

О. Г. Нарижний

**СПЕЦІАЛЬНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ
АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЄКТУВАННЯ**

2022

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»

О. Г. Нарижний

**СПЕЦІАЛЬНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ
АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЄКТУВАННЯ**

Навчальний посібник до самостійної роботи

Харків «ХАІ» 2022

УДК 004.896:517.9(076.5)
Н30

Рецензенти: д-р техн. наук, проф. В. М. Павленко,
канд. техн. наук, доц. Є. А. Цегельник

Нарижний, О. Г.

Н30 Спеціальний математичний апарат автоматизованого проектування [Електронний ресурс] : навч. посіб. до самост. роботи / О. Г. Нарижний. – Харків : Нац. аерокосм. ун-т ім. М. Є. Жуковського «Харків. авіац. ін-т», 2022. – 54 с.

Викладено питання розв'язання диференціальних рівнянь у варіаційній формі за допомогою числового методу зважених відхилів. Розглянуто різноманітні варіанти методу, їх особливості, переваги та недоліки.

Для викладачів і студентів спеціальності «Комп'ютерні науки».

Іл. 14. Табл. 1. Бібліогр.: 3 назви

УДК 004.896:517.9(076.5)

© Нарижний О. Г., 2022
© Національний аерокосмічний
університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут», 2022

ЗМІСТ

Вступ.....	4
1. Математичні довідки.....	5
2. Варіаційні принципи.....	8
3. Конструювання природних варіаційних принципів.....	18
3.1. Симетричний оператор.....	18
3.2. Варіаційний принцип для симетричних операторів.....	20
4. Метод Релея – Рітца.....	28
5. Метод множників Лагранжа	35
6. Загальні варіаційні принципи.....	43
7. Штрафні функції.....	45
8. Метод найменших квадратів.....	48
Бібліографічний список.....	53

ВСТУП

При проектуванні нових технічних об'єктів сьогодні використовується моделювання процесів або станів, що відбуваються під час виготовлення або експлуатації.

Часто функція, що описує процес або стан об'єкта, може бути визначена як розв'язок диференціального рівняння. У багатьох випадках для такого диференціального рівняння можна встановити *природний варіаційний принцип*, за яким передбачається особливе значення деякого функціонала для шуканої функції. Тоді для відшукування функції може бути використаний інший підхід, ніж розв'язання диференціального рівняння, що полягає в пошуку функції, яка доставляє стаціонарне значення цього функціонала. Таким чином, можуть бути сформульовані інші методи визначення функції. Маємо *можливість вибору* методу визначення функції, який буде більш придатним за тими або іншими ознаками.

Деякі фізичні задачі можна безпосередньо сформулювати у вигляді варіаційних принципів, наприклад, стан рівноваги механічної системи описується принципом мінімуму потенціальної енергії системи. Задачі оптимізації також можна сформулювати як пошук екстремуму деякого функціонала.

Не кожна задача, описана у вигляді диференціальних рівнянь, може бути переформульована у вигляді варіаційного принципу; диференціальні рівняння описують більш широке коло процесів. Слід визначити умови, коли можливим є варіаційне формулювання задачі, коли природний варіаційний принцип може бути отриманий з диференціального рівняння.

У навчальному посібнику розглянуто методи безпосереднього формулювання варіаційних принципів, що базуються на використанні множників Лагранжа, так званих штрафних функцій, а також методу найменших квадратів. Загальною рисою цих методів є їх числовий характер.

Для кращого розуміння особливостей використання методів розглянуто велику кількість прикладів.

Самостійна робота з курсу «Спеціальний математичний апарат автоматизованого проектування» полягає у вивченні теоретичних питань цього навчального посібника.

1. МАТЕМАТИЧНІ ДОВІДКИ

Нагадаємо важливі для подальшого теоретичного математичного аналізу.

Насамперед це три теореми, що визначають необхідний порядок інтегрування добутку двох функцій в області змінної однієї, двох і трьох просторових координат. Унаслідок зміння порядку інтегрування поряд з інтегралом по області визначення з'являється ще й інтеграл по межі області.

На рис. 1 зображено вигляд областей визначення в одно-, дво- та тривимірному випадках, а також відповідні позначення.

