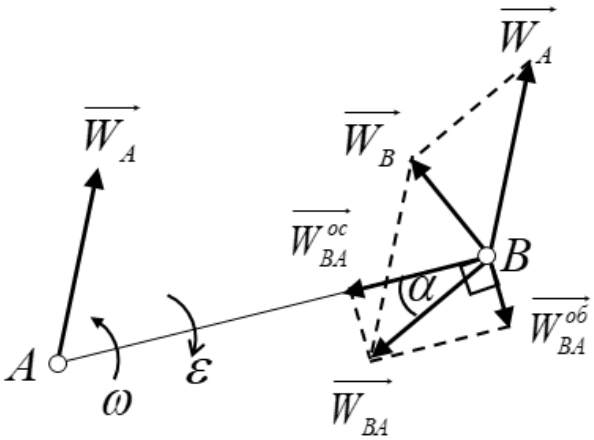


Рис. 2.38

5. Миттєвий центр прискорень

З теореми про розподіл прискорень точок плоскої фігури випливає, що у випадках, коли ω і ε одночасно не дорівнюють нулю, існує така точка площини руху, прискорення якої в певний момент часу дорівнює нулю.

Цю точку називають **миттєвим центром прискорень** (МЦП) і позначають буквою Q.

Якщо за полюс вибрати точку Q (припустивши, що миттєвий центр прискорень існує), то вираз (2.68) набуде вигляду

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_Q} + \overrightarrow{W_{BQ}} = \overrightarrow{W_{BQ}^{об}} + \overrightarrow{W_{BQ}^{ос}}, \qquad (2.73)$$

тобто прискорення будь-якої точки в певний момент часу тепер можна знайти так само, як і при обертанні тіла навколо нерухомої осі. Вектор прискорення довільної точки A утворює визначений за (2.72) кут α з прямою, що з'єднує цю точку з миттєвим центром прискорень Q (рис. 2.39).

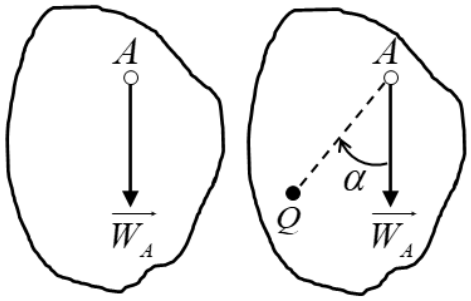


Рис. 2.39

Щоб знайти положення миттєвого центра прискорень, обчислимо його відстань від точки B, скориставшись формулою

$$BQ = \frac{W_B}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

На рис. 2.40 показано розподіл прискорень точок A і B плоскої фігури, коли миттєвим центром прискорень є точка Q.

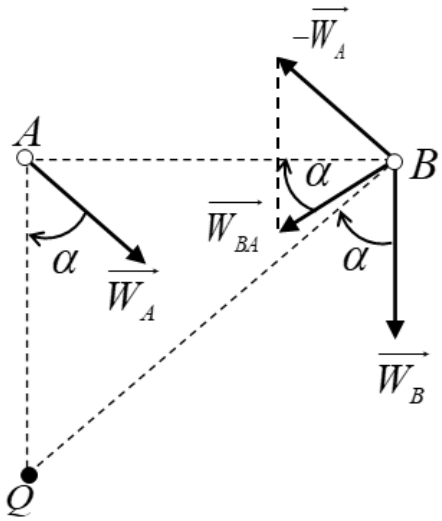


Рис. 2.40

Запитання для самоконтролю

1. Який рух твердого тіла називають плоским?
2. Спосіб задання плоского руху твердого тіла.
3. Як записують кінематичні рівняння плоского руху твердого тіла?
4. Яку кількість ступенів вільності має тверде тіло, що здійснює плоский рух?
5. Чи можна розглядати плоский рух твердого тіла як складний?
6. Чи залежіть обертальна частина плоского руху твердого тіла від вибору полюса?
7. Як визначити вектор швидкості довільної точки твердого тіла, що здійснює плоский рух?
8. Як визначити вектор прискорення довільної точки твердого тіла, що здійснює плоский рух?
9. Чому дорівнюють проєкції швидкостей кінців незмінного відрізку на його напрямок?
10. Що таке миттєвий центр швидкостей під час плоского руху твердого тіла?
11. Які є способи знаходження миттєвого центра швидкостей під час плоского русу твердого тіла?
12. Як визначити вектор прискорення довільної точки твердого тіла, що здійснює плоский рух?
13. Що таке миттєвий центр прискорень під час плоского руху твердого тіла?
14. Як визначити положення миттєвого центра прискорень під час плоского руху твердого тіла?

Лекція 7. СКЛАДНИЙ РУХ ТОЧКИ

План лекції

1. Абсолютний, відносний і переносний рухи точки.
2. Диференціювання вектора, заданого в рухомій системі координат.
3. Теорема про додавання швидкостей.
4. Теорема про додавання прискорень (теорема Коріоліса).
5. Прискорення Коріоліса.
6. Випадки перетворення на нуль коріолісового прискорення.
7. Методика розв’язання задач на складний рух точки.

1. Абсолютний, відносний і переносний рухи точки

На першій лекції з кінематики (лекція 5) було сформульовано принцип відносності руху, згідно з яким механічні рухи в просторі й часі мають різний вигляд у різних координатних системах. Спостерігачі, пов’язані з різними системами координат, сприймають по-різному один і той самий об’єктивний механічний рух.

Наприклад, частина студентів однієї групи після закінчення занять повертається додому на тролейбусі. При цьому одні студенти сидять на сидіннях, а інші переміщуються по салону. Інша частина студентів стоїть на зупинці, повз яку проїжджає тролейбус, і спостерігає за тими студентами, що переміщуються по салону. Зрозуміло, що рух цих студентів відносно тих, які сидять в салоні, і тих, які стоять на зупинці, є різним.

Будь який рух тіла або точки є завжди ***відносним***, тобто його можна розглядати й вивчати лише відносно інших фізичних тіл і пов’язаних з ними систем відліку.

Поки що ми вивчали рух точки або тіла відносно однієї заданої умовно нерухомої системи відліку. Однак у деяких випадках для розв’язання задач механіки доцільно (а іноді й необхідно) розглядати рух точки або тіла одночасно відносно двох систем відліку, одну з яких беруть умовно нерухомою, а іншу такою, що деяким чином рухається відносно першої. Рух, який здійснює при цьому точка або тіло, називають ***складним рухом***.

Означення. **Складним**, або **абсолютним**, **рухом** точки називають її рух відносно умовно нерухомої системи координат.

Означення. **Відносним рухом** точки називають її рух відносно рухомої системи координат.

Означення. **Переносним рухом** називають рух рухомої системи координат відносно нерухомої.

Нехай з тролейбусною зупинкою пов'язана нерухома система координат, а з тролейбусом — рухома. Рух студентів по салону

тролейбуса відносно студентів, які сидять, буде *відносним*, а відносно тих, які стоять на зупинці, — *абсолютним.* Рух тролейбуса, з яким зв'язана рухома система координат, буде *переносним*.

У чому полягає аналіз складного руху точки, показано на рис. 2.41.

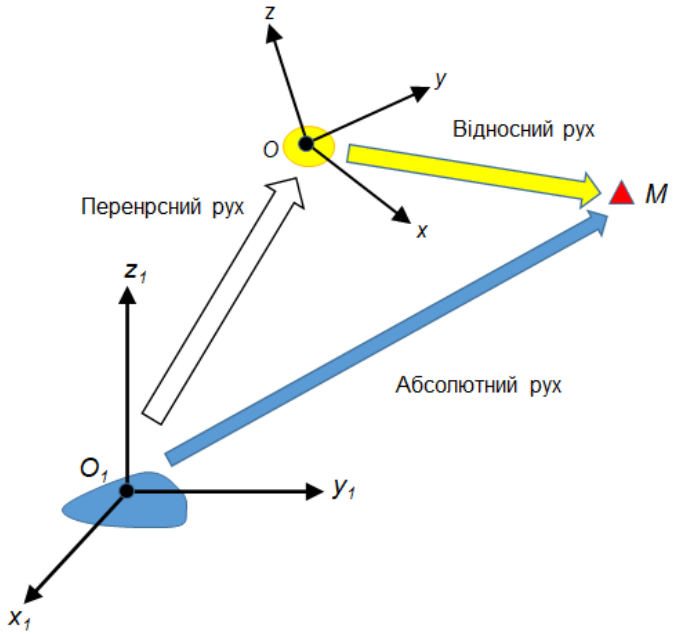


Рис. 2.41

Є дві системи координат: перша — нерухома система координат $O_1x_1y_1z_1$, яка зв’язана с тілом відліку в точці O_1, друга — рухома $Oxyz$, яка зв’язана с тілом відліку в точці O. Тіло відліку рухомої системи рухається відносно тіла відліку нерухомої. Цей рух називають ***переносним***. Рух точки відносно нерухомої системи називають ***абсолютним***, а її рух відносно рухомої — ***відносним***.

Отже,

<*Абсолютний рух*> = <Переносний рух> + <Відносний рух>.

2. Диференціювання вектора, заданого в рухомій системі координат

Розглянемо вектор, визначений в рухомій системі координат:

$$\vec{A}(t) = A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k},$$

де $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орти рухомої системи координат, які змінюють свій напрямок с плином часу t; A_x, A_y, A_z — проєкції вектора на осі рухомої системи координат, які є функціями часу t.

Абсолютну похідну вектора за часом визначають за формулою

$$\frac{d\vec{A}(t)}{dt}=\frac{dA_x}{dt}\vec{i}+\frac{dA_y}{dt}\vec{j}+\frac{dA_z}{dt}\vec{k}+A_x\frac{d\vec{i}}{dt}+A_y\frac{d\vec{j}}{dt}+A_z\frac{d\vec{k}}{dt}.$$

Сума перших трьох доданків визначає похідну вектора в рухомій системі координат, оскільки в ній координат функціями часу будуть тільки проєкції вектора $\vec{A}(t)$, а рух самої системи ніяк не виявляється на її ортах, тобто орти є постійними. Цю суму називають **відносною**, або **локальною**, **похідною**:

$$\frac{\tilde{d}\vec{A}(t)}{dt}=\frac{dA_x}{dt}\vec{i}+\frac{dA_y}{dt}\vec{j}+\frac{dA_z}{dt}\vec{k}.$$

Похідні рухомих ортів за часом в окремому випадку було розглянуто під час вивчення обертання твердого тіла відносно нерухомої осі. Загалом у просторовому випадку маємо

$$\frac{d\vec{i}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{i},\ \frac{d\vec{j}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{j},\ \frac{d\vec{k}}{dt}=\vec{\omega}\times\vec{k},$$

де $\vec{\omega}$ — вектор кутової швидкості рухомої системи координат.

З урахуванням цих виразів суму останніх трьох доданків запишемо у вигляді

$$A_x\frac{d\vec{i}}{dt}+A_y\frac{d\vec{j}}{dt}+A_z\frac{d\vec{k}}{dt}=A_x\vec{\omega}\times\vec{i}+A_y\vec{\omega}\times\vec{j}+A_z\vec{\omega}\times\vec{k}=$$
$$=\vec{\omega}\times\left(A_x\vec{i}+A_y\vec{j}+A_z\vec{k}\right)=\vec{\omega}\times\vec{A}\ .$$

Отже, похідна вектора за часом, заданого в рухомій системі координат,

$$\frac{d\vec{A}}{dt}=\frac{\tilde{d}\vec{A}(t)}{dt}+\vec{\omega}\times\vec{A}.$$

3. Теорема про додавання швидкостей

Розглянемо рух точки M, спостерігаючи його одночасно з нерухомої $O_1x_1y_1z_1$ і рухомої $Axyz$ систем координат (рис. 2.42).

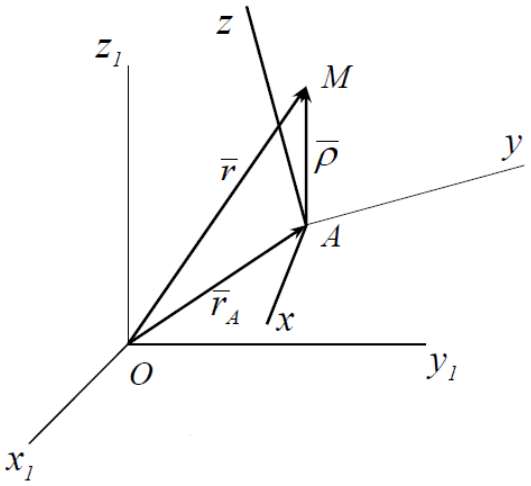


Рис. 2.42

Положення точки M у нерухомій системі координат визначається радіусом-вектором $\vec{r}$, а в рухомій — радіусом-вектором $\vec{\rho}$. Положення точки A — початок рухомої системи координат, у нерухомій визначається радіусом-вектором $\vec{r_A}$. Ці вектори зв'язані між собою співвідношенням

$$\vec{r} = \vec{r_A} + \vec{\rho}. \tag{2.74}$$

Здиференціюємо за часом рівність (2.74):

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r_A}}{dt} + \frac{d\vec{\rho}}{dt}. \tag{2.75}$$

Вектор $\vec{\rho}$ задано в рухомій системи координат, отже,

$$\frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}, \tag{2.76}$$

де $\vec{\omega}$ — вектор кутової швидкості рухомої системи координат.

Відносна похідна радіуса-вектора точки $\vec{\rho}$ визначає відносну швидкість точки, тобто в рухомій системі координат її швидкість

$$\vec{V_r} = \frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}, \tag{2.77}$$

де x, y, z — проєкції радіуса-вектора $\vec{\rho}$ на осі рухомої системи координат; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ — орти рухомої системи координат.

Похідною за часом t радіуса-вектора $\vec{r_A}$ є швидкість точки A або початку рухомої системи координат $Axyz$ відносно нерухомої $O_1x_1y_1z_1$:

$$\vec{V_A} = d\vec{r_A}/dt. \tag{2.78}$$

З урахуванням формул (2.77) і (2.78) маємо вираз для абсолютної швидкості точки M:

$$\vec{V} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} + \vec{V_r}. \tag{2.79}$$

Сума перші двох доданків у (2.79) визначає швидкість точки, яка зв'язана з рухомою системою координат і в якій у певний момент часу перебуває точка M:

$$\vec{V_e} = \vec{V_A} + \vec{\omega} \times \vec{\rho}. \tag{2.80}$$

Цю швидкість називають **переносною швидкістю**.

Таким чином, *абсолютна швидкість* точки, яка здійснює складний рух, визначається формулою

$$\vec{V} = \vec{V_e} + \vec{V_r}. \tag{2.81}$$

Теорема про додавання швидкостей. *Абсолютна швидкість матеріальної точки під час складного руху дорівнює векторній сумі її переносної й відносної швидкостей***.**

Модуль абсолютної швидкості руху матеріальної точки визначають за теоремою косинусів

$$V = \left|\vec{V}\right| = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2V_eV_r\cos(\vec{V_e} \wedge \vec{V_r})}.$$

4.Теорема про додавання прискорень(теорема Коріоліса)

Здиференціюємо за часом рівність (2.81):

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V_e}}{dt} + \frac{d\vec{V_r}}{dt} = \frac{d\vec{V_A}}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \frac{d\vec{\rho}}{dt} + \frac{d\vec{V_r}}{dt}. \tag{2.82}$$

У цій формулі $\frac{d\vec{V}_r}{dt}$ є похідною за часом *t* вектора відносної швидкості точки $\vec{V}_r$, який визначено в рухомій системі координат, тобто

$$\frac{d\vec{V}_r}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{V}_r}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r, \tag{2.83}$$

де $\frac{\tilde{d}\vec{V}_r}{dt}$ — відносна похідна швидкості точки в рухомій системі координат, яка є відносним прискоренням

$$\vec{W}_r = \frac{\tilde{d}\vec{V}_r}{dt} = \frac{dV_{rx}}{dt}\vec{i} + \frac{dV_{ry}}{dt}\vec{j} + \frac{dV_{rz}}{dt}\vec{k} = \frac{d^2x}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}. \tag{2.84}$$

Розглянемо похідну $d\vec{V}_e/dt$. Ураховуючи, що

$$\frac{d\vec{V}_A}{dt} = \vec{W}_A, \ \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{\varepsilon}, \ \frac{d\vec{\rho}}{dt} = \frac{\tilde{d}\vec{\rho}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{\rho} = \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho},$$

одержуємо такий результат:

$$\frac{d\vec{V}_e}{dt} = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}\right). \tag{2.85}$$

З урахуванням виразів (2.83), (2.84) і (2.85) отримаємо для абсолютного прискорення таке співвідношення:

$$\vec{W} = \vec{W}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{V}_r + \vec{\omega} \times \vec{\rho}\right) + \vec{W}_r + \vec{\omega} \times \vec{V}_r.$$

Перетворимо цю формулу:

$$\begin{aligned} \vec{W} &= \vec{W}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \vec{V}_r + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}\right) + \vec{W}_r + \vec{\omega} \times \vec{V}_r = \\ &= \vec{W}_A + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}\right) + \vec{W}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r = \\ &= \vec{W}_e + \vec{W}_r + 2\vec{\omega} \times \vec{V}_r, \end{aligned} \tag{2.86}$$

де $\overrightarrow{W_e} = \overrightarrow{W_A} + \vec{\varepsilon} \times \vec{\rho} + \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho} \right)$ — **переносне прискорення** точки;

$\overrightarrow{W_r}$ — **відносне прискорення** точки.

Додатковий доданок у формулі (2.86)

$$\overrightarrow{W_{cor}} = 2\vec{\omega} \times \overrightarrow{V_r} \tag{2.87}$$

називають **коріолісовим прискоренням** (**прискоренням Коріоліса).**

Остаточно отримаємо

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_{cor}}. \tag{2.88}$$

Теорема про додавання прискорень. *Абсолютне прискорення матеріальної точки під час складного руху дорівнює векторній сумі її переносного, відносного й коріолісового прискорень.*

5. Прискорення Коріоліса

Модуль прискорення Коріоліса визначається згідно з формулою (2.87) виразом

$$W_{cor} = 2\omega V_r \sin(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{V_r}). \tag{2.89}$$

Для спрямування прискорення Коріоліса використаємо правило векторного добутку, згідно з яким вектор, що дорівнює векторному добутку двох інших векторів, є перпендикулярним до площини, у якій знаходяться ці два вектори, і напрямленим так, що з його кінця оберт від першого вектора добутку до другого через менший з кутів видно проти ходу годинникової стрілки.

Розглянемо приклади визначення прискорення Коріоліса.

На рис. 2.43 і 2.44 вектори $\vec{\omega}$ і $\overrightarrow{V_r}$ розташовано в площині Oyz. Тому прискорення Коріоліса, яке є перпендикулярним до цієї площини, напрямлено вздовж осі x.

На рис. 2.43 коротший оберт вектора $\vec{\omega}$ до сумісності з вектором $\overrightarrow{V_r}$ напрямлено проти ходу годинникової стрілки з додатного напрямку осі x. Тому вектор $\overrightarrow{W_{cor}}$ має напрямок, що збігається з напрямком осі x.

На рис. 2.44 зображено випадок, коли вектор $\overrightarrow{W_{cor}}$ має напрямок, протилежний напрямку осі x.

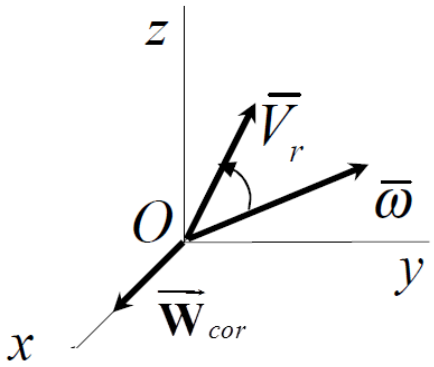


Рис. 2.43

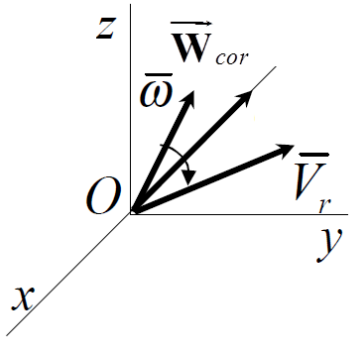


Рис. 2.44

Для знаходження напрямку прискорення Коріоліса також використовують **правило Жуковського** (рис. 2.45):

1) провести довільну площину, перпендикулярну до вектора кутової швидкості $\overrightarrow{\omega_e}$ (до осі переносного обертання);

2) спроєктувати вектор відносної швидкісті точки $\overrightarrow{V_r}$ на цю площину;

3) повернути отриману проєкцію відносної швидкості на кут 90° у напрямку переносного обертання (за дуговою стрілкою). Це буде напрямком вектора коріолісового прискорення точки $\overrightarrow{W}_{cor}$.

Зазначимо, що в кінематиці плоских механізмів вектор відносної швидкості завжди розташовано в площини руху механізму, а вектор переносної кутової швидкості — перпендикулярно до нього.

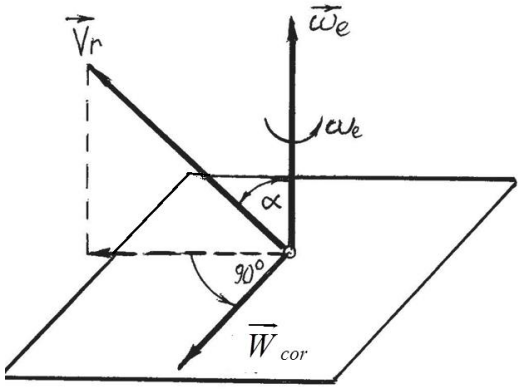


Рис. 2.45

Під час поступального переносного руху абсолютне прискорення дорівнює сумі переносного й відносного прискорень. Коріолісове прискорення виникає тільки тоді, коли рухомі осі під час свого руху повертаються (звідси термін «поворотне прискорення»).

Отже, прискорення Коріоліса — це додатковий кінематичний ефект, що виникає внаслідок взаємовпливу векторів відносної і переносної

швидкостей точки під час складного руху в разі обертального переносного руху.

6. Випадки перетворення на нуль коріолісового прискорення

Розглянемо випадки, коли прискорення Коріоліса дорівнює нулю, які випливають із рівняння (2.89):

1. Якщо $\overrightarrow{\omega_e} = 0$, тобто переносний рух є поступальним (рухома система координат рухається поступально).

Абсолютне прискорення точки дорівнює векторній сумі відносного і переносного прискорень.

2. Якщо $\overrightarrow{V_r} = 0$, тобто в цей момент часу не має відносного руху.

3. Якщо $\sin(\overrightarrow{\omega} \wedge \overrightarrow{V_r}) = 0$, тобто коли швидкість відносного руху $\overrightarrow{V_r}$ є паралельною до кутової швидкості переносного обертання $\overrightarrow{\omega_e}$.

7. Методика розв'язання задач на складний рух точки

Алгоритм розв'язання задач на складний рух точки є таким.

1. З'ясувати, який рух точки є відносним, а який — переносним, проаналізувати закони руху й умову задачі.

2. Зручніше користуватися векторним рівнянням абсолютного прискорення точки під час складного руху, розкладаючи відносне й переносне прискорення на дотичну й нормальну складові:

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_{cor}} = \overrightarrow{W_e^n} + \overrightarrow{W_e^\tau} + \overrightarrow{W_r^n} + \overrightarrow{W_r^\tau} + \overrightarrow{W_{cor}}.$$

3. Для визначення характеристик відносного руху необхідно умовно зупинити переносний рух. Потім відшукати положення точки в заданий момент часу на траєкторії відносного руху й розглянути його кінематичні характеристики.

4. Для визначення характеристик переносного руху необхідно умовно зупинити відносний рух і розглянути рух заданої точки й точки тіла перенесення, у якій вони в певний момент часу збігаються.

5. Для визначення параметрів абсолютного руху точки необхідно вибрати систему координат із початком у самій точці, потім за методом проєкцій визначити проєкції абсолютних швидкості й прискорення на координатні осі, ураховуючи, що проєкція абсолютного вектора на вісь дорівнює сумі проєкцій складових, і, нарешті, обчислити відповідні модулі шуканих величин.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке складний рух точки?
2. Який рух називають абсолютним?
3. Який рух називають відносним?
4. Який рух називають переносним?
5. Як зв’язані між собою абсолютна й відносна похідні векторної функції? Що вони характеризують?
6. Як визначити відносну й переносну швидкості точки під час складного руху?
7. Як формулюється теорема про додавання швидкостей під час складного руху точки?
8. Як формулюється теорема про додавання прискорень під час складного руху точки?
9. Назвіть фізичні причини виникнення прискорення Коріоліса.
10. Як визначити за величиною й напрямом прискорення Коріоліса?
11. Як визначити напрямок прискорення Коріоліса за правилом Жуковського?
12. У яких випадках прискорення Коріоліса дорівнює нулю?
13. Як знайти напрямок вектора підсумкового прискорення під час складного руху точки?
14. Поясніть, як буде розташовано вектор відносної швидкості й вектор переносної кутової швидкості.
15. Поясніть, чому іноді прискорення Коріоліса називають поворотним прискоренням.
16. Чому під час руху точки в напрямку до північного й південного полюсів Землі коріолісове прискорення буде спрямованим у різні боки?

Лекція 8. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ СТРУКТУРНОГО АНАЛІЗУ МЕХАНІЗМІВ

План лекції

1. Вступ.
2. Основні поняття теорії механізмів і машин.
3. Класифікація ланок.
4. Кінематичні пари та їх класифікація.
5. Кінематичні ланцюги.
6. Ступінь рухомості механізму.
7. Поняття структурної групи Ассура.
8. Алгоритм структурного аналізу плоских механізмів.
9. Приклад структурного аналізу плоского важільного механізму.

1. Вступ

На практичних заняттях з кінематики вирішувалися завдання, у яких необхідно було визначити кінематичні параметри ланок механізмів. При цьому вважалося, що поняття «механізм» ви знаєте. Механізм — це приклад механічної системи, елементи (ланки) якої мають можливість рухатися, але не довільним чином. Це приклад взаємозв'язаних рухів. Кінематика таких механічних систем є предметом вивчання теорії механізмів і машин (ТММ). Своєю чергою ТММ використовує методи кінематичного аналізу, які розглядаються в «Теоретичній механіці» (ТМ).

На найближчих лекціях ми розглянемо основні методи кінематичного аналізу плоских важільних механізмів, але спочатку ознайомимося з основними поняттями й підходами ТММ.

2. Основні поняття теорії механізмів і машин

Теорія механізмів і машин (ТММ) — це наука про загальні методи дослідження механізмів і машин та наукові основи їх проєктування.

Предметом вивчання ТММ є структура(будова), кінематика й динаміка механізмів і машин.

Механізм — це *система тіл, рухомо з'єднаних між собою, яку призначено для перетворення рухів і сил одного або кількох тіл на необхідні рухи й сили інших тіл.*

Машина — це штучно створений пристрій, який виконує механічний рух для перетворення енергії, матеріалів та інформації з метою заміни або полегшення фізичної або розумової праці людини.

Машина в загальному вигляді складається с таких основних частин: *двигун* (перетворює енергію); *передатний механізм* (перетворює рух);

виконавчий механізм (забезпечує виконання технологічного процесу); *система керування*.

Механізми, з яких складаються сучасні машини, є дуже різними. Одні з них складаються тільки з твердих тіл, інші — з гідравлічних, пневматичних, електричних, магнітних та інших пристроїв.

Ми вивчатимемо механізми, які складаються з твердих тіл.

Розрізняють механізми *плоскі*, точки тіл яких, що рухаються, описують траєкторії в одній або паралельних площинах, *просторові* — інакше.

Будь-який механізм складається з *деталей.* Кожна рухома деталь або група деталей, що утворюють одну жорстку рухому систему, має назву *рухомої ланки*.

Стояк — нерухома ланка. У механізмі завжди тільки один стояк.

Кінематична пара (КП) — таке з'єднання двох ланок, при якому відбувається їх відносний рух.

Кінематичний ланцюг — система ланок, які утворюють між собою кінематичні пари.

3. Класифікація ланок

Вхідна ланка — така, якій надається рух, що підлягає перетворенню.

Вихідна ланка здійснює рух, для виконання якого призначено механізм. Інші ланки механізму мають назву *проміжних.*

Стояк — нерухома ланка механізму.

Початкова ланка — така, якій приписано одну або кілька узагальнених координат, що однозначно визначає положення механізму.

Кількість початкових ланок механізму дорівнює кількості узагальнених координат механізму.

Положення початкової ланки визначає положення інших ланок механізму. Початкова ланка необов'язково збігається із вхідною. За початкову можна прийняти вихідну ланку або проміжну, якщо при цьому спрощується дослідження механізму.

Ведена ланка — така, для якої елементарна робота зовнішніх сил, прикладених до неї, є від'ємною.

Залежно від характеру руху (щодо взятої системи координат) ланки називають:

— *кривошип — ланка важільного механізму, яка робить повний оборот навколо осі, пов'язаної зі стояком;*

— коромисло — *ланка важільного механізму, яка робить неповний оборот навколо осі, пов'язаної зі стояком;*

— шатун — *ланка важільного механізму, яка виконує плоский рух;*

— повзун — *ланка важільного механізму, яка виконує поступальний рух відносно стояка;*

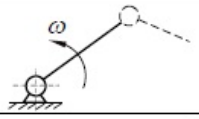
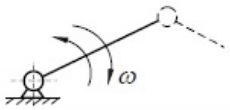
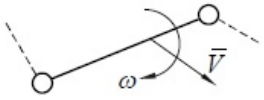
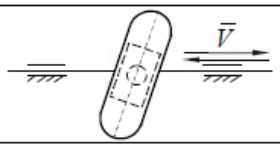
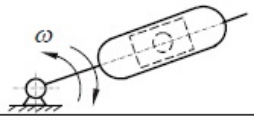
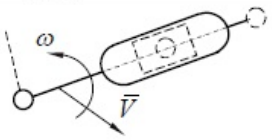
— кулісний камінь — *ланка важільного механізму, яка виконує*

поступальний рух відносно рухомої напрямної;

— куліса — рухома ланка важільного механізму, що є напрямною для кулісного каменя.

Умовне зображення основних ланок механізму показано нижче в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Назва	Умовне зображення ланки	Рух, який виконує ланка
Стояк		Немає
Кривошип		Обертальний
Коромисло		Коливальний
Шатун		Плоский
Повзун		Поступальний
Куліса		Поступальний
Куліса		Коливальний або обертальний
Куліса		Плоский

4. Кінематичні пари та їх класифікація

Оскільки в КП здійснюється контакт ланок, то КП накладає деякі обмеження на взаємний рух ланок. Ці обмеження називають *умовами в'язі.*

За кількістю умов в'язей, що накладаються на відносний рух ланок, кінематичні пари поділяють на п'ять класів, оскільки залежно від способу з'єднання ланок у кінематичну пару кількість умов в'язей може змінюватися від одиниці до п'яти. В іншому разі кінематична пара перестає існувати. *Номер класу* відповідає кількості умов в'язей, тобто обмежень,

що накладаються на відносний рух ланок.

За характером дотикання ланок пари поділяють на *нижчі* й *вищі*.

Нижчими кінематичними парами **(**НКП**)** називають такі, у яких ланки дотикаються поверхнями. У *вищих парах* (ВКП) ланки дотикаються в точці або по лінії.

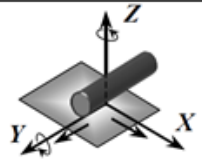
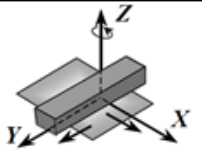
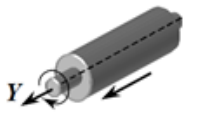
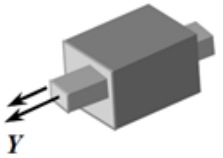
За конструкцією КП і відносним рухом ланок, що утворюють пару, поділяють на *плоскі* (обертальні, поступальні); *просторові* (циліндричні, сферичні й т. д.).

За способом замикання (забезпечення контакту ланок пари) пари поділяють на такі: із *силовим* (завдяки дії сил ваги або сили пружності пружини) і з *геометричним* (завдяки конструкції робочих поверхонь пари).

В табл. 2.2 показано деякі види кінематичних пар всіх п'яти класів. Стрілками позначено можливі відносні переміщення ланок.

Таблиця 2.2

Види кінематичних пар п'яти класів

Кінематична пара	Кількість ступенів вільності	Кількість умов в'язів	Клас пари
Вища просторова пара	5	1	1
 Вища просторова пара	4	2	2
 Нижча плоска пара	3	3	3
 Нижча просторова пара	2	4	4
 Нижча плоска пара	1	5	5

До плоских нижчих пар належать пари п'ятого класу: обертальна (шарнір), яка припускає тільки обертальний рух однієї ланки відносно другої навколо осі шарніру (рис. 2.46, *а*); поступальна (повзун у прямолінійних напрямних), у якій одна ланка може рухатись відносно іншої тільки поступально вздовж осі напрямної (рис. 2.46, *б*).

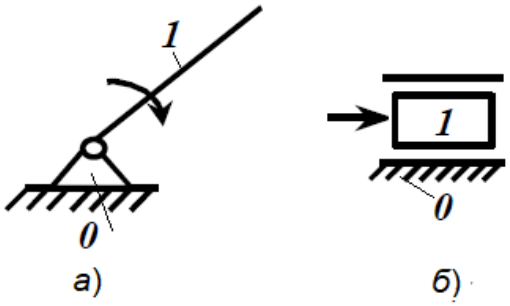


Рис. 2.46

5. Кінематичні ланцюги

Системи ланок, які утворюють між собою кінематичні пари, називають *кінематичними ланцюгами*.

Кінематичні ланцюги поділяють на *плоскі* й *просторові*.

Плоским називають такий кінематичний ланцюг, усі ланки якого рухаються паралельно одній загальній площині. В іншому разі ланцюг буде *просторовим*.

Кінематичний ланцюг може бути *відкритим*, якщо в ньому є ланки, які належать тільки до однієї кінематичної пари (рис. 2.47, *а*, *в*), і *замкненим*, якщо всі ланки належать не менш ніж двом кінематичним парам (рис. 2.47, *б*, *г*).

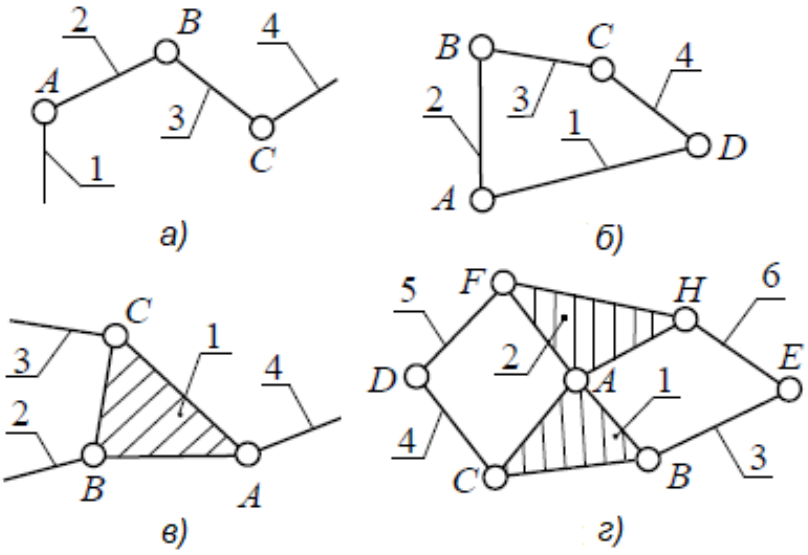


Рис. 2.47

Кінематичні ланцюги поділяють на *прості* й *складні*.

Простим називають такий кінематичний ланцюг, кожна ланка якого належить не більш ніж двом кінематичним парам (рис. 2.47, *а*, *б*). *Складний* кінематичний ланцюг — такий, у якому є хоча б одна ланка, що належить більш ніж двом кінематичним парам (рис. 2.47, *в*, *г*).

Кінематичний ланцюг — це рухома механічна система. Кількість ступенів вільності кінематичного ланцюга визначають за його структурною формулою, яку одержують, відслідковуючи за утворення кінематичного ланцюга.

Для зображення КП, кінематичних ланцюгів і механізмів використовують умовні позначення. На рис. 2.48 показано приклади таких позначень. На цьому рисунку обертальну НКП V класу зображено у вигляді кружочка.

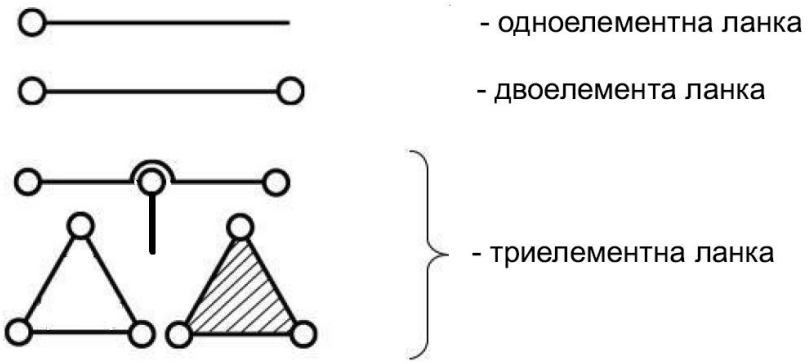


Рис. 2.48

6. Ступінь рухомості механізму

Розглянемо систему n рухомих твердих тіл (ланок), які утворюють між собою кінематичні пари усіх класів. Позначимо кількість пар I, II, …, V класів, які належать до системи, відповідно через p_1, p_2, p_3, …, p_5. Кількість ступенів вільності n рухомих ланок, якби на них не було накладено ніяких в'язей, дорівнювало би $6n$. Однак кожна пара 5-го класу віднімає п'ять ступенів вільності, кожна пара 4-го класу — чотири й т. д. Через це ступінь рухомості просторового механізму можна виразити так:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - p_1 = 6n - \sum_{i=1}^{5} ip_i, \qquad (2.90)$$

де *i* — номер класу КП.

Ця формула має назву Сомова - Малишева. За нею визначають ступінь рухомості механізму або кінематичного ланцюга.

Кожна рухома ланка плоского механізму може мати три ступені вільності. КП 5-го класу віднімає два ступені вільності, а КП 4-го класу —

один. КП 3-го, 2-го і 1-го класів бути не може, оскільки в плоскому механізмі вони дають нерухоме з'єднання. Ступінь рухомості для плоского механізму визначається формулою

$$W = 3n - 2p_5 - p_4. \qquad (2.91)$$

Вираз (2.91) називають формулою Чебишева.

Ступінь рухомості механізму відображає кількість незалежних координат, які необхідно задати, щоб охарактеризувати положення любої ланки механізму відносно стояка.

Якщо механізм має один ступінь рухомості ($W = 1$), то при заданому русі однієї з ланок (початкової) усі інші ланки будуть мати цілком певні рухи. Якщо ж механізм має два ступені рухомості ($W = 2$), то визначеність руху його ланок може бути забезпечена або двома початковими ланками, які виконують по одному незалежному руху, або однією початковою ланкою, яка виконує два незалежні рухи.

Таким чином, значення параметра $W \geq 1$ визначає кількість початкових ланок у механізмі.

Якщо ступінь рухомості $W = 0$, то нерухома конструкція буде жорсткою і руху ланок не буде. З огляду на статику система є статично визначеною, тобто маємо випадок, коли система не є механізмом.

Якщо ступінь рухомості $W < 0$, то отримаємо жорстку статично невизначену конструкцію. Ступень статичної невизначеності дорівнює модулю ступеня рухомості.

Формули (2.90) і (2.91) визначають структуру (будову) механізму. Тому ці формули називають *структурними формулами*.

Приклад

Визначити ступінь рухомості плоского важільного механізму, зображеного на рис. 2.49.

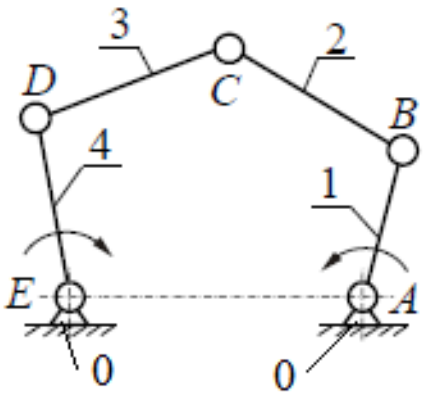


Рис. 2.49

Розв'язання

Механізм, який зображено на рис. 2.49 містить чотири ланки, що рухаються, тобто $n = 4$ (позначені як 1, 2, 3 і 4), і одну нерухому ланку — стояк, позначену 0.

Ланки утворюють КП:

0–1 — НКП, V кл., обертальна;
1–2 — НКП, V кл., обертальна;
2–3 — НКП, V кл., обертальна;
3–4 — НКП, V кл., обертальна;
4–0 — НКП, V кл., обертальна.

Кількість НКП 5-го класу $p_5 = 5$.

Кінематичних пар IV класу немає, тобто $p_4 = 0$

Ступінь рухомості механізму

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 5 = 2.$$

Таким чином, для точного визначення рухів ланок такого механізму необхідно задати незалежні закони руху відносно стояка *двом ланкам*, наприклад, ланкам 1 і 4 (див. рис. 2.49).

7. Поняття структурної групи Ассура

Основний принцип утворення механізмів було вперше сформульовано 1914 року російським ученим Л. В. Ассуром.

Ассур запропонував і розвинув метод утворення механізмів шляхом послідовного нашарування кінематичних ланцюгів, що мають певні структурні властивості.

Метод Ассура розглянемо на прикладі будови механізму, зображеного на рис. 2.50.

Механізм містить п'ять рухомих ланок (1, 2, 3, 4, 5) і сім кінематичних пар V класу (A, B, C, D, E, F, G), тобто $n = 5$, $p_5 = 7$. За формулою Чебишева ступінь рухомості механізму

$$W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1.$$

Отже цей механізм має однин ступінь рухомості. Це означає, що достатньо надати руху *одній ланці* і всі інші ланки почнуть виконувати однозначно зумовлені рухи.

Тепер визначимо ступінь рухомості механізму, зображений на рис. 2.51. Механізм містить одну рухому ланку 1 і одну кінематичну пару V класу

обертального типу A, тобто $n=1,\ p_5=1$.

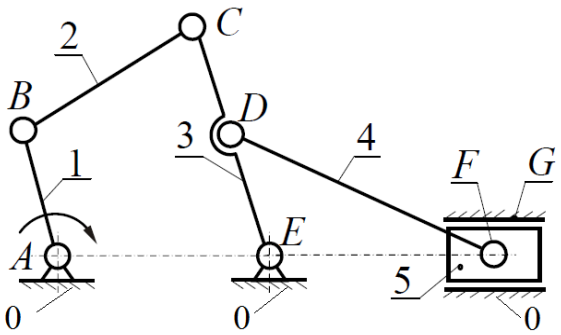


Рис. 2.50

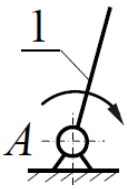


Рис. 2.51

За формулою Чебишева ступінь рухомості механізму

$$W=3n-2p_5-p_4=3\cdot1-2\cdot1=1.$$

Якщо порівняти механізм, зображений на рис. 2.50, із механізмом на рис. 2.51, то в складі цього механізму є така ж група, яка містить стояк 0 і ланку 1, до якої кінематичною парою B під'єднано кінематичний ланцюг, що складається з чотирьох рухомих ланок. Оскільки ступінь рухомості групи 0–1 механізму на рис. 2.50 дорівнює одиниці, то виходить, що ступінь рухомості кінематичного ланцюга, який складається з ланок 2, 3, 4 і 5, дорівнює нулю.

Таким чином, механізми утворюються шляхом під'єднання до початкової ланки 1 і стояка 0 (ступінь рухомості дорівнює одиниці) кінематичного ланцюга зі ступенем рухомості, що дорівнює нулю.

На рис. 2.52 показано утворення механізму методом Ассура. На ньому тонкими штриховими лініями показано під'єднання кінематичного ланцюга до початкового (первинного) механізму й стояка.

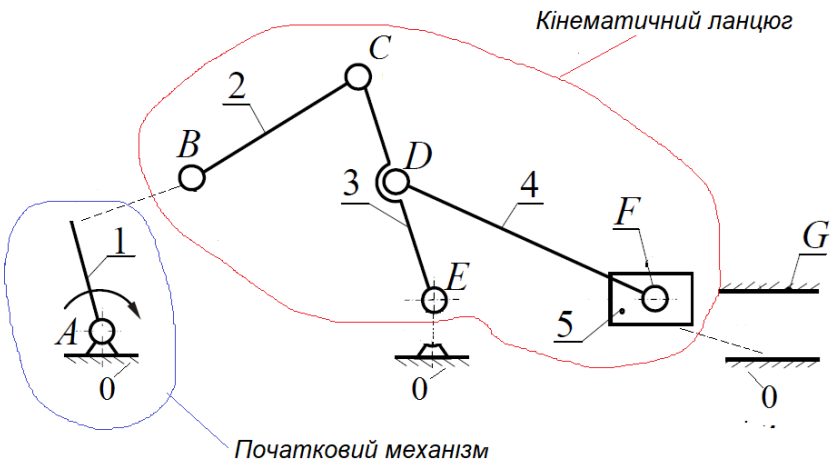


Рис. 2.52

Кінематичний ланцюг, ступень рухомості якого дорівнює нулю, дістав назву групи Ассура.

Групою Ассура (структурною групою) називають кінематичний ланцюг з нульовим ступенем рухомості відносно тих ланок, з якими входять до кінематичних пар вільні елементи його ланок, що не розпадається на більш прості ланцюги з нульовим ступенем рухомості.

В означенні групи Ассура термін «вільний елемент ланки» — це та частина ланки, яка утворює кінематичну пару з іншою рухомою ланкою.

Структурна група (група Ассура) — це кінематичний ланцюг, під'єднання якого до механізму не змінює кількості його рухомостей. Ця група не повинна розпадатися на більш прості групи ланок нульової рухомості.

Згідно з означенням групи Ассура кінематичний ланцюг, зображений на рис. 2.52, не є групою Ассура, оскільки розпадається на два кінематичні ланцюги, що містять ланки 2, 3 (кінематичні пари B, C, E) і 4, 5 (кінематичні пари D, F, G), кожен з яких має нульове значення ступеня рухомості.

Плоскі групи Ассура з НКП задовольняють умову

$$W = 3n - 2p_5 = 0, \qquad (2.92)$$

звідки

$$n = \frac{2}{3} p_5 \text{ і } p_5 = \frac{3}{2} n. \qquad (2.93)$$

Із формули (2.93) випливає, що кількість ланок у групі є кратною двом, а кількість кінематичних пар — трьом.

Оскільки кількість ланок і пар може бути тільки цілим числом, то останню умову задовольняють тільки сполучення кількості ланок і кінематичних пар, що належать до групи (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

№ п/п	1	2	3	4
n	2	4	6	8
p_5	3	6	9	12

Найпростіші сполучення кількості ланок і пар, що задовольняють умову (2.92): $n = 2$, $p_5 = 3$ (двоповідкова група)

Можливі групи Ассура з $n = 2$ і $p_5 = 3$ показано на рис. 2.53. Усі ці групи поділяються на п'ять видів.

Леонід Володимирович Ассур запропонував поділити всі групи на класи й порядки.

Класом групи Ассура називають кількість сторін найскладнішого контура, який утворюють ланки групи.

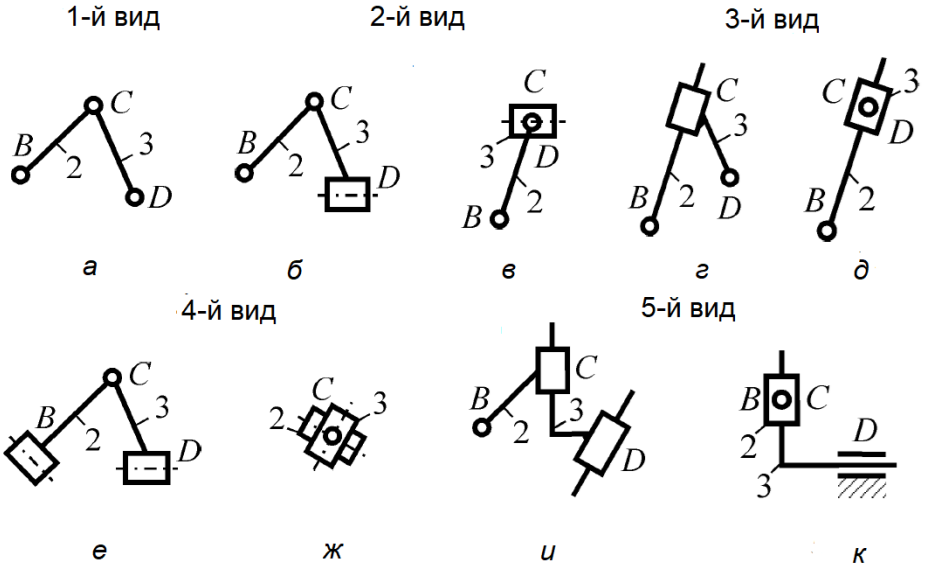


Рис. 2.53

Порядком групи Ассура називають кількість крайніх елементів групи.

Таким чином, найпростіша група Ассура буде II класу II порядку.

Початкову ланку і стояк, які утворюють НКП V класу, називають *початковим (первинним) механізмом,* або *механізмом I класу.*

На рис. 2.54 зображено механізми I класу, початкові ланки 1 яких утворюють зі стояком 0 обертову (рис. 2.54, *а*) або поступальну (рис. 2.54, *б*) кінематичну пару.

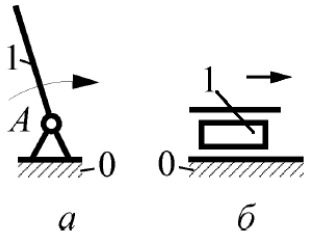


Рис. 2.54

Щоб побудувати механізм потрібного ступеня рухомості, необхідно до механізму (механізмів) I класу приєднати систему ланок, яка становить один або кілька кінематичних ланцюгів з нульовим ступенем рухомості. Остання умова випливає з того, що весь механізм повинен мати ступінь рухомості, якій дорівнює сумі ступенів рухомості механізмів I класу.

Будь-який механізм можна одержати, якщо до механізму (механізмів) I класу послідовно приєднувати структурні групи (групи Ассура).

8. Алгоритм структурного аналізу плоских механізмів

У теорії механізмів і машин аналіз механізмів виконується за їх схемами. Клас і порядок механізму визначається класом і порядком найскладнішої групи Ассура, яка належить до його складу. На схемах механізмів ланки й кінематичні пари зображуються умовними позначеннями. Ланки нумеруються цифрами, а кінематичні пари й різні точки ланок — буквами.

При зображенні механізму на кресленні розрізняють його *структурну* й *кінематичну* схеми.

Структурною називають схему механізму, виконану умовними позначеннями ланок і кінематичних пар без дотримання лінійних розмірів.

Кінематичною називають схему механізму, виконану умовними позначеннями ланок і кінематичних пар з дотриманням масштабу довжин.

Структурний аналіз — це дослідження структури механізму, тобто визначення кількості ланок і структурних груп, кількості й типу кінематичних пар, функціонального призначення кінематичних з'єднань.

Метою структурного аналізу є дослідження будови механізмів, їх видозмінення та класифікація.

Основною задачею структурного аналізу механізмів є визначення класу механізму.

Клас механізму в цілому визначається класом вищої структурної групи Ассура, що належить до цього механізму.

Існує певний порядок проведення структурного аналізу механізмів, або алгоритм структурного аналізу.

1. Накреслити структурну або кінематичну схему механізму, використовуючи для цього умовні позначення та зображення ланок. Стояк механізму позначити цифрою 0, далі усі рухомими ланки — від 1 до n, у унаслідок чого буде отримано значення параметра n.

2. Позначити кінематичні пари й визначити їх клас і тип (обертальна чи поступальна). Обчислити значення параметрів p_5 і p_4.

3. За формулою Чебишева підрахувати ступінь рухомості механізму W.

4. Задати необхідну кількість початкових ланок, якщо їх не задано, або перевірити відповідність кількості початкових ланок ступеню рухомості механізму, якщо їх задано. Після цього буде виокремлено механізми I класу.

5. Частину кінематичного ланцюга, що залишилася, розбити на структурні групи Ассура, розпочинаючи з груп II класу. Якщо спроби виокремлення груп II класу не дадуть результату, то перейти до виокремлення груп III класу , потім IV і т. д.

6. Накреслити окремо початковий механізм або початкові механізми й структурні групи. Визначити клас і порядок груп Ассура, а потім — клас механізму в цілому.

9. Приклад структурного аналізу плоского важільного механізму

Як приклад структурного аналізу розглянемо механізм, структурну схему якого зображено на рис. 2.55.

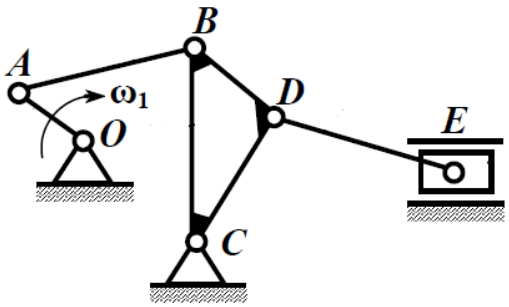


Рис. 2.55

Розв'язання

1. Пронумеруємо ланки (рис. 2.56): 0 — стояк; 1 — кривошип; 2, 4 — шатун; 3 — коромисло; 5 — повзун.

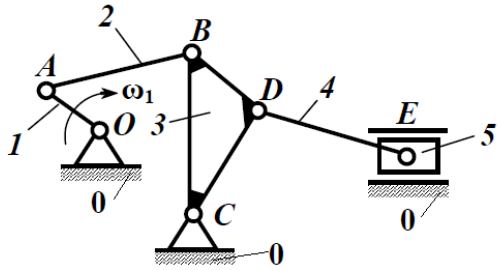


Рис. 2.56

Кількість рухомих ланок n = 5.

2. Класифікація кінематичних пар:

0–1 — НКП, V кл., обертова;
1–2 — НКП, V кл., обертова;
2–3 — НКП, V кл., обертова;
3–0 — НКП, V кл., обертова;
3–4 — НКП, V кл., обертова;
4–5 — НКП, V кл., обертова;
5–0 — НКП, V кл., поступальна.

КП IV класу немає, тобто $p_4 = 0$.

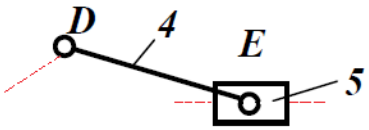
Кількість кінематичних пар 5-го класу $p_5 = 7$.

3. Ступінь рухомості механізму $W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$.

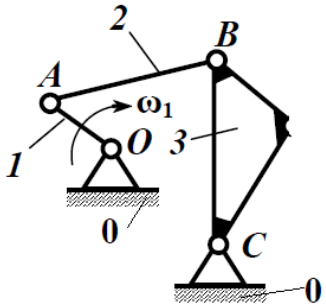
4. Початкову (вхідну) ланку задано на схемі механізму (ланка 1).

Таким чином, початкова ланка 1 і стояк 0 утворюють механізм I класу. Ланки 2, 3, 4 і 5 утворюють кінематичний ланцюг, який приєднується до стояка 0 (КП 3–0, 5–0) і початкової ланки 1 (КП 1–2).

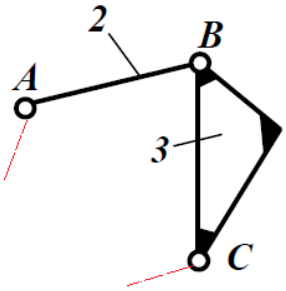
5. Виокремимо першу групу Ассура II класу, утворену ланками 4 і 5:



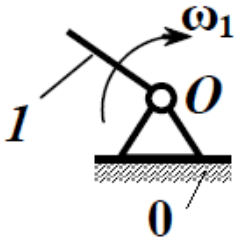
Після виокремлення цієї групи Ассура одержимо такий механізм:



Виокремимо другу групу Ассура, утворену ланками 2 і 3:



Після виокремлення цієї групи Ассура отримаємо такий механізм:



Отже, після виокремлення всіх груп Ассура одержимо механізм I класу.

6. Усі групи Ассура — групи II класу, 2-го порядку (рис. 2.57).

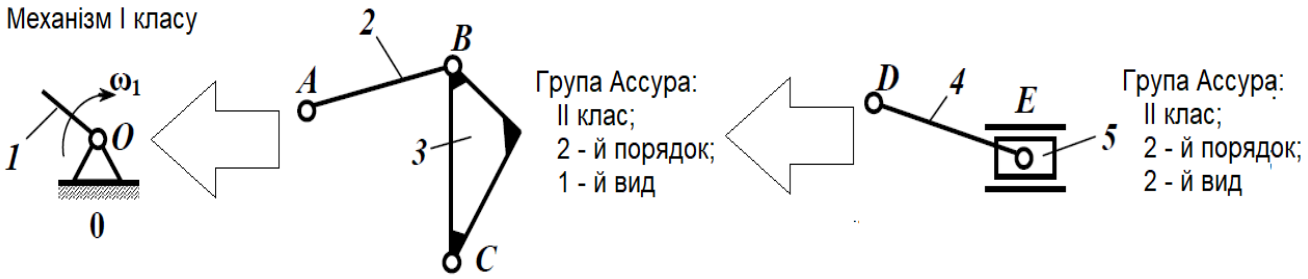


Рис. 2.57

Перша група за порядком приєднання до основного механізму — це група першого виду, а друга — група другого виду.

Відповідь: заданий механізм є механізмом II класу.

Запитання для самоконтролю

1. Що вивчає ТММ?
2. Наведіть означення механізму й машини.
3. Що називають ланкою механізму?
4. З яких ланок складається механізм?
5. Скільки нерухомих ланок у будь-якому механізмі?
6. Що називають кінематичною парою?
7. За якими ознаками класифікують кінематичні пари?
8. Які кінематичні пари називають нижчими й чому?
9. Які кінематичні пари називають вищими й чому?
10. Як визначають клас кінематичної пари?
11. Як здійснюють замикання кінематичних пар?
12. Що таке кінематичний ланцюг?
13. Які різновиди кінематичних ланцюгів ви знаєте?
14. Якою є різниця між механізмом і кінематичним ланцюгом?
15. Що таке ступінь рухомості механізму?
16. Які структурні формули механізмів ви знаєте і на честь кого їх названо?
17. У яких випадках механічна система не є механізмом?
18. Запишіть формулу Чебишева і визначте з її допомогою кількість ступенів свободи будь-якого плоского механізму.
19. Сформулюйте основний принцип створення механізмів.
20. Наведіть означення структурної групи Ассура.
21. Як визначити структурну групу Ассура?
22. За якою ознакою визначають клас групи Ассура?
23. За якою ознакою визначають порядок групи Ассура?
24. Чи може бути непарною кількість ланок у складі групи Ассура?
25. Як записують структурну формулу побудови механізму?
26. Як визначити клас механізму?

Лекція 9. АНАЛІТИЧНИЙ МЕТОД КІНЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

План лекції

1. Вступ.
2. Задачі кінематики механізмів.
3. Класифікація методів кінематичного аналізу механізмів.
4. Метод замкнених контурів.
5. Алгоритм виконання кінематичного аналізу механізму методом замкнених контурів.
6. Приклад аналітичного дослідження кінематики кулісного механізму.
7. Функція положення механізму та кінематичні передатні функції.

1. Вступ

Кінематичний аналіз механізмів — вивчення руху ланок механізму без урахування сил, що зумовлюють цей рух, тобто розглядається рух ланок з огляду на геометрію.

Суть кінематичного аналізу механізмів полягає у визначенні руху всіх ланок за заданим рухом початкових (вхідних) ланок.

Під час кінематичного аналізу механізму розглядається рух як ланок (твердих тіл), так і окремих точок цих ланок.

Кінематика окремої точки рухомої ланки характеризується *лінійними переміщеннями, швидкістю й прискоренням.*

Кінематика самої рухомої ланки залежно від виду її руху характеризується як *лінійними, так і кутовими переміщеннями, швидкостями й прискореннями*.

2. Задачі кінематики механізмів

Основні задачі кінематичного дослідження механізмів:

1) визначення положень ланок і будування траєкторій їх окремих рухомих точок;

2) визначення швидкостей окремих точок і ланок;

3) визначення прискорень окремих точок і ланок.

Якщо механізм має одну ступінь вільності, то переміщення, швидкості й прискорення ланок і точок механізму є функціями переміщень, швидкостей і прискорень однієї з ланок, узятої за початкову.

3. Класифікація методів кінематичного аналізу механізмів

На рис. 2.58 показано класифікацію методів кінематичного дослідження механізмів.

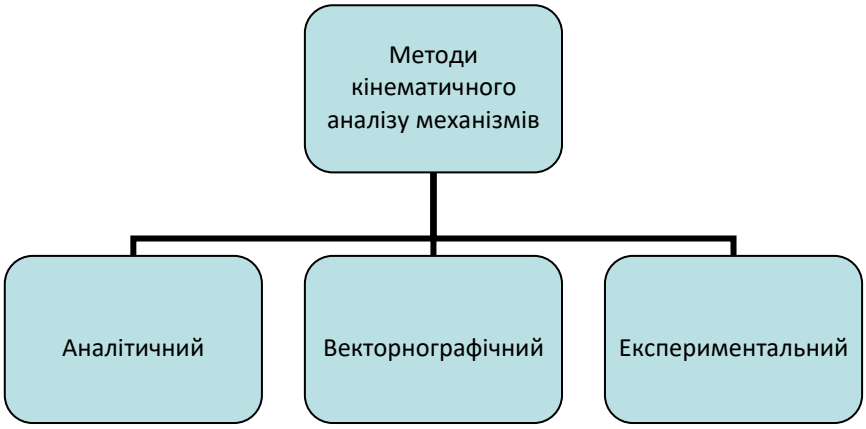


Рис. 2.58

Аналітичний метод. Рівняння руху окремих точок і ланок механізму записують і розв'язують аналітично. Аналітичні методи дають змогу одержати результати високої точності й здійснювати багатоваріантні дослідження кінематики механізмів. Перевагою цього методу є отримання результатів кінематичного аналізу як функцій часу, тобто для будь-якого положення механізму.

Векторнографічний метод. Рівняння руху окремих точок і ланок механізму записують аналітично у векторній формі, а розв'язують графічно (шляхом будування планів швидкостей і прискорень). Метод дає змогу одержати необхідну для інженерних розрахунків точність результатів. Недоліком цього методу є те, що з його допомогою можна вирішувати завдання кінематичного аналізу тільки для одного положення механізму.

Експериментальний метод дає найдостовірніші результати. Цей метод використовують для отримання дійсних значень кінематичних параметрів механізму й перевірки результатів теоретичних досліджень.

4. Метод замкнених контурів

На практиці використовують різні аналітичні методи кінематичного аналізу.

Якщо розглянути загальні методи аналітичного дослідження, універсальні для будь-якого механізму, то можна виокремити два їх різновиди: **метод замкнених векторів** і **метод перетворення координат**.

Аналітичні методи використовують для визначення так званої функції положення механізму (ФПМ).

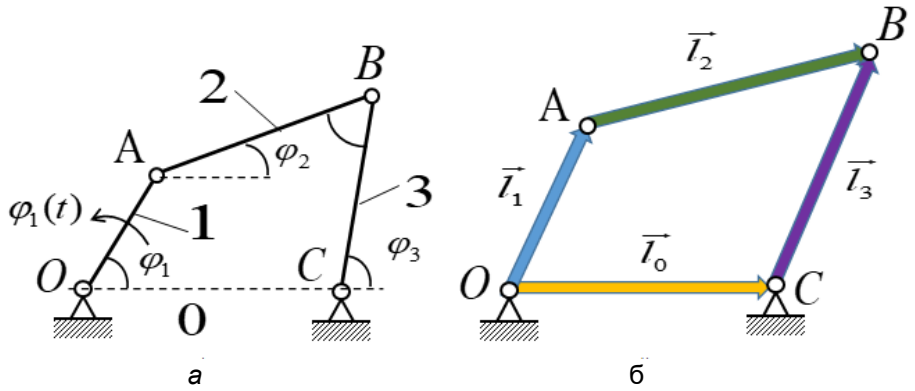
ФПМ є основною характеристикою механізму, яка визначає його кінематику з урахуванням геометричних властивостей.

Розглянемо метод замкнених контурів, який запропонував В. А. Зінов'єв.

Кожну ланку механізму зображують (моделюють) вектором. Під час руху механізму цей вектор може змінювати як напрямок, так і модуль. Вектори, які заміняють ланки механізму, будують замкнений контур. Цей контур під

час руху механізму залишається завжди замкненим.

Розглянемо такий приклад. На рис. 2.59, *а* зображено структурну схему чотириланкового шарнірного механізму, рухомі ланки якого позначено 1, 2 і 3. Відповідні вектори рухомих ланок зображено на рис. 2.59, *б* і позначено $\vec{l}_1$, $\vec{l}_2$ і $\vec{l}_3$. Вектором $\vec{l}_0$ позначено стояк 0 механізму.



а *б*

Рис. 2.59

Під час руху механізму вектори $\vec{l}_i$ змінюють свій напрямок (кути φ_i) і не змінюють модулі (довжини l_i), де *i* = 1, 2, 3. Вектор $\vec{l}_0$ не змінює напрямок і модуль.

У кожний момент часу руху механізму вектори утворюють замкнений контур *OABCO*, тобто виконується умова

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{l}_0 + \vec{l}_3 .$$

ЗАУВАЖЕННЯ. *Кожна дійсна (фізична) ланка механізму має певні розміри, зокрема довжину, які не змінюються під час руху механізму. Вектором як моделлю ланки замінюється та частина ланки, яка належить до складу кінематичних пар, утворених ланкою з іншими ланками*.

Кут φ_1 є відомою функцією часу, яка визначає закон руху початкової ланки 1. Кути φ_2 і φ_3 є невідомими функціями часу, які необхідно визначити, тобто маємо дві невідомі функції, або дві залежні координати. Для їх визначення необхідно скласти два скалярних рівняння.

Потрібні рівняння одержуємо, якщо векторне рівняння замкненості спроєктувати на дві взаємно перпендикулярні координатні осі.

Таки чином, буде визначено функції часу кутів φ_2 і φ_3. Знаючи ці функції, можна знайти кінематичні параметри руху ведених ланок 2 і 3. Після визначення законів руху всіх ланок механізму можна знайти

кінематичні параметри окремих точок механізму.

Рекомендації щодо складання замкненого векторного контуру. Правило задання напрямку вектора показано на рис. 2.60. Напрямок вектора — кут між додатнім напрямком осі x і лінією вектора, яку проведено з початку вектора до його кінця. Цей кут відкладається проти ходу годинникової стрілки.

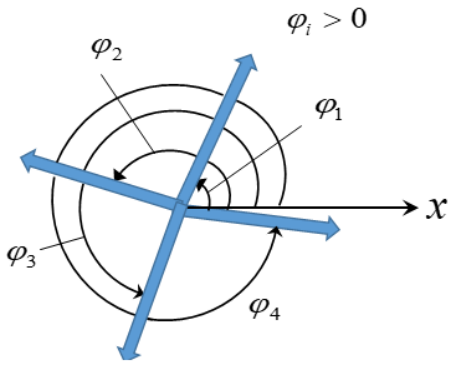


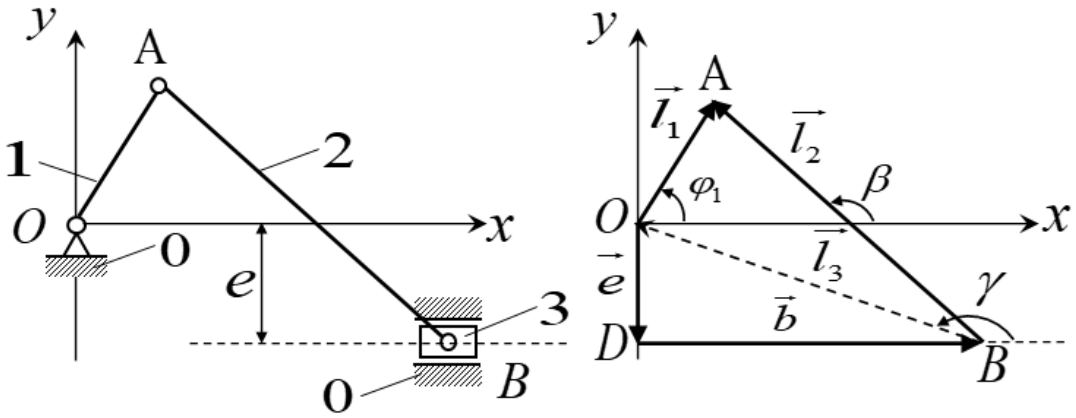
Рис. 2.60

Повзун на векторному контурі зображується вершиною, тобто точкою.

Вектор, напрямок якого складно задати, замінюється двома взаємно перпендикулярними векторами.

Початок координатної системи, у якій задаватимуться вектори, розташовують у центрі НКП, утвореною початковою ланкою і стояком.

На рис. 2.61 показано наведені вище рекомендації.



а *б*

Рис. 2.61

На рис. 2.61, *а* зображено кінематичну схему кривошипно-повзунного механізму, у якому повзун 3 рухається паралельно до координатної осі x на відстані e. Початок координатної системи xy розташовано в шарнірі *O* — точці з'єднання кривошипа 1 і стояка 0.

На рис. 2.61, *б* зображено два варіанти утворення замкнених контурів.

Перший варіант — контур *OAB*. у якому вектори $\vec{l}_2$ і $\vec{l}_3$ мають змінні напрямки (кути *β* і *γ*). Модуль вектора $\vec{l}_3$ є змінним, а вектора $\vec{l}_2$ — незмінний. Рівняння замкненості контуру має вигляд

$$\vec{l}_3 + \vec{l}_1 = \vec{l}_2 .$$

Другий варіант замкненого контуру — *OABDO*. Напрямки векторів $\vec{e}$ і $\vec{b}$ є незмінними (кут першого вектора становить 270°, другого — 0°). Модуль вектора $\vec{e}$ є відомим і дорівнює *e*, модуль вектора $\vec{b}$ — невідомим, його необхідно знайти. Рівняння замкненості контуру має вигляд

$$\vec{l}_1 = \vec{e} + \vec{b} + \vec{l}_2 .$$

В обох варіантах замкненого контуру повзун 3 зображався як вершина контуру, тобто точкою B.

5. Алгоритм виконання кінематичного аналізу методом замкнених контурів

На рис. 2.62 показано алгоритм виконання кінематичного аналізу методом замкнених контурів.

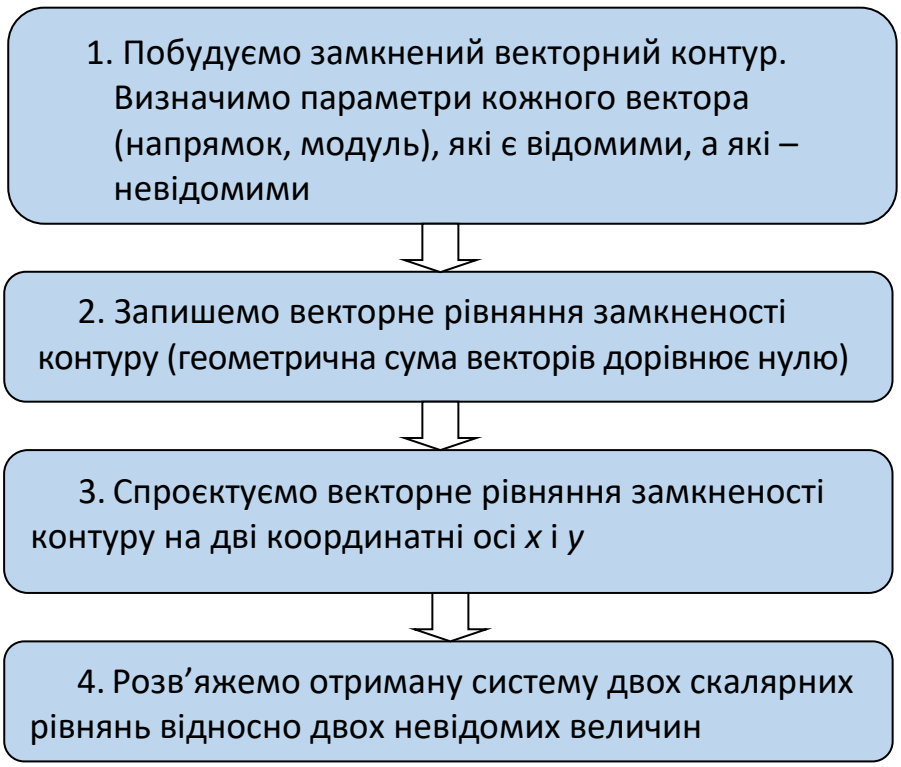


Рис. 2.62

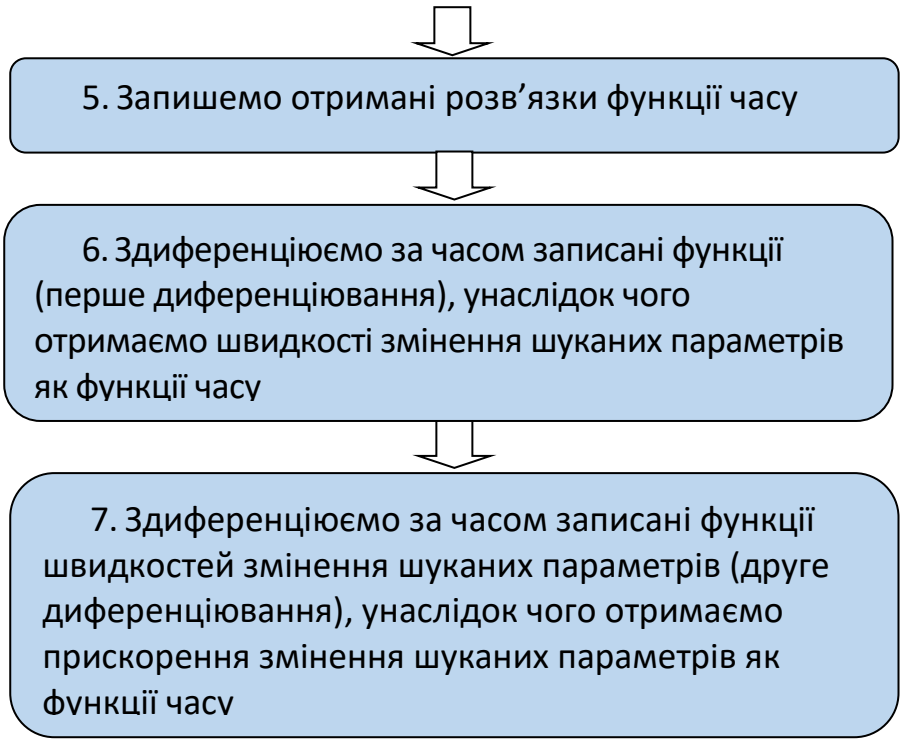


Рис. 2.62. Закінчення

6. Приклад аналітичного дослідження кінематики кулісного механізму

На рис. 2.63 зображено кінематичну схему кулісного механізму. Геометричні розміри ланок l_{OA}, l_{O_1B}, відстань *a* між шарнірами *O* і O_1, закон обертання початкової ланки $\varphi_1 = \varphi_1(t)$ уважаються заданими.

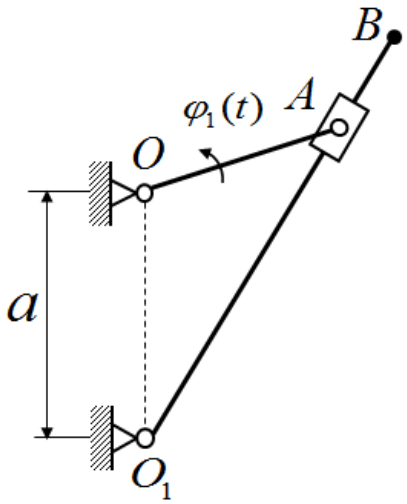


Рис. 2.63

Необхідно знайти закони руху ведених ланок механізму.

Розв'язання

1. Виконаємо структурний аналіз механізму. Нумерацію ланок показано на рис. 2.64, *а*.

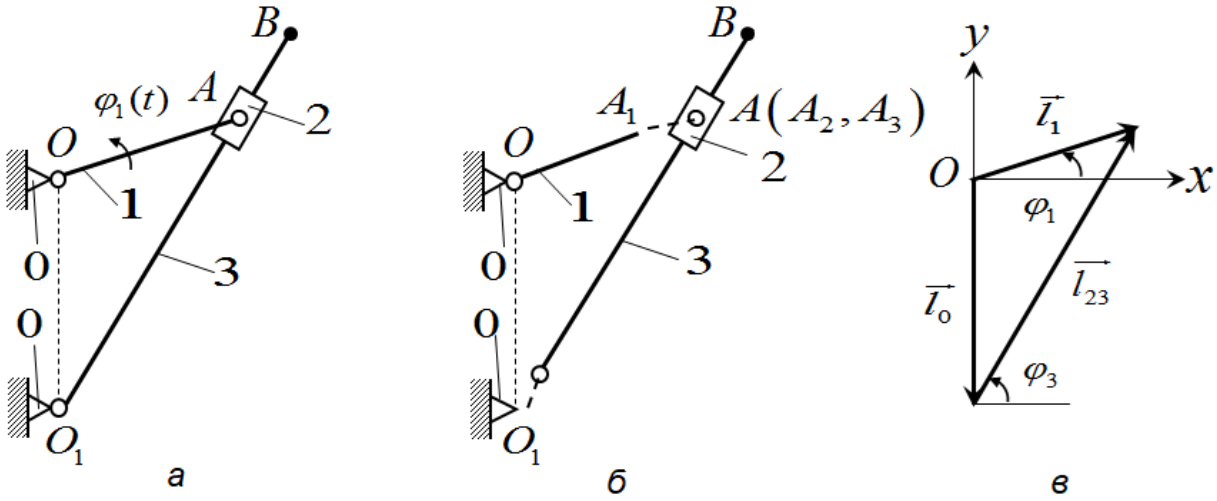


Рис. 2.64

Механізм, зображений на рис. 2.64, містить три ланки, що рухаються, тобто $n = 3$ (позначено 1, 2 і 3), і одну нерухому ланку — стояк, позначений 0.

Ланки створюють такі КП:

0–1 — НКП, V кл., обертальна;

1–2 — НКП, V кл., обертальна;

2–3 — НКП, V кл., поступальна;

3–0 — НКП, V кл., обертальна.

Кількість НКП 5-го класу $p_5 = 4$.

Кінематичних пар IV класу немає, тобто $p_4 = 0$

Ступінь рухомості механізму $W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$.

Початковою ланкою механізму є кривошип 1, закон руху якого задано.

Ланки 2 (повзун) і 3 (куліса) створюють структурну групу Ассура II класу 2-го порядку 3-го виду.

На рис. 2.65 зображено під'єднання ланок механізму до двох КП відповідно 1–2 (обертальної) і 2–3 (поступальної). Нижній індекс точки *A* відображає її належність до *i*-і ланки. У точці *A* механізму геометрично збігаються три різні фізичні точки.

Рух точки A_3 є складним. З одного боку, вона належіть ланці 3, яка обертається навколо нерухомої осі O_1, з іншого — точка A_3 рухається відносно точки A_2, яка належіть ланці 2 (ланка 2 рухається поступально відносно ланки 3).

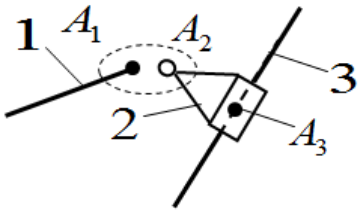


Рис. 2.65

Розкладення механізму на структурні групи Ассура зображено на рис. 2.64, *б*. Маємо структурну формулу побудови механізму: $I_1(1-0) \leftarrow II_3(2-3)$.

2. Побудуємо замкнений векторний контур. На рис. 2.64, *в* зображено замкнений векторний контур. Під час руху механізму вектор $\overrightarrow{l_{23}}$ змінює свій напрямок (кут φ_3) і модуль (довжину l_{23}). Вектор $\vec{l}_0$ не змінює модуль ($l_0 = a$) і напрямок (кут дорівнює 270°). Вектор $\vec{l}_1$ змінює напрямок, але закон змінення кута є відомим, і не змінює модуль ($l_1 = l_{OA}$).

Таким чином, маємо дві невідомі величини — довжину l_{23} і кут φ_3.

3. Запишемо векторне рівняння замкненості контуру:

$$\vec{l}_0 + \overrightarrow{l_{23}} = \vec{l}_1 .$$

4. Знайдемо проєкції векторного рівняння замкненості контуру на координатні осі.

Початок координатної системи xy, у якій задаватимуться вектори, розташуємо в центрі НКП 0–1, утвореною початковою ланкою 1 і стояком 0:

$$x: \; l_{23}\cos\varphi_3 = l_1\cos\varphi_1;$$
$$y: \; -a + l_{23}\sin\varphi_3 = l_1\sin\varphi_1.$$

5. Розв’яжемо отриману систему двох скалярних рівнянь відносно невідомих величин φ_3 і l_{23}.

З першого рівняння маємо

$$\cos\varphi_3 = \frac{l_1}{l_{23}}\cos\varphi_1.$$

Перепишемо отриману систему до вигляду

$$l_{23}\cos\varphi_3 = l_1\cos\varphi_1,$$
$$l_{23}\sin\varphi_3 = l_1\sin\varphi_1 + a.$$

Піднесемо до другого степеня ліві й праві частини:

$$l_{23}^2\cos^2\varphi_3 = l_1^2\cos^2\varphi_1;$$
$$l_{23}^2\sin^2\varphi_3 = l_1^2\sin^2\varphi_1 + a^2 + 2a\sin\varphi_1.$$

Складемо ліві й праві частини системи:

$$l_{23}^2\cos^2\varphi_3 + {}_{23}^2\sin^2\varphi_3 = l_1^2\cos^2\varphi_1 + l_1^2\sin^2\varphi_1 + a^2 + 2a\sin\varphi_1.$$

Звідси отримаємо

$$l_{23} = \sqrt{l_1^2 + a^2 + 2al_1\sin\varphi_1}\,. \qquad (2.94)$$

Підставивши отримане рішення у формулу для $\cos\varphi_3$, одержимо

$$\cos\varphi_3 = \frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + a^2 + 2al_1\sin\varphi_1}}\cos\varphi_1.$$

З цієї формули можна знайти значення кута φ_3. Розв'яжемо це рівняння відносно кута φ_3:

$$\varphi_3 = \arccos\left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + a^2 + 2al_1\sin\varphi_1}}\cos\varphi_1\right). \qquad (2.95)$$

Запишемо отримані розв'язки як функції часу:

$$l_{23}(t) = \sqrt{l_1^2 + a^2 + 2al_1\sin\left(\varphi_1(\mathrm{t})\right)}\,, \qquad (2.96)$$

$$\varphi_3(t) = \arccos\left(\frac{l_1}{\sqrt{l_1^2 + a^2 + 2al_1\sin\left(\varphi_1(t)\right)}}\cos\left(\varphi_1(t)\right)\right). \qquad (2.97)$$

6. Здиференціюємо за часом записані функції.