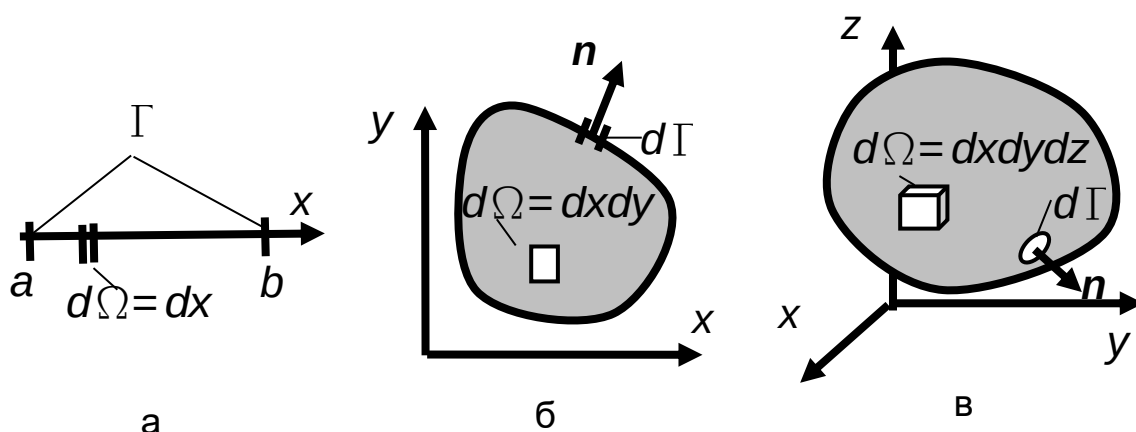


Рис. 1. Вигляд областей і позначення

Формула інтегрування частинами застосовується у випадку залежності функцій від однієї координати (рис. 1, а):

$$\int_a^b \phi d\psi = - \int_a^b \psi d\phi + (\phi \psi) \Big|_a^b, \quad (1)$$

де $\phi = \phi(x)$, $\psi = \psi(x)$ – диференційовувані функції однієї змінної x ; a, b – межові точки області визначення функцій ($\Omega \equiv a \leq x \leq b$).

У двовимірному випадку (рис. 1, б) аналогічне співвідношення можна отримати за допомогою формули інтегрування частинами (1).

На рис. 2 показано позначення, що використовуються при виведенні формули.

Запишемо формулу інтегрування частинами (1) у нових позначеннях:

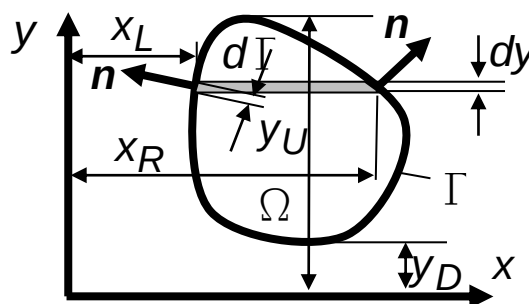


Рис. 2. Схема подрібнення області й позначення

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy + \int_{y_D}^{y_U} (\phi(x_R) \phi(x_R) - \phi(x_L) \phi(x_L)) dy. \quad (2)$$

Розглянемо лінійну одновимірну межу сегмента справа

$$dy = n_x d\Gamma, \quad (3)$$

де $n_x = \cos(\chi, \mathbf{n})$ – напрямний косинус зовнішньої нормалі $\mathbf{n}$ відносно осі x . Аналогічно для межі зліва

$$dy = -n_x d\Gamma. \quad (4)$$

З урахуванням цих співвідношень останній доданок у (2) має вигляд

$$\int_{y_D}^{y_U} (\phi(x_R) \phi(x_R) - \phi(x_L) \phi(x_L)) dy = \int_{\Gamma} \phi \phi_x d\Gamma, \quad (5)$$

а, отже, співвідношення (2) набуває вигляду

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dy + \int_{\Gamma} \phi \phi_x d\Gamma. \quad (6)$$

Аналогічно отримаємо друге співвідношення:

$$\int_{\Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy = - \int_{\Omega} \phi \frac{\partial \phi}{\partial y} dx dy + \int_{\Gamma} \phi \phi_y d\Gamma. \quad (7)$$

Використавши диференціальний оператор Гамільтона

$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j}$ (набла), де $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ – напрямні орти, можна об'єднати (6) і

(7) та отримати співвідношення у векторній формі:

$$\int_{\Omega} \phi \nabla \phi dx dy = - \int_{\Omega} \phi \nabla \phi dx dy + \int_{\Gamma} \phi \mathbf{n} d\Gamma. \quad (8)$$

У тривимірному випадку розглянемо формулу інтегрування частинами (1) уздовж осі Z (рис. 1, в), використавши сегмент у вигляді тонкого шару вздовж осі Z . Згідно з логікою виведення, використаною для двовимірного випадку, отримаємо співвідношення, формально тотожне (8):

$$\int_{\Omega} \phi \nabla \phi dx dy dz = - \int_{\Omega} \phi \nabla \phi dx dy dz + \int_{\Gamma} \phi \mathbf{n} d\Gamma. \quad (9)$$

На відміну від (8) в останньому співвідношенні область Ω є тривимірною, а межа Γ – двовимірною. Співвідношенням (8) і (9) можна надати загального вигляду

$$\int_{\Omega} \phi \nabla \phi d\Omega = - \int_{\Omega} \phi \nabla \phi d\Omega + \int_{\Gamma} \phi \mathbf{n} d\Gamma, \quad (10)$$

де $d\Omega = dx dy$ у двовимірному випадку, і $d\Omega = dx dy dz$ – у тривимірному.

Формула (10) є загальною формою інтегрування частинами, а (1) – її спеціальною формою в одновимірному випадку. У подальшому використаємо загальну форму для перетворення співвідношень незалежно від розмірності області Ω .

Використання (9) дає змогу інакше враховувати функції, потребуючи від них інших властивостей, наприклад, ступеня диференційовності. При цьому перетворенні крім інтеграла по області Ω з'являється ще й інтеграл по межі цієї області Γ .

Нагадаємо ще одну теорему з математичного аналізу. Припустимо, є дві функції $\varphi(x)$ і $\psi(x)$, причому $\varphi(x)$ – довільна. Доведемо її для одновимірному випадку, але це твердження є дійсним також для багатовимірному випадку.

Теорема: для того щоб інтеграл на заданому інтервалі (a,b) від добутку двох функцій φ і ψ , де ψ – довільна, дорівнював нулю, необхідно й достатньо, щоб на цьому інтервалі $\varphi \equiv 0$.

Припустимо, це не так, тобто $\varphi \neq 0$. Розглянемо як вільну ту саму функцію φ , тобто $\psi = \varphi$. Маємо

$$\int_a^b \varphi^2 dx = \int_a^b \varphi^2 dx > 0, \quad (11)$$

бо підінтегральний вираз є додатним. Суперечність доводить необхідність твердження.

З іншого боку, якщо $\varphi \equiv 0$, то

$$\int_a^b \varphi^2 dx = \int_a^b 0 dx \equiv 0, \quad (12)$$

що доводить достатність твердження.

2. ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ

Нехай функціонал Π задано у вигляді суми визначених інтегралів:

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} F(\varphi, \partial\varphi/\partial x, \dots) d\Omega + \int_{\Gamma} G(\varphi, \partial\varphi/\partial x, \dots) d\Gamma, \quad (13)$$

де F, G – складні функції від функції $\varphi(x, \dots)$ та її похідних $\partial\varphi/\partial x, \dots$; три крапки означають перелік аргументів. Перший інтеграл береться по (багатовимірній) області Ω , другий – по межі цієї області Γ .

Цей функціонал ставить у відповідність довільній функції $\varphi(x, \dots)$ деяке число і таким чином відображає множину функцій на множину дійсних чисел; довільна функція φ з її похідними в області Ω характеризується одним-єдиним числом, що робить можливим розрізняти функції за (числовими) значеннями функціонала.

Розглянемо множину допустимих функцій, тобто таких, що задовольняють граничним умовам першого і другого роду:

$$\begin{aligned} B_1(\varphi) &= 0 \text{ на } \Gamma_1, \\ B_2(\varphi) &= 0 \text{ на } \Gamma_2, \end{aligned} \quad (14)$$

де $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$, B_1 і B_2 – диференціальні оператори. Допустимі функції не обов'язково є шуканими.

Нехай функціонал має *стаціонарне значення*, що відповідає деякій функції φ . Це означає, що малі довільно-незалежні зміни функції δ (варіації функції) та її похідних не змінюють значення функціонала, тобто відповідна зміна (варіація) функціонала дорівнює нулю:

$$\begin{aligned} \delta \Pi(\varphi + \delta) - \Pi(\varphi) &= \int_{\Omega} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial F}{\partial (\partial \varphi / \partial x)} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \dots \right) d\Omega + \\ &+ \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial G}{\partial \varphi} \delta \varphi + \frac{\partial G}{\partial (\partial \varphi / \partial x)} \delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \dots \right) d\Gamma = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

де три крапки означають перелік частинних похідних.

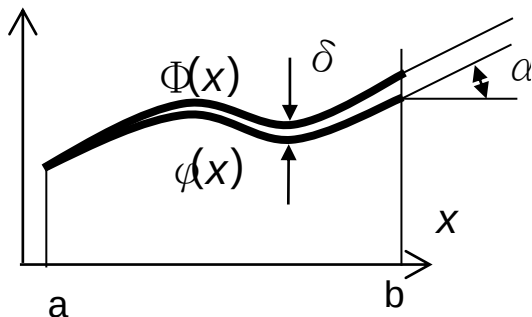


Рис. 3. Варіація функції

Варіація функції – це функція з малим значенням, різниця між деякою близькою $\Phi(x)$ і опорною функцією $\varphi(x)$ (рис. 3):

$$\delta \varphi = \Phi(x) - \varphi(x). \quad (16a)$$

Варіація першої похідної – різниця між похідними близької функції й опорної функції:

$$\delta \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} - \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x} = \frac{\partial (\Phi(x) - \varphi(x))}{\partial x} = \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x}. \quad (16б)$$