6.1. Похідна за часом довжини l_{23}.

Отримаємо такий запис:

$$l_{23}^2 = l_1^2 + a^2 + 2l_1 a \sin\varphi_1.$$

Звідси

$$2l_{23}\frac{dl_{23}}{dt} = 2l_1 a\cos\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

З цього рівняння знайдемо шукану похідну

$$\frac{dl_{23}}{dt} = \frac{l_1 a}{l_{23}}\cos\varphi_1 \frac{d\varphi_1}{dt}.$$

З урахуванням рівності $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$

$$\frac{dl_{23}}{dt} = \frac{l_1 a}{l_{23}}\cos\varphi_1\omega_1. \qquad (2.98)$$

Отриманий результат перепишемо таким чином. З другого рівняння початкової системи (проєкція на вісь y)

$$a/l_{23} = \sin\varphi_3 - \left(l_1/l_{23}\right)\sin\varphi_1.$$

З першого рівняння початкової системи (проєкція на вісь x) одержимо вираз

$$l_1/l_{23} = \cos\varphi_3/\cos\varphi_1.$$

Підставивши це співвідношення в попередню формулу, отримаємо

$$a/l_{23} = \sin\varphi_3 - \left(\cos\varphi_3/\cos\varphi_1\right)\sin\varphi_1.$$

З урахуванням цієї формули остаточно маємо

$$\frac{dl_{23}}{dt} = l_1\omega_1\left(\sin\varphi_3 - \frac{\cos\varphi_3}{\cos\varphi_1}\sin\varphi_1\right)\cos\varphi_1 = -l_1\omega_1\sin(\varphi_1 - \varphi_3). \qquad (2.99)$$

Похідна за часом dl_{23}/dt характеризує відносну швидкість поступального руху повзуна 2 відносно куліси 3, або швидкість точки A_3 відносно точки A_2, тобто це є відносна швидкість $V_{A_3A_2} = \dfrac{dl_{23}}{dt}$.

6.2. Похідна за часом кута φ_3.

Маємо такий запис

$$l_{23}\cos\varphi_3 = l_1\cos\varphi_1,$$

звідки

$$\frac{dl_{23}}{dt}\cos\varphi_3 - l_{23}\sin\varphi_3\frac{d\varphi_3}{dt} = -l_1\sin\varphi_1\frac{d\varphi_1}{dt}.$$

Похідну dl_{23}/dt вже знаємо, тоді одержимо такий вираз:

$$\frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{l_1\sin\varphi_1\dfrac{d\varphi_1}{dt} + \dfrac{dl_{23}}{dt}\cos\varphi_3}{l_{23}\sin\varphi_3}.$$

З урахуванням рівності $\dfrac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$ отримаємо

$$\omega_3 = \frac{l_1\omega_1\sin\varphi_1 + V_{A_2A_3}\cos\varphi_3}{l_{23}\sin\varphi_3}.$$

Ураховуючи співвідношення (2.99), перепишемо одержану формулу для кутової швидкості ω_3, виконуючи кілька перетворень, до такого вигляду:

$$\omega_3 = \frac{l_1\omega_1 + \left(-l_1\omega_1\sin(\varphi_1-\varphi_3)\right)\cos\varphi_3}{l_{23}\sin\varphi_3} =$$

$$= \frac{l_1\omega_1}{l_{23}}\cdot\frac{\sin\varphi_1 - \sin(\varphi_1-\varphi_3)\cos\varphi_3}{\sin\varphi_3} =$$

$$= \frac{l_1\omega_1}{l_{23}}\cdot\frac{\sin\varphi_1 - \left(\sin\varphi_1\cos\varphi_3 - \cos\varphi_3\sin\varphi_3\right)\cos\varphi_3}{\sin\varphi_3},$$

$$\omega_3 = \frac{l_1\omega_1}{l_{23}} \cdot \frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi_1\cos^2\varphi_3 + \cos\varphi_1\sin\varphi_3\cos\varphi_3}{\sin\varphi_3} =$$

$$= \frac{l_1\omega_1}{l_{23}} \cdot \frac{\sin\varphi_1 - \sin\varphi_1\left(1-\sin^2\varphi_3\right) + \cos\varphi_1\sin\varphi_3\cos\varphi_3}{\sin\varphi_3} = \frac{l_1\omega_1}{l_{23}}\cos(\varphi_1-\varphi_3).$$

Таким чином, кутова швидкість обертання куліси визначається формулою

$$\omega_3 = \frac{l_1\omega_1}{l_{23}}\cos(\varphi_1-\varphi_3). \qquad (2.100)$$

7. Здиференціюємо за часом записані функції швидкостей змінення шуканих параметрів.

7.1. Похідна за часом відносної швидкості повзуна

$$\frac{d\mathrm{V}_{A_3A_2}}{dt} = -l_1\omega_1\cos(\varphi_1-\varphi_3)\left(\frac{d\varphi_1}{dt}-\frac{d\varphi_3}{dt}\right) - l_1\frac{d\omega_1}{dt}\sin(\varphi_1-\varphi_3).$$

Урахуємо такі рівності: $\frac{dV_{A_3A_2}}{dt} = W_{A_3A_2}$, $\frac{d\varphi_1}{dt} = \omega_1$, $\frac{d\varphi_3}{dt} = \omega_3$, $\frac{d\omega_1}{dt} = \varepsilon_1$ і $l_1\sin(\varphi_1-\varphi_3) = -V_{A_3A_2}/\omega_1$, унаслідок чого отримаємо

$$W_{A_3A_2} = -l_1\omega_1^2\cos(\varphi_1-\varphi_3) + l_1\omega_1\omega_3\cos(\varphi_1-\varphi_3) - l_1\varepsilon_1\sin(\varphi_1-\varphi_3) =$$

$$= l_{23}\omega_3^2 - l_1\omega_1^2\cos(\varphi_1-\varphi_3) + \varepsilon_1\frac{V_{A_3A_2}}{\omega_1}, \qquad (2.101)$$

де $W_{A_3A_2}$ — відносне прискорення поступального руху повзуна 2 відносно куліси 3, або відносне прискорення точки A_2 відносно точки A_3.

7.2. Похідна за часом кутової швидкості куліси

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{\left[l_1\omega_1\cos(\varphi_1-\varphi_3)\right]'_t\, l_{23} - \left[l_1\omega_1\cos(\varphi_1-\varphi_3)\right]\left[l_{23}\right]'_t}{l_{23}^2},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{\left[l_1\omega_1\cos(\varphi_1-\varphi_3)\right]'_t\, l_{23}}{l_{23}^2} - \frac{\left[l_1\omega_1\cos(\varphi_1-\varphi_3)\right]\left[l_{23}\right]'_t}{l_{23}^2},$$

$$\varepsilon_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = \frac{\left[l_1\varepsilon_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) + l_1\omega_1\omega_3 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) - l_1\omega_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3) \right] l_{23}}{l_{23}^2} -$$

$$- \frac{l_1\omega_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_3) V_{A_2A_3}}{l_{23}^2} = - \frac{2\omega_3 V_{A_2A_3} + l_1\omega_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_3)}{l_{23}} + \varepsilon_1 \frac{\omega_3}{\omega_1}, \qquad (2.102)$$

де ε_3 — кутове прискорення обертання куліси 3.

8. Модуль прискорення Коріоліса визначають за формулою

$$W^{cor} = 2\left|\omega_3\right|\left|V_{A_3A_2}\right|.$$

9. Модулі швидкостей і прискорень точок $A = A_1 = A_2$ і A_3 визначають за формулами

$$V_A = \left|\omega_1\right| l_1,\ W_A^n = \omega_1^2 l_1,\ W_A^\tau = \left|\varepsilon_1\right| l_1,\ W_A = l_1\sqrt{\omega_1^4 + \varepsilon_1^2},$$

$$V_{A_3} = \left|\omega_3\right| l_{23},\ W_{A_3}^n = \omega_3^2 l_{23},\ W_{A_3}^\tau = \left|\varepsilon_3\right| l_{23},\ W_{A_3} = l_{23}\sqrt{\omega_3^4 + \varepsilon_3^2}.$$

10. Ланки 2 і 3 утворюють поступальну НКП, отже, $\omega_2 = \omega_3$ і $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$.

11. Модулі швидкості й прискорення точки *B* визначають так само, як і для точки A_3, тільки замість довжини l_{23} слід указати довжину l_{O_1B}.

7. Функція положення механізму й кінематичні передатні функції

Функцією положення механізму (ФПМ) *називають залежність координати вихідної ланки від узагальнених координат механізму*.

Наприклад, для кулісного механізму (див. рис. 2.64) параметри l_{23} і φ_3 вихідної ланки 3 (куліси) залежать від значення кута повороту φ_1 (узагальнена координата механізму) початкової ланки 1.

Отже, функція положення ланки 3 має вигляд

$$l_{23} = l_{23}\left(\varphi_1\right),\ \varphi_3 = \varphi_3\left(\varphi_1\right). \qquad (2.103)$$

Знайдемо кутову швидкість ланки 3:

$$\omega_3 = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{\partial\varphi_3}{\partial\varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt} = u_{31}\omega_1, \qquad (2.104)$$

де $u_{31} = \dfrac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1} = \dfrac{\omega_3}{\omega_1}$ — передатне відношення між ланками 3 і 1.

Передатне відношення u_{31} називають також *аналогом кутової швидкості*. Дійсно, якщо в рівнянні (2.104) $\omega_1 = 1\ \text{с}^{-1}$, то $\omega_3 = u_{31}$.

Визначимо швидкість точки *A3* відносно точки *A2*:

$$V_{32} = \frac{dl_{32}}{dt} = \frac{\partial l_{32}}{\partial \varphi_1}\frac{d\varphi_1}{dt} = v_{qA_3}\omega_1, \qquad (2.105)$$

де $\text{v}_{qA_3} = \dfrac{\partial l_{23}}{\partial \varphi_1} = \dfrac{V_{A_3A_2}}{\omega_1}$ — аналог швидкості точки *A3* відносно точки *A2* (точки повзуна 2).

Визначимо кутове прискорення ланки 3:

$$\varepsilon_3 = \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \varphi_3}{\partial \varphi_1}\omega_1\right) = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \varphi_1^2}\frac{d\varphi_1}{dt}\omega_1 + \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\frac{d\omega_1}{dt} = u'_{31}\omega_1^2 + u_{31}\varepsilon_1, \quad (2.106)$$

де $u'_{31} = \dfrac{d^2\varphi_3}{d\varphi_1^2}$ — аналог кутового прискорення ланки 3.

Визначимо прискорення точки *A3* відносно точки *A2*:

$$W_{A_3A_2} = \frac{d^2 l_{23}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial l_{23}}{\partial \varphi_1}\omega_1\right) = \frac{\partial^2 l_{23}}{\partial \varphi_1^{\,2}}\omega_1^2 + \frac{\partial l_{23}}{\partial \varphi_1}\varepsilon_1 = w_{qA_3}\omega_1^2 + v_{qA_3}\varepsilon_1, \quad (2.107)$$

де — аналог прискорення точки *A3* відносно точки *A2*.

Першу й другу часткові похідні ФПМ також називають першою і другою кінематичними передатними функціями механізму.

Отже, аналоги швидкостей і прискорень — це кінематичні передатні функції механізму.

Ааналоги щвидкостей і прискорень можна визначити як аналітичним (методом замкннених векторних контурів), так і графічним (методом планів швидкостей і прискорень) методами.

Запитання для самоконтролю

1. Наведіть основні задачі аналізу кінематики механізмів.
2. Які існують методи аналізу кінематики механізмів?

3. Наведіть переваги аналітичних методів кінематичного дослідження руху механізмів.

4. Що таке узагальнені координати механізмів? Наведіть приклад.

5. Поясніть суть методу замкнених векторних контурів на прикладі плоского важільного механізму.

6. Перелічить основні рекомендації (правила) під час будування замкненого векторного контуру механізму.

7. Як зображається у векторному замкненому контурі рухома ланка механізму — повзун?

8. Поясніть, за яким методом векторне рівняння замкненості векторного контуру механізму можна застосувати для знаходження аналітичним шляхом невідомих кінематичних параметрів механізму.

9. Скільки невідомих змінних параметрів кінематики плоского механізму можна знайти, використовуючи метод замкнених векторних контурів?

10. Поняття функції положення механізму. Як визачити цю функцію за аналітичним методом у формі методу замкнкнених векторних контурів.

11. Наведіть функцію положення механізму для центрального кривошипно-повзунного механізму.

12. Що називають аналогом швидкостей? Зв'язок між швидкістю й аналогом швидкості.

13. Наведіть формулу, за якою розраховують аналог швидкості точки повзуна (шарнир, який зєднує шатун і повзун) центрального кривошипно-повзунного механізму.

14. Що називають аналогом прискорень? Яким є зв'язок між прискоренням та аналогом прискорень?

15. Наведіть формулу, за якою рораховують аналог прискорення точки повзуна (шарнир, який з’єднує шатун і повзун) центрального кривошипно-повзунного механізму.

16. За якими методами визначаються аналоги швидкостей і прискорень механізму?

Лекція 10. ВЕКТОРНО-ГРАФІЧНИЙ МЕТОД КІНЕМАТИЧНОГО АНАЛІЗУ ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

План лекції

1. Вступ.
2. Теоретичні засоби векторно-графічного методу.
3. Методика використання засобу для визначення швидкостей і прискорень.

1. Вступ

Спочатку розглянемо відоме вам завдання про знаходження розв'язку системи двох лінійних алгебричних рівнянь (СЛАР), складеної відносно двох невідомих, наприклад x і y.

Задано систему двох лінійних алгебричних рівнянь вигляду

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{aligned}\right\} \qquad (2.108)$$

Розв'язок цієї системи можна знайти різними способами. Ви знаєте аналітичний метод у вигляді формул Крамера, а також графічний метод розв'язання цієї системи.

На рис. 2.66 показано ідею графічного методу розв'язання системи (2.108).

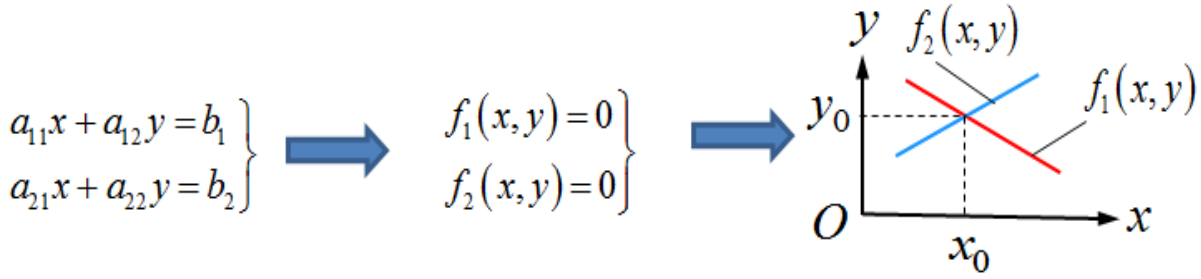


Рис.2.66

Таким чином? розв'язок системи (2.108) знаходять як точку перетину на координатній площині xOy двох прямих (графіків функцій $f_i(x,y)$, i = 1, 2), що зображують рівняння заданої системи:

Отже, необхідно звернути увагу на два моменти:

— кожне рівняння системи можна зобразити на координатній площині xOy у вигляді прямої, яку можна назвати *графічним зображенням* відповідного рівняння системи;

— розв'язок системи знаходиться як точка перетину двох графічних зображень рівнянь системи.

Векторно-графічний метод, або *метод планів швидкостей і прискорень*, що базуються на складанні векторних рівнянь для швидкостей і прискорень з подальшим графічним розв'язанням цих рівнянь, можна застосувати для заданого положення механізму.

2. Теоретичні засоби векторно-графічного методу

Довільний рух незмінної плоскої фігури в її площині складається з *переносного поступального руху* разом із довільно вибраною точкою плоскої фігури (полюсом) і *відносним обертальним рухом* навколо полюса (рис. 2.67).

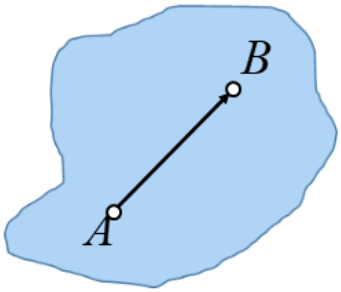


Рис. 2.67

Швидкість і прискорення довільної точки B плоскої фігури можна визначити за допомогою таких векторних рівнянь:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{BA}};$$

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{BA}^n} + \overrightarrow{W_{BA}^\tau},$$

де $\overrightarrow{V_A}$ — швидкість полюса точки A; $\overrightarrow{V_{BA}} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{AB}$ – швидкість точки B під час обертального руху відносно полюса точки A, $\overrightarrow{V_A} \perp AB$;

$\vec{\omega}$ — кутова швидкість обертального руху плоскої фігури;

$\overrightarrow{AB}$ — радіус-вектор точки B відносно точки A;

$\overrightarrow{W_A}$ — прискорення точки A;

$\overrightarrow{W_{BA}}$ — прискорення точки B під час обертального руху відносно полюса точки A;

$\overrightarrow{W_{BA}^n} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{V_{BA}} = \vec{\omega} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{R}\right)$ — нормальне (доцентрове) прискорення,

вектор якого є напрямленим по радіусу від точки B до точки A, $\overrightarrow{W^n_{BA}} \parallel AB$;

$\overrightarrow{W^\tau_{BA}} = \vec{\varepsilon} \times \vec{R}$ — тангенціальне (дотичне) прискорення, вектор якого є перпендикулярним до радіуса обертання;

$\vec{\varepsilon}$ — кутове прискорення обертального руху плоскої фігури.

Подамо векторне співвідношення для швидкостей точок A і B у вигляді графічного зображення (рис. 2.68).

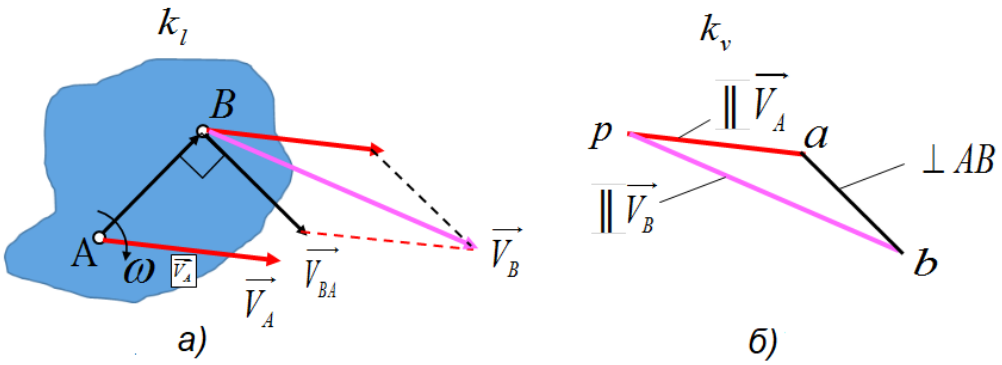


Рис. 2.68

Положення фігури (відрізок AB) для фіксованого моменту часу показано на рис. 2.68, *а*. Тут фігуру у вигляді відрізка AB зображено в масштабі $k_l = \dfrac{l_{AB}}{AB}\left(\dfrac{м}{мм}\right)$, l_{AB} — відстань між точками A і B. У точці B показано вектори відповідних швидкостей і їх геометрична сума.

На рис. 2.68, *б* відрізками $\overline{pa}$, $\overline{pb}$ зображено в заданому масштабі вектори абсолютних швидкостей $\overrightarrow{V_A}$ і $\overrightarrow{V_B}$, а відрізком $\overline{ab}$ — відносну швидкість $\overrightarrow{V_{BA}}$. Відрізки побудовано в масштабі

$$k_v = \frac{V_A}{\overline{pa}} = \frac{V_B}{\overline{pb}} = \frac{V_{BA}}{\overline{ab}}\left(\frac{м \cdot с^{-1}}{мм}\right).$$

Точка p, з якої виходять відрізки, що зображують абсолютні швидкості, має нульову швидкість.

Фігуру pab називають планом швидкостей, а точку p — полюсом плану швидкостей відрізка AB (див. рис. 2.68, *б*).

Хай тіло (ланка), показане на рис. 2.69, *а*, виконує плоский рух. Як відомо, такий рух можна задати, задаючи закон руху двох його точок, наприклад A і B. Точка P — миттєвий центр швидкостей (МЦШ).

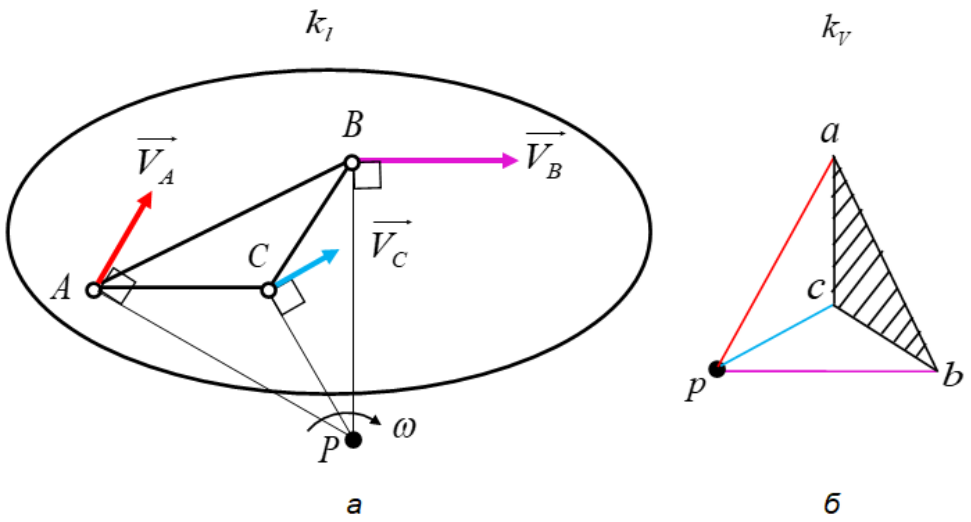


Рис. 2.69

Перенесемо вектори абсолютних швидкостей $\overrightarrow{V_A}$ і $\overrightarrow{V_B}$ у точку p (полюс плану швидкостей). Отримаємо план швидкості відрізка AB (див. рис. 2.79, *б)* у масштабі k_v.

Згідно з теоремою про складний рух швидкість точки C

$$\overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{V_{CB}},$$

або

$$\overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{CA}}.$$

Припустимо, ця швидкість теж є відомою. Тоді відрізок на плані

$$\overline{pc} = \frac{V_C}{k_v}.$$

Трикутник ABC (див. рис. 2.69, *а*) є подібним до трикутника abc, оскільки $ab \perp AB$, $ac \perp AC$ і $bc \perp BC$. Цю особливість розглянутого плану швидкостей називають *властивістю подібності плану швидкостей*: на плані швидкостей для точок, які належать до одного тіла (до фігури, виділеної на тілі), що здійснює рух, відповідає подібна фігура.

Властивості планів швидкостей:

1. Вектори, які виходять з полюса, являють собою абсолютні швидкості.
2. Напрямок вектора — завжди від полюса.
3. У кінці вектора завжди є точка, що відповідає точці ланки або кінематичній парі.

4. Вектори на планах швидкостей, що не проходять через полюс, являють собою відносні швидкості.

5. Відносні швидкості на плані завжди напрямлені від другого індексу в позначеннях цих швидкостей до першого.

На рис. 2.70 показано побудований план прискорень відрізка AB (рис. 2.70, *а*).

На рис. 2.70, *б* відрізки $\overline{qa}$, $\overline{qb}$ зображують у заданому масштабі вектори абсолютних прискорень $\overrightarrow{W_A}$ і $\overrightarrow{W_B}$, а відрізок $\overline{ab}$ — відносне прискорення $\overrightarrow{W_{BA}}$. Складові вектора прискорення $\overrightarrow{W_{BA}}$ зображують відрізками $\overline{abn}$ (нормальне прискорення) і $\overline{bnb}$ (дотичне прискорення).

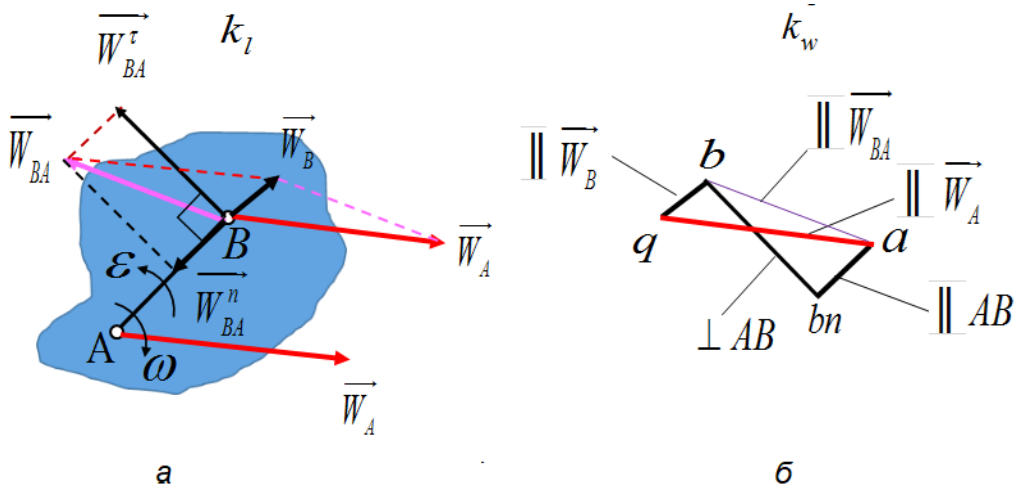


Рис. 2.70

Відрізки побудовано в масштабі

$$k_w = \frac{W_A}{\overline{qa}} = \frac{W_B}{\overline{qb}} = \frac{W_{BA}}{\overline{ab}} = \frac{W^n_{BA}}{\overline{abn}} = \frac{W^{\tau}_{BA}}{\overline{bnb}} \left(\frac{м \cdot с^{-2}}{мм} \right).$$

Точка q, з якої виходять відрізки, що зображують абсолютні прискорення, має нульове прискорення.

Фігуру $qbabn$ називають *планом прискорення*, а точку q — *полюсом плану прискорень* відрізка AB (див. рис. 2.70, *б*).

Розглянемо тіло (рис. 2.71, а), рух якого задано рухом точок A і B. Точка Q — миттєвий центр прискорень (МЦП).

Перенесемо вектори абсолютних прискорень $\overrightarrow{W_A}$ і $\overrightarrow{W_B}$ у точку *q* (полюс плану прискорень). Отримаємо план прискорень відрізка *AB* (рис. 2.71, *б*) у масштабі k_w.

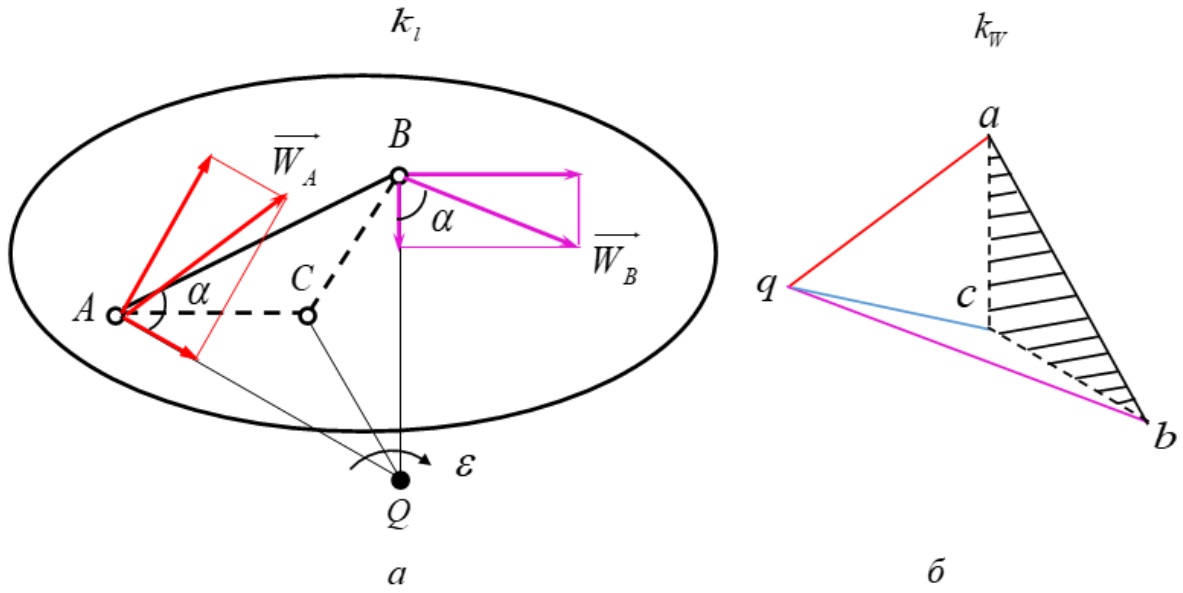


Рис. 2.71

Згідно з теоремою про складний рух прискорення точки C

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_B} + \overrightarrow{W_{CB}},$$

або

$$\overrightarrow{W_C} = \overrightarrow{W_A} + \overrightarrow{W_{CA}}.$$

Припустимо, це прискорення нам теж є відомим. Тоді відрізок на плані

$$\overline{qc} = \frac{W_C}{k_w}.$$

З побудованого плану прискорень випливає подібність трикутників ABC і abc. Цю особливість називають властивістю *подібності плану прискорень*: на плані прискорень для точок, які належать до одного тіла (до фігури, виділеної на тілі), що здійснює рух, відповідає подібна фігура.

Властивості планів прискорень є аналогічними властивостям планів швидкостей:

1) точки механізму, прискорення яких дорівнюють нулю, на плані знаходяться на полюсі;

2) вектори абсолютних прискорень виходять з полюса плану;

3) вектори, що з'єднують кінці векторів абсолютних прискорень, є векторами відносних прискорень.

Розглянемо довільну ланку 2, яка утворює поступальну пару A з рухомою ланкою (рис. 2.72).

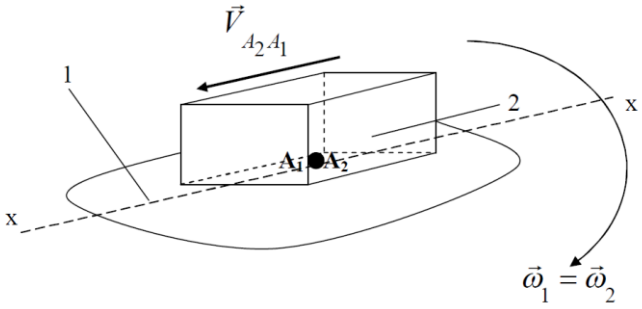


Рис. 2.72

Ланка 1 і 2 утворюють поступальну кінематичну пару, тому $\overrightarrow{\omega_1} = \overrightarrow{\omega_2}$.

Швидкість кінематичної пари A (швидкість точки A_2) визначається рівнянням

$$\overrightarrow{V_{A_2}} = \overrightarrow{V_{A_1}} + \overrightarrow{V_{A_2A_1}},$$

де $\overrightarrow{V_{A_1}}$ — швидкість поступального руху точки A_1, яка належить до першої ланки (напрямна *x – x*) і збігається з положенням точки A_2 другої ланки, яка здійснює тільки поступальний рух по лінії *x – x* відносно першої ланки;

$\overrightarrow{V_{A_2A_1}}$ — швидкість руху ланки 2 відносно ланки 1, напрямлена паралельно до лінії *x – x*.

Прискорення точки A_2 визначається рівнянням

$$\overrightarrow{W_{A_2}} = \overrightarrow{W_{A_1}} + \overrightarrow{W_{A_2A_1}} + \overrightarrow{W^{cor}},$$

де $\overrightarrow{W_{A_1}}$ — прискорення руху точки A_1;

$\overrightarrow{W_{A_2A_1}}$ — прискорення руху ланки 2 відносно ланки 1;

$\overrightarrow{W^{cor}}$ — прискорення Коріоліса, яке спрямовано під кутом 90° до лінії *x – x*,

$$\overrightarrow{W^{cor}} = 2\overrightarrow{\omega_1} \times \overrightarrow{V_{A_2A_1}}.$$

Напрямок прискорення Коріоліса визначається за правилом Жуковського.

На рис. 2.73 показано структуру групи Ассура 2-го класу, утворену ланками *i* і *j*. Символами A, B і C позначено кінематичні пари.

Швидкості й прискорення крайніх точок групи A і C є відомими.

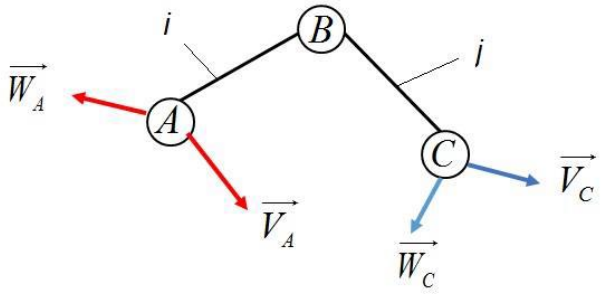


Рис. 2.73

Швидкість і прискорення середньої точки B визначається векторними рівняннями, вигляд яких залежіть від виду кінематичної пари B.

Хай ланки *i* і *j* утворюють обертальну НКП V класу, тоді маємо такі рівняння:

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_{A_i}} + \overrightarrow{V_{BA_i}};$$

$$\overrightarrow{V_B} = \overrightarrow{V_{C_j}} + \overrightarrow{V_{BC_j}}.$$

Швидкості крайніх точок A_i і C_j є відомими. Відомо напрямки векторів відносних швидкостей $\overrightarrow{V_{BA_i}}$ і $\overrightarrow{V_{BC_j}}$ — ці вектори є перпендикулярними до відрізків AB і CB.

Прирівнявши праві частини цих векторних рівнянь, отримаємо результівне рівняння

$$\underline{\underline{\overrightarrow{V_{A_i}}}} + \underline{\overrightarrow{V_{BA_i}}} = \underline{\underline{\overrightarrow{V_{Cj}}}} + \underline{\overrightarrow{V_{BC_j}}},$$

де вектор з відомим напрямком і його позначено нижньою стрілкою, а відомий вектор — двома нижніми рисками. Невідомими величинами в цьому рівнянні є модулі швидкостей $\overrightarrow{V_{BA_i}}$ і $\overrightarrow{V_{BC_j}}$.

Результівне рівняння для швидкостей розв'яжемо графічним методом — будуванням плану швидкостей.

Для прискорень маємо такі векторні рівняння:

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_{A_i}} + \overrightarrow{W_{BA_i}} = \overrightarrow{W_{A_i}} + \overrightarrow{W^n_{BA_i}} + \overrightarrow{W^\tau_{BA_i}};$$

$$\overrightarrow{W_B} = \overrightarrow{W_{C_j}} + \overrightarrow{W_{BC_j}} = \overrightarrow{W_{C_j}} + \overrightarrow{W^n_{BC_i}} + \overrightarrow{W^\tau_{BC_j}}.$$

Прирівнявши праві частини цих векторних рівнянь, отримаємо результівне рівняння

$$\overrightarrow{W_{A_i}} + \overrightarrow{W^n_{BA_i}} + \overrightarrow{W^\tau_{BA_i}} = \overrightarrow{W_{C_j}} + \overrightarrow{W^n_{BC_j}} + \overrightarrow{W^\tau_{BC_j}}.$$

Це рівняння для прискорень розв'яжемо графічним методом — будуванням плану прискорень.

Хай ланки *i* і *j* утворюють поступальну НКП V класу, тоді отримаємо такі рівняння:

$$\overrightarrow{V_{B_j}} = \overrightarrow{V_{A_i}} + \overrightarrow{V_{B_jA_i}};$$

$$\overrightarrow{V_{B_j}} = \overrightarrow{V_{C_j}} + \overrightarrow{V_{B_jC_j}}.$$

Прирівнявши праві частини цих векторних рівнянь, одержимо результівне рівняння

$$\overrightarrow{V_{A_i}} + \overrightarrow{V_{B_jA_i}} = \overrightarrow{V_{Cj}} + \overrightarrow{V_{B_jC_j}}.$$

Це рівняння для швидкостей розв'яжемо графічним методом — будуванням плану швидкостей.

Для прискорень маємо такі векторні рівняння:

$$\overrightarrow{W_{B_j}} = \overrightarrow{W_{A_i}} + \overrightarrow{W_{B_jA_i}} + \overrightarrow{W^{cor}};$$

$$\overrightarrow{W_{B_j}} = \overrightarrow{W_{C_j}} + \overrightarrow{W_{B_jC_j}} = \overrightarrow{W_{C_j}} + \overrightarrow{W^n_{B_jC_j}} + \overrightarrow{W^\tau_{B_jC_j}}.$$

Прирівнявши праві частини цих векторних рівнянь, отримаємо дозвільне рівняння

$$\overrightarrow{W_{A_i}} + \overrightarrow{W_{B_jA_i}} + \overrightarrow{W^{cor}} = \overrightarrow{W_{C_j}} + \overrightarrow{W^n_{B_jC_j}} + \overrightarrow{W^\tau_{B_jC_j}}.$$

Дозвільне рівняння для прискорень розв'яжемо графічним методом — будуванням плану прискорень.

Розглянуті дії є основою векторно-графічного методу аналізу кінематики плоских важільних механізмів.

Таким чином, *векторно-графічний метод кінематичного аналізу* полягає в складанні векторних рівнянь для швидкостей і прискорень та графічному розв'язанні цих рівнянь у фіксованих положеннях механізму.

Недолік цього методу полягає в тому, що неможливо отримати функціональні залежності кінематичних величин від часу. Перевага ж його — простота й наочність.

3. Методика використання засобу для визначення швидкостей і прискорень

1. Виконати структурний аналіз механізму. Для кожної групи Ассура визначити середню і крайні точки.
2. Виокремите першу групу Ассура. Визначити швидкості й прискорення крайніх точок групи.
3. Записати векторні рівняння для швидкості (прискорення) середньої точки через швидкості (прискорення) крайніх точок групи. Виявити в системі рівнянь невідомі величини, а інші визначити.
4. Графічно розв'язати отримані векторні рівняння. Для визначення напрямку векторів швидкостей (прискорень) використати схему механізму, зображену в масштабі.
5. Обчислити кутові швидкості (прискорення).
6. Виконати пп. 2 — 5 для кожної групи Ассура.

Приклад

Побудувати в загальному вигляді плани швидкостей і прискорень для кривошипно-повзунного механізму (рис. 2.74). Уважати заданими масштаб k_l (м/мм), положення механізму, кутову швидкість $\omega_1 = const$ (с$^{-1}$), довжини ланок l_{OA} і l_{AB}.

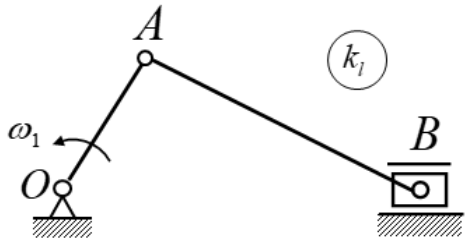


Рис. 2.74

Розв'язання

1. Виконуємо структурний аналіз механізму (рис. 2.75). Кількість рухомих ланок n = 3. Кількість НКП 5-го класу $p_5 = 4$. Кінематичних пар IV

класу нема, тобто $p_4 = 0$. Ступінь рухомості механізму $W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1$.

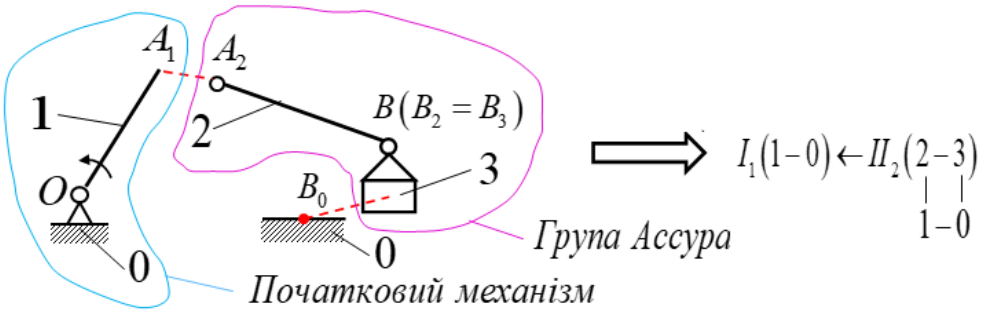


Рис. 2.75

Початковою ланкою механізму є кривошип 1, закон руху якого задано. Ланки 2 (шатун) і 3 (повзун) створюють структурну групу Ассура II класу 2-го порядку 2-го виду.

На рис. 2.75 зображено приєднання ланок 2 і 3 механізму до двох КП відповідно 1–2 (обертальну) і 2–3 (поступальну). Нижній індекс точки A або точки B відображає її належність до *i*-ї ланки. У точці A механізму геометрично збігаються точки A_1 і A_2, у точці B — три різні фізичні точки B_2, B_3 і B_0. На рис. 2.75 точку B_3 умовно показано за межами повзуна 3.

Рух точки B_3 є складним. З одного боку, вона належіть до ланки 3, яка рухається поступово відносно нерухомої точки B_0 стояка 0. З іншого — точка B_3 рухається відносно точки A_2, яка належіть до ланки 2 (рух ланки 2 є плоским).

Отже, точки A_2 і B_0 є крайніми точками групи Ассура, а точка B_2 — середньою.

2. Будуємо план швидкостей. Для початкового механізму, утвореного ланкою 1 і стояком 0, модуль швидкості точки A визначається формулою $V_A = \omega_1 l_{OA}$. Вектор швидкості точки A напрямленим по перпендикуляру до ланки 1 у бік її обертання.