Для варіації похідної довільного порядку маємо

$$\delta \left(\frac{\partial^n \varphi}{\partial x^n} \right) = \frac{\partial^n \Phi(x)}{\partial x^n} - \frac{\partial^n \varphi(x)}{\partial x^n} = \frac{\partial^n (\Phi(x) - \varphi(x))}{\partial x^n} = \frac{\partial^n \delta \varphi}{\partial x^n}, \quad (16в)$$

тобто варіація похідної функції n -го порядку дорівнює n -й похідній від варіації функції.

Варіації функції та її похідних мають задовольняти граничним умовам (14), тобто дорівнювати нулю на межі, унаслідок чого інтеграл по межі в (15) дорівнює нулю і варіація функціонала зводиться за допомогою формул інтегрування частинами (10) до такого вигляду:

$$\delta \int_{\Omega} A(\varphi) \delta \varphi \, \Omega = 0, \quad (17)$$

де $A(\varphi)$ – складна функція від функції φ та її похідних.

В інтегралі по області (15) наявними є добутки функцій та їх похідних. В одновимірному випадку для зведення до вигляду (17) використовується правило інтегрування в частинах (1), у багатовимірному – формула (10).

Унаслідок довільності варіації δ для виконання умови (17) згідно з теоремою (11) – (12) необхідно й достатньо, щоб

$$A(\varphi) = 0 \text{ на } \Omega. \quad (18а)$$

Вираз (18) називається *рівнянням Ейлера* (або Ейлера – Лагранжа), яке відповідає варіаційному принципу (15), що встановлює стаціонарне значення функціонала (13) на множині допустимих функцій, тобто функцій, що задовольняють граничним умовам (14). Варіаційний принцип (15) називається *природним* для функції φ , яка є розв'язком диференціального рівняння (18а).

У разі, коли φ є функцією кількох змінних, рівняння Ейлера має вигляд *диференціального рівняння в частинних похідних*:

$$A(\varphi) = \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_{,k}} \right) - \frac{\partial F}{\partial \varphi} = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (18б)$$

де m – загальна кількість аргументів; $\varphi_{,k} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$ – частинна похідна функції за k -ю змінною.

У разі, коли $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)^T$ – вектор-функція декількох змінних, рівняння Ейлера також має векторний характер і являє собою *систему диференціальних рівнянь* такого вигляду:

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi_{i,k}} \right) - \frac{\partial F}{\partial \varphi_i} = 0, \quad k = 1, \dots, m, i = 1, \dots, n, \quad (18в)$$

де n – загальна кількість функцій; $\varphi_{i,k} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_k}$ – частинна похідна i -ї функції за k -ю змінною.

Для диференціальних рівнянь вигляду (18б) і (18в) варіаційний принцип (16) є *природним*, бо з існування стаціонарності функціонала (17) випливає це диференціальне рівняння. Таким чином, функція $\varphi(x)$ має два різних, але взаємозв'язаних шляхи визначення – через стаціонарність функціонала і через диференціальне рівняння.

Протилежне твердження є неправильним, бо не кожному диференціальному рівнянню відповідає варіаційний принцип (15).

Рівняння Ейлера відіграють значну роль, наприклад, в аналітичній механіці.

Розглянемо отримання рівнянь Ейлера на прикладах одно- та двовимірних задач.

Приклад 1. Нехай функціонал має такий вигляд:

$$\Pi = \int_1^2 (\varphi_x(x))^2 + (\varphi(x))^3 dx,$$

де $\varphi_x(x) = d\varphi(x)/dx$. Отримати відповідне рівняння Ейлера.

Варіація функціонала згідно з (15) має вигляд

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \delta \int_1^2 (\varphi_x(x))^2 + (\varphi(x))^3 dx = \int_1^2 (\delta (\varphi_x(x))^2 + \delta (\varphi(x))^3) dx = \\ &= \int_1^2 (2\varphi_x(x) \delta \varphi_x(x) + 3(\varphi(x))^2 \delta \varphi(x)) dx = \\ &= 2 \int_1^2 \varphi_x(x) \delta \varphi_x(x) dx + 3 \int_1^2 (\varphi(x))^2 \delta \varphi(x) dx. \end{aligned}$$

Перший інтеграл візьмемо частинами:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= 2 \varphi_x(x) \delta \varphi(x) \Big|_1^2 - 2 \int_1^2 \varphi_{xx}(x) \delta \varphi(x) dx + 3 \int_1^2 (\varphi(x))^2 \delta \varphi(x) dx = \\ &= 2 \varphi_x(x) \delta \varphi(x) \Big|_1^2 + \int_1^2 (-2 \varphi_{xx}(x) + 3(\varphi(x))^2) \delta \varphi(x) dx = \\ &= \int_1^2 (-2 \varphi_{xx}(x) + 3(\varphi(x))^2) \delta \varphi(x) dx = \int_1^2 (A(x) \delta \varphi(x)) dx, \end{aligned}$$

де $2 \varphi_X(x) \delta \varphi \Big|_1^2 = 0$, оскільки на межах варіація функції дорівнює нулю; $\varphi_{XX}(x)$ – друга похідна функції; $A(x) = -2 \varphi_{XX}(x) + 3(\varphi(x))^2$.

Рівняння Ейлера для цього функціонала має вигляд

$$A(x) = -2 \frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} + 3(\varphi(x))^2 = 0,$$

тобто вигляд звичайного диференціального нелінійного рівняння другого порядку.

Приклад 2. Нехай задано функціонал

$$\Pi = \int_0^{L_x} \left(\frac{T}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \frac{k}{2} \varphi^2 - w(x) \varphi \right) dx,$$

де T, k – сталі; $w(x)$ – відома функція. Отримати відповідне рівняння Ейлера.

Варіація функціонала згідно з (15) має такий вигляд:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \int_0^{L_x} \left[\left(\frac{T}{2} \right) \delta \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \left(\frac{k}{2} \right) \delta (\varphi^2) - w(x) \delta \varphi \right] dx = \\ &= \int_0^{L_x} T \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) (d \delta \varphi dx) dx + \int_0^{L_x} k \varphi \delta \varphi dx - \int_0^{L_x} w(x) \delta \varphi dx. \end{aligned}$$

Перший інтеграл візьмемо частинами:

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} T \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) (d \delta \varphi dx) dx &= T \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \delta \varphi \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} T \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \delta \varphi dx = \\ &= - \int_0^{L_x} T \varphi_{XX}(x) \delta \varphi dx, \end{aligned}$$

де $\left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \delta \varphi \Big|_0^{L_x} = 0$, оскільки на межах варіація функції дорівнює нулю; $\varphi_{XX}(x) = \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$ – друга похідна функції.

Тоді умова стаціонарності функціонала набере вигляду

$$\delta \Pi = \int_0^{L_x} \left[-T \varphi_{XX} + k \varphi - w(x) \right] \delta \varphi dx = \int_0^{L_x} A(\varphi) \delta \varphi dx = 0,$$

а рівняння Ейлера має вигляд

$$A(\varphi) = -T \varphi_{XX} + k \varphi - w(x) = 0.$$

У разі, коли множина допустимих функцій задовольняє граничній умові (14) (без явного вказування умови на межі Γ_2), умова стаціонарності функціонала загалом набирає такого вигляду:

$$\delta \int_{\Omega} A(\varphi) \delta \varphi \, d\Omega + \int_{\Gamma_2} B_2(\varphi) \delta \varphi \, d\Gamma = 0, \quad (19)$$

а для виконання умови необхідно й достатньо, щоб

$$\begin{aligned} A(\varphi) &= 0 \text{ на } \Omega, \\ B_2(\varphi) &= 0 \text{ на } \Gamma_2. \end{aligned} \quad (20)$$

Гранична умова на Γ_2 у цьому випадку називається *природною граничною умовою стаціонарності функціонала*.

Приклад 3. Нехай задано функціонал

$$\Pi(\varphi) = \int_0^{L_x} \left(\frac{T}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + w(x) \varphi \right) dx,$$

де T – константа; $w(x)$ – відома функція. На множину допустимих функцій накладено граничні умови $\varphi = 0$ при $x = 0$ і $x = L_x$.

Знайти функцію, що забезпечує стаціонарність функціонала.

Варіація функціонала, що пов'язана з варіацією функції δ , має вигляд

$$\delta \Pi = \int_0^{L_x} \left(T \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \delta \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) + w(x) \delta \varphi \right) dx.$$

З урахуванням (16б) після інтегрування частинами першого доданка в підінтегральному виразі отримаємо

$$\delta \Pi = T \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \delta \varphi \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \left(T \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) - w(x) \right) \delta \varphi \, dx = T \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \delta \varphi \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} [A(x)] \delta \varphi \, dx.$$

З урахуванням граничних умов $\delta \varphi = 0$ при $x = 0$ і $x = L_x$ перша складова має дорівнювати нулю і умовою стаціонарності функціонала буде

$$A(x) = T \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - w(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x.$$

Отриманий вираз є рівнянням Ейлера для розглянутого варіаційного принципу. Цей вираз відомий як диференціальне рівняння переміщень нерозтяжної нитки під дією поперечної сили $w(x)$ і натягу T . Повна механічна енергія такої системи дорівнює потенціальній енергії і складається з роботи поздовжніх сил U та роботи поперечних сил V , що визначаються виразами

$$U = \int_0^{L_x} \frac{T}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx, \quad V = \int_0^{L_x} w(x) \varphi dx,$$

отже,

$$\Pi = U + V.$$

На рис. 4 показано сили, прикладені до елемента нитки, які здійснюють роботу при її деформації. Постійна поперечна сила $w dx$ визначає роботу на переміщенні φ , а (постійні) горизонтальні сили T утворюють пару з моментом $T dx$, що визначає роботу при повороті φ_x .