Для швидкості точки B групи Ассура II класу 2-го порядку, утворену ланками 2 і 3, маємо такі векторні рівності:

$$\overrightarrow{V_{B_2}} = \overrightarrow{V_{A_2}} + \overrightarrow{V_{B_2A_2}};$$

$$\overrightarrow{V_{B_2}} = \overrightarrow{V_{B_0}} + \overrightarrow{V_{B_2B_0}},$$

де $\overrightarrow{V_{A_2}} = \overrightarrow{V_{A_1}} = \overrightarrow{V_A}$, $\overrightarrow{V_{B_2}} = \overrightarrow{V_{B_3}} = \overrightarrow{V_B}$, $\overrightarrow{V_{B_0}} = 0$ і $\overrightarrow{V_{B_2B_0}} = \overrightarrow{V_B}$.

Прирівнявши праві частини цих рівностей один до одного, отримаємо

$$\overrightarrow{V_A} + \overrightarrow{V_{BA}} = \overrightarrow{V_B},$$

де вектор швидкості точки A є відомим за модулем і напрямком ($\overrightarrow{V_A} \perp OA$); вектор відносної швидкості $\overrightarrow{V_{BA}}$ — за напрямком ($\overrightarrow{V_{BA}} \perp AB$); вектор швидкості $\overrightarrow{V_B}$ — за напрямком ($\overrightarrow{V_B} \parallel OB$).

Отже, необхідно визначити модулі векторів швидкостей $\overrightarrow{V_{BA}}$ і $\overrightarrow{V_B}$.

Будуємо план положення механізму, застосовуючи масштабний коефіцієнт k_l, $м/мм$: (рис. 2.76, *а*).

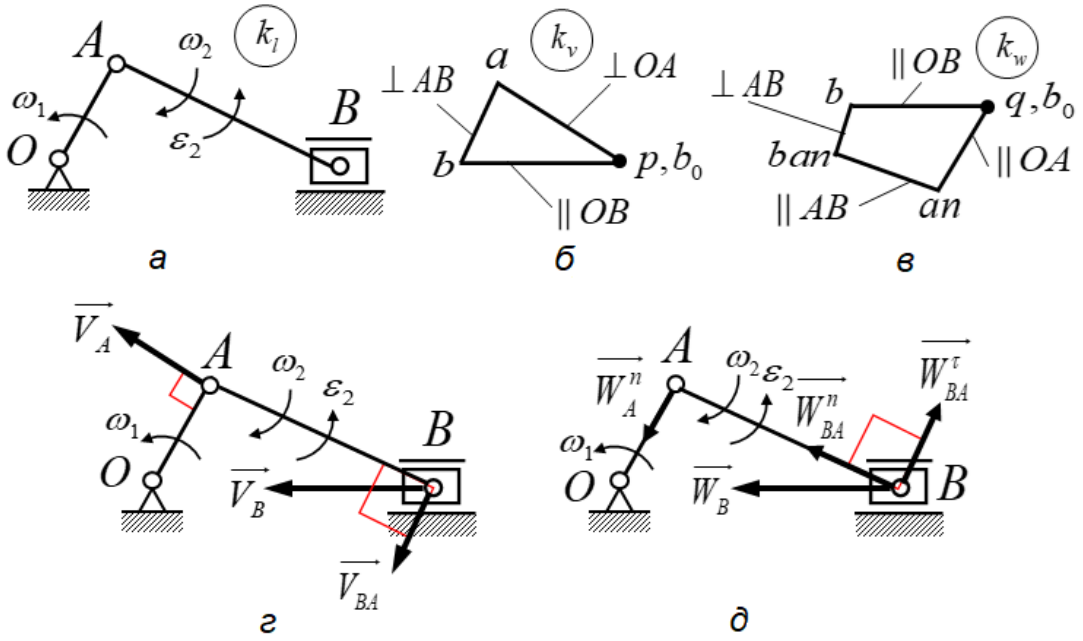


Рис. 2.76

Визначаємо масштабний коефіцієнт плану швидкостей, $\frac{м}{мм \cdot с}$ за формулою

$$k_v = \frac{V_A}{pa},$$

де pa — довжина відрізка $\overline{pa}$ графічного зображення вектора швидкості $\overrightarrow{V_A}$.

Вибираємо на кресленні точку, позначивши її p, яка буде полюсом плану швидкостей (рис. 2.76, *б*). З полюса відкладаємо відрізок $\overline{pa}$, який відповідає швидкості точки A кривошипу (OA). З отриманої точки a проводимо лінію, яка є перпендикулярною до осі шатуна (ланка AB), а з полюса p проводимо лінію паралельно до OB. Перетин цих двох ліній дасть точку b. Відрізки $\overline{pb}$ і $\overline{ab}$ є графічними зображеннями векторів швидкостей $\overrightarrow{V_B}$ і $\overrightarrow{V_{BA}}$ відповідно.

Модулі швидкостей $\overrightarrow{V_B}$ і $\overrightarrow{V_{BA}}$ визначаємо таким чином:

$$V_B = k_v \cdot pb,\ V_{BA} = k_v \cdot ab,$$

де pb і ab — довжини відрізків $\overline{pb}$ і $\overline{ab}$, знайдених з креслення плану швидкостей.

Значення кутової швидкості ω_2 шатуна *AB* визначаємо за формулою

$$\omega_2 = V_{BA} / l_{AB}.$$

Напрямок кутової швидкості шатуна ω_2 знаходимо за напрямком вектора лінійної швидкості $\overrightarrow{V_{BA}}$ (див. рис. 2.76, *б*).

Кутова швидкість повзуна дорівнює нулю, тобто ω_3 = 0.

На рис. 2.76, *г* показано вектори лінійних швидкостей характерних точок механізму й кутові швидкості обертання його ланок.

3. Будуємо план прискорень. Оскільки кривошип OA обертається з постійною кутовою швидкістю ω_1, точка A ланки OA буде мати тільки нормальне прискорення. Величину цього прискорення визначаємо за формулою $W_A^n = \omega_1^2 l_{OA}$. Вектор прискорення $\overrightarrow{W_A} = \overrightarrow{W_A^n}$ точки A є напрямленим по кривошипу від точки A до точки O.

Для прискорення точки B групи Ассура II класу 2-го порядку, утворену ланками 2 і 3, маємо такі векторні рівності:

$$\overrightarrow{W_{B_2}} = \overrightarrow{W_{A_2}} + \overrightarrow{W_{B_2A_2}};$$

$$\overrightarrow{W_{B_2}} = \overrightarrow{W_{B_0}} + \overrightarrow{W_{B_2B_0}} + \overrightarrow{W^{cor}},$$

де $\overrightarrow{W_{A_2}} = \overrightarrow{W_{A_1}} = \overrightarrow{W_A^n}$, $\overrightarrow{W_{B_2}} = \overrightarrow{W_{B_3}} = \overrightarrow{W_B}$, $\overrightarrow{W_{B_0}} = 0$, $\overrightarrow{W_{B_2B_0}} = \overrightarrow{W_B}$ і $\overrightarrow{W^{cor}} = 0$.

Прирівнявши праві частини цих рівностей один до одного, отримаємо

$$\overrightarrow{W_A}+\overrightarrow{W_{BA}}=\overrightarrow{W_B}\Rightarrow\overrightarrow{W_A^n}+\overrightarrow{W_{BA}^n}+\overrightarrow{W_{BA}^\tau}=\overrightarrow{W_B},$$

де вектор прискорення точки A є відомим за модулем і напрямком ($\overrightarrow{W_A^n}\,||\,OA$); вектор прискорення $\overrightarrow{W_{BA}^n}$ — за модулем і напрямком ($\overrightarrow{W_{BA}^n}\,||\,AB$); вектор прискорення $\overrightarrow{W_{BA}^\tau}$ — за напрямком ($\overrightarrow{W_{BA}^\tau}\perp AB$); вектор прискорення $\overrightarrow{W_B}$ — за напрямком ($\overrightarrow{W_B}\,||\,OB$).

Отже, необхідно визначити модулі векторів прискорень $\overrightarrow{W_{BA}}$ і $\overrightarrow{W_B}$.

Масштабний коефіцієнт плану прискорень $\frac{м}{мм\cdot с^2}$, визначаємо за формулою

$$k_w=\frac{W_A^n}{qan},$$

де qan — довжина відрізка $\overline{qan}$ графічного зображення вектора прискорення $\overrightarrow{W_A^n}$.

Вибираємо на кресленні точку, позначивши її q, яка буде полюсом плану прискорень (рис. 2.76, *в*). З полюса відкладаємо відрізок $\overline{qan}$, який відповідає прискоренню точки A кривошипа (OA). З отриманої точки an проводимо відрізок $\overline{anban}$, який є паралельним до осі шатуна (ланка AB). З отриманої точки ban проводимо лінію, яка є перпендикулярною до осі шатуна (ланка AB), а з полюса q проводимо лінію паралельно до OB. Перетин цих двох ліній дасть точку b.

Відрізки $\overline{qb}$ і $\overline{banb}$ є графічними зображеннями векторів прискорень $\overrightarrow{W_B}$ і $\overrightarrow{W_{BA}^\tau}$ відповідно.

Величини прискорень $\overrightarrow{W_B}$ і $\overrightarrow{W_{BA}^\tau}$ визначаються формулами

$$W_B=k_w\cdot qb,\ W_{BA}^\tau=k_w\cdot banb,$$

де qb і $banb$ — довжини відрізків $\overline{qb}$ і $\overline{banb}$ відповідно, знайдених з креслення плану прискорень.

Значення кутового прискорення ε_2 обертання шатуна AB визначаємо за формулою

$$\varepsilon_2 = W_{BA}^{\tau} / l_{AB} .$$

Напрямок кутового прискорення шатуна ε_2 знаходимо за напрямком вектора прискорення $\overrightarrow{W_{BA}^{\tau}}$ (див. рис. 2.76, *в*).

Кутове прискорення повзуна дорівнює нулю, тобто ε_3 = 0.

На рис. 2.76, *д* показано вектори лінійних прискорень характерних точок механізму й кутові прискорення обертання його ланок.

Запитання для самоконтролю

1. Що собою являють плани швидкостей і прискорень механізму і якою є їх точність?
2. Як вибирають масштаби планів швидкостей і прискорень і як їх використовують при визначенні швидкостей і прискорень точок ланок механізмів?
3. Опишіть правила оформлення планів швидкостей і прискорень.
4. Як визначають величини й напрямки лінійних швидкостей точок ланок механізмів під час абсолютного й відносного рухів?
5. Як визначити величини й напрямки кутових швидкостей ланок під час складного плоского руху?
6. Як визначають величини й напрямки різних абсолютних, відносних і поворотних (нормальних, дотичних, коріолісових) лінійних прискорень точок ланок механізмів?
7. Як визначають величини й напрямки кутових прискорень ланок, що здійснюють складний плоский рух?
8. Сформулюйте теорему подібності планів швидкостей. Як її використовують при відшукуванні швидкостей точок ланок?
9. Сформулюйте теорему подібності планів прискорень. Як її використовують при відшукуванні прискорень точок ланок?
10. Як уникнути помилки при використанні теорем подібності планів швидкостей і прискорень?
11. У чому полягають особливості оформлення й вирішення векторних рівнянь руху при будуванні планів швидкостей і прискорень?
12. У яких випадках слід виокремлювати особливі конкурувальні точки ланок при будуванні планів швидкостей і прискорень?
13. Сформулюйте правило Жуковського для визначення напрямку прискорення Коріоліса.
14. У якій послідовності будують плани швидкостей і прискорень?

Розділ 3. ДИНАМІКА

Лекція 11. ДИНАМІКА МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ

План лекції

1. Вступ.
2. Основні поняття й означення.
3. Закони динаміки.
4. Диференційні рівняння руху вільної матеріальної точки.
5. Дві основні задачі динаміки вільної матеріальної точки.
6. Рівняння руху невільної матеріальної точки.
7. Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки.
8. Окремі випадки відносного руху точки. Умови відносного спокою.

1. Вступ

Динаміка — розділ теоретичної механіки, предметом вивчення якого є рух матеріальної точки, матеріальних тіл під дією сил.

У класичній механіці задачі динаміки умовно поділяють традиційно на два типи.

У задачах першого типу звичайний рух тіла (або механічної системи) є заданим і необхідно визначити сили, під дією яких здійснюється цей рух (пряма задача динаміки).

Задачі другого типу за умовою звичайно мають протилежний зміст: у них заданими є сили, а шуканим — рух тіла (обернена задача динаміки).

2. Основні поняття й визначення

У теоретичній механіці під **матеріальною точкою** розуміють тіло кінцевої маси, розмірами й різницею під час руху окремих точок якого можна знехтувати. Наприклад, тіло, що поступально рухається, можна розглядати матеріальною точкою з масою, що дорівнює масі всього тіла. Зазвичай матеріальну точку моделюють геометричною, якій надають кінцевої маси.

У класичній механіці Ньютона використовується поняття «абсолютна система координат» і «абсолютний час».

Абсолютна система координат є абсолютно нерухомою, для якої справджується закон інерції Галілея, тобто систему координат, щодо якої виконується закон інерції, називають інерціальною.

Абсолютний час — це час, який не залежить від руху тіл і систем відліку, тобто є однаковим для всіх спостерігачів, де б вони не знаходились і як би не рухались.

Досвід і спостереження свідчать про те, що інерціальною системою координат є геліоцентрична система, полюс якої знаходиться в центрі мас Сонця, а осі є напрямленими на нерухомі зірки.

Будь-яка система координат, що рухається відносно інерціальної нерухомої системи координат поступально, прямолінійно й рівномірно, також є інерціальною.

3. Закони динаміки

В основу динаміки покладено три закони Ньютона.

Перший закон динаміки (закон інерції Галілея). За перший закон динаміки в класичній механіці взято перший закон Ньютона, який є узагальненням принципу інерції Галілея на базі понять абсолютно нерухомої системи координат і абсолютного часу.

Згідно з першим законом динаміки ізольована матеріальна точка зберігає стан спокою або рівномірного й прямолінійного руху доти, доки вплив з боку інших тіл не виведе її з цього стану.

Властивість ізольованої матеріальної точки зберігати стан рівномірного й прямолінійного руху, коли на неї не діють інші сили, називають рухом за **інерцією.**

Закон інерції відображає одне з основних властивостей матерії — перебування незмінно в русі.

Із закону інерції також випливає: якщо сила, що діє на точку, дорівнює нулю ($\overrightarrow{F} = 0$), то точка перебуває в стані спокою ($\overrightarrow{V} = 0$) або рухається з постійною за величиною і напрямком швидкістю, прискорення точки при цьому дорівнює нулю ($\overrightarrow{W} = 0$).

Другий закон динаміки (основний закон динаміки). Якщо рух точок не є рівномірним і прямолінійним, то на точку діє сила. За цим законом визначають, як змінюється швидкість точки під час дії на неї сили, а також кількісний зв’язок між прикладеною силою й прискоренням, що викликає ця сила.

У теоретичній механіці другий закон динаміки сформульовано на базі другого закону Ньютона: сила, що діє на матеріальну точку, надає їй прискорення, яке є пропорційним величині сили й має однаковий з нею напрямок.

Другий закон динаміки, як і перший, має місце лише стосовно інерціальної системи координат.

Математично цей закон виражають у вигляді основного рівняння динаміки вільної матеріальної точки

$$m\overrightarrow{W} = \overrightarrow{F}, \qquad (3.1)$$

де m, $\overrightarrow{W}$ — маса й прискорення точки; $\overrightarrow{F}$ — сила, що діє на точку (сила $\overrightarrow{F}$ здебільшого є рівнодійною активних сил і реакцій в'язей).

Рівняння (3.1) є вираженням кількісного співвідношення між трьома фізичними величинами: силою, масою й прискоренням. Відповідно точки в разі дії однакових сил отримують однакові прискорення лише тоді, коли будуть однаковими їх маси. Якщо маси є різними, то точка з більшою масою набуває меншого прискорення, тому маса матеріальної точки є мірою її **інертних властивостей**. Під інертністю розуміють властивість точки набувати під дією сили більшого прискорення при меншій масі.

Третій закон динаміки (закон рівності дії й протидії). У теоретичній механіці як третій закон динаміки застосовують третій закон Ньютона, за яким установлюється характер механічної взаємодії між матеріальними тілами.

На відміну від перших двох третій закон динаміки справджується у будь-якій системі координат, а не тільки в інерціальній, оскільки не містить кінематичних характеристик руху тіл.

Для двох матеріальних точок (рис.3.1) його формулювання є таким: *сили взаємодії двох точок (дія і протидія) є однаковими за величиною, протилежно напрямленими й мають спільну лінію дії*.

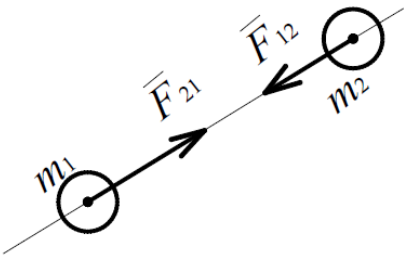


Рис. 3.1

Тут m_1, m_2 — маси точок, що взаємодіють; $\overrightarrow{F}_{12}$ — сила, що діє на тіло 2 з боку тіла 1, а $\overrightarrow{F}_{21}$ — навпаки. Слід зазначити, що сили $\overrightarrow{F}_{12}$ і $\overrightarrow{F}_{21}$, тобто їх взаємодія, не створюють зрівноважену систему сил, тому що їх прикладено до різних об'єктів.

Четвертий закон динаміки (закон незалежності дії сил або принцип суперпозиції). Якщо на точку діють одночасно декілька сил $\overrightarrow{F_k}$ (k = 1, …, n), то вони є еквівалентними одній силі — рівнодійній $\overrightarrow{R} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{F_k}$.

Припустимо, що прикладені до точки сили діють незалежно одна від одної. Тоді, використовуючи основне рівняння динаміки точки (3.1), отримаємо

$$m\overrightarrow{W} = \overrightarrow{R}, \qquad (3.2)$$

де $\vec{W} = \sum_{k=1}^{n} \vec{W}_k$ — прискорення точки; $\vec{W}_k$ — прискорення, якого набуває точка в разі дії *k*-ї сили $\vec{F}_k$.

Згідно з четвертим законом динаміки прискорення матеріальної точки, що виникає під час дії на неї декількох сил, дорівнює геометричній сумі прискорень, яких надають точці окремі сили.

4. Диференціальні рівняння руху вільної матеріальної точки

Диференціальні рівняння руху вільної точки мають форму, що залежить від способу задання її руху, тому розглянемо кожну з форм окремо.

4.1. Векторна форма

Положення точки M масою m в інерціальній системі координат $Oxyz$ визначимо радіусом-вектором $\vec{r}_k$ (рис. 3.2).

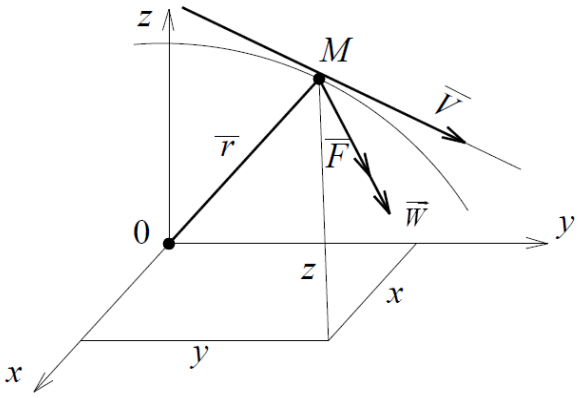


Рис. 3.2

Здебільшого сила $\vec{F} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$, що діє на точку, може залежати від часу *t*, положення $\vec{r}$ і швидкості $\vec{V} = \dot{\vec{r}}$, тому рівняння (3.1) набуде вигляду

$$m\vec{W} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}). \qquad (3.3)$$

Рівняння (3.3) перепишемо у вигляді

$$m\frac{d^2\vec{r}}{dt} = \vec{F}(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}}). \qquad (3.4)$$

До рівняння (3.4) потрібно приєднати початкові умови

$$\vec{r}\,|_{t=t_0} = \vec{r}_o\,,\ \dot{\vec{r}}\,|_{t=t_0} = \dot{\vec{r}}_o = \overrightarrow{V_0}\,. \tag{3.5}$$

Загальний розв'язок нелінійного (у загальному випадку) диференціального рівняння другого порядку (3.4) має вигляд

$$\vec{r}\left(t\right) = \vec{r}\left(t, C_1, C_2\right), \tag{3.6}$$

де C_1, C_2 — довільні сталі інтегрування.

Задача знаходження такого розв'язку рівняння (3.4), яке задовольняє початкові умови (3.5), називають задачею **Коші**.

4.2. Координатна форма

Розкладемо силу $\overrightarrow{F}$ на координатні осі системи координат $Oxyz$ (див. рис. 3.2):

$$\overrightarrow{F} = F_x\vec{i} + F_y\vec{j} + F_z\vec{j}\,. \tag{3.7}$$

Положення точки M у просторі визначаємо її координатами x, y і z. Тоді

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}\,. \tag{3.8}$$

Спроєктувавши векторні рівності (3.4) і (3.5) на координатні осі, отримаємо

$$\left.\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_x\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right), \\ m\ddot{y} &= F_y\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right), \\ m\ddot{z} &= F_z\left(t, x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\right); \end{aligned}\right\} \tag{3.9}$$

$$\left.\begin{aligned} x\,|_{t=t_0} = x_0,\ \dot{x}\,|_{t=t_0} = \dot{x}_0 = V_{x0}, \\ \mathrm{y}\,|_{t=t_0} = y_0,\ \dot{y}\,|_{t=t_0} = \dot{y}_0 = V_{y0}, \\ \mathrm{z}\,|_{t=t_0} = z_0,\ \dot{z}\,|_{t=t_0} = \dot{z}_0 = V_{z0}. \end{aligned}\right\} \qquad (3.10)$$

Визначення руху точки зводиться до розв'язання **задачі Коші**, яка складається із системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку (3.9) і початкових умов (3.10).

4.3. Натуральний спосіб

Якщо спроєктувати обидві частини векторного рівняння (3.4) на осі натурального тригранника (дотичну $\vec{\tau}$, головну нормаль $\vec{n}$ і бінормаль $\vec{b}$), то одержимо

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d}{dt}V_\tau = F_\tau\left(t,\sigma,\dot{\sigma}\right), \\ m\frac{V^2}{\rho} = F_n\left(t,\sigma,\dot{\sigma}\right), \\ 0 = F_b\left(t,\sigma,\dot{\sigma}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (13.11)$$

де $\sigma = \sigma(t)$ — функція часу дугової координати; $V_\tau = \dfrac{d\sigma}{dt}$; ρ — радіус кривини траєкторії руху точки.

Рівняння (3.11) називають динамічними рівняннями руху точки в натуральній формі, або у формі **Ейлера**.

5. Дві основні задачі динаміки вільної матеріальної точки

При дослідженні руху матеріальної точки трапляються дві основні задачі динаміки (пряма й обернена).

Пряма, або перша, основна задача. Визначити рівнодійну сил $\vec{F}$, що діють на матеріальну точку, якщо задано її масу *m* і кінематичні рівняння руху.

Ця задача розв'язується так.

1. Якщо рух матеріальної точки масою m задано координатним способом $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, то двічі диференціюючи ці співвідношення за часом, одержимо проєкції прискорення на осі координат (див. формулу (3.9)).

Тоді на основі рівнянь (3.9) визначимо проєкції сили:

$$F_x = m\ddot{x},\ F_y = m\ddot{y},\ F_z = m\ddot{z}. \tag{13.12}$$

Отже, модуль рівнодійної сили

$$F = \sqrt{(F_x)^2 + (F_y)^2 + (F_z)^2}. \tag{3.13}$$

Напрямок сили визначимо за напрямними косинусами.

2. Якщо рух матеріальної точки масою m задано в натуральній формі, то за рівняннями (3.1) знайдемо проєкції рівнодійної сил, що діють на точку, на осі натурального тригранника.

Модуль сили й напрямок визначимо за формулами

$$F = \sqrt{(F_\tau)^2 + (F_n)^2},\ tg\alpha = \frac{F_\tau}{F_n} = \frac{W_\tau}{W_n}, \tag{3.14}$$

де α — кут між силою $\vec{F}$ і нормальною складовою сили $\vec{F_n}$.

Обернена, або друга, основна задача. Визначити кінематичні рівняння руху вільної матеріальної точки, якщо задано її масу *m*, прикладену до неї силу $\vec{F}$ і початкові умови руху.

Розв’язання цієї задачі зводиться до інтегрування диференціальних рівнянь руху матеріальної точки. Знайдемо проєкції сили $\vec{F}$ на осі координат, тобто F_x, F_y і F_z, потім проінтегруємо систему диференціальних рівнянь (3.9). Розв’язок цієї системи буде функцією часу і шести сталих інтегрування C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, тобто

$$\begin{aligned} x &= x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.C_6), \\ y &= y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.C_6), \\ z &= z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.C_6), \end{aligned} \tag{3.15}$$

оскільки порядок системи диференціальних рівнянь дорівнює шести.

Щоб розв'язати конкретну динамічну задачу, необхідно задати початкові умови руху для визначення зазначених сталих інтегрування. Під початковими умовами руху матеріальної точки слід розуміти значення координат точки й проєкції її швидкості в початковий момент часу $t = t_0$, тобто

$$\begin{aligned} x(t_0) = x_0, \mathrm{y}(t_0) = y_0, \mathrm{z}(t_0) = z_0, \\ \dot{x}(t_0) = \dot{x}_0, \dot{y}(t_0) = \dot{y}_0, \dot{z}(t_0) = \dot{z}_0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Аналогічно початкові умови руху точки можна задати у векторній $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_o$, $\dot{\vec{r}}(t_0) = \dot{\vec{r}}_0$ і натуральній $\sigma(t_0) = \sigma_0$, $\dot{\sigma}(t_0) = \dot{\sigma}_0$ формах.

Диференціюючи (3.15) за часом, знайдемо ще три співвідношення:

$$\begin{aligned} \dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.C_6), \\ \dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.C_6), \\ \dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5.C_6), \end{aligned} \tag{3.17}$$

що мають сталі інтегрування.

Якщо в (3.15) і (3.17) підставити початкові умови руху точки (3.16), то одержимо систему шести алгебричних рівнянь з шістьома невідомими сталими інтегрування:

$$C_i = C_i\left(t_0, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0\right),\ i = 1,\ 2,\ ...,\ 6. \tag{3.18}$$

Нарешті, підставивши знайдені значення сталих інтегрування у співвідношення (3.15), що виражають загальне розв'язання системи диференціальних рівнянь (3.9), одержимо закон руху точки:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t). \tag{3.19}$$

Розглядаючи рух у натуральній формі, для розв'язання оберненої задачі динаміки застосуємо рівняння (3.11). Початковими умовами руху в цьому разі є значення дугової координати $\sigma(t_0) = \sigma_0$ при $t = t_0$ і початкової

швидкості $V_\tau\left(t_0\right)=\dot{\sigma}\left(t_0\right)=\dot{\sigma}_0$. Загальний інтеграл першого з рівнянь (3.11) має вигляд

$$\sigma\left(t\right)=\sigma\left(t,\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2\right). \tag{3.20}$$

На основі початкових умов руху знаходимо сталі інтегрування:

$$C_i=C_i\left(t_0,\sigma_0,\dot{\sigma}_0\right),i=1,2. \tag{3.21}$$

Обчислену таким чином дугову координату $\sigma=\sigma\left(t\right)$ підставимо в друге рівняння (3.11) і одержимо значення радіуса кривини ρ траєкторії рухомої точки.

Отже, розв'язання оберненої задачі динаміки матеріальної точки містить такі операції:

1) складання динамічних рівнянь руху матеріальної точки згідно з умовою задачі;

2) інтегрування одержаної системи диференціальних рівнянь, тобто знаходження загального розв'язку цієї системи;

3) визначення відповідних значень сталих інтегрування;

4) знаходження закону руху точки.

6. Рівняння руху невільної матеріальної точки

При формулюванні основних задач динаміки вільної точки вважалося, що на рухи точки не накладено ніяких обмежень. Відповідним вибором закону змінення сили $\vec{F}$ і початкових умов можна примусити матеріальну точку рухатися за будь-якої траєкторією.

Якщо на рух точки накладено певні обмеження, то такий рух є невільним. Як уже зазначалося в статиці, обмеження, які накладаються на рух матеріальної точки, називають в'язями. За наявності цих обмежень на рух точки незалежно від сил, що діють на неї, її координати певним чином зв'язані між собою, і тому вибір початкових умов не може бути вільним.

Отже, будемо називати матеріальну точку **невільною**, а її рух — **невільним рухом**, якщо внаслідок тих чи інших обмежень під час дії на неї будь-яких сил вона виконує рух або по точно фіксованій лінії, поверхні, або знаходиться в точно фіксованій частині простору.

При вивченні невільного руху точки застосовують відповідну аксіому

про звільнення від в'язей, замінюючи їх дію відповідними силами, які називають реакціями в'язей. Тоді точку можна вважати вільною, але такою, на яку діють не тільки активні, але й пасивні сили — реакції в'язей. Якщо назначити через $\vec{F}$ рівнодійну всіх активних сил, прикладених до точки, а через $\vec{R}$ — рівнодійну всіх реакцій в'язей, то основне рівняння динаміки у векторній формі можна записати у вигляді

$$m\vec{W} = \vec{F} + \vec{R}. \qquad (3.22)$$

Векторному рівнянню (3.22) можна поставити у відповідність три скалярних у проєкціях на координатні осі:

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= F_x + R_x, \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= F_y + R_y, \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= F_z + R_z. \end{aligned}\right\} \qquad (3.23)$$

Особливістю цих рівнянь є те, що в них реакції R_x, R_y, R_z є невідомими функціями часу, тому система рівнянь (3.23) є недовизначеною, або незамкненою. Тому необхідно скласти ще додаткові рівняння, у яких враховувалися б відповідні рівняння в'язей та їх властивості — ідеально гладкі поверхні (без тертя), шорсткі поверхні (з тертям) тощо.

7. Основне рівняння динаміки відносного руху матеріальної точки

Основне рівняння динаміки точки дає змогу досліджувати рух точки в нерухомій або інерціальній системі координат.

Розв'язання численних задач техніки потребує дослідження руху об'єктів відносно рухомої системи координат. У кінематиці було викладено теорію складного руху точки. У цій теорії розглядається рух відносно рухомої системи координат. При дослідженні руху точки відносно неінерціальної системи координат застосування основного рівняння динаміки точки є можливим після розкладання абсолютного руху на переносний і відносний.

Розглянемо рух матеріальної точки масою m.

Хай на точку діє сила $\overrightarrow{F} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}$ — рівнодійна всіх активних сил і реакцій в'язей, прикладених до точки. Рух цієї матеріальної точки відносно нерухомої системи координат є абсолютним, а відносно рухомої системи координат — відносним. Характер переносного руху визначається рухом рухомої системи координат відносно нерухомої.

Основне рівняння динаміки абсолютного руху точки має вигляд

$$m\overrightarrow{W} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}\,. \tag{3.24}$$

Абсолютне прискорення точки $\overrightarrow{W}$ визначимо за теоремою про додавання прискорень (теорема Коріоліса):

$$\overrightarrow{W} = \overrightarrow{W_e} + \overrightarrow{W_r} + \overrightarrow{W_{cor}}\,. \tag{3.25}$$

Тоді

$$m\overrightarrow{W_e} + m\overrightarrow{W_r} + m\overrightarrow{W_{cor}} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}\,. \tag{3.26}$$

Оскільки необхідно розв'язати рівняння відносного руху, то

$$m\overrightarrow{W_r} = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} + \left(-m\overrightarrow{W_e}\right) + \left(-m\overrightarrow{W_{cor}}\right). \tag{3.27}$$

Вектори $\overrightarrow{\Phi}_e = -m\overrightarrow{W_e}$, $\overrightarrow{\Phi}_{cor} = -m\overrightarrow{W_{cor}}$ називають відповідно переносною й коріолісовою силами інерції. Рівняння (3.27) набуває вигляду

$$m\overrightarrow{W}_r = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{\Phi}_e + \overrightarrow{\Phi}_{cor}\,. \tag{3.28}$$

Рівняння (3.28) називають основним рівнянням динаміки відносного руху матеріальної точки.

Із рівняння (3.28) видно, що для складання диференціального рівняння руху матеріальної точки в неінерціальній системі координат у формі другого закону Ньютона (3.24) необхідно до активних сил і реакцій в'язей, які діють на точку, додати умовно переносну й коріолісову сили

інерції. Згідно з цим рівнянням закон відносного руху можна сформулювати так: добуток маси точки на прискорення її відносного руху дорівнює векторній сумі сил, прикладених до точки, і двох сил інерції — переносної й коріолісової.

Вектори переносної $\overrightarrow{\Phi}_e$ і коріолісової $\overrightarrow{\Phi}_{cor}$ сил інерції — це поправки на неінерціальність рухомої системи координат. Ці сили є фіктивними, оскільки не є силами взаємодії між тілами, та набули назви ейлерових сил інерції. Щоб обчислити переносну й коріолісову сили інерції, необхідно спочатку визначити за правилами кінематики переносне прискорення й прискорення Коріоліса.

Диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки отримують з векторного рівняння (3.28) шляхом його проєктування на осі рухомої системи координат, відносно якої здійснюється рух.

Задачі динаміки відносного руху матеріальної точки слід розв'язувати в такій послідовності:

1. Розкласти абсолютний рух точки на відносний і переносний, вибрати рухому систему відліку, жорстко зв'язану з рухомим тілом, що створює для точки переносний рух.

2. Записати початкові умови відносного руху точки.

3. Зобразити на рисунку сили $\overrightarrow{F_i}$, прикладені до точки.

4. Визначити прискорення точки під час переносного руху $\overrightarrow{W_e}$, прискорення Коріоліса $\overrightarrow{W}_{cor}$, силу інерції під час переносного руху $\overrightarrow{\Phi}_e$, коріолісову силу інерції $\overrightarrow{\Phi}_{cor}$ та умовно додати ці сили до сил $\overrightarrow{F_i}$.

5. Скласти диференціальні рівняння відносного руху матеріальної точки в проєкціях на осі рухомої системи координат.

6. Проінтегрувати складені диференціальні рівняння, визначити сталі інтегрування з допомогою початкових умов.

7. Визначити шукані величини.

8. Окремі випадки відносного руху точки. Умови відносного спокою

Аналізуючи рівняння (3.28), розглянемо такі окремі випадки.

1. Матеріальна точка відносно рухомої системи координат здійснює рівномірний прямолінійний рух. Тоді відносна швидкість $\overrightarrow{V_r} = const$, а відносне прискорення $\overrightarrow{W_r} = 0$. Отже, на основі (3.28) одержуємо

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{\Phi}_e + \overrightarrow{\Phi}_{cor} = 0. \qquad (3.29)$$

2. Якщо розглядувана точка перебуває у спокої відносно рухомої системи координат, то її відносна швидкість $\overrightarrow{V_r} = 0$ і відносне прискорення $\overrightarrow{W_r} = 0$. Тоді рівняння (3.28) набуде вигляду

$$\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{\Phi}_e = 0. \qquad (3.30)$$

Ця рівність виражає умову відносної рівноваги матеріальної точки, яка формулюється так: при відносній рівновазі матеріальної точки векторна сума активних сил, що діють на точку, реакцій в'язей і переносної сили інерції дорівнює нулю.

3. Якщо рухома система координат здійснює поступальний рух ($\overrightarrow{\omega_e} = 0$), то прискорення Коріоліса $\overrightarrow{W_{cor}} = 0$ і коріолісова сила інерції $\overrightarrow{\Phi}_{cor} = 0$. Тоді рівняння (3.28) набуває вигляду

$$m\overrightarrow{W}_r = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i} + \overrightarrow{\Phi}_e. \qquad (3.31)$$

4. Якщо рухома система координат є інерціальною, тобто рухається рівномірно й прямолінійно ($\overrightarrow{V_e} = const$), здійснюючи поступальний рух ($\overrightarrow{\omega_e} = 0$), то на нуль перетворюються обидві сили інерції: $\overrightarrow{\Phi}_e$ і $\overrightarrow{\Phi}_{cor}$. Тоді основне рівняння динаміки відносного руху набуде вигляду

$$m\overrightarrow{W}_r = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}. \qquad (3.32)$$

Порівнюючи вираз (3.32) з рівнянням (3.24), приходимо до висновку, що за формою вони збігаються. Отже, другий закон Ньютона справджується в цьому разі й для відносного руху матеріальної точки. Наведене виражає *принцип відносності класичної динаміки*, установлений Г. Галілеєм 1630 року. *Цей принцип формулюється так: при однакових початкових умовах механічні рухи здійснюються однаково в нерухомих системах координат і в тих, що рухаються поступально, рівномірно й прямолінійно, тобто описуються однаковими рівняннями.*

Отже, усі положення динаміки Ньютона справджуються для будь-якої інерціальної системи координат.

Приклад

Визначити траєкторію руху снаряда, випущеного із жерла гармати з початковою швидкістю $\overrightarrow{V_0} = 0$ під кутом α до горизонту. Опором повітря можна знехтувати. Знайти дальність і найбільшу висоту польоту снаряда (рис. 3.3).

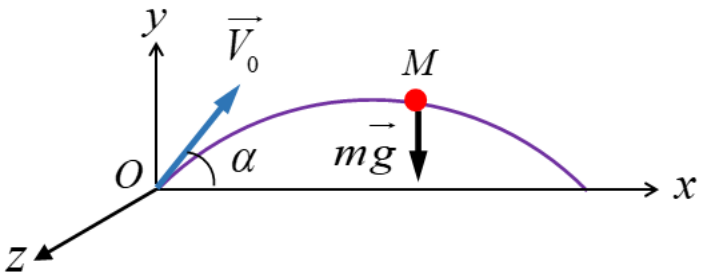


Рис. 3.3

Розв'язання

1. У початковий момент $t = 0$ снаряд був на початку координат, тому $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $z_0 = 0$. Проєкції початкової швидкості на осі координат запишемо у вигляді $\dot{x}_0 = V_0 \cos\alpha$, $\dot{y}_0 = V_0 \sin\alpha$, $\dot{z}_0 = 0$.

2. Щоб визначити траєкторію точки (снаряда), знайдемо залежність координат x, y, z від часу. Для цього скористаємося диференціальними рівняннями руху (3.9) точки

$$m\ddot{x} = 0,\ m\ddot{y} = -mg,\ m\ddot{z} = 0.$$

Після скорочення на m

$$\ddot{x} = 0,\ \ddot{y} = -g,\ \ddot{z} = 0.$$

Інтегруючи ці рівняння, одержимо

$$\dot{x} = C_1,\ \dot{y} = -gt + C_2,\ \dot{z} = C_3.$$

3. Сталі інтегрування знайдемо з початкових умов руху:

$$C_1 = \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = V_0 \cos\alpha,\ C_2 = \dot{y}(t=0) = \dot{y}_0 = V_0 \sin\alpha,$$

$$C_3 = \dot{z}(t=0) = \dot{z}_0 = 0.$$

Отже,

$$\dot{x}(t) = V_0 \cos\alpha,\ \dot{y}(t) = -gt + V_0 \sin\alpha,\ \dot{z}(t) = 0.$$

4. Звідси після інтегрування одержимо

$$x(t) = V_0 t \cos\alpha + C_4,\ \mathrm{y}(t) = -\frac{gt^2}{2} + V_0 t \sin\alpha + C_5,\ \mathrm{z}(t) = C_6.$$

5. Сталі інтегрування знайдемо з початкових умов руху: $C_4 = C_5 = C_6 = 0$.

6. Закон руху снаряда матиме вигляд

$$x(t) = V_0 t \cos\alpha,\ \mathrm{y}(t) = V_0 t \sin\alpha - gt^2/2,\ \mathrm{z}(t) = C_6.$$

Ці вирази є також рівняннями траєкторії в параметричному вигляді. Вилучивши час із цих рівнянь

$$x(t) = V_0 t \cos\alpha \Rightarrow t = x(t)/(V_0 \cos\alpha),$$

визначимо траєкторію в явному вигляді:

$$\mathrm{y}(t) = x(t) tg\alpha - \frac{g x(t)^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha}.$$

Неважко побачити, що траєкторією снаряда є парабола, яка лежить у площині xOy. Відстань польоту l снаряда буде найбільшою тоді, коли $y = 0$ при $x \neq 0$ (див. рис. 3.3), тому для знаходження l рівняння траєкторії необхідно прирівняти до нуля

$$x(t) tg\alpha - \frac{g x(t)^2}{2V_0^2 \cos^2\alpha} = x(t)\left[tg\alpha - \frac{g x(t)}{2V_0^2 \cos^2\alpha} \right] = 0.$$

Оскільки $x \neq 0$ за умовою задачі, розв'язком буде значення x, яке отримаємо, прирівнявши до нуля вираз у квадратних дужках:

$$tg\alpha - \frac{gx(t)}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} = 0.$$

Отже,

$$tg\alpha - \frac{gl}{2V_0^2 \cos^2 \alpha} = 0 \Rightarrow l = \frac{2V_0^2 tg\alpha \cos^2 \alpha}{g} = \frac{2V_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g} = \frac{V_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Найбільшої висоти польоту при заданому куті α снаряд досягне в точці $x = l/2$, тобто

$$H_{\max} = y\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{V_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Запитання для самоконтролю

1. Скільки аксіомі які з них є основою динаміки?
2. Яку систему координат називають інерціальною?
3. Як записується диференціальне рівняння руху вільної матеріальної точки у векторній формі?
4. Як записують диференціальне рівняння руху вільної матеріальної точки в координатній формі?
5. Як записують диференціальне рівняння руху вільної матеріальної точки в натуральній формі?
6. У чому полягає суть прямої й оберненої задач динаміки точки?
7. Що таке початкові умови і як їх визначають у випадку координатного способу задання руху точки?
8. Від чого залежить кількість початкових умов?
9. Якою є методика розв’язання першої задачі динаміки вільної матеріальної точки?
10. Наведіть методику розв’язання другої задачі динаміки вільної матеріальної точки.
11. Як записати диференціальні рівняння руху невільної матеріальної точки в координатній формі?
12. У чому полягає різниця між диференціальними рівняннями відносного й абсолютного рухів вільної матеріальної точки?
13. Як визначають за модулем і напрямком переносну й коріолісову сили інерції?
14. Як визначають і записують умову відносного спокою матеріальної точки?
15. У чому полягає суть принципу відносності класичної механіки?

Лекція 12. СИСТЕМА МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНЕННЯ КІЛЬКОСТІ РУХУ СИСТЕМИ МАТЕРІАЛЬНИХ ТОЧОК

План лекції

1. Система матеріальних точок.
2. Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок.
3. Кількість руху системи матеріальних точок.
4. Теорема про змінення кількості руху системи матеріальних точок.

1. Системи матеріальних точок

Системою матеріальних точок називають сукупність матеріальних точок, положення і рухи яких є взаємозв'язаними. Розрізняють **вільні** й **невільні** системи.

Якщо на рух точок системи не накладено наперед задані обмеження, то **систему називають вільною**. Іншими словами, точки системи в будь-який момент часу можуть мати довільне положення й довільні швидкості.

Н**евільною** називають таку систему матеріальних точок, на рух яких накладено в'язі. У задачах техніки трапляються в основному невільні системи (невільні тверді тіла).

Нагадаємо, що в'язі поділяються на **геометричн**і й **кінематичні**.

Геометричні в'язі накладають обмеження на координати точок системи, **кінематичні** — на швидкості точок системи. Умови, що обмежують вільність руху матеріальних точок системи, виражаються деякими рівняннями, які називають **рівняннями в'язей**. У загальному випадку ці рівняння встановлюють зв'язки між координатами матеріальних точок, проєкціями швидкостей цих точок і часом.

Матеріальна система характеризується **масою**

$$M = \sum_{i=1}^{n} m_i \,. \tag{3.33}$$

Центром мас, або центром інерції системи матеріальних точок, називають геометричну точку C, радіус-вектор якої має вигляд

$$\vec{r}_C = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{r}_i}{M}, \tag{3.34}$$

де m_i — маса *i*-ї точки системи; $\vec{r}_i$ — радіус-вектор *i*-ї точки системи.

Координати центра мас (центра інерції) системи з урахуванням (3.34)

мають вигляд

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i x_i}{M},\ y_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i y_i}{M},\ z_c = \frac{\sum_{i=1}^{n} m_i z_i}{M}, \qquad (3.35)$$

де x_i, y_i, z_i — координати *i*-ї точки системи.

Як бачимо з формул (3.35), координати центра мас залежать тільки від розподілу мас. Зауважимо, що положення центра мас в тілі або незмінній системі є незмінним і не залежить від вибору системи координат і закону її руху.

У динаміці, так само як і в статиці, використовують дві класифікації сил, прикладених до системи матеріальних точок, а саме:

1) сили внутрішні й зовнішні;

2) активні сили й реакції в'язей.

Сили внутрішні й зовнішні. Нагадаємо, що **внутрішніми** називають сили взаємодії між матеріальними точками однієї і тієї самої системи.

Внутрішні сили позначимо через $\vec{P}_j^{\,i}$ ($j = \overline{1,n}$). Вони мають такі властивості: головний вектор і головний момент внутрішніх сил відносно деякої точки, наприклад *O*, дорівнюють нулю:

$$\sum_{j=1}^{n} \vec{P}_j^{\,i} = 0,\ \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{P}_j^{\,i} = 0. \qquad (3.36)$$

Умови (3.36) одержуємо на основі третього закону Ньютона.

Зовнішніми називають сили взаємодії між матеріальними точками певної системи й іншими фізичними тілами, що не належать до системи. Зовнішні сили позначимо через $\vec{P}_j^{\,e}$.

Цю класифікацію сил застосовують в основному для вільної системи матеріальних точок.

Залежно від складу системи одні й ті самі сили можуть бути або зовнішніми, або внутрішніми.

Активні сили й реакції в'язей. За другою класифікацією сили поділяють на активні та реакції в'язей. Активну силу позначимо $\vec{P}_a$, а реакцію в'язей $\vec{P}_r$ або $\vec{R}$. Цю класифікацію застосовують для невільної системи матеріальних точок.

Реакціями в'язей називають сили, з якими в'язі діють на систему матеріальних точок. Реакції в'язей, на відміну від активних сил, є невідомими величинами і в загальному випадку залежать від закону руху

механічної системи.

2. Диференціальні рівняння руху системи матеріальних точок

Нехай матеріальна система складається з *n* точок.

Розглянемо кожну точку окремо, застосувавши принцип звільнення від в'язей. На довільну точку діятиме система сил. Зовнішні сили зведемо до рівнодійної $\vec{P}_j^{\,e}$, а внутрішні — до рівнодійної $\vec{P}_j^{\,i}$. Запишемо для кожної точки диференціальне рівняння руху:

$$
\begin{aligned}
& m_1 \frac{d^2 \vec{r}_1}{dt^2} = \vec{P}_1^{\,e} + \vec{P}_1^{\,i}; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& m_j \frac{d^2 \vec{r}_j}{dt^2} = \vec{P}_j^{\,e} + \vec{P}_j^{\,i}; \\
& \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& m_n \frac{d^2 \vec{r}_n}{dt^2} = \vec{P}_n^{\,e} + \vec{P}_n^{\,i}.
\end{aligned}
\qquad (3.37)
$$

Це — диференціальні рівняння руху матеріальних точок усієї системи. Система (3.37) складається з *n* рівнянь у векторній формі, які можна записати і в скалярній формі (у цьому випадку рівнянь буде 3*n*).

Диференціальні рівняння руху матеріальних точок усієї системи у скалярній (координатній) формі мають вигляд

$$
\begin{aligned}
& m_j \frac{d^2 x_j}{dt^2} = P_{jx}^e + P_{jx}^i; \\
& m_j \frac{d^2 y_j}{dt^2} = P_{jy}^e + P_{jx}^i; \\
& m_j \frac{d^2 z_j}{dt^2} = P_{jz}^e + P_{jz}^i,\ j = \overline{1,\ n}\ .
\end{aligned}
\qquad (3.38)
$$

Ці рівняння є системою звичайних диференціальних рівнянь другого порядку.

Під час інтегрування системи рівнянь (3.38) одержимо $6n$ сталих інтегрування, які визначимо з початкових умов руху.

Визначення невідомих функцій x_j, y_j, z_j із системи (3.38) загалом пов'язане зі значними, а інколи й нездоланими математичними труднощами.

Подолати ці труднощі допомагають **загальні теореми динаміки**, які дають змогу знайти залежності між різними характеристиками руху точок системи, не інтегруючи диференціальні рівняння руху системи (3.38).

3. Кількість руху системи матеріальних точок

Кількістю руху (мірою механічного руху) **матеріальної точки** $\vec{q}$ називають вектор, який дорівнює добутку маси точки *m* на вектор її швидкості:

$$\vec{q} = m\vec{V}, \tag{3.39}$$

де $\vec{V}$ — швидкість точки.

Кількістю руху матеріальної системи $\vec{Q}$ називають вектор, який дорівнює векторній сумі кількостей руху матеріальних точок, що належать до системи:

$$\vec{Q} = \sum_{i=1}^{n} \vec{q}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_i . \tag{3.40}$$

Розглянемо матеріальну систему з *n* точок. Позначимо через m_k і $\vec{r}_k$ відповідно масу і радіус-вектор k-ї точки системи. Швидкість цієї точки можна записати як $\vec{V}_k = d\vec{r}_k / dt$.

Тоді

$$\vec{Q} = \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{V}_k = \sum_{k=1}^{n} m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k . \tag{3.41}$$

Використовуючи поняття центра мас матеріальної системи, запишемо

$$\sum_{k=1}^{n} m_k \vec{r}_k = M\vec{r}_c .$$

Тоді кількість руху матеріальної системи при постійній масі можна знайти за формулою

$$\vec{Q} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{r}_c\right) = M\frac{d\vec{r}_c}{dt} = M\vec{V}_c . \tag{3.42}$$

Векторній рівності (3.42) відповідають три рівності в скалярній формі:

$$Q_x = MV_{cx},\ Q_y = MV_{cy},\ Q_z = MV_{cz}. \qquad (3.43)$$

Як бачимо з формули (3.42), кількість руху матеріальної системи дорівнює кількості руху однієї матеріальної точки, маса якої дорівнює масі системи, а швидкість — швидкості центра мас.

4. Теорема про змінення кількості руху системи матеріальних точок

Запишемо систему диференціальних рівнянь, що описують рух матеріальної системи, у векторній формі:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} &= \vec{P}_1^{\,e} + \vec{P}_1^{\,i}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n \frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2} &= \vec{P}_n^{\,e} + \vec{P}_n^{\,i}. \end{aligned} \qquad (3.44)$$

З урахуванням того, що $\vec{V}_k = d\vec{r}_k / dt$, отримаємо

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} &= \vec{P}_1^{\,e} + \vec{P}_1^{\,i}; \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ m_n \frac{d\vec{V}_n}{dt} &= \vec{P}_n^{\,e} + \vec{P}_n^{\,i}. \end{aligned} \qquad (3.45)$$

Склавши ліві й праві частини цих рівнянь, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n}\left(m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^{\,e} + \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^{\,i}\ . \qquad (3.46)$$

Оскільки головний вектор внутрішніх сил $\sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^{\,i}$ дорівнює нулю, то

$$\sum_{k=1}^{n}\left(m_k \frac{d\vec{V}_k}{dt} \right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^e . \qquad (3.47)$$

Рівняння (3.47) перепишемо у вигляді

$$\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\left(m_k \vec{V}_k \right) = \sum_{k=1}^{n} \vec{P}_k^e = \vec{P}^e , \qquad (3.48)$$

де $\vec{P}^e$ — головний вектор зовнішніх сил, що діють на матеріальну систему.

На основі формули (3.41) маємо

$$\frac{d}{dt}\vec{Q} = \vec{P}^e . \qquad (3.49)$$

Рівняння (3.49) є математичним записом теореми про змінення кількості руху системи матеріальних точок: *похідна за часом від кількості руху системи матеріальних точок дорівнює головному вектору зовнішніх сил, прикладених до точок.*

Цю теорему можна застосувати й до руху матеріальної точки.

Векторній рівності (3.49) відповідають три скалярних рівняння:

$$\frac{d}{dt}Q_x = P_x^e , \ \frac{d}{dt}Q_y = P_y^e , \ \frac{d}{dt}Q_z = P_z^e . \qquad (3.50)$$

Формули (3.49) і (3.50) — теорема про змінення кількості руху системи матеріальних точок у диференціальній формі.

Із теореми про змінення кількості руху системи, записаній у векторній (3.49) або скалярній (3.50) формі, випливають три наслідки.

1. Одними внутрішніми силами не можна змінити кількість руху системи (внутрішні сили безпосередньо не впливають на кількість руху системи).

2. Якщо головний вектор зовнішніх сил, що діють на систему, дорівнює нулю, то кількість руху матеріальної системи залишається незмінною, тобто $\vec{Q} = const$.

3. Якщо проєкція головного вектора зовнішніх сил, прикладених до системи, на деяку нерухому в інерціальній системі координат вісь дорівнює нулю, то проєкція кількості руху на цю вісь залишається незмінною, тобто якщо $P_x^e = \sum_{i=1}^{n} P_{ix}^e = 0$, то Q_x = *const*.

Наведені другий і третій наслідки з теореми про змінення кількості руху системи називають ***законами збереження кількості руху системи матеріальних точок***.

Перепишемо рівність (3.49) у вигляді

$$d\vec{Q} = \vec{P}^{e}\,dt. \tag{3.51}$$

Інтегруючи цю рівність у межах від t_0 до t, отримаємо

$$\vec{Q}(t) - \vec{Q}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{P}^{e}\,dt. \tag{3.52}$$

Добуток $\vec{P}^{e}\,dt$ називають **елементарним імпульсом сили** і позначають $d\vec{S}^{e}$.

Повний імпульс сили

$$\vec{S}^{e} = \int_{t_0}^{t} d\vec{S}^{e} = \int_{t_0}^{t} \vec{P}^{e}\,dt. \tag{3.53}$$

Підставивши (3.53) у рівність (3.52), одержимо

$$\vec{Q}(t) - \vec{Q}(t_0) = \vec{S}^{e}. \tag{3.54}$$

Рівність (3.54) є вираженням **теореми про змінення кількості руху матеріальної системи в інтегральній формі**.

Одній векторній рівності (3.54) відповідають такі три скалярних рівності:

$$Q_x(t) - Q_x(t_0) = S_x^{e},\ Q_y(t) - Q_y(t_0) = S_y^{e},\ Q_z(t) - Q_z(t_0) = S_z^{e}. \tag{3.55}$$

4.1. Закон руху центра мас матеріальної системи

Кількість руху матеріальної системи може бути визначена по формулі

$$\vec{Q} = M\frac{d\vec{r}_c}{dt} = M\vec{V}_c. \tag{3.56}$$

Ураховуючи це співвідношення в (3.49), отримаємо

$$\vec{P}^{e} = \frac{d}{dt}\left(M\vec{V}_c\right) = M\frac{d\vec{V}_c}{dt} = M\vec{W}_c. \tag{3.57}$$

Це співвідношення за виглядом збігається з рівнянням руху матеріальної точки масою *M* з прискоренням $\vec{W}_c$, до якої прикладено силу $\vec{P}^e$.

Центр мас матеріальної системи рухається як матеріальна точка, маса якої дорівнює масі матеріальної системи, під дією усіх зовнішніх сил, прикладених до матеріальної системи.

Приклад

Механічна система складається з призми D масою M і двох вантажів масами M_1 і M_2. Призму розташовано на гладкій горизонтальній поверхні. У початковий момент система перебуває у спокої. Під дією власною ваги вантажі починають зісковзувати й набувають швидкості $\vec{v}_1$ і $\vec{v}_2$ відносно призми (рис. 3.4).

Визначити величину й напрямок швидкості призми внаслідок руху вантажів.

Задано: M = 11 кг, M_1 = 3 кг, M_2 = 2 кг, v_1 = 1,5 м/с, v_2 = 1 м/с.

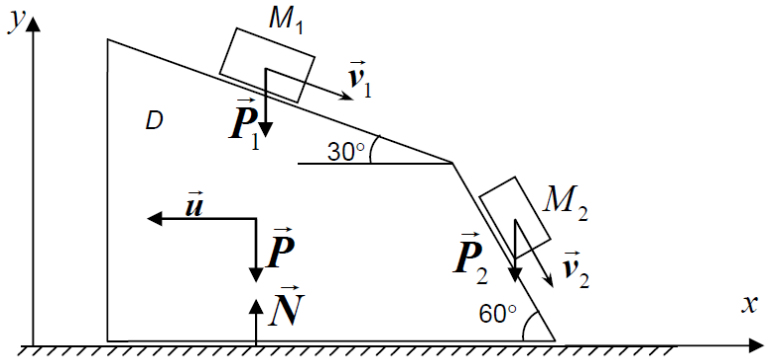


Рис. 3.4

Розв'язання

1. Механічна система складається з трьох твердих тіл: призми D і двох вантажів 1 і 2. Горизонтальну поверхню розглядаємо як в'язь, що обмежує переміщення призми D у вертикальному напрямку.

2. Прикладемо зовнішні сили: сили ваги $\vec{P}$, $\vec{P}_1$, $\vec{P}_2$ і реакцію горизонтальної поверхні $\vec{N}$.

3. Визначимо кількість руху $\vec{Q}$ механічної системи.

Кількість руху системи складається з кількості руху призми $\vec{Q}_{пр}$ і кількості руху вантажів $\vec{Q}_1$ і $\vec{Q}_2$:

$$\vec{Q} = \vec{Q}_{пр} + \vec{Q}_1 + \vec{Q}_2 = M\vec{u} + M_1\vec{v}_1^a + M_2\vec{v}_2^a,$$

де $\vec{u}$ — абсолютна швидкість призми; $\vec{v}_i^a, i = \overline{1, 2}$ – абсолютні швидкості вантажів.

Для визначення швидкостей $\vec{v}_i^a$ розглянемо рухи вантажів 1 і 2 як складні, уважаючи їх рух по призмі відносним, а рух призми — переносним. Тоді

$$\vec{v}_1^a = \vec{v}_1^e + \vec{v}_1^r = \vec{u} + \vec{v}_1,\ \vec{v}_2^a = \vec{v}_2^e + \vec{v}_2^r = \vec{u} + \vec{v}_2.$$

4. Застосуємо теорему про змінення кількості руху системи матеріальних точок:

$$\frac{d}{dt}\vec{Q} = \vec{P}^e = \vec{P} + \vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{N}.$$

Проєкція головного вектора зовнішніх сил $\vec{P}^e$, прикладених до системи, на вісь x дорівнює нулю, тоді проєкція кількості руху на цю вісь залишається незмінною, тобто $Q_x = const$.

Отже, можемо записати таку рівність: $Q_x = Q_{0x} = const$, де Q_{0x} — значення проєкції на вісь x кількості руху в початковий момент часу. Згідно з умовами задачі $Q_{0x} = 0$.

Запишемо проєкцію вектора кількості руху на вісь x з урахуванням початкових умов для руху системи:

$$M(-u) + M_1\left(-u + v_1\cos 30°\right) + M_1\left(-u + v_2\cos 60°\right) = 0,$$

звідки отримаємо

$$u = \frac{M_1\cos 30° + M_2\cos 60°}{M + M_1 + M_2} = \frac{3\cdot 1{,}5\cdot 0{,}87 + 2\cdot 1\cdot 0{,}5}{11+3+2} \approx 0{,}31\ \text{м/с}$$

Відповідь: u = 0,31 м/с. Швидкість призми D є спрямованою вліво.

Запитання для самоконтролю

1. За якими формулами визначають координати центра мас матеріальної системи?
2. Що називають кількістю руху матеріальної точки?

3. Якою є розмірність кількості руху в міжнародній системі одиниць (СІ)?

4. Як знаходити модуль кількості руху, якщо відомо його проєкції на осі координат?

5. Як знаходити напрямок кількості руху, якщо відомо його модуль і проєкції на осі координат?

6. Чи змінюється кількість руху точки, яка рухається по колу рівномірно?

7. Що називають кількістю руху механічної системи?

8. Як виражають кількість руху системи через швидкість руху її центра мас?

9. Як виражають теорему про змінення кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі векторним рівнянням?

10. Як виражають теорему про змінення кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі рівняннями в проєкціях на осі координат?

11. Як виражають теорему про змінення кількості руху механічної системи в кінцевій (інтегральній) формі векторним рівнянням?

12. Як виражають теорему про змінення кількості руху механічної системи в кінцевій (інтегральній) формі рівняннями в проєкціях на осі координат?

13. Чи можуть внутрішні сили змінити загальну кількість руху системи?

14. У якому випадку кількість руху механічної системи залишається сталою?

15. У якому випадку проєкція кількості руху механічної системи на деяку координатну вісь залишається сталою?

Лекція 13. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНЕННЯ МОМЕНТУ КІЛЬКОСТІ РУХУ

План лекції

1. Момент кількості руху системи матеріальних точок відносно центра й координатних осей.
2. Момент кількості руху твердого тіла відносно нерухомої осі обертання.
3. Моменти інерції деяких твердих тіл.
4. Теорема про змінення моменту кількості руху системи матеріальних точок у диференціальній та інтегральній формах.

1. Момент кількості руху системи матеріальних точок відносно центра й координатних осей

Якщо перша міра механічного руху $m\vec{V}$ характеризує поступальний рух тіла, то для характеристики обертального руху застосовується друга міра руху — момент кількості руху (або кінетичний момент).

Моментом кількості руху матеріальної точки $\vec{l}_O$ відносно будь-якої точки *O* (центра) називають векторну величину, що дорівнює векторному добутку радіуса-вектора $\vec{r}_O$ матеріальної точки, проведеного з цього центра, на кількість її руху:

$$l_{Ox} = \overrightarrow{r_O} \times \overrightarrow{q_o} = \overrightarrow{r_O} \times m\overrightarrow{V}. \qquad (3.58)$$

Момент кількості руху матеріальної точки відносно точки $\vec{l}_O$ — вектор, прикладений у точці *O,* відносно якої його визначають.

Аналогію між моментом відносно точки *O* сили $\vec{P}$, прикладеної до матеріальної точки масою *m*, і моментом кількості її руху $\vec{q}$ показано на рис.3.5.

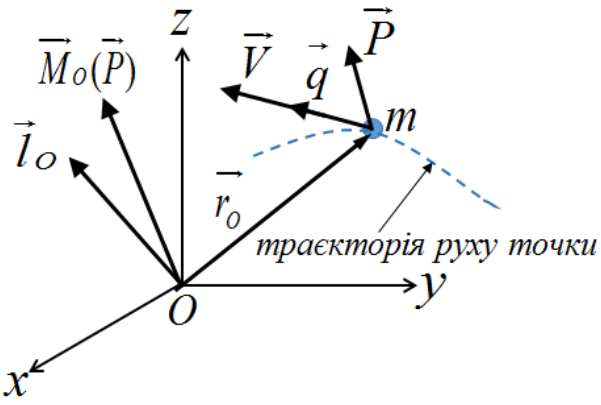


Рис. 3.5

Як і для моменту сили, розрізняють момент кількості руху відносно точки (центра) і відносно осі.

Розмірність моменту кількості руху в СІ — кг·м^2/с, або Н·м·с.

Вектор $\vec{l}_O$ напрямлений перпендикулярно до площини, що проходять через вектор $\vec{q}$ і точку *O.* (рис. 3.6).

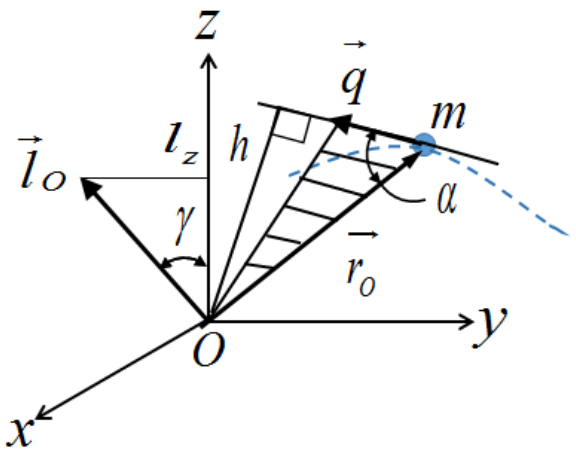


Рис. 3.6

Модуль вектора $\vec{l}_O$ визначається за формулою

$$\left|\vec{l}_O\right| = r_O q \sin(\alpha) = mVh. \tag{3.59}$$

Нехай задано прямокутну декартову систему координат $Oxyz$. Тоді отримаємо момент кількості руху матеріальної точки у формі

$$\vec{l}_O = \vec{r}_O \times \vec{q} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ mV_x & mV_y & mV_z \end{vmatrix} = l_{Ox}\vec{i} + l_{Oy}\vec{j} + l_{Oz}\vec{k}, \tag{3.60}$$

де $l_{Ox} = l_x$, $l_{Oy} = l_y$, $l_{Oz} = l_z$ — проєкції моменту кількості руху матеріальної точки на координатні осі.

Моментом кількості руху $\vec{L}_O$ системи матеріальних точок відносно будь-якої точки *O* називають вектор, який дорівнює геометричній сумі моментів кількостей руху точок системи відносно певної точки:

$$\vec{L}_O = \sum_{i=1}^{n} \vec{l}_{Oi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{r}_i \times m_i \vec{V}_i. \tag{3.61}$$

Момент кількості руху точки відносно будь-якої осі Oz, що проходить через точку (центр) *O,* буде дорівнювати проєкції вектора $\vec{l}_O$ на цю вісь:

$$l_z = \left(\vec{l}_O\right)_{np.z} = \left|\vec{l}_O\right| \cos\gamma, \tag{3.62}$$

де γ — кут між вектором $\vec{l}_O$ і віссю Oz.

Момент кількості руху відносно точки, як і момент сили, можна розкласти на три моменти відносно трьох осей, проведених через цю точку:

$$\vec{l}_O = \vec{l}_x + \vec{l}_y + \vec{l}_z,\ \vec{L}_O = \vec{L}_x + \vec{L}_y + \vec{L}_z. \tag{3.63}$$

2. Момент кількості руху твердого тіла відносно нерухомої осі обертання

Визначимо момент кількості руху відносно осі абсолютно твердого тіла, яке здійснює обертальний рух відносно нерухомої осі під дією системи сил $\left(\vec{P}_i\right)$.

Уведемо нерухому систему координат $Oxyz$ так, щоб вісь Oz сумістилася з віссю обертання AB, а скріплену з тілом рухому систему координат $Ox_1y_1z_1$ спрямуємо так, щоб вісь Oz_1 збігалась з віссю Oz (рис. 3.7).

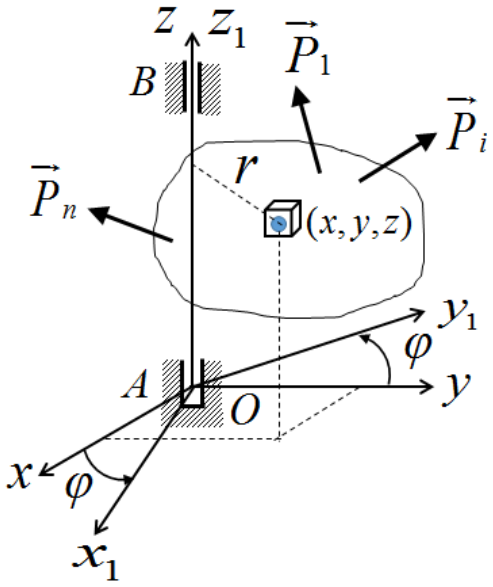


Рис. 3.7

Визначимо момент кількості руху твердого тіла відносно осі Oz (осі обертання). Виокремимо об'єм тіла масою dm з координатами x, y, z.

Швидкість $\vec{V}$ цієї точки тіла буде напрямленою по дотичній до кола радіусом r і за модулем дорівнюватиме $r\omega$. Тоді вектор моменту кількості руху цього об'єму буде напрямленим по осі z і дорівнюватиме за модулем $\omega r^2 dm$. Підсумовуючи за всім об'ємом тіла (напрямки векторів моменту кількості руху всіх елементарних об'ємів збігаються), отримаємо

$$L_z = \int_v \omega r^2 dm = \omega \int_v r^2 dm, \tag{3.64}$$

де інтегрування проводеться за об'ємом v.

Інтеграл $\int_v r^2 dm$ не залежить від кінематичного стану тіла й визначається тільки характером розподілу маси за об'ємом, який займає тверде тіло. Цю величину (цей інтеграл) називають моментом інерції твердого тіла відносно осі:

$$I_z = \int_v r^2 dm. \tag{3.65}$$

Таким чином, момент кількості руху тіла, що обертається, можна знайти за співвідношенням

$$L_z = I_z \omega. \tag{3.66}$$

3. Моменти інерції деяких твердих тіл

Наведемо формули для визначення моментів інерції деяких однорідних твердих тіл.

1. Тонкий стрижень завдовжки l і масою M, поперечний переріз якого є постійним відносно осі, що проходить через його середину (центр мас) перпендикулярно до його осі (рис. 3.8).

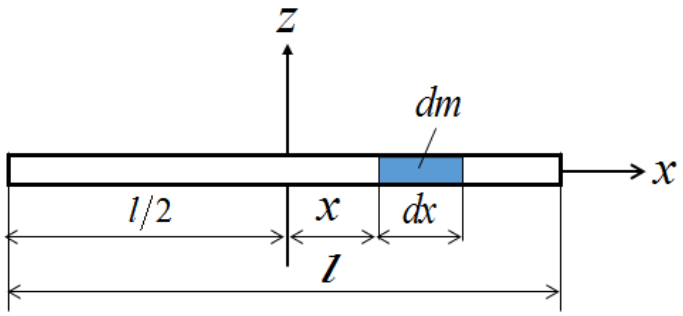


Рис. 3.8

Виокремимо елемент завдовжки dx з координатою x. Маса цього елемента $dm = \frac{M}{l}dx$, тоді

$$I_z = \int_v x^2 dm = \int_{-l/2}^{l/2} x^2 \frac{M}{l} dx = 2\frac{M}{l}\int_0^{l/2} x^2 dx = \frac{Ml^2}{12}.$$

2. Круглий однорідний диск масою M і радіусом r (рис. 3.9):

$$I_z = \frac{Mr^2}{2},\ I_x = I_y = \frac{Mr^2}{4}$$

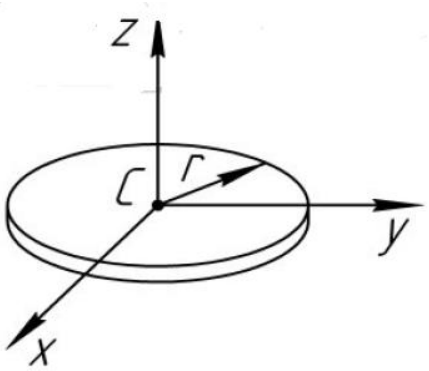


Рис. 3.9

3. Тонке кругле однорідне кільце масою M і радіусом R (рис. 3.10):

$$I_z = MR^2,\ I_x = I_y = \frac{MR^2}{2}.$$

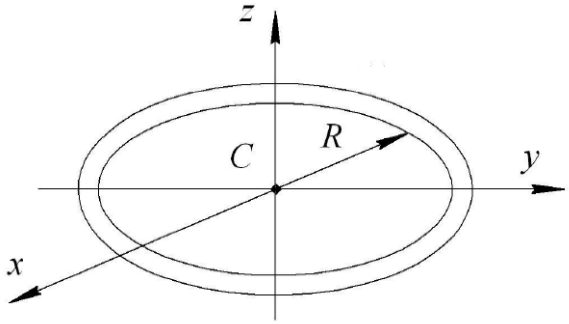


Рис. 3.10

4. Теорема про змінення моменту кількості руху системи матеріальних точок у диференціальній та інтегральній формах

Розглянемо деяку матеріальну систему з n матеріальних точок. На довільну точку діятиме система сил. Зовнішні сили зведемо до рівнодійної $\vec{P}_j^{\,e}$, а внутрішні — до рівнодійної $\vec{P}_j^{\,i}$. Запишемо для кожної точки диференціальне рівняння руху:

$$
\begin{aligned}
& m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{P}_1^{\,e} + \vec{P}_1^{\,i}; \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& m_j \frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2} = \vec{P}_j^{\,e} + \vec{P}_j^{\,i}; \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& m_n \frac{d^2\vec{r}_n}{dt^2} = \vec{P}_n^{\,e} + \vec{P}_n^{\,i}.
\end{aligned}
\qquad (3.67)
$$

Помножимо рівняння руху матеріальних точок на їх радіуси-вектори і, замінивши $\frac{d^2\vec{r}_j}{dt^2}$ на $\frac{d\vec{V}_j}{dt}$, отримаємо

$$
\begin{aligned}
& \vec{r}_1 \times m_1 \frac{d\vec{V}_1}{dt} = \vec{r}_1 \times \left(\vec{P}_1^{\,e} + \vec{P}_1^{\,i}\right); \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \vec{r}_j \times m_j \frac{d\vec{V}_j}{dt} = \vec{r}_j \times \left(\vec{P}_j^{\,e} + \vec{P}_j^{\,i}\right); \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
& \vec{r}_n \times m_n \frac{d\vec{V}_n}{dt} = \vec{r}_n \times \left(\vec{P}_n^{\,e} + \vec{P}_n^{\,i}\right).
\end{aligned}
\qquad (3.68)
$$

Складемо ліві й праві частини рівнянь (3.68) з урахуванням того, що $\vec{r}_j \times m_j \frac{d\vec{V}_j}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_j \times m_j \vec{V}_j\right)$:

$$
\sum_{j=1}^{n} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_j \times m_j \vec{V}_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{P}_j^{\,e} + \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{P}_j^{\,i}\,. \qquad (3.69)
$$

Ліва частина виразу (3.69)

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_j\times m_j\vec{V}_j\right)=\frac{d}{dt}\sum_{j=1}^{n}\left(\vec{r}_j\times m_j\vec{V}_j\right)=\frac{d}{dt}\vec{L}_o,$$

у правій частині маємо

$$\sum_{j=1}^{n}\vec{r}_j\times\vec{P}_j^{\,i}=0,$$

оскільки головний момент внутрішніх сил дорівнює нулю.

Отже, остаточно одержуємо

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_o=\sum_{j=1}^{n}\vec{r}_j\times\vec{P}_j^{\,e}=\vec{M}_O^{\,e}, \tag{3.70}$$

де $\vec{M}_O^{\,e}$ — головний момент зовнішніх сил відносно точки O.

Формула (3.70) — це є теорема про змінення моменту кількості руху системи матеріальних точок у диференціальній формі.

***Теорема**. Похідна за часом від моменту кількості руху системи матеріальних точок відносно нерухомої точки O (або центра) дорівнює головному моменту системи зовнішніх сил, прикладених до точок, відносно тієї ж точки O.*

Векторній рівності (3.70) відповідають три рівності в координатній формі, якщо спроєктувати її на осі деякої системи координат, наприклад $Oxyz$:

$$\frac{d}{dt}L_{Ox}=M_{Ox}^{e}=M_x^{e},\ \frac{d}{dt}L_{Oy}=M_{Oy}^{e}=M_y^{e},\ \frac{d}{dt}L_{Oz}=M_{Oz}^{e}=M_z^{e}. \tag{3.71}$$

Наведемо теорему про змінення кінетичного моменту в інтегральній формі або у формі теореми моменту імпульсів зовнішніх сил.

Рівність (3.70) перепишемо у вигляді $d\vec{L}_o=\vec{M}_O^{\,e}dt$. Інтегруючи це співвідношення у межах від t_0 до t_1, одержимо

$$\vec{L}_o\left(t_1\right)-\vec{L}_o\left(t_0\right)=\int_{t_0}^{t_1}\vec{M}_O^{\,e}dt. \tag{3.72}$$

Розглянемо інтеграл у правій частині рівності (3.72)

$$\int_{t_0}^{t_1} \overrightarrow{M}_O^e dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times \vec{P}_j^e dt = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^{n} \vec{r}_j \times d\vec{S}_j^e = \vec{L}_O^e, \qquad (3.73)$$

де $d\overrightarrow{S_j^e} = \vec{P}_j^e dt$ — елементарний імпульс зовнішньої сили $\vec{P}_j^e$; $\vec{L}_O^e$ — головний момент імпульсів зовнішніх сил відносно точки O.

Отже, остаточно одержимо

$$\vec{L}_o(t_1) - \vec{L}_o(t_0) = \vec{L}_O^e. \qquad (3.74)$$

Формула (3.74) є теоремою про змінення моменту кількості руху системи матеріальних точок в інтегральній формі.

***Теорема**. Приріст моменту кількості руху матеріальної системи відносно нерухомого центра O за деякий проміжок часу $[t_0, t_1]$ дорівнює головному моменту імпульсів зовнішніх сил, прикладених до точок системи, за той самий проміжок часу.*

З розглянутої теореми випливають закони збереження моменту кількості руху системи матеріальних точок, аналогічні закону збереження кількості руху цієї системи.

1. Одними внутрішніми силами не можна змінити кінетичний момент системи.

2. Якщо головний момент $\overrightarrow{M}_O^e$ зовнішніх сил відносно деякої нерухомої точки O дорівнює нулю, то момент кількості руху системи відносно тієї самої точки буде сталим як за величиною, так і за напрямком. Справді, на основі (3.70) маємо $\frac{d}{dt}\vec{L}_o = \overrightarrow{M}_O^e$. Якщо $\overrightarrow{M}_O^e = 0$, то $\vec{L}_o = \overrightarrow{const}$. Цю властивість кінетичного моменту візьмемо за основу побудови гіроскопів.

3. Якщо головний момент зовнішніх сил відносно однієї з координатних осей дорівнює нулю, то відповідний момент кількості руху системи буде сталим. Наприклад, $M_z^e = 0$, тоді за (3.71) $\frac{d}{dt}L_{Oz} = 0$ і $L_{Oz} = const$.

Приклад

На шків радіусом r і масою m_2, який обертається навколо нерухомої осі z, намотано канат, до кінця якого підвішено вантаж масою m_1. До

шківа прикладено обертальний момент M. Уважати масу шківа рівномірно розподіленою по ободу.

Нехтуючи масою каната, опором повітря й тертям у підшипниках, визначити прискорення вантажу.

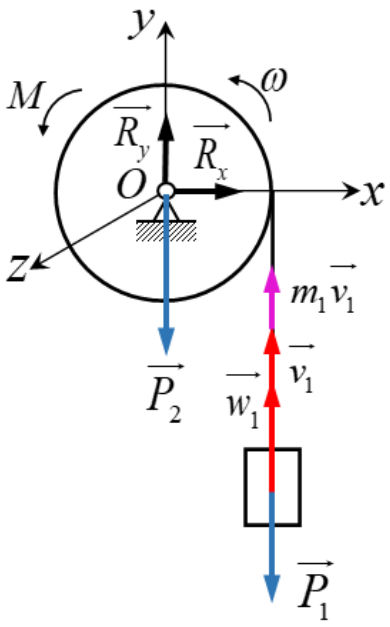


Рис. 3.11

Розв'язання

1. Механічна система складається з вантажу, що рухається поступально, шківа, який обертається навколо нерухомої осі, і каната (рис. 3.11).

2. Прикладемо зовнішні сили: сили ваги шківа $\vec{P}_2 = m_2\vec{g}$ і вантажу $\vec{P}_1 = m_1\vec{g}$, складові реакції підшипників $\vec{R}_x$ і $\vec{R}_y$, а також обертальний момент M.

3. Сума моментів усіх зовнішніх сил відносно осі обертання z

$$M_z^e = M - P_1 r.$$

Моменти сили ваги шківа й реакції підшипників дорівнюють нулю, оскільки ці сили перетинають вісь z.

4. Момент кількості руху механічної системи відносно осі обертання z дорівнює сумі моментів кількостей руху вантажу і шківа:

$$L_z = L_1 + L_2,$$

де $L_1 = m_1 v_1 r$, $L_2 = J_z\omega = m_2 r^2\omega$.

Для каната момент кількості руху дорівнює нулю, оскільки за умовою задачі нехтуємо його масою.

Отже,

$$L_z = m_1 v_1 r + m_2 r^2 \omega = m_1 v_1 r + m_2 r v_1 = \left(m_1 + m_2\right) v_1 r ,$$

де $\omega r = v_1$.

5. Скористаємося теоремою про змінення моменту кількості руху механічної системи в координатній формі

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z^e .$$

Здиференціюємо отриманий вираз для моменту кількості руху механічної системи:

$$\frac{dL_z}{dt} = \left(m_1 + m_2\right) r \frac{dv_1}{dt} \Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = \left(m_1 + m_2\right) r w_1 .$$

6. Знайдемо прискорення вантажу.

Підставивши в рівняння запису теореми про змінення моменту кількості руху механічної системи вираз для похідної $\frac{dL_z}{dt}$, отримаємо

$$\left(m_1 + m_2\right) r w_1 = M - m_1 g r \Rightarrow w_1 = \frac{M - m_1 g r}{\left(m_1 + m_2\right) r} .$$

Відповідь: прискорення вантажу $w_1 = \frac{M - m_1 g r}{\left(m_1 + m_2\right) r}$ і напрямлено вверх.

Запитання для самоконтролю

1. Записати формулу для визначення моменту кількості руху точки відносно центра O.
2. Як визначити напрямок моменту кількості руху точки відносно центра O?
3. Якою є розмірність моменту кількості руху точки в міжнародній системі одиниць (СІ)?

4. Чому дорівнює момент кількості руху матеріальної точки відносно осі?

5. Записати теорему про змінення моменту кількості руху точки відносно центра O.

6. Чому дорівнює момент кількості рухи системи матеріальних точок відносно центра O?

7. Чому дорівнює момент кількості руху системи матеріальних точок відносно осі?

8. Запишіть теорему про змінення моменту кількості руху системи матеріальних точок відносно центра O.

9. Як виразити теорему про змінення моменту кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі векторним рівнянням?

10. Як виразити теорему про змінення кількості руху матеріальної точки в диференціальній формі рівняннями в проєкціях на осі координат?

11. Як виразити теорему про змінення моменту кількості руху механічної системи в диференціальній формі векторним рівнянням?

12. Як виразити теорему про змінення моменту кількості руху механічної системи в диференціальній формі рівняннями в проєкціях на осі координат?

13. Як виразити теорему про змінення моменту кількості руху механічної системи в кінцевій (інтегральній) формі векторним рівнянням?

14. Чи можуть внутрішні сили змінити загальну величину моменту кількісті руху системи матеріальних точок?

15. У якому випадку момент кількісті руху механічної системи залишається сталим?

16. У якому випадку проєкція моменту кількості руху механічної системи на деяку координатну вісь залишається сталою?

Лекція 14. ТЕОРЕМА ПРО ЗМІНЕННЯ КІНЕТИЧНОЇ ЕНЕРГІЇ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ Й МАТЕРІАЛЬНОЇ СИСТЕМИ

План лекції

1. Кінетична енергія матеріальної точки й системи матеріальних точок.
2. Кінетична енергія твердого тіла. Визначення кінетичної енергії в окремих випадках руху твердого тіла. Теорема Кьоніга.
3. Робота сили. Потужність.
4. Обчислення роботи в деяких окремих випадках руху точки й твердого тіла.
5. Теорема про змінення кінетичної енергії матеріальної системи.