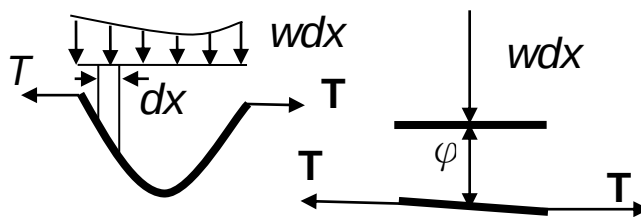


Рис. 4. Схеми нитки з прикладеними зовнішніми (зліва) і внутрішніми (справа) силами

У цьому випадку функціонал Π має сенс роботи внутрішніх сил системи (потенціальної енергії) на відповідних переміщеннях, а стаціонарність функціонала визначає функцію, що забезпечує мінімум цього функціонала.

Якщо виконуються тільки умови на лівій межі $\delta \neq 0$ при $x = 0$, то умова стаціонарності функціонала набирає вигляду

$$\delta \Pi = T \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) \delta \Big|_{x=L_x} - \int_0^{L_x} [A(\varphi)] \delta \varphi dx.$$

Відповідно до (19) умова стаціонарності виконується, якщо

$$A(\varphi) = T \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - w(x) = 0, \quad 0 \leq x \leq L_x \text{ і}$$

$$\frac{d\varphi}{dx} \Big|_{x=L_x} = 0.$$

Перше рівняння є рівнянням Ейлера, а друге – природною крайовою умовою для цієї задачі.

Приклад 4. Розглянемо двовимірну задачу з функціоналом

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - Q \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} \varphi d\Gamma,$$

де $k = k(x, y)$, $Q = Q(x, y)$ – відомі функції двох аргументів, гранична крива $\Gamma = \Gamma_{\varphi} + \Gamma_q$ складається з двох сегментів, причому на Γ_{φ}

задано граничні умови першого роду, тобто $\varphi = \bar{\varphi}$ на Γ_φ , на Γ_q діє потік $\bar{q}$. Отримати відповідне рівняння Ейлера й граничну умову на Γ_q .

Варіація функціонала має вигляд

$$\delta I \equiv \int_{\Omega} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial x} + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \delta \varphi}{\partial y} - Q \delta \varphi \right) d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} \delta \varphi d\Gamma.$$

Використаємо правило заміни при інтегруванні (10) та отримаємо варіацію:

$$\delta I \equiv \int_{\Gamma_\varphi + \Gamma_q} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} \delta \varphi d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial k \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial k \varphi}{\partial y} \right) + Q \right) \delta \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_q} \bar{q} \delta \varphi d\Gamma.$$

Оскільки φ – допустима функція, що задовольняє граничні умови, то $\delta \varphi = 0$ на Γ_φ . Тоді $\int_{\Gamma_\varphi} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} \delta \varphi d\Gamma = 0$, та

$$\delta I \equiv \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial k \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial k \varphi}{\partial y} \right) + Q \right) \delta \varphi d\Omega + \int_{\Gamma_q} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \bar{q} \right) \delta \varphi d\Gamma.$$

Для того, щоб варіація функціонала дорівнювала нулю або функціонал мав стаціонарне значення, потрібно, щоб множники в першому й другому інтегралах дорівнювали нулю:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial k \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial k \varphi}{\partial y} \right) + Q = 0 \text{ на } \Omega,$$

$$k \frac{\partial \varphi}{\partial n} + \bar{q} = 0 \text{ на } \Gamma_q.$$

Перша умова стаціонарності є рівнянням Ейлера у вигляді диференціального рівняння, друга – природною граничною умовою для цього диференціального рівняння.

Диференціальне рівняння, наприклад, описує розподіл температур, а друга умова – це гранична умова другого роду для цього рівняння; разом з граничною умовою першого роду ці три умови стаціонарності функціонала є двовимірною задачею теплопровідності.

Приклад 5. Нехай задано функціонал

$$I(\varphi) = \int_0^{L_x} \left(\frac{T}{2} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \frac{k}{2} \varphi^2 - w(x) \varphi \right) dx,$$

де T і k – константи. Знайти рівняння Ейлера, а також головні і природні крайові умови при $x = 0$ і $x = L_x$. Показати, що функціонал являє собою потенціальну енергію системи.