1. Кінетична енергія матеріальної точки й системи матеріальних точок

Кінетичною енергією матеріальної точки *називають скалярну міру механічного руху в нерухомій системі координат, що дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості*, *тобто*

$$T = \frac{mV^2}{2}. \tag{3.75}$$

Одиницею кінетичної енергії є джоуль (*Дж* або *Дж*). Розмірність джоуля дорівнює добутку розмірності маси (*кг*) на розмірність швидкості (*м/с*) у квадраті.

Залежно від способу задання руху точки вираз для кінетичної енергії буде різним.

1. Якщо рух точки задано у векторній формі ($\vec{r} = \vec{r}(t)$), то швидкість точки $\vec{V} = \frac{d}{dt}\vec{r}(t)$, і тоді можемо записати

$$T = \frac{m}{2}\left(\vec{V}\cdot\vec{V}\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\right). \tag{3.76}$$

2. Якщо рух точки задано в координатній формі ($x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$), то швидкість визначається через її проєкції на осі координат. Отже,

$$T = \frac{m}{2}\left(\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right). \tag{3.77}$$

2. Якщо рух задано в натуральній формі, то кінетична енергія

$$T = \frac{m}{2}\left(\frac{d\sigma}{dt}\right)^2, \tag{3.78}$$

де $\sigma = \sigma(t)$ — закон руху точки по траєкторії в дугових координатах.

Із наведених формул видно, що кінетична енергія є додатною величиною.

Кінетичною енергією системи матеріальних точок *називають суму кінетичних енергій усіх точок, що належать до системи*:

$$T = \sum_{i=1}^{n} T_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2}. \tag{3.79}$$

2. Кінетична енергія твердого тіла. Визначення кінетичної енергії в окремих випадках руху твердого тіла. Теорема Кьоніга

Нехай маємо випадок, коли система матеріальних точок є незмінною, тобто є абсолютним твердим тілом.

Кінетичну енергію твердого тіла можна обчислити за формулою (3.79).

2.1. Поступальний рух твердого тіла

Під час поступального руху твердого тіла швидкості всіх його точок є однаковими: $\vec{V_i} = \vec{V_c}$. Для цього руху з виразу (3.79) одержимо

$$T = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i V_i^2}{2} = \frac{V_i^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{M V_c^2}{2}, \tag{3.80}$$

де M — маса твердого тіла; V_c — модуль швидкості центра мас твердого тіла.

Отже, **кінетична енергія твердого тіла, що рухається поступально**, дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат швидкості будь-якої його точки (в окремому випадку це може бути центр мас).

2.2. Обертальний рух твердого тіла навколо нерухомої осі

Нехай тверде тіло обертається навколо нерухомої осі, тоді $\vec{V_i} = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$. З виразу (3.79) одержимо

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{mV_i^2}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i\omega^2 r_i^2}{2}=\frac{\omega^2}{2}\sum_{i=1}^{n}m_i r_i^2=\frac{\omega^2 I}{2}, \qquad (3.81)$$

де I — момент інерції твердого тіла відносно осі обертання; ω — кутова швидкість обертання твердого тіла.

2.3. Плоский рух твердого тіла

Розглянемо плоский рух твердого тіла як складний. Уведемо інерціальну нерухому систему координат $Oxyz$ і рухому систему координат x_1y_1, початок якої збігається з центром мас c твердого тіла (рис. 3.12). Ця система координат рухається поступово зі швидкістю $\vec{V}_c$.

Абсолютна швидкість довільної точки m_i твердого тіла визначається формулою

$$\vec{V}_i=\vec{V}_{ie}+\vec{V}_{ir}=\vec{V}_c+\vec{V}_{ir}, \qquad (3.82)$$

де $\vec{V}_{ir}$ — відносна швидкість точки m_i.

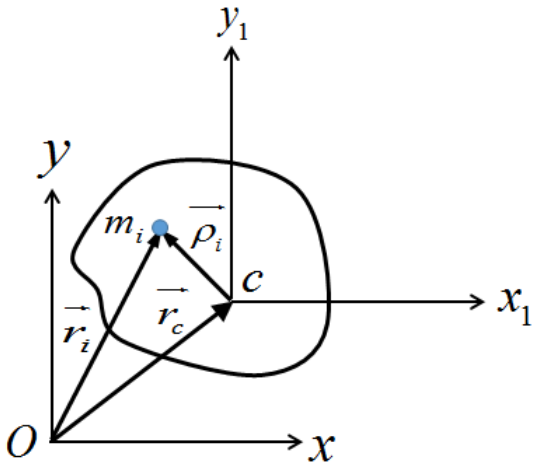


Рис. 3.12

Підставимо вираз (3.82) у формулу (3.79):

$$T=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_iV_i^2}{2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\left(\vec{V}_c+\vec{V}_{ir}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}\left(\vec{V}_c^{\,2}+2\vec{V}_c\vec{V}_{ir}+\vec{V}_{ir}^{\,2}\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}V_c^2+\sum_{i=1}^{n}m_i\vec{V}_c\vec{V}_{ir}+\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{2}V_{ri}^2 \quad . \qquad (3.83)$$

Перший доданок суми дорівнює кінетичній енергії системи точок під час її поступального руху разом із центром мас c:

$$T_c == \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} V_c^2 = \frac{V_c^2}{2} \sum_{i=1}^{n} m_i = \frac{M V_c^2}{2}, \tag{3.84}$$

де M — маса тіла (системи точок).

Другий доданок суми дорівнює нулю:

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_c \vec{V}_{ir} = \vec{V}_c \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{V}_{ir} = \vec{V}_c \sum_{i=1}^{n} m_i \frac{d\vec{\rho}_i}{dt} = \vec{V}_c \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{\rho}_i = 0, \tag{3.85}$$

оскільки в рухомій системі координат радіус-вектор центра мас дорівнює нулю, тобто $\vec{\rho}_c = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\rho}_i}{M} = 0$, тоді $\sum_{i=1}^{n} m_i \overline{\rho}_i = 0$.

Третій доданок суми відповідає кінетичній енергії системи точок під час її руху відносно центра мас:

$$T_r = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{2} V_{ri}^2. \tag{3.86}$$

Остаточно маємо

$$T = T_c + T_r. \tag{3.87}$$

Під час плоского руху твердого тіла його кінетична енергія буде складатися із двох частин: кінетичної енергії поступального руху його центра мас і кінетичної енергії обертання навколо осі, яка є перпендикулярною до площини руху тіла й проходить через його центр мас.

Плоский рух твердого тіла можна подати як обертальний навколо миттєвого центра швидкостей (МЦШ). Тоді його кінетична енергія визначається формулою

$$T = \frac{1}{2} I_P \omega^2, \tag{3.88}$$

де I_P — момент інерції твердого тіла відносно миттєвої осі обертання, що

проходить через МЦШ і є перпендикулярною до площини руху твердого тіла; ω — миттєва кутова швидкість.

За теоремою Гюйгенса – Штейнера

$$I_P = I_c + Mh^2, \tag{3.89}$$

де I_c — момент інерції тіла відносно осі, яка проходить через його центр маси і є перпендикулярною до площини його руху; h — відстань між осями.

2.4. Теорем Кьоніга

При виведенні виразу для кінетичної енергії твердого тіла під час плоского руху було використано **терему Кьоніга**: *кінетична енергія системи матеріальних точок, яка здійснює складний рух, дорівнює сумі двох доданків: кінетичній енергії поступального руху системи точок разом з центром мас і кінетичній енергії відносного руху точок навколо центра мас***.**

3. Робота сили. Потужність

Для характеристики дії сили на тіло, при деякому його переміщенні, уводиться поняття про роботу сили. Спочатку введемо поняття елементарної роботи сили на нескінченно малому переміщенні $d\vec{r}$ (рис. 3.13).

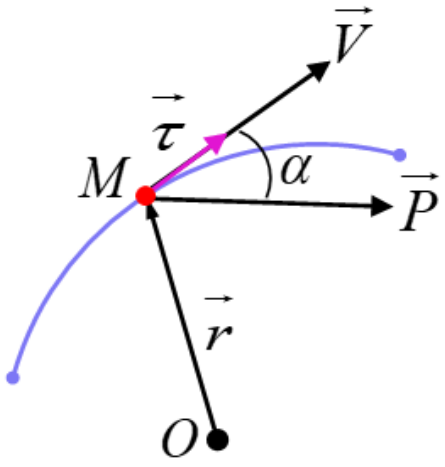


Рис. 3.13

Елементарна робота сили — *це фізична величина, яка дорівнює скалярному добутку вектора сили й диференціала радіуса-вектора*

точки прикладення сили (на елементарне переміщення):

$$dA\left(\vec{P}\right) = \vec{P} \cdot d\vec{r} = Pdr\cos\alpha\,, \tag{3.90}$$

де $\alpha = \angle\left(\vec{P}, \vec{\tau}\right)$ — кут між векторами швидкості точки й сили, прикладеної до цієї точки.

З урахуванням рівності $\vec{V} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$, що дає змогу записати $d\vec{r} = \vec{V}dt$, отримаємо

$$dA\left(\vec{P}\right) = \vec{P} \cdot \vec{V}dt = PV\cos\alpha dt\,. \tag{3.91}$$

Елементарна робота сили залежно від значення кута α може бути додатною, від'ємною і нульовою.

Якщо кут α гострий, то робота є додатною. В окремому випадку при $\alpha = 0°$ елементарна робота $dA\left(\vec{P}\right) = Pdr$.

Якщо кут α тупий, то робота є від'ємною. В окремому випадку при $\alpha = 180°$ елементарна робота $dA\left(\vec{P}\right) = -Pdr$.

Якщо кут $\alpha = 90°$, тобто якщо *сила є напрямленою перпендикулярно до переміщення, то елементарна робота сили дорівнює нулю.*

При координатному способі задання руху вираз (3.90) має вигляд

$$dA\left(\vec{P}\right) = \vec{P} \cdot d\vec{r} = P_x r_x + P_y r_y + P_z r_z\,. \tag{3.92}$$

У разі натурального способу задання руху елементарну роботу (3.90) визначимо з виразу

$$dA\left(\vec{P}\right) = \vec{P} \cdot d\vec{r} = \vec{P} \cdot d\sigma\vec{\tau} = Pd\sigma\cos\alpha = P_\tau d\sigma\,, \tag{3.93}$$

де $P_\tau = P\cos\alpha$ — проєкція сили $\vec{P}$ на дотичну $\vec{\tau}$ до траєкторії точки *M*, напрямлена в бік переміщення цієї точки (рис. 3.14).

Одиницею виміру роботи є джоуль (1 Дж = 1 Н·м).

Розглянемо роботу сили на кінцевій ділянці траєкторії, тобто роботу сили за кінцевий проміжок часу. У цьому випадку її називають **повною роботою сили**.

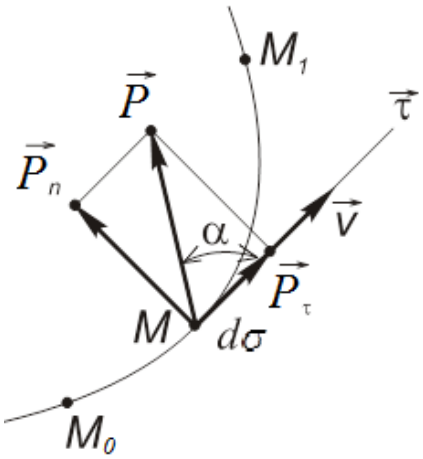


Рис. 3.14

Кінцеву ділянку траєкторії розбиваємо на нескінченно малі ділянки, тоді повна робота визначатиметься як границя суми елементарних робіт при кількості розбиттів, що прямують до нескінченності:

$$A\left(\vec{P}\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i d\vec{r}_i = \int_{M_0}^{M_1} \vec{P} d\vec{r}, \qquad (3.94)$$

де $\vec{P}_i$ — значення сили в *i*-му положенні (на *i*-й ділянці).

Отже, повна робота сили на будь-якому переміщенні M_0M_1 дорівнює взятому вздовж цього переміщення інтегралу від елементарної роботи.

Межі інтеграла відповідають значенням змінних інтегрування в точках M_0 і M_1 (точніше кажучи, інтеграл береться вздовж кривої, тобто є криволінійним інтегралом).

Роботу сили, прикладеної до твердого тіла, можна визначити так само, як і для сили, прикладеної до точки. У цьому випадку розглядається переміщення точки прикладення сили.

Робота сили, прикладеної до твердого тіла, дорівнює нулю в таких випадках:

1) переміщення і лінія дії сили є перпендикулярними;
2) точка прикладення сили є нерухомою;
3) точка прикладення сили є МЦШ.

Розглянемо циліндр, який котиться без ковзання по горизонтальній поверхні (рис. 3.15).

Знайдемо роботу сили тяжіння $\vec{P}$:

$$dA\left(\vec{P}\right) = \vec{P}\cdot d\vec{r}_c = 0, \text{ бо кут } \alpha = 90°.$$

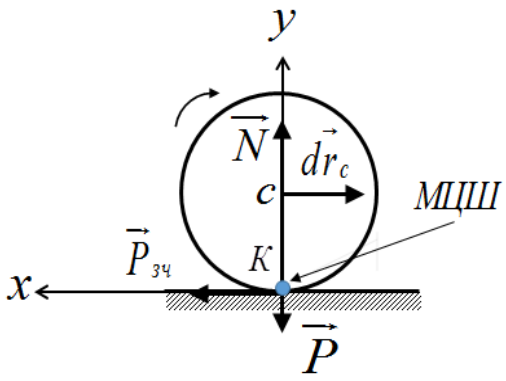


Рис. 3.15

Знайдемо роботу сили нормального тиску $\vec{N}$:

$$dA\left(\vec{N}\right) = \vec{N} \cdot d\vec{r}_K = 0.$$

Знайдемо роботу сили тертя $\vec{P}_{зч}$ (сили зчеплення):

$$dA\left(\vec{P}_{зч}\right) = \vec{P}_{зч} \cdot d\vec{r}_K = 0, \text{ бо } d\vec{r}_K = \vec{V}_K dt = 0 \text{ (точка } K \text{ є МЦШ).}$$

Потужністю називають величину, що визначає роботу, виконану силою за одиницю часу.

Потужність в певний момент вимірюється відношенням елементарної роботи до елементарного часу, протягом якого цю роботу виконано:

$$N = \frac{dA\left(\vec{P}\right)}{dt} = \frac{\vec{P}\vec{V}dt}{dt} = \vec{P}\vec{V}. \qquad (3.95)$$

Потужність дорівнює скалярному добутку вектора сили $\vec{P}$, що прикладена до точки, на вектор швидкості $\vec{V}$ цієї точки (див. формулу (3.95)).

Одиницею виміру потужності є ватт (1 Вт = 1 Дж/с).

4. Обчислення роботи в деяких окремих випадках руху точки й твердого тіла

Приклади цього питання лекції виносяться на самостійне опрацювання. Необхідно розглянути обчислення роботи сили ваги, сили пружності , сили тертя і пари сил.

5. Теорема про змінення кінетичної енергії матеріальної системи

Виокремимо довільну точку *i* матеріальної системи й запишемо для неї основне векторне рівняння динаміки:

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} = \vec{P}_i + \vec{Q}_i, \tag{3.96}$$

де $\vec{P}_i$ — головний вектор активних сил, що діють на матеріальну точку; $\vec{Q}_i$ — головний вектор реакцій в'язей, накладених на матеріальну точку.

Помножимо кожен доданок цього рівняння скалярно на вектор елементарного переміщення точки $d\vec{r}_i$:

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = \vec{P}_i \cdot d\vec{r}_i + \vec{Q}_i \cdot d\vec{r}_i = dA_i^a + dA_i^p, \tag{3.97}$$

де $dA_i^a = \vec{P}_i \cdot d\vec{r}_i$ — елементарна робота активних сил, що діють на матеріальну точку; $dA_i^p = \vec{Q}_i \cdot d\vec{r}_i$ — елементарна робота сил реакцій в'язей, накладених на матеріальну точку.

Перетворимо ліву частину рівняння (3.97):

$$m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = m_i \frac{d\vec{V}_i}{dt} d\vec{V}_i dt = m_i \vec{V}_i d\vec{V}_i = d\left(\frac{m_i \vec{V}_i^2}{2} \right). \tag{3.98}$$

Вираз (3.98) є диференціалом кінетичної енергії матеріальної точки dT_i.

Таким чином, змінення кінетичної енергії матеріальної точки дорівнює сумі елементарних робіт усіх сил, прикладених до точки:

$$dT_i = d\left(\frac{m_i \vec{V}_i^2}{2} \right) = dA_i^a + dA_i^p. \tag{3.99}$$

У матеріальній системі з ідеальними в'язями завжди матимемо реакції, напрямлені перпендикулярно до відповідних переміщень. Це означає, що робота реакцій в'язей дорівнюватиме нулю:

$$dA_i^p = 0. \tag{3.100}$$

Теорема про змінення кінетичної енергії матеріальної точки з

ідеальними в'язями у **диференціальній формі** матиме вигляд

$$dT_i = dA_i^a \tag{3.101}$$

Тепер розглянемо матеріальну систему в цілому. При цьому всі сили поділимо на зовнішні й внутрішні.

Для довільної *k*-ї точки системи маємо таке векторне рівняння динаміки:

$$dT_к = d\left(\frac{m_k \vec{V}_k^2}{2}\right) = dA_k^e + dA_k^i, \tag{3.102}$$

Запишемо співвідношення для усіх точок системи і складемо їх:

$$\sum_{k=1}^{n} d\left(\frac{m_k \vec{V}_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} dA_k^i . \tag{3.103}$$

Змінення кінетичної енергії матеріальної системи дорівнює сумі елементарних робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил. Це — теорема про змінення кінетичної енергії матеріальної ситими в диференційній формі.

З урахуванням того, що сума елементарних робіт усіх внутрішніх сил ідеальних в'язей дорівнює нулю, оскільки кожній силі дії з додатною роботою відповідає сила протидії з від'ємною роботою, отримаємо

$$\sum_{k=1}^{n} d\left(\frac{m_k \vec{V}_k^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e . \tag{3.104}$$

Розглянемо змінення кінетичної енергії системи матеріальних точок за кінцевий проміжок часу, протягом якого система набуде переміщення. Для цього необхідно зінтегрувати диференціальну форму (3.103):

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} \int_{M_0 M_1} dA_k^e + \sum_{k=1}^{n} \int_{M_0 M_1} dA_k^i, \; T_1 - T = \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{P}_k^e\right) + \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{P}_k^i\right). \tag{3.105}$$

Змінення кінетичної енергії під час переходу системи матеріальних точок (тіла) з одного стану в інший дорівнює сумі робіт усіх зовнішніх і внутрішніх сил на цьому переході. Це — теорема про змінення кінетичної енергії матеріальної системи в інтегральній формі.

Для ідеальних внутрішніх в'язей

$$T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{n} A\left(\vec{P}_k^{\,e}\right). \qquad (3.106)$$

Приклад

На якій відстані зупиниться тіло масою m, яке, рухаючись по горизонтальній гладкій площині, гальмується силою $P_{on} = 0,2mV$, якщо початкова швидкість тіла $V_0 = 3$ м/с?

Розв'язання

1. Візьмемо тіло за матеріальну точку масою m.

2. Зобразимо точку (тіло) у початковий і поточний моменти часу (рис. 3.16). Також зобразимо активну силу ваги $\vec{G} = m\vec{g}$, реакцію гладкої площини $\vec{N}$ і силу опору руху $\vec{P}_{on}$, які прикладено до точки.

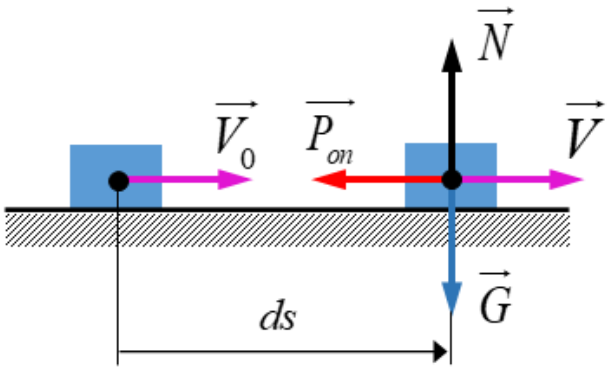


Рис. 3.16

3. Оскільки на тіло діє змінна сила, то запишемо теорему про змінення кінетичної енергії матеріальної точки в диференціальній формі:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \sum_{k=1}^{n} dA_k^e .$$

Визначимо суму елементарних робіт усіх сил, які діють на точку:

$$\sum_{k=1}^{n} dA_k^e = -P_{on}ds = -0,2mVds .$$

Отже,

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = -0,2mVds.$$

Перепишемо отриманий вираз до вигляду

$$VdV = -0,2Vds,$$

де враховано рівність $d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \frac{m}{2}d\left(V^2\right) = \frac{m}{2}2VdV = mVdV$.

4. Поділимо змінні та зінтегруємо отримане диференціальне рівняння:

$$\int_{V_0}^{0} VdV = -0,2\int_{0}^{S} ds \Rightarrow -V_0 = -0.2S,$$

звідки

$$S = V_0/0,2 = 15 \text{ м}.$$

Відповідь: тіло зупиниться на відстані 15 м від початкового положення.

Запитання для самоконтролю

1. Що таке робота сили?
2. Чому дорівнює елементарна робота сили в натуральній і координатній формах?
3. Що характеризує знак роботи?
4. Чому дорівнює робота на кінцевому переміщенні?
5. Коли робота сили дорівнює нулю?
6. Що таке потужність?
7. Чому дорівнює потужність?
8. Як формулюється й записується теорема про змінення кінетичної енергії точки?
9. Як формулюється і записується теорема про змінення кінетичної енергії матеріальної системи?
10. Чому дорівнює робота сили тяжіння? Коли робота сили тяжіння є додатною?
11. Чому дорівнює робота моменту сили?

Лекція 15. ПРИНЦИП ДАЛАМБЕРА. МЕТОД КІНЕТОСТАТИКИ

План лекції

1. Принцип Даламбера для матеріальної точки.
2. Принцип Даламбера для системи матеріальних точок.
3. Головний вектор і головний момент сил інерції системи.
4. Зведення сил інерції твердого тіла.

1. Принцип Даламбера для матеріальної точки

Принцип Даламбера дає змогу зводити всі задачі про руху тіл, до більш простої задачі про рівновагу.

Розглянемо матеріальну точку M масою m, що рухається з деяким прискоренням $\vec{W}$ уздовж траєкторії AB (рис. 3.17).

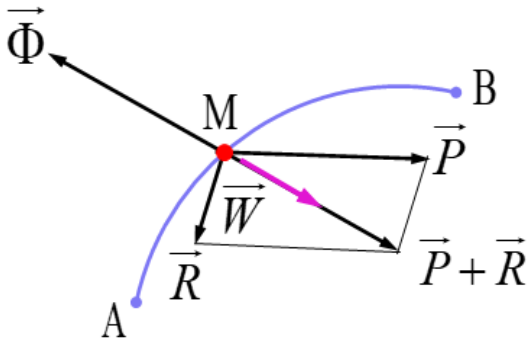


Рис. 3.17

На точку M діє система активних сил, рівнодійну яких позначимо через $\vec{P}$, а також реакції в'язей (якщо точка є невільною) з рівнодійною $\vec{R}$.

Тоді згідно з рівнянням динаміки для невільної точки маємо таке рівняння:

$$m\vec{W} = \vec{P} + \vec{R}, \text{ або } \vec{P} + \vec{R} + \left(-m\vec{W}\right) = 0. \qquad (3.107)$$

Позначимо $\vec{\Phi} = -m\vec{W}$.

Вектор $\vec{\Phi}$ називають **даламберовою силою інерції**. Її можна розглядати як силу, з якою точка діє на тіла, що надають прискорення цій точці.

Сила інерції матеріальної точки за величиною дорівнює добутку маси точки на модуль її прискорення і має напрямок, протилежний напрямку прискорення (але не руху).

Таким чином, рівність (3.107) набуває вигляду

$$\vec{P}+\vec{R}+\vec{\Phi}=0. \qquad (3.108)$$

Отже, отримано рівняння руху у формі умови рівноваги сил (рівняння статики).

Рівняння (3.108) є відображенням принципу Даламбера: *для невільної матеріальної точки в кожний момент часу сума активних сил, прикладених до точки, реакцій її в'язей і сили інерції, дорівнює нулю.*

При **координатному способі** задання руху в системі відліку $Oxyz$ векторне рівняння (3.108) перетворюється на систему скалярних рівнянь:

$$P_x+R_x+\Phi_x=0,\ P_y+R_y+\Phi_y=0,\ P_z+R_z+\Phi_z=0, \qquad (3.109)$$

де $\Phi_x=mW_x, \Phi_y=mW_y,\ \Phi_z=mW_z$ — складові вектора сили інерції.

Якщо ж рух точки задано **натуральним способом**, то отримаємо систему таких рівнянь:

$$P_\tau+R_\tau+\Phi_\tau=0,\ P_n+R_n+\Phi_n=0,\ P_b+R_b+\Phi_b=0, \qquad (3.110)$$

де $\Phi_\tau=mW_\tau=m\dfrac{dV_\tau}{dt}$ — тангенціальна складова сили інерції;

$\Phi_n=mW_n=m\dfrac{V_\tau^2}{\rho}$ — нормальна (відцентрова) сила інерції;

$\Phi_b=mW_b=0$ — проєкція сили інерції на бінормаль.

Існують дві точки зору на силу інерції.

Згідно з першою — сила інерції умовно прикладається до точки, щоб рівнянням руху (3.107) надати більш зручної форми умов рівноваги (3.108). Тому силу інерції $\vec{\Phi}$ називають фіктивною, умовною, даламберовою. З огляду на це сили інерції в принципі Даламбера не є дійсними, реальними силами.

Згідно з другою — більш поширеною — сила інерції вважається прикладеною частинами до «прискорювальних» тіл. Її обґрунтовують таким чином. Матеріальна точка рухається з прискоренням $\vec{W}$, тому що на неї діють інші тіла з силою, яка дорівнює $\vec{P}+\vec{R}$. За законом дії й протидії точка має протидіяти цим тілам з такою ж за величиною, але протилежною за напрямком силою $-(\vec{P}+\vec{R})$, яка згідно з рівнянням (3.108) дорівнює силі інерції $\vec{\Phi}$, тобто $\vec{\Phi}=-\left(\vec{P}+\vec{R}\right)$. Це співвідношення дає змогу вважати, що силу інерції прикладено до тіл, які надають точці прискорення. Дійсно,

сила інерції $\vec{\Phi}$ є векторною сумою сил дії матеріальної точки на тіла, що її прискорюють, і є сумарною оцінкою цієї дії.

Приклад.

Вантаж вагою P, підвішений на нитці завдовжки l, відхиляють від вертикалі на кут α в положення B_0 і відпускають без початкової швидкості (рис. 3.18). Знайти натяг нитки в момент, коли вантаж дійде до найнижчого положення B_1.

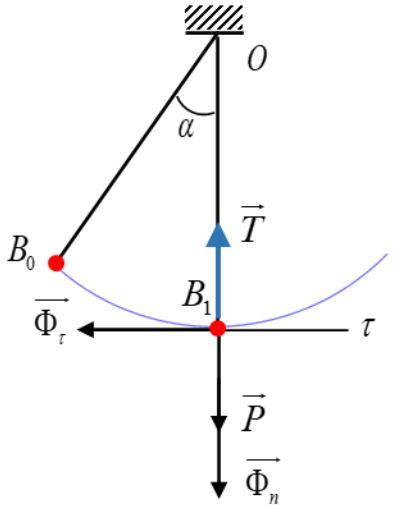


Рис. 3.18

Розв'язання

1. Зобразимо вантаж у тому положенні, для якого потрібно знайти натяг нитки. На вантаж діють сила тяжіння $\vec{P}$ і реакція нитки $\vec{T}$. Приєднуємо до цих сил нормальну й тангенціальну сили інерції $\vec{\Phi}_n$ і $\vec{\Phi}_\tau$. Одержана система сил згідно з принципом Даламбера перебуває в рівновазі.

2. Прирівняємо до нуля суму проєкцій всіх цих сил на нормаль B_1O:

$$T - P - \Phi_n = 0.$$

Оскільки $\Phi_n = mW_n = m\dfrac{v_1^2}{l}$, де v_1 — швидкість вантажу в положенні B_1, то

$$T = P + \Phi_n = P + \frac{mv_1^2}{l}.$$

Рівняння рівноваги в проєкції на дотичну вісь дає $\Phi_\tau = 0$. Цей результат

одержуємо через те, що в точці B_1 похідна $dv/dt = 0$, оскільки в цій точці швидкість набуває максимального значення.

2. Принцип Даламбера для системи матеріальних точок

Розглянемо механічну систему, яка складається з *n* матеріальних точок. До кожної точки системи в загальному випадку прикладено рівнодійну активних сил $\overrightarrow{P_k}$ і рівнодійну реакцій в'язей $\overrightarrow{R_k}$. Застосувавши принцип Даламбера до кожної матеріальної точки системи, одержимо

$$\overrightarrow{P_k} + \overrightarrow{R_k} + \overrightarrow{\Phi_k} = 0,\ k = \overline{1,n}, \qquad (3.111)$$

де $\overrightarrow{\Phi_k} = -m_k \overrightarrow{W_k}$ — сила інерції *k*-ї матеріальної точки системи.

Рівняння (3.111) виражає принцип Даламбера для системи матеріальних точок: *у будь-який момент руху механічної системи сума активних сил, реакцій в'язей разом із силою інерції для кожної точки системи утворюють урівноважену систему сил***.**

Для кожної точки системи B_k рівнодійна активних сил $\overrightarrow{P_k}$ і рівнодійна реакцій в'язей $\overrightarrow{R_k}$ розкладаються на зовнішню $\overrightarrow{P_k^e}$ (або $\overrightarrow{R_k^e}$) і внутрішню $\overrightarrow{P_k^i}$ (або $\overrightarrow{R_k^i}$) (рис. 3.19):

$$\overrightarrow{P_k^e} + \overrightarrow{P_k^i} + \overrightarrow{R_k^e} + \overrightarrow{R_k^i} + \overrightarrow{\Phi_k} = 0,\ k = \overline{1,n}. \qquad (3.112)$$

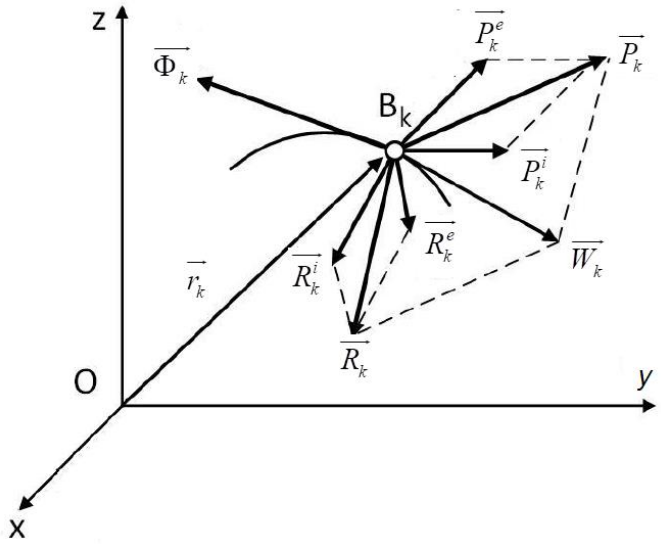


Рис. 3.19

Помножимо обидві частини рівняння (3.112) на радіус-вектор $\overrightarrow{r_k}$,

проведений з початку системи відліку до матеріальної точки B_k:

$$\overrightarrow{r_k} \times \left(\overrightarrow{P_k^e} + \overrightarrow{P_k^i} \right) + \overrightarrow{r_k} \times \left(\overrightarrow{R_k^e} + \overrightarrow{R_k^i} \right) + \overrightarrow{r_k} \times \overrightarrow{\Phi_k} = 0, \; k = \overline{1,n}. \qquad (3.113)$$

Запишемо рівняння (3.112) і (3.113) для кожної точки механічної системи й потім підсумуємо їх почленно, ураховуючи властивості внутрішніх сил:

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\overrightarrow{P_k^i} + \overrightarrow{R_k^i} \right) = 0 \text{ і } \sum_{k=1}^{n} \left(\overrightarrow{r_k} \times \left(\overrightarrow{P_k^i} + \overrightarrow{R_k^i} \right) \right) = 0.$$

Остаточно матимемо

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{P_k^e} + \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{R_k^e} + \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\Phi_k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\overrightarrow{r_k} \times \overrightarrow{P_k^e} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\overrightarrow{r_k} \times \overrightarrow{R_k^e} \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(\overrightarrow{r_k} \times \overrightarrow{\Phi_k} \right) = 0. \qquad (3.114)$$

або

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{P_k^e} + \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{R_k^e} + \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\Phi_k} = 0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_O} \left(\overrightarrow{P_k^e} \right) + \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_O} \left(\overrightarrow{R_k^e} \right) + \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_O} \left(\overrightarrow{\Phi_k} \right) = 0. \qquad (3.115)$$

Рівняння (3.115), які випливають з принципу Даламбера, є подібними до рівнянь рівноваги сил, що розглядались у статиці. Застосування цих рівнянь спрощує розв'язання задач динаміки, оскільки вони не містять внутрішніх сил.

Метод розв'язання задач динаміки, який базується на застосуванні рівнянь (3.115), називають ***методом кінетостатики***, а самі ці рівняння — ***рівняннями кінетостатики***.

Векторним рівнянням (3.115) відповідають шість алгебричних рівнянь у координатній формі:

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kx}^{e} + \sum_{k=1}^{n} R_{kx}^{e} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{kx} = 0;\ \sum_{k=1}^{n}\left(M_x\left(\overrightarrow{P_k^e}\right) + M_x\left(\overrightarrow{R_k^e}\right) + \right) M_x\left(\overrightarrow{\Phi_k}\right) = 0;$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_{ky}^{e} + \sum_{k=1}^{n} R_{ky}^{e} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{ky} = 0;\ \sum_{k=1}^{n}\left(M_y\left(\overrightarrow{P_k^e}\right) + M_y\left(\overrightarrow{R_k^e}\right) + \right) M_y\left(\overrightarrow{\Phi_k}\right) = 0; \quad (3.116)$$

$$\sum_{k=1}^{n} P_{kz}^{e} + \sum_{k=1}^{n} R_{kz}^{e} + \sum_{k=1}^{n} \Phi_{kz} = 0;\ \sum_{k=1}^{n}\left(M_z\left(\overrightarrow{P_k^e}\right) + M_z\left(\overrightarrow{R_k^e}\right) + \right) M_z\left(\overrightarrow{\Phi_k}\right) = 0.$$

3. Головний вектор і головний момент сил інерції системи

У статиці було доведено теорему, відповідно до якої довільну систему сил можна звести до будь-якого центра й замінити в загальному випадку однією силою (головним вектором) і однією парою сил (головним моментом). Таке ж зведення можна виконати й для сил інерції.

Уведемо позначення:

$$\overrightarrow{\Phi^{ін}} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{\Phi_k},\ \overrightarrow{M_O^{ін}} = \sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{M_O}\left(\overrightarrow{\Phi_k}\right). \quad (3.117)$$

Величини $\overrightarrow{\Phi^{ін}}$ і $\overrightarrow{M_O^{ін}}$ являють собою **головний вектор** і **головний момент відносно центра *O* системи сил інерції**.

Вектор $\overrightarrow{\Phi^{ін}}$, що дорівнює сумі всіх сил інерції $\overrightarrow{\Phi_k}$ точок системи, називають головним вектором сил інерції цієї системи.

Оскільки $\overrightarrow{\Phi_k} = -m_k \overrightarrow{W_k} = -m_k \dfrac{d^2 \overrightarrow{r_k}}{dt^2}$, то $\overrightarrow{\Phi^{ін}} = -\dfrac{d^2}{dt^2} \sum_{k=1}^{n}\left(m_k \overrightarrow{r_k} \right)$. Однак $\sum_{k=1}^{n}\left(m_k \overrightarrow{r_k} \right) = M \overrightarrow{r_C}$, тоді маємо

$$\overrightarrow{\Phi^{ін}} = -\frac{d^2}{dt^2}\left(M \overrightarrow{r_C} \right) = -M \overrightarrow{W_C}. \quad (3.118)$$

Головний вектор сил інерції механічної системи (зокрема твердого тіла) дорівнює добутку маси системи (тіла) на прискорення центра мас і є спрямованим протилежно цьому прискоренню.

У проєкціях на осі координат

$$\Phi_x^{ін} = -MW_{Cx} = -M\frac{d^2x_C}{dt^2};\ \Phi_y^{ін} = -MW_{Cy} = -M\frac{d^2y_C}{dt^2};$$

(3.119)

$$\Phi_z^{ін} = -MW_{Cz} = -M\frac{d^2z_C}{dt^2}.$$

Вектор $\overrightarrow{M_O^{ін}}$, що дорівнює сумі моментів усіх сил інерції $\overrightarrow{\Phi_k^{ін}}$ точок системи відносно центра системи *O*, називають головним моментом сил інерції відносно центра *O*:

$$\overrightarrow{M_O^{ін}} = \sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{r_k}\times\overrightarrow{\Phi_k}\right) = \sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{M_O}\left(\overrightarrow{\Phi_k}\right).$$

Оскільки $\overrightarrow{r_k}\times\overrightarrow{\Phi_k} = -\overrightarrow{r_k}\times\frac{d}{dt}\left(m_k\overrightarrow{V_k}\right) = -\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{r_k}\times m_k\overrightarrow{V_k}\right),$

то

$$-\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_O} = -\frac{d}{dt}\sum_{k=1}^{n}\left(\overrightarrow{r_k}\times m_k\overrightarrow{V_k}\right).$$

Таким чином,

$$\overrightarrow{M_O^{ін}} = -\frac{d}{dt}\overrightarrow{L_O} \text{ і } M_z^{ін} = -\frac{d}{dt}L_z. \qquad (3.120)$$

Головний момент сил інерції механічної системи (твердого тіла) відносно будь-якого центра O або осі z дорівнює взятій зі знаком мінус першій похідній за часом від кінетичного моменту системи (тіла) відносно того ж центра або тієї ж осі.

4. Зведення сил інерції твердого тіла

Згідно з теоремою про зведення системи сил до певного центра, яка справджується для будь-яких сил, систему сил інерції твердого тіла можна замінити однією силою, що дорівнює $\overrightarrow{\Phi^{ін}}$ і яку прикладено в довільно вибраному центрі *O*, і парою з моментом, що дорівнює $\overrightarrow{M_O^{ін}}$. Розглянемо

кілька окремих випадків.

Поступальний рух. У цьому випадку прискорення всіх точок тіла є однаковими й дорівнюють прискоренню $\overrightarrow{W_C}$ центра мас C тіла ($\overrightarrow{W_k} = \overrightarrow{W_C}$). Тоді всі сили інерції $\overrightarrow{\Phi}_k = -m_k \overrightarrow{W_C}$ утворюють систему паралельних сил, аналогічних силам тяжіння $\overrightarrow{G_k} = -m_k \vec{g}$, і тому, як і сили тяжіння, мають рівнодійну, яка проходить через точку C (рис. 3.20).

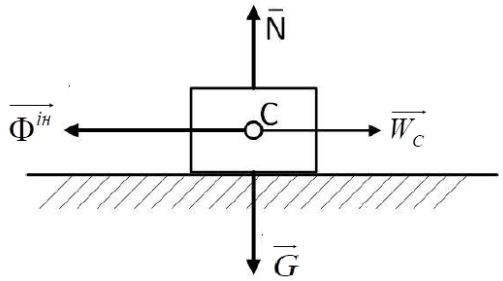


Рис. 3.20

Отже, під час поступального руху сили інерції твердого тіла зводяться до рівнодійної, що дорівнює $\overrightarrow{\Phi^{ін}}$, яка проходить через центр мас тіла:

$$\overrightarrow{\Phi^{ін}} = -M\overrightarrow{W_C}. \qquad (3.121)$$

*Обертання навколо осі, яка проходить через центр мас тіла***.** Якщо тіло обертається навколо осі C_z, яка проходить через центр мас C тіла, то $\overrightarrow{\Phi^{ін}} = 0$, оскільки $\overrightarrow{W_C} = 0$. Отже, у цьому випадку система сил інерції зводиться тільки до пари з моментом $M_z^{ін}$, яка лежить у площині симетрії тіла (рис. 3.21).

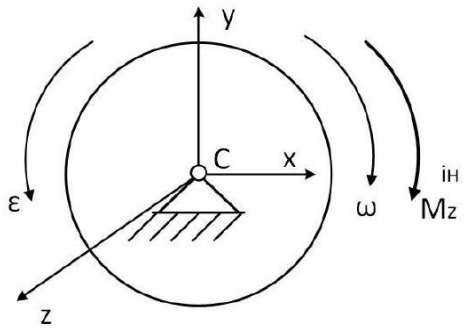


Рис. 3.21

Оскільки $L_z = I_z\omega$, то

$$M_z^{ін} = -\frac{d}{dt}L_z = -I_z\frac{d\omega}{dt} = -I_z\varepsilon\,, \qquad (3.122)$$

де ε — кутове прискорення обертання твердого тіла.

*Плоский рух***.** Якщо тіло має площину симетрії і рухається паралельно до цієї площини, то, очевидно, система сил інерції тіла зведеться до сили, що дорівнює $\overrightarrow{\Phi^{ін}}$ і яку прикладено в центрі мас C тіла, і пари з моментом $M_z^{ін} = -I_{C_z}\varepsilon$, які лежать у площині симетрії (рис. 3.22).