Побудуємо варіацію функціонала:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi &= \int_0^{L_x} \left(T \frac{d\varphi}{dx} \delta \left(\frac{d\varphi}{dx} \right) + k \varphi \delta \varphi - w(x) \delta \varphi \right) dx = \\
&= \int_0^{L_x} \left(T \frac{d\varphi}{dx} \left(\frac{d\delta\varphi}{dx} \right) + k \varphi \delta \varphi - w(x) \delta \varphi \right) dx = \\
&= T \frac{d\varphi}{dx} \delta \varphi \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \left(T \frac{d^2\varphi}{dx^2} - k \varphi + w(x) \right) \delta \varphi dx.
\end{aligned}$$

Нехай на лівій межі $x = 0$ виконується умова першого роду, тоді умова стаціонарності функціонала має вигляд

$$\delta \Pi = T \frac{d\varphi}{dx} \delta \varphi \Big|_{L_x}^{L_x} - \int_0^{L_x} \left(T \frac{d^2\varphi}{dx^2} - k \varphi + w(x) \right) \delta \varphi dx = 0.$$

Рівняння Ейлера й природна гранична умова мають вигляд

$$T \frac{d^2\varphi}{dx^2} - k \varphi + w(x) \text{ на } \Omega$$

і

$$\frac{d\varphi}{dx} \Big|_{L_x} = 0$$

відповідно. Рівняння Ейлера описує малі відхилення навантаженого троса, що спирається на пружну основу з жорсткістю k .

Зазначимо, що вираз

$$W = \int_0^{L_x} \frac{k}{2} \varphi^2 dx$$

відіграє роль роботи сил опору пружної основи на поперечних переміщеннях троса, яка запасується системою у вигляді складової потенціальної енергії деформації, дві інші – робота сил натягу і сил поперечної дії (див. прикл. 3). Повна потенціальна енергія збігається з формою функціонала

$$\Pi = U + V + W.$$

Приклад 6. Нехай задано функціонал

$$\Pi(\varphi) = \int_0^{L_x} \left(\frac{EI}{2} \left(\frac{d^2\varphi}{dx^2} \right)^2 - w(x) \varphi \right) dx,$$

де EI – жорсткість балки на згин, що залежить тільки від x . Знайти рівняння Ейлера, а також головні й природні крайові умови при $x = 0$ і $x = L_x$.

Побудуємо варіацію функціонала:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi &= \int_0^{L_x} \left(EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \delta \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) - w(x) \delta \varphi \right) dx = \int_0^{L_x} \left(EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \frac{d^2 \delta \varphi}{dx^2} - w(x) \delta \varphi \right) dx = \\
&= EI \left. \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \delta \left(\frac{d \varphi}{dx} \right) \right|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \left(\frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \delta \frac{d \varphi}{dx} + w(x) \delta \varphi \right) dx = \\
&= EI \left. \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \delta \left(\frac{d \varphi}{dx} \right) \right|_0^{L_x} - \left. \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \delta \varphi \right|_0^{L_x} + \int_0^{L_x} \left(\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) - w(x) \right) \delta \varphi dx.
\end{aligned}$$

Рівняння Ейлера має вигляд

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) - w(x) = 0 \text{ на } \Omega$$

і, очевидно, збігається з рівнянням пружної лінії зігнутої балки, що описує малі відхилення навантаженої балки при згинанні.

Природні крайові умови:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \delta \left(\frac{d \varphi}{dx} \right) \right|_0 &= 0, \\
\left. \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \delta \left(\frac{d \varphi}{dx} \right) \right|_{L_x} &= 0, \\
\left. \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \delta \varphi \right|_0 &= 0, \\
\left. \frac{d}{dx} \left(EI \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \delta \varphi \right|_{L_x} &= 0.
\end{aligned}$$

Ці умови означають, що мають бути задані кут повороту перерізу на лівій і правій межах, а також переміщення на лівій і правій межах відповідно.

Приклад 7. Розглянемо двовимірну задачу з функціоналом

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \left(\frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - Q \varphi \right) d\Omega - \int_{\Gamma_q} \left(\frac{\alpha}{2} \varphi^2 - \bar{q} \varphi \right) d\Gamma,$$

де функції Q , k , α і $\bar{q}$ залежать тільки від x і y , а межа складається з двох сегментів: $\Gamma = \Gamma_q + \Gamma_\varphi$. Множина допустимих функцій складається з функцій, що задовольняють умову $\varphi = \bar{\varphi}$ на Γ_φ . Знайти рівняння Ейлера й природну крайову умову на Γ_q .