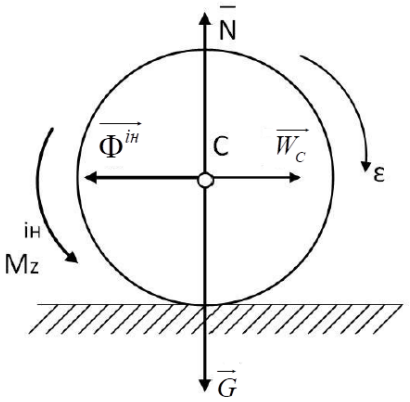


Рис. 3.22

Під час розв'язання задач за формулами виду (3.122) обчислюють модуль моменту $M_z^{ін}$, а його напрямок, протилежний ε, визначається на кресленні.

Приклад

Два вантажі вагою P_1 і P_2 кожен, зв'язані ниткою, рухаються по горизонтальній площині під дією сили $\vec{Q}$, прикладеної до першого вантажу (рис. 3.23). Коефіцієнт тертя вантажів по поверхні — f. Знайти прискорення вантажів і натяг нитки.

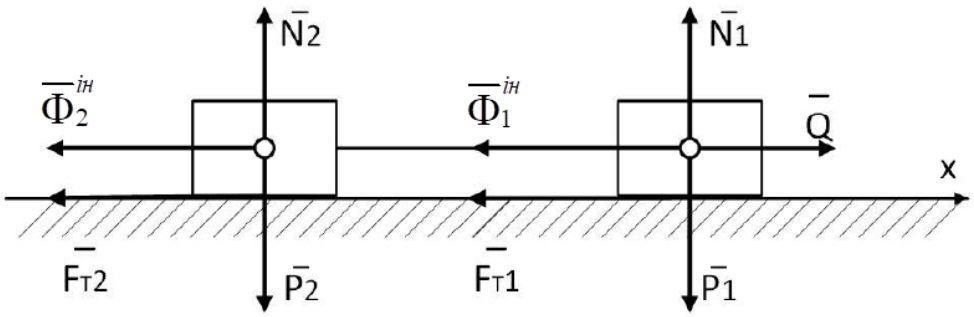


Рис. 3.23

Розв'язання

1. Зображаємо всі зовнішні сили $\overrightarrow{P_1}$, $\overrightarrow{P_2}$, $\overrightarrow{Q}$, $\overrightarrow{F_{т1}}$, $\overrightarrow{F_{т2}}$, що діють на систему, і реакції в'язей $\overrightarrow{N_1}$ і $\overrightarrow{N_2}$. Додаємо до цих сил сили інерції вантажів $\overrightarrow{\Phi_1^{ін}}$ і $\overrightarrow{\Phi_2^{ін}}$.

2. Оскільки обидва вантажі рухаються поступально з одним і тим же прискоренням, то за модулем сили інерції є однаковими:

$$\Phi_1^{ін} = \left|\overrightarrow{\Phi_1^{ін}}\right| = m_1 W = \frac{P_1}{g} W,\ \Phi_2^{ін} = \left|\overrightarrow{\Phi_2^{ін}}\right| = m_2 W = \frac{P_2}{g} W.$$

Напрямки сил показано на рис. 3.23.

3. Сили тертя є такими: $F_{т1} = fP_1;\ F_{т2} = fP_2$.

4. Згідно з принципом Даламбера отримана система сил перебуває в рівновазі. Склавши рівняння рівноваги в проєкції на горизонтальну вісь x, отримаємо таке рівняння:

$$Q - F_{т1} - F_{т2} - \Phi_1^{ін} - \Phi_2^{ін} = 0.$$

Підставивши в це рівняння значення сил, одержимо

$$Q - fP_1 - fP_2 - \left(P_1 + P_2\right)W/g = 0.$$

Звідси

$$W = \left[\left(Q/\left(P_1 + P_2\right)\right) - f\right]g.$$

Очевидно, вантажі будуть рухатися, якщо $f < Q/\left(P_1 + P_2\right)$.

5. Натяг нитки, яка з'єднує вантажі, у цій системі є внутрішньою силою. Для її визначення роз'єднаємо систему й застосуємо принцип Даламбера до одного з вантажів, наприклад до другого (рис. 3.24).

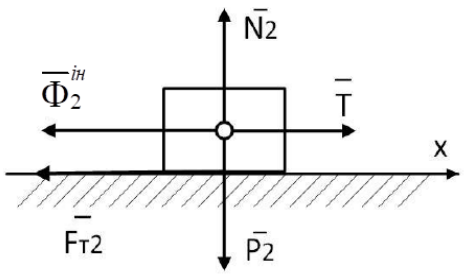


Рис. 3.24

На другий вантаж діють сила $\overrightarrow{P_2}$, нормальна реакція $\overrightarrow{N_2}$, сила тертя $\overrightarrow{F_{т2}}$ і натяг нитки $\vec{T}$. Приєднуючи до них силу інерції $\overrightarrow{\Phi_2^{ін}}$ і складаючи рівняння рівноваги в проєкції на горизонтальну вісь x, знаходимо

$$T - F_{т2} - \Phi_2^{ін} = 0.$$

Підставивши в це рівняння значення сил, одержуємо

$$T - fP_2 - \frac{P_2}{g}W = 0.$$

Остаточно, підставляючи сюди знайдене раніше W, знаходимо

$$T = QP_2 \big/ \left(P_1 + P_2\right).$$

Цікаво, що натяг нитки в цьому випадку не залежить від сили тертя й при одній і тій же сумарній вазі системи буде тим меншим, чим менше вага другого (заднього) вантажа. Тому, наприклад, у залізничному потягу вигідніше в голові розміщувати важчі вагони, а в хвості – легші.

Запитання для самоконтролю

1. Чому дорівнює і як напрямлена сила інерції матеріальної точки?
2. Як визначається і як спрямована сила інерції матеріальної точки, що рівномірно рухається по дузі кола?
3. Сформулюйте принцип Даламбера для вільної матеріальної точки.
4. Сформулюйте принцип Даламбера для механічної системи, якщо розглядаються зовнішні й внутрішні сили, що діють на точки системи.
5. Чи враховуються внутрішні сили механічної системи при використанні принципу Даламбера для механічної системи?
6. Чому дорівнює головний вектор і головний момент сил інерції під час поступального руху твердого тіла?
7. Чому дорівнює проєкція головного моменту сил інерції твердого тіла на нерухому вісь обертання?
8. Як визначаються головний вектор і головний момент сил інерції під час плоского руху твердого тіла?
9. Які умови мають виконуватись під час обертання твердого тіла навколо нерухомої осі, щоб динамічні реакції підшипників дорівнювали нулю?

Лекція 16. МЕТОД КІНЕТОСТАТИКИ ПРИ СИЛОВОМУ РОЗРАХУНКУ ПЛОСКИХ ВАЖІЛЬНИХ МЕХАНІЗМІВ

План лекції

1. Задачі динаміки й силового розрахунку механізмів.
2. Силі, що діють на ланки механізмів.
3. Умови статичної визначеності кінематичних ланцюгів.
4. Алгоритм силового розрахунку плоского важільного механізму.
5. Графічний метод силового розрахунку важільного механізму.
6. Визначення зрівноважувальної сили методом Жуковського.
7. Аналітичний метод силового розрахунку важільного механізму.
8. Особливості врахування дії сил тертя при силовому розрахунку.

1. Задачі динаміки й силового розрахунку механізмів

Під час динамічного дослідження механізмів розглядають рух їх ланок з урахуванням сил, що діють на них.

Розрізняють дві основні задачі динаміки механізмів і машин:

1. Задано закон руху початкової (вхідної) ланки механізму. Необхідно визначити зовнішні сили, які забезпечують цей рух.

2. Задано зовнішні сили, що діють на ланки механізму. Необхідно визначити закон руху початкової (вхідної) ланки.

Перша задача має назву **силового аналізу механізмів**, друга – **динаміки механізмів (машин**).

Силовий аналіз механізмів ґрунтується на розв’язанні **першої задачі динаміки** — за заданим законом руху визначити діяльні сили. Визначення реакцій, а також у деяких задачах сил і моментів, прикладених до механізму ззовні, становить зміст його силового розрахунку.

Під час руху механізму в кінематичних парах діють сили взаємодії між ланками. Сили взаємодії ланок, що виникають в місцях їх дотику, називають **реакціями в кінематичних парах**.

Навантаженість кінематичних пар реакціями є важливою динамічною характеристикою механізму. Знання сил в кінематичних парах має велике практичне значення для розрахунків ланок механізму на міцність, жорсткість, вібростійкість, стійкість проти спрацювання, для розрахунку підшипників (вальниць) на довговічність і для проведення інших подібних розрахунків, що виконують під час проєктування механізмів.

Таким чином, силовий розрахунок містить насамперед визначення реакцій у кінематичних парах. Зовнішні сили, прикладені до ланок механізму, зазвичай задано. Визначають лише зовнішню зрівноважувальну силу (зрівноважувальний момент), прикладену до початкової ланки, при якій забезпечується взятий закон її руху.

Метод силового розрахунку механізму з урахуванням сил інерції та застосуванням рівнянь динамічної рівноваги часто називають **кінетостатичним розрахунком механізмів** на відміну від **статичного розрахунку**, при якому не враховуються сили інерції.

Таким чином, силовий розрахунок механізмів будемо виконувати **методом кінетостатики** (застосування рівнянь рівноваги у формі Даламбера), умовно приклавши до кожної рухомої ланки механізму крім зовнішніх сил (моментів) **головний вектор** і **головний момент сил інерції**. Тоді для кожної ланки плоского важільного механізму можна записати три рівняння кінетостатики. Нагадаємо, для рівноваги довільної плоскої системи тіл необхідно й достатньо, щоб сума проєкцій усіх сил на кожну з двох координатних осей і сума їх моментів відносно будь-якого центра, що лежить у площині дії сил, дорівнювали нулю.

2. Сили, що діють на ланки механізмів

На рис. 3.25 показано класифікацію сил, що діють на ланки механізмів. Розглянемо основні групи сил, які враховуються під час динамічного аналізу механізмів і машин.

2.1. Рушійні сили й моменти

Рушійні сили (моменти) створюються двигунами, що перетворюють будь яку енергію на механічну. Рушійні сили збільшують кінетичну енергію машини, їх прикладено до ланок механізму, що називають початковими, з напрямком швидкості точок прикладення утворюють гострі кути, зокрема, ці кути можуть дорівнювати й нулю. Тому робота, яку виконує рушійна сила, завжди є додатною.

2.2. Сили й моменти опору

Силами опору називають такі сили, що уповільнюють рух початкової ланки. Робота цих сил завжди є від’ємною.

Сили опору поділяються на сили й моменти корисного (виробничого) опору та сили й моменти шкідливих опорів.

Сили корисного опору виконують роботу, для якої механізм (або машина) створювався, і прикладаються до ведених ланок.

Силами шкідливого опору називають такі сили, на подолання яких необхідно витратити додаткову роботу, крім тієї, що витрачається на подолання сил корисного опору.

До сил шкідливого опору належать сили опору середовища й сили тертя в кінематичних парах.

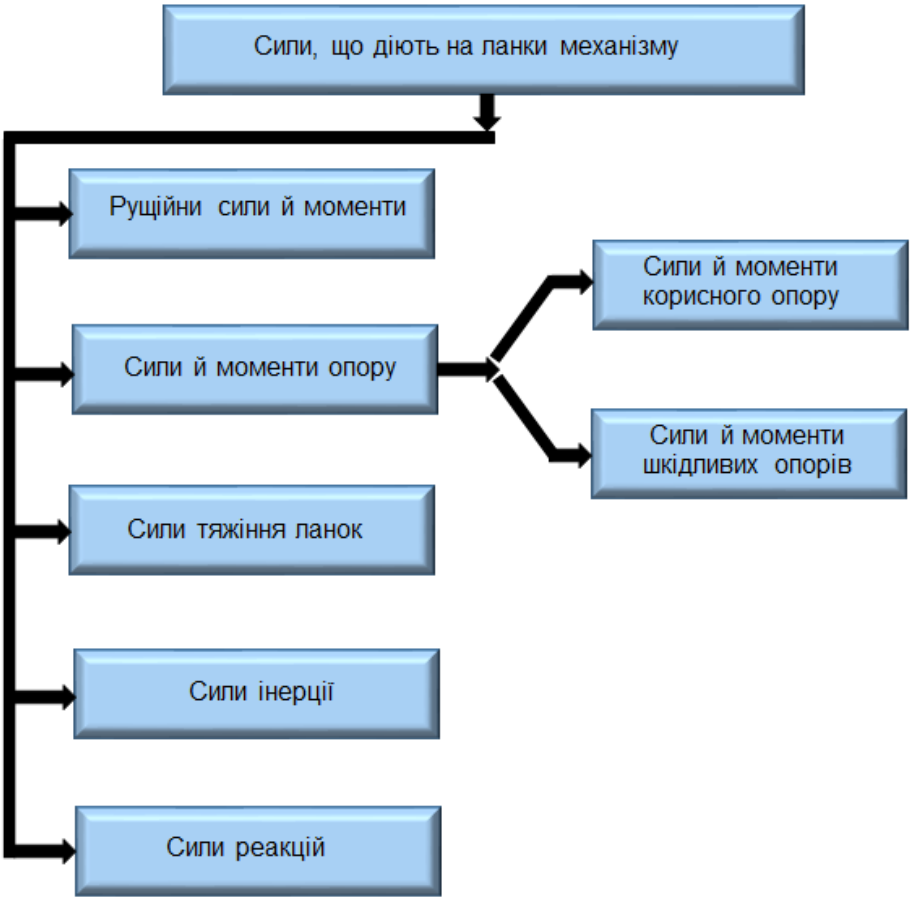


Рис. 3.25

2.3. Сили тяжіння ланок

Ці сили зумовлені дією мас ланок, завжди спрямовані вертикально вниз і прикладені до центрів мас ланок:

$$\vec{G_i} = m_i \vec{g},$$

де m_i — маса *i*-ї ланки, а $\vec{g}$ — прискорення вільного падіння.

Унаслідок постійності напрямку сил тяжіння й замкненості траєкторій, що описуються точками ланки, робота цих сил за період руху завжди дорівнює нулю, а всередині періоду (циклу) — не дорівнює. На певному відрізку часу сили тяжіння можуть виконувати як додатну, так і від'ємну роботу.

2.4. Сили інерції

Ці сили виникають у разі прискореного руху ланок, і їх можна розглядати як реакції маси на змінення швидкості.

У загальному випадку плоского руху розподілені за об’ємом тіла (ланки) сили інерції можна звести до головного вектора й головного моменту сил інерції, які прикладають у центрі мас ланки (рис. 3.26).

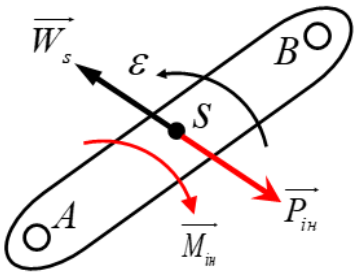


Рис. 3.26

Головний вектор сил інерції ланки визначають за формулою

$$\overrightarrow{P_{ін}} = -m\overrightarrow{W_s}, \tag{3.123}$$

де m — маса ланки; $\overrightarrow{W_s}$ — вектор повного прискорення центра мас s ланки.

Головний момент сил інерції ланки

$$\overrightarrow{M_{ін}} = -I_s\vec{\varepsilon}, \tag{3.124}$$

де I_s — момент інерції ланки відносно осі, що проходить через центр її мас s; $\vec{\varepsilon}$ — вектор кутового прискорення ланки.

Знак мінус у формулах (3.123) і (3.124) свідчить про те, що головний вектор сил інерції і головний момент сил інерції є напрямленими протилежно лінійному й кутовому прискоренням відповідно.

Розглянемо випадок, коли ланка рухається поступально.

Якщо є поступальний рух з постійною швидкістю, то в цьому випадку головний вектор і головний момент сил інерції дорівнюють нулю, оскільки повного $\overrightarrow{W_s}$ і кутового $\vec{\varepsilon}$ прискорень немає (рис. 3.27).

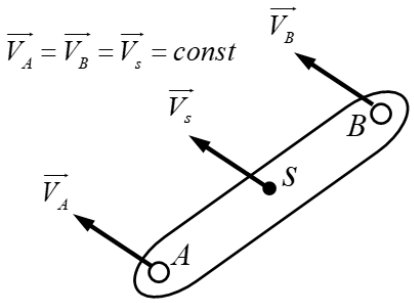


Рис. 3.27

Під час поступального руху зі зміненням швидкості буде тільки головний вектор сил інерції, прикладений у центрі мас ланки, який має напрямок, протилежний напрямку прискорення (рис. 3.28). Момент інерції і кутове прискорення дорівнюють нулю.

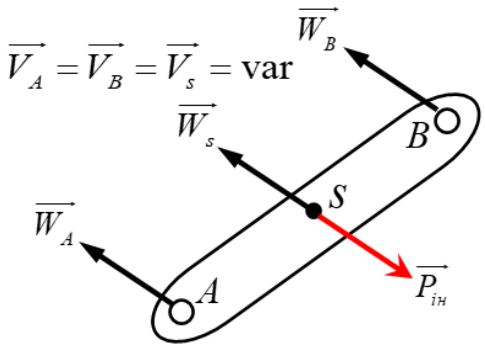


Рис. 3.28

Розглянемо випадок, коли ланка здійснює обертальний рух.

Під час обертального руху ланки відносно осі, яка проходить через центр мас, із постійною кутовою швидкістю головний вектор і головний момент сил інерції дорівнюють нулю, оскільки повного прискорення центра мас і кутового прискорення немає.

Під час обертального руху зі зміненням кутової швидкості буде тільки головний момент сил інерції, який має напрямок, протилежний напрямку кутового прискорення (рис. 3.29).

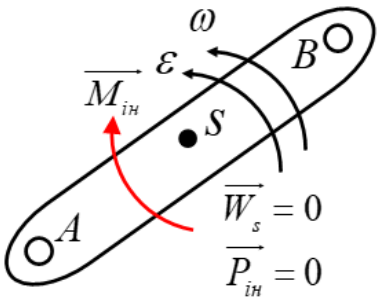


Рис. 3.29

Під час обертального руху відносно осі, яка проходить через довільну точку, з постійною кутовою швидкістю буде тільки головний вектор сил інерції, а головного моменту сил інерції не буде.

Під час обертального руху відносно осі, яка проходить через довільну точку, зі зміненням кутової швидкості буде головний вектор сил інерції, прикладений у центрі мас, і напрямок якого є паралельним до напрямку прискорення, і головний момент сил інерції, напрямок якого є протилежним напрямку кутового прискорення (рис. 3.30).

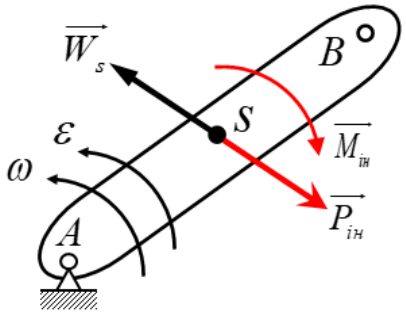


Рис. 3.30

Головний вектор і головний момент сил інерції в цьому випадку можна звести до еквівалентної сили інерції, яку прикладають у точці **центра хитання ланки *K*** (рис. 3.31).

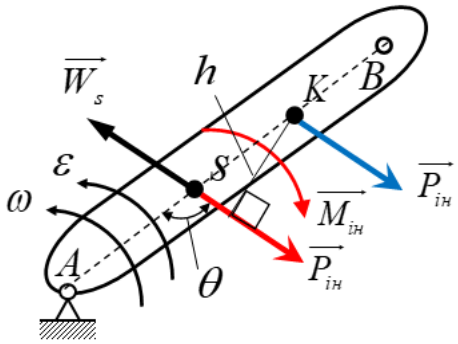


Рис. 3.31

Довжина перпендикуляра h визначається формулою

$$h = \frac{M_{ін}}{P_{ін}} = \frac{I_s \varepsilon}{m W_s} = \left(\sqrt{\frac{I_s}{m}}\right)^2 \frac{\varepsilon}{W_s} = \rho^2 \frac{W_s^\tau}{W_s l_{As}}.$$

З іншого боку,

$$h = l_{sK} \sin\theta.$$

Звідси

$$l_{sK} = \frac{h}{\sin\theta} = \rho^2 \frac{W_s^\tau}{W_s l_{As} \sin\theta} = \rho^2 \frac{W_s \sin\theta}{W_s l_{As} \sin\theta} = \frac{\rho^2}{l_{As}}, \qquad (3.125)$$

де $\rho = \sqrt{\frac{I_s}{m}}$ — радіус інерції ланки.

Отже, відстань від центра обертання ланки A до центра хитання K

$$l_{AK} = l_{As} + \frac{\rho^2}{l_{As}}. \qquad (3.126)$$

2.5. Реакції

Реакції (**тиски**) — це внутрішні сили, що є реакціями на дію активних (зовнішніх) сил, до яких належать сили перших чотирьох груп.

Реакції розкладаються на н**ормальну** й **дотичну складові**. Зазвичай визначають тільки нормальні складові цих реакцій.

Нормальні складові реакцій називають **тисками в кінематичних парах**.

У кожній окремо взятій кінематичній парі під час роботи механізму сили взаємодії ланок здебільшого змінюються і за величиною, і за напрямком. Вони залежать не тільки від робочих навантажень, зумовлених силами корисного опору, але й від динамічних інерційних навантажень, зумовлених масовими характеристиками ланок і законом їх руху.

Сила взаємодії ланок, що утворюють нижчу кінематичну пару, являє собою рівнодійну елементарних сил, розподілених по поверхні контакту ланок.

2.5.1. Поступальна пара

У нижчій поступальній кінематичній парі є відомим напрямок рівнодійної сил тиску $q(x)$, але невідомими величина й точка її прикладення (рис. 3.32). Модуль рівнодійної й точка її прикладення визначають під час виконання силового розрахунку механізма.

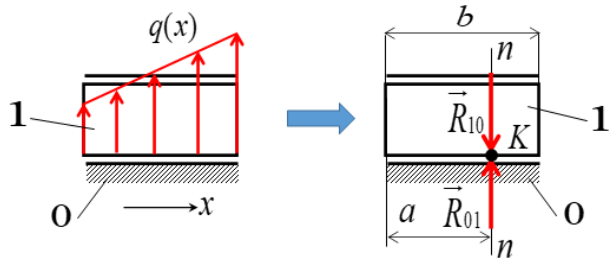


Рис. 3.32

Якщо довжина повзуна є малою порівняно з розмірами інших ланок, то розподіл тисків беруть постійним. Тоді рівнодійна тисків прикладається в центрі ваги повзуна.

Рівнодійна сил тиску $q(x)$, наприклад сили реакції $\overrightarrow{R_{01}}$, прикладеної до повзуна 1 з боку напрямної 0, спрямована по нормалі *n–n* до поверхні зіткнення ланок.

Модуль (величина) сили $\vec{R}_{01}$ і відстань a є невідомими, і їх необхідно визначити під час силового розрахунку. Зауважимо, що в окремих випадках може навіть спостерігатися $a > b$, що відбувається під час перекидання повзуна на напрямних і виникненні крайових сил тиску на повзун із двох боків.

Відповідно до третього закону Ньютона $\overrightarrow{R_{01}} = -\overrightarrow{R_{10}}$, тому *в кожній поступальній кінематичній парі під час силового розрахунку будемо мати всього дві невідомі*.

2.5.2. Обертальна пара

В обертальній кінематичної парі (рис. 3.33) при неврахуванні сил тертя сила $\overrightarrow{R_{10}}$ спрямована по нормалі *n–n* до циліндричних поверхонь зіткнення обох ланок, тобто проходить через центр шарніра *O*.

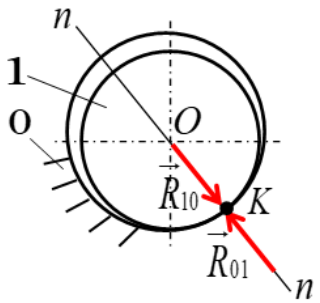


Рис. 3.33

Положення центра шарніра завжди є відомим, а модуль сили $\overrightarrow{R_{10}}$ і напрямок загальної нормалі *n–n* — невідомими.

Бачимо, *що й у кожній обертальній кінематичної парі під час силового аналізу буде всього дві невідомі.*

Отже, від кожної сили тиску, що діє в будь-якій нижчій кінематичній парі, у розрахункових рівняннях під час силового аналізу виникають дві невідомі величини.

2.5.3. Вища пара

У вищій кінематичній парі (рис. 3.34), як відомо, контакт ланок може бути або ***точковим***, або ***лінійчастим***.

Силова взаємодії ланок під час точкового контакту характеризується зосередженою силою, а при лінійчастому — навантаженням, розподіленим по лінії контакту. В останньому випадку під силою взаємодії розуміють рівнодійну елементарних розподілених сил.

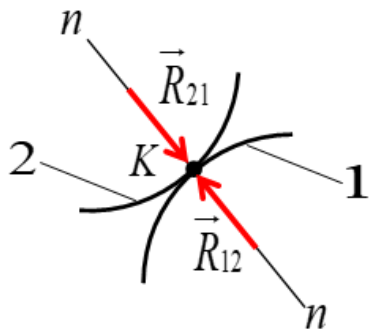


Рис.3.34

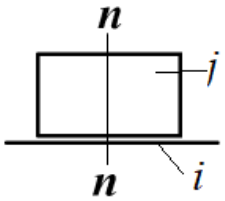
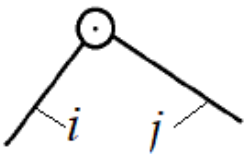
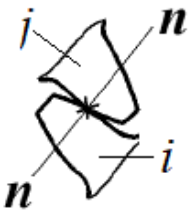
Якщо тертям знехтувати, то сила $\overrightarrow{R_{12}}$ буде спрямована по відомій загальній нормалі *n–n*.

Отже, для сили $\overrightarrow{R_{12}}$ є відомими як точка прикладення (точка K), так і лінія дії, а невідомою залишається тільки її величина.

Таким чином, при силовому розрахунку механізму кожна вища кінематична пара дає тільки одну невідому.

У табл. 3.1 показано, які параметри сил взаємодії ланок у кінематичних парах є відомими, а які ні.

Таблиця 3.1

Кінематична пара, утворена ланками *i* та *j*	Величина $\vec{R}_{ij}$	Напрямок $\vec{R}_{ij}$	Точка прикладення $\vec{R}_{ij}$
	?	+	?
	?	?	+
	?	+	+

3. Умови статичної визначеності кінематичних ланцюгів

Щоб система була статично визначною, кількість невідомих, які підлягають визначенню, не має перевищувати кількості рівнянь рівноваги. Тому перед розв'язанням задачі про знаходження реакцій у кінематичних парах необхідно з'ясувати, для яких ланцюгів виконується умова рівності між кількістю рівнянь статики (кінетостатики) і кількістю невідомих складових реакцій у кінематичних парах.

Для n ланок, на які діє просторова система сил загального вигляду, можна скласти $6n$ рівнянь рівноваги. Кількість невідомих реакцій, які необхідно визначити із цих рівнянь, для кожної кінематичної пари збігається з кількістю накладених в'язей, оскільки неможливість руху в напрямку в'язі дає реакцію у вигляді сили, а неможливість обертання — у вигляді пари сил.

Отже, умова статичної визначності просторового кінематичного ланцюга має вигляд

$$6n = 5p_5 + 4p_4 + 3p_3 + 2p_2 + p_1, \qquad (3.127)$$

де n — кількість ланок, які належать до кінематичного ланцюга; p_5, p_4, p_3, p_2, p_1 — кількість кінематичних пар відповідного класу; $5p_5$, $4p_4$, $3p_3$, $2p_2$, p_1 — кількість реакцій у цих парах.

Умова (3.127) збігається з умовою рівності нулю кількості ступенів рухомості кінематичного ланцюга.

Для плоских ланцюгів кількість рівнянь статики дорівнює $3n$, кількість невідомих реакцій для нижчої пари — двом. У вищій парі — одна невідома реакція.

Отже, умова статичної визначності для плоских ланцюгів має вигляд

$$3n = 2p_5 + p_4. \qquad (3.128)$$

Таким чином, умова (3.128) відповідає умові нульового ступеня рухомості кінематичного ланцюга.

Як відомо, нульовий ступінь рухомості мають групи Ассура, тобто групи Ассура — статично визначені системи.

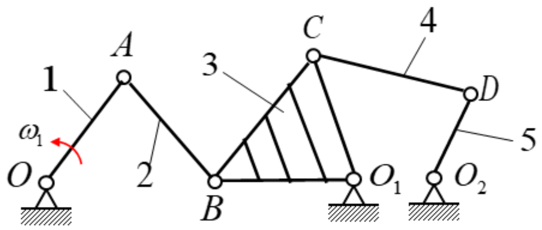
Розглянемо механізм, схему якого зображено на рис. 3.35.

Розіб'ємо кінематичний ланцюг на групи Ассура (див. формулу будови на рис. 3.35).

Візьмемо будь-яку проміжну групу, наприклад першу. Вона містить ланки 2 і 3, тобто $3n = 3 \cdot 2 = 6$. Ланки утворюють чотири кінематичні пари п'ятого класу ($2p_5 = 2 \cdot 4 = 8$), тобто кількість невідомих величин

дорівнює 8, а кількість рівнянь статики — 6.

Отже, маємо статично невизначну систему.



$$I_1(0-1) \leftarrow II_1(\underset{1}{2}-\underset{0}{3}) \leftarrow II_1(\underset{3}{4}-\underset{0}{5})$$

Рис. 3.35

Візьмемо останню приєднану групу Ассура (ланки 4 і 5). Тут дві ланки й три шарніри. Справджується умова

$$3n = 2p_5.$$

Таким чином, на відміну від кінематичного аналізу *кінетостатичне дослідження механізму слід починати з останньої приєднаної групи Ассура.*

3.1. Статична невизначеність початкового механізму

Початковий механізм містить одну рухому ланку (початкову) і одну нижчу кінематичну пару V класу, тобто $3n = 3 \cdot 1 = 3$, а $2p_5 = 2 \cdot 1 = 2$.

Отже, маємо для початкового механізму статичну невизначеність, яка дорівнює одиниці ($3n - 2p_5 = 1$). Це означає, що під дією силових чинників початковий механізм не перебуває в рівновазі. Для того щоб рівновага мала місце, необхідно додатково ввести силу або пару сил, які урівноважували б систему силових чинників, прикладених до початкової ланки. До таких силових чинників належать **зрівноважувальна сила** або **зрівноважувальний момент пари сил**.

Якщо початкова ланка початкового механізму перебуває в рівновазі, то вона рухається рівномірно.

Зрівноважувальною силою або зрівноважувальним моментом, можуть бути рушійні сили (моменти) або сили (моменти) корисного опору.

Якщо початковий механізм перебуває в умовній кінетостатичній рівновазі з одним зайвим рівнянням рівноваги (див. статичну невизначеність), що не має невідомих сил, за цим рівнянням і перевіряється правильність виконаного кінетостатичного аналізу всього механізму в цілому.

4. Алгоритм силового розрахунку плоского важільного механізму

Силовий розрахунок виконується при таких припущеннях:

— усі ланки механізму вважаються абсолютно твердими тілами;

— механізм має загальну площину симетрії, паралельну до площини його руху, у якій діють усі прикладені сили й реакції;

— маси ланок уважаються зосередженими в центрах їх мас;

— інерції ланок під час обертального руху вважаються заданими моментами інерції відносно осей, що проходять через центри мас ланок, перпендикулярно до площини їх руху;

— реакції в нижчих кінематичних парах 5-го класу вважаються зосередженими силами, що є рівнодійними сил взаємодії між ланками, розподілених по поверхнях елементів кінематичних пар.

Отже, узяті допущення дають змогу для виконання силового розрахунку плоских важільних механізмів застосовувати рівняння рівноваги довільної плоскої системи сил. Їх було розглянуто в розділі «Статика» теоретичної механіки.

Під час силового аналізу плоских важільних механізмів II класу слід дотримуватися такого порядку.

1. Визначити всі зовнішні сили, прикладені до ланок механізму.

2. Вибрати початкову ланку механізму й розбити ведений кінематичний ланцюг механізму на групи Ассура (виконати структурний аналіз).

3. Виконати силовий аналіз кожної групи окремо, виходячи з того, що така група є статично визначним кінематичним ланцюгом. Розрахунок почати з останньої (вихідної) ланки і закінчити початковою ланкою.

Порядок силового аналізу кожної групи Ассура II класу залежить від її виду.

Під час аналізу груп, внутрішня пара яких є обертальною, спочатку складають рівняння моментів для кожної ланки окремо відносно внутрішньої пари, а потім — рівняння векторної суми сил, що діють на групу в цілому й на одну з ланок.

Під час аналізу груп, внутрішня кінематична пара яких є поступальною, розглядають рівновагу кожної ланки окремо, спочатку другої ланки групи, а потім першої. Для другої ланки складають рівняння моментів відносно точки прикладення реакції від стояка на ланку і рівняння векторної суми сил, а для першої ланки — тільки рівняння векторної суми сил.

Загальний алгоритм виконання силового розрахунку плоского важільного механізму II класу без урахування сил тертя складається з таких кроків:

— структурний аналіз механізму;

— кінематичний аналіз механізму;

— визначення сил тяжіння ланок;

— визначення сил інерції ланок;

— силовий розрахунок останньої (у порядку приєднання до початкової ланки) структурної групи;

— визначення зрівноважувальної сили (або моменту), що діє на ланку початкового механізму I класу (початкова ланка і стояк);

— силовий розрахунок початкового механізму I класу;

— визначення реакції стояка.

Кінетостатичний аналіз можна проводити *графічним (метод планів сил*) або *аналітичним методом***.**

5. Графічний метод силового розрахунку важільного механізму

Розглянемо методику виконання силового розрахунку графічним методом плоского важільного механізму на такому прикладі.

Приклад

Виконаємо в загальному вигляді кінетостатичний розрахунок тангенсного механізму за його кінематичною схемою в заданих положенні й масштабі k_l (рис. 3.36). Крім того, задано: силу P, Н, корисного опору, прикладену до ланки 3; маси ланок m_1, кг, m_2, кг, і m_3, кг; відстань a, м; кут φ, град, а також кутову швидкість обертання початкової ланки $\omega_1 = const$, с$^{-1}$, і положення центра мас s_1 ланки 1 (відстань Os_1).

Силами тяжіння ланок 1, 2 і 3 знехтувати.

Розв'язання

I. *Структурний аналіз важільного механізму*

1. Пронумеруємо ланки : 0 — стояк; 1 — куліса; 2 — камінь (повзун); 3 — шток. Кількість рухомих ланок $n = 3$.

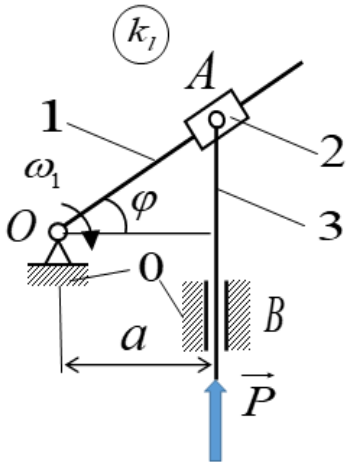


Рис. 3.36

2. Класифікація кінематичних пар: 0–1 — НКП, V кл., обертальна; 1–2 — НКП, V кл., поступальна; 2–3 — НКП, V кл., обертальна; 3–0 — НКП, V кл., поступальна. КП IV класу немає, тобто $p_4 = 0$. Кількість кінематичних пар 5-го класу $p_5 = 4$.

3. Ступінь рухомості механізму $W = 3n - 2p_5 - p_4 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$.

4. Початкову ланку задано на схемі механізму. Це — ланка 1.

Таким чином, початкова ланка 1 і стояк 0 утворюють механізм I класу, ланки 2 і 3 — кінематичний ланцюг (групу Ассура), який приєднується до стояка 0 (КП 3–0) і початкової ланки 1 (КП 1–2).

5. Розчленуємо тангенсний механізм на початковий (0–1) і групу Ассура II класу 2-го порядку 4-го виду (2–3) (рис. 3.37).

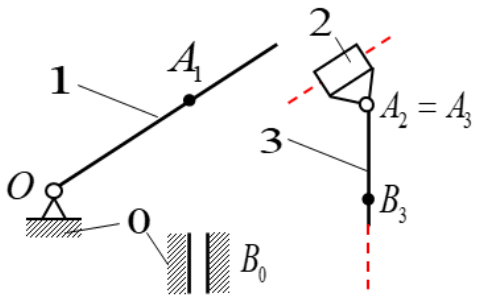


Рис. 3.37

6. Заданий механізм є механізмом II класу 2-го порядку.

7. Формула будови механізму має вигляд

$$I_1(1-0) \leftarrow II_4(2-3)$$
$$\downarrow \quad \downarrow$$
$$1 \quad 0$$

II. *Кінематичний аналіз важільного механізму*

Кінематичний аналіз проводимо векторно-графічним методом (методом планів швидкостей і прискорень).

1. Знаходимо швидкість і прискорення точки A_1 куліси 1:

$$V_{A_1} = \omega_1 l_{OA} = \frac{\omega_1 a}{\cos\varphi}. \; W_{A_1} = W_{A_1}^n = \omega_1^2 l_{OA} = \frac{\omega_1^2 a}{\cos\varphi}.$$

Вектор швидкості $\overrightarrow{V_{A_1}}$ є перпендикулярним до OA і напрямленим у бік кутової швидкості ω_1.

Вектор прискорення $\overrightarrow{W_{A_1}}$ є паралельним до OA і напрямленим від точки A до осі обертання O.

2. Побудуємо план швидкостей для групи Ассура, утвореної ланками 2 і 3. Спочатку вкажемо характерні точки групи Ассура (2–3):

Перша крайня точка	Середня точка	Друга крайня точка
A_1	$A_2 = A_3$	B_3

Векторні рівняння швидкості середньої точки A_2:

$$\overrightarrow{V_{A_2}} = \overrightarrow{V_{A_1}} + \overrightarrow{V_{A_2A_1}};$$

$$\overrightarrow{V_{A_2}} = \overrightarrow{V_{A_3}} = \overrightarrow{V_{B_3}} + \overrightarrow{V_{A_3B_3}}.$$

Векторне рівняння для будування плану швидкостей:

$$\overrightarrow{V_{A_1}} + \overrightarrow{V_{A_2A_1}} = \overrightarrow{V_{B_3}} + \overrightarrow{V_{A_3B_3}}.$$

У цьому рівнянні відомими є модуль і напрямки векторів швидкостей $\overrightarrow{V_{A_1}}$ і $\overrightarrow{V_{A_3B_3}}$ ($\overrightarrow{V_{A_3B_3}} = 0$, оскільки ланка 3 рухається поступально). Для векторів швидкостей $\overrightarrow{V_{A_2A_1}}$ і $\overrightarrow{V_{B_3}}$ є відомими їх напрямки, а модулі необхідно визначити.

Графічний розв'язок векторного рівняння (будова плану швидкостей) зображено на рис. 3.38, *а*.

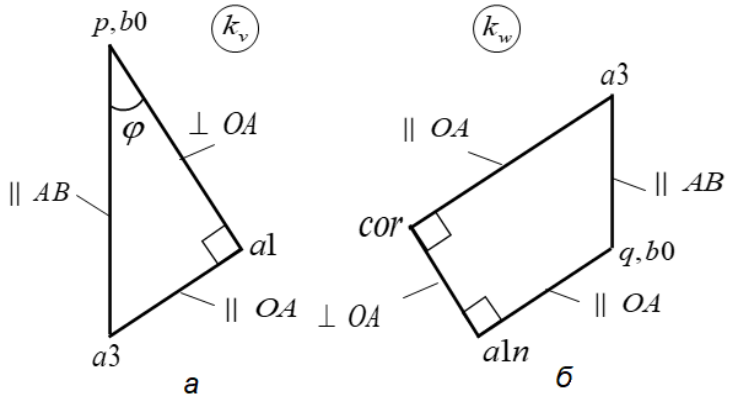


Рис. 3.38

Масштабний коефіцієнт плану швидкостей $k_v = V_{A_1} / pa1,\ м \cdot c^{-1} / мм$.

Отже, знаючи масштабний коефіцієнт k_v, знаходимо всі шукані вектори:

$$V_{A_3} = V_{A_3} = V_{B_3} = k_v \cdot pa3,\ V_{A_2A_1} = V_{A_1A_3} = k_v \cdot a1a3.$$

3. Побудуємо план прискорень для групи Ассура, утвореної ланками 2 і 3.

Векторні рівняння прискорення середньої точки A_2:

$$\overrightarrow{W_{A_2}} = \overrightarrow{W_{A_1}} + \overrightarrow{W_{A_2A_1}} + \overrightarrow{W_{cor}},$$

$$\overrightarrow{W_{A_2}} = \overrightarrow{W_{A_3}} = \overrightarrow{W_{B_3}} + \overrightarrow{W_{B_3A_3}}.$$

Векторне рівняння для будування плану прискорень:

$$\overrightarrow{W_{A_1}} + \overrightarrow{W_{A_2A_1}} + \overrightarrow{W_{cor}} = \overrightarrow{W_{B_3}} + \overrightarrow{W_{A_3B_3}}.$$

У цьому рівнянні відомими є модуль і напрямки векторів прискорень $\overrightarrow{W_{A_1}}$, $\overrightarrow{W_{cor}}$, і $\overrightarrow{W_{A_3B_3}}$ ($\overrightarrow{W_{A_3B_3}} = 0$, оскільки ланка 3 рухається поступально). Для векторів прискорення $\overrightarrow{W_{A_2A_1}}$ і $\overrightarrow{W_{B_3}}$ відомими є їх напрямки, а модулі необхідно визначити.

Модуль коріолісового прискорення $\overrightarrow{W_{cor}}$ визначимо за формулою

$$W_{cor} = 2\omega_1 V_{A_2A_1}.$$

Напрямок коріолісового прискорення $\overrightarrow{W_{cor}}$ знаходимо за правилом Жуковського: на плані швидкостей (рис. 3.38, *а*) вектор відносної швидкості $\overrightarrow{V_{A_2A_1}}$ необхідно повернути в напрямку кутової швидкості ω_1 на 90º. Довжина відрізка, який зображає коріолісове прискорення, дорівнює відношенню W_{cor}/k_w, де k_w — масштабний коефіцієнт плану прискорень.

Графічний розв'язок векторного рівняння (будова плану прискорень) зображено на рис. 3.38, *б*.

Масштабний коефіцієнт плану прискорень $k_w = W_{A_1}^n / qa1,\ м \cdot с^{-2}/мм$.

Отже, знаючи масштабний коефіцієнт k_w, можна знайти всі шукані вектори прискорень:

$$W_{A_2} = W_{A_3} = W_{B_3} = k_w \cdot qa3,\ W_{A_2A_1} = W_{A_1A_3} = k_w \cdot cora3.$$

Знайдемо прискорення центрів мас ланок 2 і 3:

$$\overrightarrow{W}_{s2} = \overrightarrow{W}_{s3} = \overrightarrow{W}_{A_3}.$$

4. Визначимо інерційні навантаження на ланки 2 і 3.

Оскільки прискорення точок A_2 і A_3 дорівнюють один одному ($\overrightarrow{W_{A_2}} = \overrightarrow{W_{A_3}}$) і є напрямленими вертикально вверх (див. план прискорень на рис. 3.38, *б*), вектори сил інерції $\overrightarrow{P_{ін2}}$ і $\overrightarrow{P_{ін3}}$ будуть напрямленими вертикально вниз по одній лінії (уздовж ланки 3).

Величини сил $\overrightarrow{P_{ін2}}$ і $\overrightarrow{P_{ін3}}$ визначимо за формулами

$$P_{ін2} = m_2 W_{s2} = m_2 W_{A_2},\ P_{ін3} = m_3 W_{s3} = m_3 W_{A_3}.$$

Моментів сил інерції в ланках 2 і 3 виникати не буде, тому що ланка 2 за умовою задачі обертається рівномірно ($\omega_2 = \omega_1 = const$), а ланка 3 рухається поступально.

5. Покажемо всі сили, прикладені до ланок структурної групи Ассура (2–3) і ланки 1 початкового механізму (рис. 3.39).

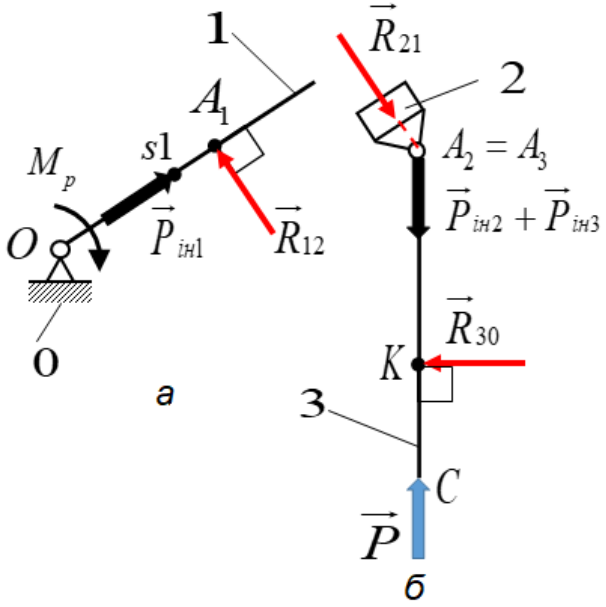


Рис. 3.39

Силу корисного опору $\overrightarrow{P}$ прикладено до точки *C* ланки 3.

Інерційні сили $\overrightarrow{P_{ін2}}$ і $\overrightarrow{P_{ін3}}$ (позначено чорним кольором) прикладемо до точок A_2 і A_3, тому що центри мас ланок 2 і 3 не обговорено в умові задачі. На рис. 3.39, *б* ці сили показано у вигляді одного вектора $\overrightarrow{P_{ін2}} + \overrightarrow{P_{ін3}}$.

Сили реакцій відкинутих зв'язків на рисунку зображено червоним кольором.

Без урахування сил тертя вектори сил $\overrightarrow{R_{12}}$ і $\overrightarrow{R_{21}}$ буде напрямлено перпендикулярно до ланки 1 у протилежних напрямках, а вектор $\overrightarrow{R_{30}}$ — перпендикулярно до ланки 3.

Точка K прикладення сили реакції $\overrightarrow{R_{30}}$ напрямної 0 на повзун 3 є невідомою.

До початкової ланки 1 прикладено інерційну силу $\overrightarrow{P_{ін1}}$, реакцію $\overrightarrow{R_{12}}$ і рушійний момент M_p. Силу інерції $\overrightarrow{P_{ін1}}$ прикладено до центра мас s_1 ланки 1, реакцію $\overrightarrow{R_{12}}$ — до точки A_1.

6. Складемо векторне рівняння кінетостатичної рівноваги сил, що діють на групу Ассура (2–3):

$$\overrightarrow{R_{21}} + \overrightarrow{P_{ін2}} + \overrightarrow{P_{ін3}} + \overrightarrow{R_{30}} + \overrightarrow{P} = 0\,.$$

Рівняння розв'язується, тому що містить усього дві невідомі величини сил реакцій $\overrightarrow{R_{21}}$ і $\overrightarrow{R_{30}}$.

З довільної точки f (полюса плану сил) в масштабі k_P відкладаємо послідовно всі відомі сили $\overrightarrow{P}$ і $\overrightarrow{P_{ін2}} + \overrightarrow{P_{ін3}}$ (рис. 3.40, *а*).

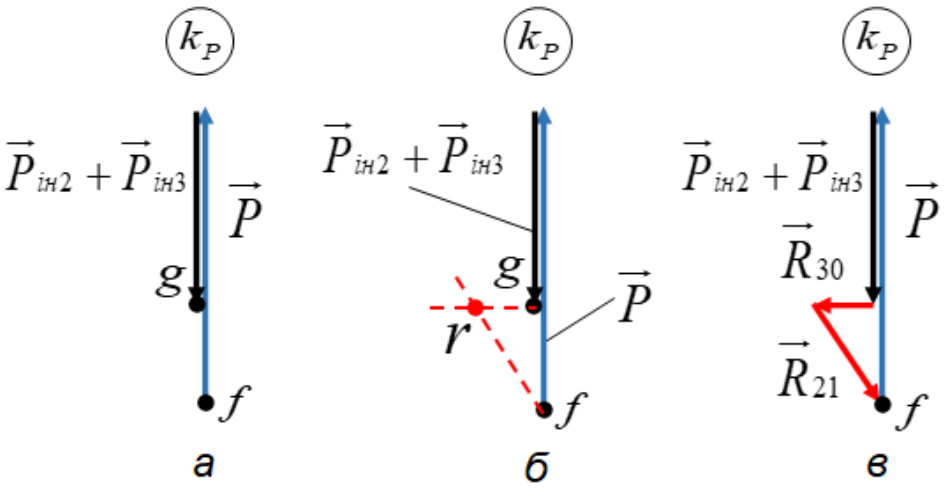


Рис. 3.40

Після побудови всіх відомих сил через кінцеву точку g проводимо пряму паралельною до лінії дії реакції $\overrightarrow{R_{30}}$, а через точку f — паралельно до лінії дії реакції $\overrightarrow{R_{21}}$ (рис. 3.40, *б*). Точка r перетину цих прямих є розв'язком векторного рівняння рівноваги сил, прикладених до структурної групи Ассура (2–3) (рис. 3.40, *в*). Ця точка визначає початок вектора $\overrightarrow{R_{21}}$ і кінець вектора $\overrightarrow{R_{30}}$ (напрямки векторів $\overrightarrow{R_{30}}$ і $\overrightarrow{R_{21}}$ вибираємо таким чином, щоб векторний силовий багатокутник був замкненим).

Знайдемо величини сил:

$$R_{30} = k_P gr\,,\ R_{21} = k_P rf\,.$$

Знайдемо точку K прикладення сили реакції $\overrightarrow{R_{30}}$ напрямної 0 на повзун 3 відповідно до рівняння рівноваги моментів сил, прикладених до ланки 3, відносно точки A_3:

$$\Sigma M_{A_3}\left(\overrightarrow{P_i}\right) = -R_{30}A_3K = 0\,.$$

Звідси знайдемо $A_3K = 0$, тому що $R_{30} \neq 0$.

Це означає, що точка K збігається з точкою A_3. Отже, ланка 3 має перекіс на напрямній 0.

Розберемо групу Ассура (2–3) на дві окремі ланки 2 і 3. До кожної ланки прикладемо відповідні сили (рис. 3.41).

Складемо векторне рівняння кінетостатичної рівноваги сил, що діють на ланку 3:

$$\overrightarrow{R_{32}} + \overrightarrow{P_{ін3}} + \overrightarrow{R_{30}} + \overrightarrow{P} = 0\,.$$

Єдиною невідомою цього рівнянні є реакція $\overrightarrow{R_{32}}$ від ланки 2 до ланки 3. Величину й напрямок цієї реакції знаходимо шляхом будування плану сил (рис. 3.41, *а*). Реакцію $\overrightarrow{R_{32}}$ можна розкласти на дві складові:

$$\overrightarrow{R_{32}} = \overrightarrow{R_{32}^n} + \overrightarrow{R_{32}^\tau}\,,$$

де $\overrightarrow{R_{32}^n}$ — нормальна реакція, спрямована по осі ланки; $\overrightarrow{R_{32}^\tau}$ — тангенціальна реакція, спрямована перпендикулярно до нормальної реакції.

Із векторного рівняння кінетостатичної рівноваги сил, що діють на ланку 3, маємо

$$\overrightarrow{R_{32}} = -\left(\overrightarrow{P_{ін3}} + \overrightarrow{R_{30}} + \overrightarrow{P}\right).$$

Звідки

$$\overrightarrow{R_{32}^{n}} = -\left(\overrightarrow{P_{ін3}} + \overrightarrow{P}\right),\ \overrightarrow{R_{32}^{\tau}} = -\left(\overrightarrow{R_{30}}\right).$$

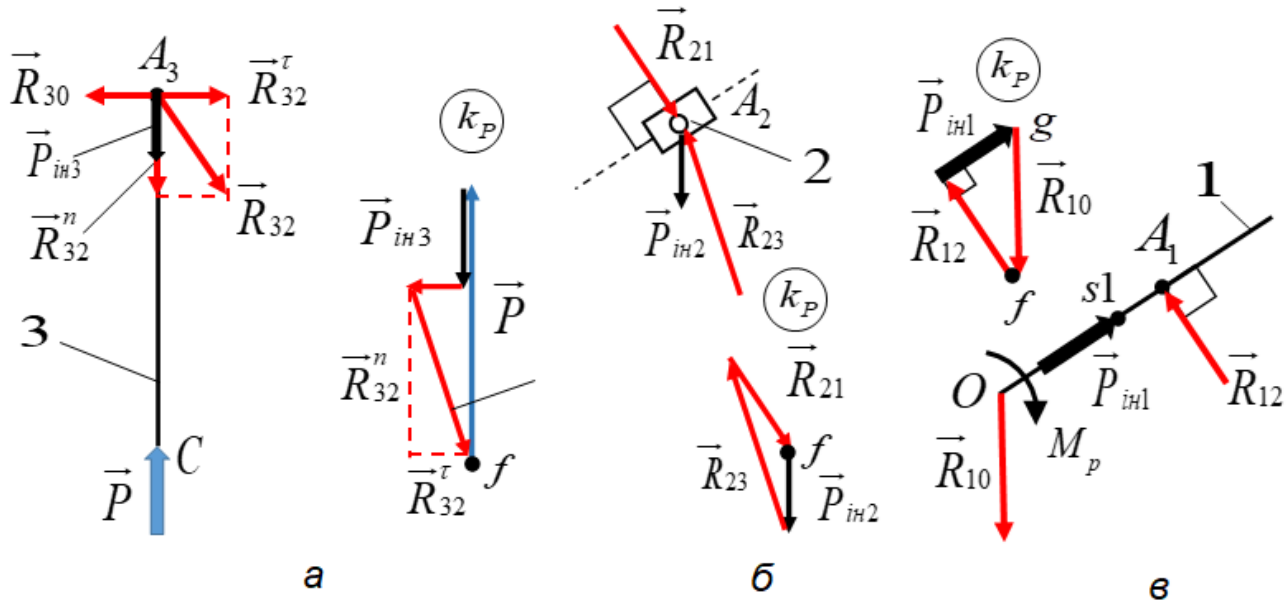


Рис. 3.41

На рис. 3.41, *б* зображено сили, прикладені до ланки 2. Ці сили утворюють силовий трикутник, оскільки це — плоска система трьох збіжних сил, тобто маємо таке векторне рівняння рівноваги:

$$\overrightarrow{P_{ін2}} + \overrightarrow{R_{21}} + \overrightarrow{R_{23}} = 0,$$

де $\overrightarrow{R_{23}} = -\overrightarrow{R_{32}}$.

Отже, побудова плану сил для ланки 2 — це перевірка правильності силового розрахунку групи Ассура (2–3).

7. Розглянемо кінетостатику початкового механізму (рис. 5.39, *а*).

Силу $\overrightarrow{R_{12}}$ знайдемо за умовою

$$\overrightarrow{R_{12}} = -\overrightarrow{R_{21}}.$$

Інерційну силу визначимо за формулою

$$P_{ін1} = m_1 W_{s1} = m_1 \omega_1^2 l_{Os1},$$

де $l_{Os1} = k_l Os1$.

Сила $\overrightarrow{P_{ін1}}$ спрямована від точки s_1 (центра мас ланки 1) до точки A.

Момент рушійних сил M_p знайдемо за рівнянням

$$R_{12} l_{OA_1} - M_p = 0.$$

Звідси

$$M_p = R_{12} l_{OA_1},$$

де $l_{OA_1} = k_l OA_1$.

Зауважимо, що рушійний момент M_p зовнішніх сил, прикладених до ланки 1, який забезпечує її рівномірне обертання, називають зрівноважувальним моментом сил $M_{зр}$.

Знайдемо реакцію стояка на початкову ланку 1 ($\overrightarrow{R_{10}}$).

На рис. 3.41, *в* зображено сили, прикладені до ланки 1. Ці сили утворюють силовий трикутник. Дійсно, умова їх рівноваги має вигляд

$$\overrightarrow{P_{ін1}} + \overrightarrow{R_{12}} + \overrightarrow{R_{10}} = 0.$$

Побудуємо план сил, що діють на ланку 1.

З довільної точки f (полюса плану сил) в масштабі k_P відкладемо відомі сили $\overrightarrow{R_{12}}$ і $\overrightarrow{P_{ін1}}$. Через кінцеву точку вектора g і точку f проведемо пряму.

Модуль реакції $\overrightarrow{R_{10}}$ визначимо за формулою

$$R_{10} = k_P gf,$$

а напрямок реакції $\overrightarrow{R_{10}}$ визначається напрямком від точки g до точки f.

Отже, сили $\overrightarrow{R_{10}}$ і $\overrightarrow{R_{12}} + \overrightarrow{P_{ін1}}$ утворюють пару сил, момент якої зрівноважується моментом рушійних сил M_p.

6. Визначення зрівноважувальної сили за методом Жуковського

Для задач, у яких необхідно знайти зрівноважувальну силу або зрівноважувальний момент, а визначати реакції в кінематичних парах немає потреби, використовують метод жорсткого важеля Жуковського.

Співвідношення між силами, прикладеними до ланок механізму (включаючи й сили інерції), можна одержати, застосувавши теорему Жуковського про жорсткий важіль.

Теорема Жуковського про жорсткий важіль: якщо для механізму, що рухається, побудувати план швидкостей, а потім вектори всіх активних сил і сил інерції, прикладених у різних точках механізму, повернути на 90° в один і той же бік і перенести в однойменні точки плану швидкостей, то сума моментів цих сил відносно полюса буде дорівнювати нулю.

Замість сил можна повертати план швидкостей на 90°, а сили прикладати так, як їх показано на схемі механізму. Тоді теорему Жуковського можна сформулювати таким чином: *якщо до плану швидкостей, повернутого на 90°, у відповідних точках прикласти всі зовнішні сили (і моменти), сили інерції (і моменти сил інерції), а також зрівноважувальну силу (момент) і розглядати план швидкостей як жорсткий важіль, закріплений у полюсі, то під дією цих сил і моментів він буде перебувати в рівновазі, а сума моментів сил відносно полюса дорівнюватиме нулю*.

Таким чином, рівновазі механізму відповідає рівновага повернутого плану швидкостей, який розглядається як «жорсткий важіль», шарнірно закріплений у полюсі плану.

Доведення теореми ґрунтується на принципі можливих переміщень.

Моменти сил, прикладені до ланок механізму, найчастіше зображають у вигляді пар сил, які переносять на план швидкостей. Якщо моменти M_i, що діють на ланки механізму, переносяться на план швидкостей безпосередньо у вигляді моментів, то їх величина визначається рівнянням

$$M_i^o = M_i \frac{ab}{l_{AB}},$$

де l_{AB}, м, — довжина ланки, до якої прикладено момент M_i; ab, мм, — відрізок плану швидкостей, до якого прикладається момент M_i^o. При цьому момент M_i^o має такий самий знак, що й заданий момент M_i, якщо напрямок відрізка ab (порядок літер) збігається з напрямком відрізка AB схеми механізму. Якщо напрямок ab є протилежним AB, то моменти M_i^o та M_i мають різні знаки.

Застосування важеля Жуковського дає змогу визначити шукану силу з допомогою тільки одного рівняння моментів. При застосуванні методу плану сил необхідно провести повний силовий розрахунок механізму.

Зазначимо, що метод Жуковського можна застосовувати для визначення будь-якої сили, якщо точку прикладення та лінію дії цієї сили задано, а також є відомими всі інші сили, точки їх прикладення та лінії їх дії на ланки механізму.

Послідовність визначення зрівноважувальної сили за способом Жуковського:

— накреслити кінематичну схему механізму в заданому положенні й вибраному масштабі з прикладеними всіма зовнішніми силами, моменти замінити парами сил;

— побудувати план швидкостей, повернутий на 90º;

— до однойменних точок повернутого плану прикласти всі зовнішні сили, сили інерції, а також зрівноважувальну силу, зберігаючи їх напрямок;

— скласти рівняння суми моментів усіх сил відносно полюса й визначити зрівноважувальну силу.

Розглянемо методику визначення зрівноважувального моменту за способом Жуковського на прикладі тангенсного механізму, силовий аналіз якого було розглянуто раніше.

Приклад

З допомогою важеля Жуковського визначити зрівноважувальний момент (момент рушійних сил M_p) для тангенсного механізму, зображеного на рис. 3.36. Згідно з умовою момент M_p прикладено до куліси механізму (початкової ланки 1).

Розв'язання

1. Візьмемо раніше побудований план швидкостей (див. рис. 3.38, *а*) і прикладемо у відповідних точках плану швидкостей усі сили, повернуті на 90º за ходом годинникової стрілки (рис. 3.42). При цьому момент M_p замінюємо парою сил ($\overrightarrow{P'_{зр}}$, $\overrightarrow{P_{зр}}$), прикладених у точках O та A_1, куліси 1 зі збереженням напрямку моменту. Модулі цих сил визначаються формулою

$$P'_{зр} = P_{зр} = \frac{M_P}{l_{OA_1}} = \frac{M_P}{l_{OA}}.$$

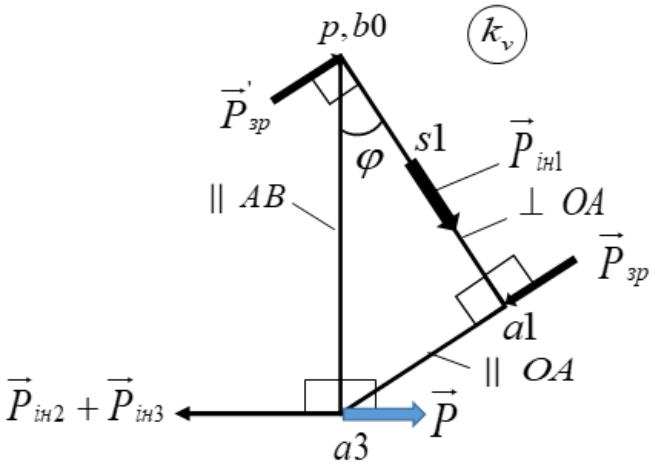


Рис. 3.42

Складаємо рівняння моментів відносно полюса плану швидкостей:

$$\Sigma M_p = Ppa3 - \left(P_{ін2} + P_{ін3}\right) pa3 - P_{зр}\, pa1 = 0\,.$$

Звідси

$$P_{зр} = \frac{pa3}{pa1}\left[P - \left(P_{ін2} + P_{ін3}\right)\right] = \frac{P - \left(P_{ін2} + P_{ін3}\right)}{\cos\varphi}\,.$$

Із плану сил (див. рис. 3.41, ***в***) знаходимо модуль реакції

$$R_{21} = \frac{P - \left(P_{ін2} + P_{ін3}\right)}{\cos\varphi}\,.$$

З урахуванням рівності модулів реакцій $\overrightarrow{R_{21}}$ і $\overrightarrow{R_{12}}$ отримаємо

$$R_{12} = \frac{P - \left(P_{ін2} + P_{ін3}\right)}{\cos\varphi}\,.$$

Знаходимо зрівноважувальний момент, який є моментом зовнішніх сил M_p:

$$M_P = R_{12} l_{OA_1}\,.$$

Отже, ми отримали результат, який збігається з результатом силового аналізу нашого механізму, виконаного графічним методом.

7. Аналітичний метод силового розрахунку

Силовий розрахунок плоского важільного механізму аналітичним методом розглянемо на прикладі тангенсного механізму.

Заздалегідь зазначимо таке: результати кінематичного дослідження надають дані про координати характерних точок ланок, у тому числі точок центрів маси ланок і точок прикладення зовнішніх навантажень, що діють на механізм. При цьому ці координати визначають відносно нерухомої системи координат, пов'язаної зі стояком механізму.

Координатні функції точки центра маси ланки механізму дають змогу задати відповідні проєкції його прискорення на координатні осі нерухомої системи координат. Знаючи ці проєкції, можна обчислити відповідні сили інерції. Якщо ланка здійснює також і обертальний рух (змінюється її кутова координата), то можна визначити її кутове прискорення і відповідний момент сил інерції.

Усі сили (рушійні, тяжіння, інерції, опору), прикладені до ланок механізму, і реакції кінематичних пар можна задати у вигляді відповідних векторів. Склавши векторні рівняння рівноваги ланок і спроєктувавши ці рівняння на координатні осі вибраної нерухомої системи координат, отримаємо систему скалярних рівнянь. До цієї системи слід додати рівняння кінематичного зв'язку ланок, що утворюють кінематичні пари. Унаслідок цього буде отримано систему скалярних рівнянь, яку можна розв’язати аналітичним методом.

Приклад

Виконати силовий аналіз тангенсного механізму, зображеного на рис. 3.36, аналітичним методом. Визначити зрівноважувальний момент — момент рушійних сил M_p. Згідно з умовою момент M_p прикладено до куліси механізму (початкової ланки 1).

Розв’язання

1. Уведемо нерухому систему координат Oxy (рис. 3.43, *а*).

2. Уважатимемо, що проєкції сил інерції на координатні осі вже визначено.

3. Реакції кінематичних пар задамо у вигляді векторів:

$$\vec{R}_{10}=\begin{vmatrix}R_{10x}\\R_{10y}\end{vmatrix},\vec{R}_{12}=\begin{vmatrix}R_{12x}\\R_{12y}\end{vmatrix},\ \vec{R}_{21}=\begin{vmatrix}R_{21x}\\R_{21y}\end{vmatrix},\ \vec{R}_{23}=\begin{vmatrix}R_{23x}\\R_{23y}\end{vmatrix},\ \vec{R}_{32}=\begin{vmatrix}R_{32x}\\R_{32y}\end{vmatrix},\ \vec{R}_{30}=\begin{vmatrix}R_{32x}\\0\end{vmatrix}.$$

Для реакцій виконуються такі рівності (умови кінематичного зв'язків відповідних ланок):

$$\vec{R}_{12}+\vec{R}_{21}=0,\ \vec{R}_{23}+\vec{R}_{32}=0.$$

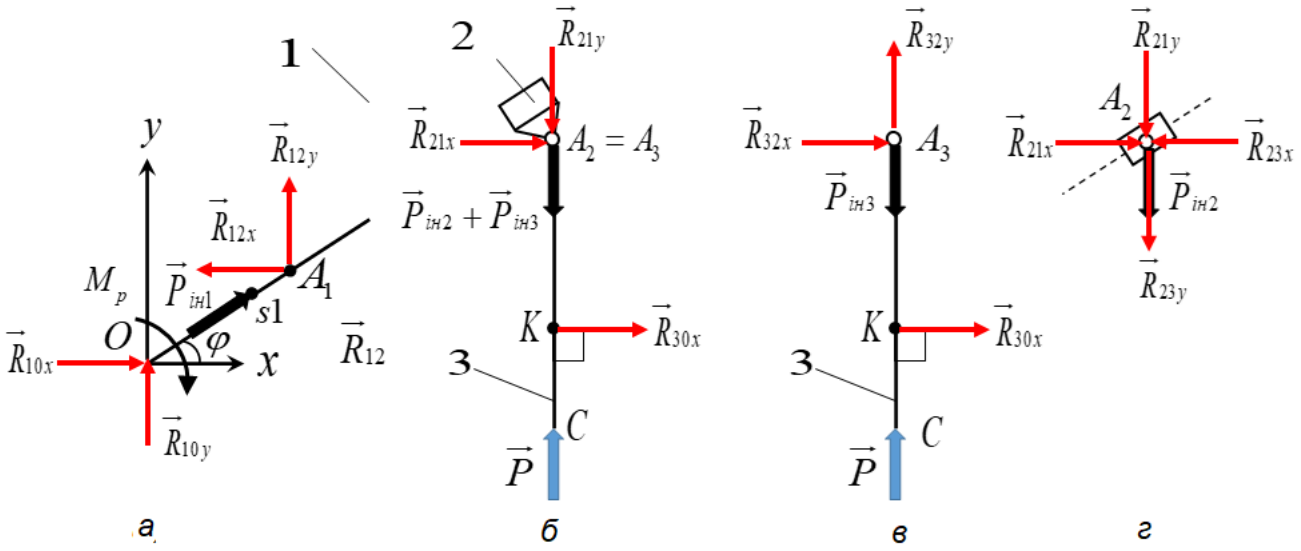


Рис. 3.43

Для реакції $\vec{R}_{21}$ є відомим напрямок лінії її дії (перпендикулярно до ланки 1) і точка прикладення (точка A_2). Модуль цієї реакції необхідно визначити. Ураховуючи ці положення, задамо вектор реакції:

$$\vec{R}_{21}=\begin{vmatrix} R_{21}\sin\varphi \\ -R_{21}\cos\varphi \end{vmatrix}.$$

Для реакції $\vec{R}_{30}$ є відомим напрямок лінії її дії (перпендикулярно до ланки 3) і точка прикладення (точка K). Необхідно визначити ці параметри. Ураховуючи ці положення, задамо вектор реакції:

$$\vec{R}_{30}=\begin{vmatrix} -R_{30} \\ 0 \end{vmatrix}.$$

Вектор сили корисного опору $\vec{P}$ задаємо у вигляді вектора:

$$\vec{P}=\begin{vmatrix} 0 \\ P \end{vmatrix}.$$

Аналогічно задамо вектори інерційних сил:

$$\vec{P}_{ін2} = \begin{vmatrix} 0 \\ -P_{ін2} \end{vmatrix}, \ \vec{P}_{ін3} = \begin{vmatrix} 0 \\ -P_{ін3} \end{vmatrix}.$$

4. Складемо векторне рівняння рівноваги сил, що діють на ланки структурної групи Ассура (2–3) (рис. 3.43, *б*):

$$\vec{P} + \vec{R}_{30} + \vec{P}_{ін2} + \vec{P}_{ін3} + \vec{R}_{21} = 0.$$

Це векторне рівняння є еквівалентним двом скалярним рівнянням:

$$\left.\begin{aligned} R_{21}\sin\varphi - R_{30} = 0; \\ P - P_{ін2} - P_{ін3} - R_{21}\cos\varphi = 0. \end{aligned}\right\}$$

Розв’яжемо цю систему двох скалярних рівнянь відносно R_{21} і R_{30}:

$$R_{21} = \frac{P - \left(P_{ін2} + P_{ін3}\right)}{\cos\varphi};$$

$$R_{30} = \left[P - \left(P_{ін2} + P_{ін3}\right)\right]\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \left[P - \left(P_{ін2} + P_{ін3}\right)\right]tg\varphi.$$

Знайдемо точку K прикладення сили реакції $\vec{R}_{30}$ напрямної 0 на повзун 3 відповідно до скалярного рівняння рівноваги моментів сил, прикладених до ланки 3, відносно точки A_3 (рис. 3.43, *б*):

$$-R_{30} \cdot A_3K = 0.$$

Звідси маємо $A_3K = 0$, тому що $R_{30} \neq 0$.

Аналіз отриманих результатів збігається з аналогічними результатами, які було знайдено графічним методом (див. рис. 3.40, *в*).

5. Роз'єднаємо ланки 2 і 3. Складемо векторне рівняння рівноваги сил, що діють на ланку 3 (рис. 3.43, *в*):

$$\vec{P} + \vec{R}_{30} + \vec{P}_{ін3} + \vec{R}_{32} = 0.$$

Це векторне рівняння є еквівалентним двом скалярним рівнянням:

$$\left.\begin{aligned} R_{32x} - R_{30x} = 0; \\ P - P_{ін3} + R_{32y} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Розв'яжемо цю систему відносно R_{32x} і R_{32y}:

$$R_{32x} = R_{30} = \left[P - \left(P_{ін2} + P_{ін3} \right) \right] tg\varphi, \; R_{32y} = P_{ін3} - P.$$

Складемо векторне рівняння рівноваги сил, що діють на ланку 2 (рис. 3.43, *г*):

$$\vec{R}_{21} + \vec{P}_{ін2} + \vec{R}_{23} = 0.$$

У цьому рівнянні всі реакції визначено раніше. Тому його можна застосувати для перевірки точності розв'язків, отриманих при розв'язанні рівнянь статики ланки 3 і структурної групи Ассур (2–3). Спроєктуємо це рівняння статики на координатні осі x і y:

$$\left.\begin{aligned} R_{21} \sin\varphi - R_{23x} = 0; \\ -P_{ін2} - R_{21} \cos\varphi - R_{23y} = 0. \end{aligned}\right\}$$

Після підставлення в цю систему відповідних розв'язків рівняння стають тотожностями.

6. Розглянемо кінетостатику початкового механізму (рис. 3.43, *а*).

Силу $\vec{R}_{12}$ знайдемо за умовою

$$\vec{R}_{12} = \begin{vmatrix} R_{12x} \\ R_{12y} \end{vmatrix} = -\vec{R}_{21} = -\begin{vmatrix} R_{21} \sin\varphi \\ -R_{21} \cos\varphi \end{vmatrix}.$$

Отже, маємо такий запис вектора реакції $\vec{R}_{12}$:

$$\vec{R}_{12} = \begin{vmatrix} -R_{12} \sin\varphi \\ R_{12} \cos\varphi \end{vmatrix},$$

де $R_{12} = R_{21}$.

Вектор інерційної сили $\vec{P}_{ін1}$ задамо у вигляді

$$\vec{P}_{iн1} = \begin{vmatrix} P_{iн1}\cos\varphi \\ P_{iн1}\sin\varphi \end{vmatrix},$$

де $P_{iн1} = m_1\omega_1^2 l_{Os1}$ — модуль інерційної сили ланки 1.

Замість стояка 1 на рис. 3.43, *а* зображено її реакцію $\vec{R}_{10}$, прикладену до ланки в точці O. Цю реакцію теж задамо у вигляді

$$\vec{R}_{10} = \begin{vmatrix} R_{10x} \\ R_{10y} \end{vmatrix}.$$

Складемо векторне рівняння рівноваги сил, що діють на ланку 1 (рис. 3.43, *а*):

$$\vec{R}_{10} + \vec{P}_{iн1} + \vec{R}_{12} = 0.$$

Це векторне рівняння є еквівалентним двом скалярним рівнянням:

$$\left.\begin{aligned} R_{10x} + P_{iн1}\cos\varphi - R_{12}\sin\varphi = 0; \\ R_{10y} + P_{iн1}\sin\varphi + R_{12}\cos\varphi = 0. \end{aligned}\right\}.$$

Розв’яжемо цю систему двох скалярних рівнянь відносно R_{10x} і R_{10y}:

$$R_{10x} = R_{12}\sin\varphi - P_{iн1}\cos\varphi,\ R_{10y} = -\left(R_{12}\cos\varphi + P_{iн1}\sin\varphi\right).$$

Момент рушійних сил M_p знайдемо за рівнянням:

$$\Sigma M_o\left(P_i, M_j\right) = R_{12}\sin\varphi OA_1\sin\varphi + R_{12}\cos\varphi OA_1\cos\varphi -$$
$$-P_{iн1}\cos\varphi Os1\sin\varphi + P_{iн1}\sin\varphi Os1\cos\varphi - M_p = 0.$$

Розв’яжемо це скалярне рівняння відносно M_p:

$$M_p = R_{12}\sin\varphi OA_1\sin\varphi + R_{12}\cos\varphi OA_1\cos\varphi - P_{iн1}\cos\varphi Os1\sin\varphi +$$
$$+P_{iн1}\sin\varphi Os1\cos\varphi = R_{12}OA_1\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) +$$
$$+P_{iн1}Os1\left(s\sin\varphi\cos\varphi - s\sin\varphi\cos\varphi\right) = R_{12}OA_1 = R_{21}OA_1.$$

Зауваження. Із умови рівноваги сил, прикладених до початкової

ланки 1, випливає, що рівнодійна сил $\vec{P}_{ін1}$ і $\vec{R}_{12}$ і реакція $\vec{R}_{10}$ утворюють пару сил. Момент цієї пари сил зрівноважує рушійний момент M_p:

$$M\left(\vec{R}_{10}, \vec{R}_{12} + \vec{P}_{ін1}\right) + M_P = 0.$$

Наведемо систему семи рівнянь алгебри для знаходження реакцій у кінематичних парах структурної групи Ассура (2–3):

$$\left.\begin{aligned}
R_{21}\sin\varphi - R_{30} &= 0;\\
P - P_{ін2} - P_{ін3} - R_{21}\cos\varphi &= 0;\\
-R_{30}h &= 0;\\
R_{32x} - R_{30} &= 0;\\
P - P_{ін3} + R_{32y} &= 0;\\
R_{23x} + R_{32x} &= 0;\\
R_{23y} + R_{32y} &= 0,
\end{aligned}\right\}$$

де шуканий параметр KA_3 позначено h.

У загальному випадку для знаходження реакцій у кінематичних парах структурної групи Ассура 2-го класу необхідно скласти систему восьми рівнянь.

Ураховуючи, що перша крайня кінематична пара структурної групи Ассура (2–3) є поступальною кінематичною парою з невідомим модулем реакції, замість восьми рівнянь було використано сім.

8. Особливості врахування дії сил тертя при силовому розрахунку

Уведення сил тертя в рівняння кінетостатики призводить до збільшення кількості невідомих компонент реакцій у кінематичних парах, а кількість рівнянь при цьому залишається незмінною. Тому, щоб завдання силового аналізу було вирішуваним, необхідно вводити додаткові умови, кількість яких дорівнює кількості додаткових невідомих. Ці додаткові умови, що визначають характер розподілу нормальних реакцій, вибирають з урахуванням конкретних особливостей кінематичної пари.

Силовий розрахунок механізмів з урахуванням тертя зводиться до спільного розв’язання рівнянь кінетостатики, що містять сили тертя як додаткові невідомі, і співвідношень, отриманих під час розгляду відповідних моделей кінематичних пар з тертям. При цьому повна система рівнянь силового аналізу є нелінійною, що спричиняє істотні ускладнення

під час їх розв’язання. Крім того, система рівнянь може мати декілька розв’язків, і визначити, яке з них відповідатиме дійсним значенням реакцій і рушійних сил, досить складно.

У багатьох випадках ефективним способом урахування тертя під час силового аналізу механізмів є метод послідовних наближень. Згідно з цим методом спочатку виконується силовий розрахунок без урахування тертя. Потім, отримавши значення реакцій в кінематичних парах, можна знайти відповідні сили й моменти сил тертя і розв’язати рівняння кінетостатики. Унаслідок повторного розв’язання цих рівнянь отримують уточнені значення реакцій, що діють у кінематичних парах (перше наближення). За отриманими в першому наближенні значеннями сил можна знову визначити сили й моменти сил тертя, а потім виконати розрахунок у другому наближенні й отримати ще точніші значення реакцій у кінематичних парах. Такий процес можна продовжувати й далі залежно від необхідної міри точності розрахунку. З досвіду випливає, що часто достатньо тільки першого наближення.

Запитання для самоконтролю

1. У чому полягають основні задачі силового аналізу?
2. Назвіть методи силового аналізу механізмів.
3. Сформулюйте принцип Даламбера.
4. Як визначають сили інерції ланок механізму за величиною й напрямком під час поступального руху ланки?
5. Як визначають сили інерції ланок механізму за величиною й напрямком під час обертального руху ланки?.
6. Як визначають сили інерції ланок механізму за величиною й напрямком під час плоского руху ланки?
7. Що можна сказати про точку прикладення й напрямок реакції в обертальній і поступальній кінематичних парах V класу?
8. Що відомо про реакцію в кінематичній парі IV класу?
9. Якими є умови статичної визначеності кінематичного ланцюга?
10. Що називаєть планом сил?
11. Якими є особливості силового аналізу початкової ланки?
12. Яку силу називають зрівноважувальною?
13. Що таке важіль Жуковського?
14. Як перенести момент від сил інерції на важіль Жуковського?

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

1. Арендаренко, В. М. Теорія механізмів і машин в прикладах і задачах : навч. посіб. / В. М. Арендаренко, І. А. Дудніков. – Полтава, 2020. – 176 с.

2. Березін, Л. М. Теоретична механіка : навч. посіб. Ч. 1. Статика, кінематика / Л. М. Березін та ін. – Київ : Університет "Україна", 2021. – 142 с.

3. Мамаєв, Л. М. Збірник задач з теоретичної механіки : навч. посіб. / Л. М. Мамаєв, О. В. Нікулін, В. Ю. Солод. – Кам'янське : ДДТУ, 2018. – 247 с.

4. Романюк, О. Д. Теоретична та прикладна механіка. Короткий курс / О. Д. Романюк, Л. П. Теліпко, С. В. Ракша. – Кам'янське : ДДТУ, 2021. – 282 с.

5. Романюк, О. Д. Теорії механізмів і машин : консп. лекцій / уклад. : О. Д. Романюк. – Кам'янське : ДДТУ, 2019. – 107с.

6. Штефан, Н. І. Теоретична механіка : конспект лекцій [Електронний ресурс] : навч. посіб. / уклад. : Н. І. Штефан, Н. В. Гнатейко, В. М. Федоров. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 143 с. – Режим доступу : https://ela.kpi.ua/bitstream/123456789/27558/1/Lektsii_odnosem_final_18.04.19.pdf.

ЗМІСТ

Передмова 3
Вступ 4
Розділ 1. Статика 5
Лекція 1. Основні поняття та аксіоми статики. Система збіжних сил .. 5
Лекція 2. Момент сили відносно точки і осі. Пара сил 20
Лекція 3. Зведення довільної системи сил до простішого вигляду. Плоска система сил 36
Розділ 2. Кінематика 54
Лекція 4. Кінематика точки 54
Лекція 5. Кінематика найпростіших рухів твердого тіла 73
Лекція 6. Плоский рух твердого тіла 89
Лекція 7. Складний рух точки 103
Лекція 8. Основні поняття структурного аналізу механізмів 113
Лекція 9. Аналітичний метод кінематичного аналізу плоских важільних механізмів 128
Лекція 10. Векторно-графічний метод кінематичного аналізу плоских важільних механізмів 143
Розділ 3. Динаміка 58
Лекція 11. Динаміка матеріальної точки 158
Лекція 12. Система матеріальних точок. Теорема про змінення кількості руху системи матеріальних точок 174
Лекція 13. Теорема про змінення моменту кількості руху 184
Лекція 14. Теорема про змінення кінетичної енергії матеріальної точки й матеріальної системи 195
Лекція 15. Принцип Даламбера. Метод кінетостатики 207
Лекція 16. Метод кінетостатики при силовому розрахунку плоских важільних механізмів 218
Бібліографічний список 249

Навчальне видання

Шехов Олександр Володимирович

ОСНОВИ ТЕОРЕТИЧНОЇ МЕХАНІКИ ТА ТЕОРІЇ МЕХАНІЗМІВ І МАШИН

Редактор О. Ф. Серьожкіна

Зв. план, 2024
Підписано до видання 31.12.2024
Ум. друк. арк. 13,9. Обл.-вид. арк. 15,69. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
http://www.khai.edu
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єктів видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції, сер. ДК №391 від 30.03.2001