Варіація функціонала має вигляд

$$\delta I \equiv \int_{\Omega} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial y} - Q \delta \varphi \right) d\Omega - \int_{\Gamma_q} [\alpha \varphi - \bar{q}] \delta \varphi d\Gamma.$$

Застосуємо формулу (10) і перетворимо цей вираз:

$$\begin{aligned} \delta I \equiv & \int_{\Gamma + \Gamma_q} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} \delta \varphi d\Gamma - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + Q \right) \delta \varphi d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_q} [-\alpha \varphi + \bar{q}] \delta \varphi d\Gamma = - \int_{\Omega} \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + Q \right) \delta \varphi d\Omega + \\ & + \int_{\Gamma_q} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \alpha \varphi + \bar{q} \right) \delta \varphi d\Gamma. \end{aligned}$$

Очевидно, що рівняння Ейлера

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + Q = 0 \text{ на } \Omega$$

є рівнянням теплопровідності, а природна крайова умова

$$k \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \alpha \varphi + \bar{q} = 0 \text{ на } \Gamma_q$$

визначає одночасно вплив заданого зовнішнього $\bar{q}$ і конвективного α теплового потоку.

3. КОНСТРУЮВАННЯ ПРИРОДНИХ ВАРІАЦІЙНИХ ПРИНЦИПІВ

3.1. Симетричний оператор

У попередньому розділі показано, що з умови стаціонарності для заданого функціонала *завжди* можна отримати відповідне диференціальне рівняння Ейлера.

Розглянемо зворотний напрямок аналізу, тобто пошук функціонала і варіаційного формулювання для заданого (лінійного) диференціального рівняння, яке можна подати формально у вигляді

$$A(\varphi) = \mathcal{L}\varphi + p = 0 \text{ на } \Omega, \quad (21)$$

де $\mathcal{L}$ – лінійний диференціальний оператор; p – відома функція. Шукана функція φ є такою, що після перетворення внаслідок дії оператора дорівнює відомій функції. Нехай шукана функція підпорядковується крайовій умові загального вигляду

$$\mathcal{M}\varphi + r = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (22)$$

де $\mathcal{M}$ – лінійний оператор нижчого порядку, ніж $\mathcal{L}$, а r – відома функція.

Розглянемо, крім того, множину функцій $\mathcal{C}$, що задовольняють однорідну умову

$$\mathcal{M}\theta = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (23)$$

Будемо називати оператор *симетричним* відносно функцій цієї множини, якщо

$$\int_{\Omega} \theta_1 \mathcal{L} \theta_2 d\Omega = \int_{\Omega} \theta_2 \mathcal{L} \theta_1 d\Omega, \quad (24)$$

де θ_1, θ_2 – дві будь-які функції з цієї множини.

Будемо називати оператор *додатно визначеним* відносно функцій цієї множини, якщо для будь-якої функції виконується умова

$$\int_{\Omega} \theta \mathcal{L} \theta d\Omega \geq 0, \quad (25)$$

причому рівність нулю настає тільки в разі, коли функція – тотожна нулю.

Приклад 8. Розглянемо оператор $\mathcal{L} = -d^2/dx^2$ на відрізку $0 \leq x \leq L_x$ над множиною функцій $\mathcal{C}$, що перетворюються в нуль на межах інтервалу (при $x=0$ і $x=L_x$). Для двох таких функцій, використовуючи формулу інтегрування частинами (1), отримаємо

$$\int_0^{L_x} \left(-\theta_1 \frac{d^2 \theta_2}{dx^2} \right) dx = \left\langle -\theta_1 \frac{d \theta_2}{dx} \right\rangle \Big|_0^{L_x} + \int_0^{L_x} \frac{d \theta_1}{dx} \frac{d \theta_2}{dx} dx =$$

$$= \left\langle \theta_2 \frac{d\theta_1}{dx} \right\rangle \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \theta_2 \frac{d^2\theta_1}{dx^2} dx = \int_0^{L_x} \left(-\theta_2 \frac{d^2\theta_1}{dx^2} \right) dx.$$

Вирази в кутових дужках дорівнюють нулю згідно з граничними умовами, що накладаються на функції. Очевидно, що оператор має симетрію.

Уважаючи функції однаковими ($\theta_1 = \theta_2 = \theta$), з попередніх співвідношень отримаємо вираз

$$\int_0^{L_x} \left(-\theta \frac{d^2\theta}{dx^2} \right) dx = \int_0^{L_x} \frac{d\theta}{dx} \frac{d\theta}{dx} dx = \int_0^{L_x} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \geq 0,$$

оскільки інтеграл від додатної функції $(d\theta/dx)^2$ є більшим від нуля і буде дорівнювати нулю, тільки якщо $\theta \equiv 0$ на відрізку $0 \leq x \leq L_x$, тому що $\theta = 0$ на межах інтервалу і $d\theta/dx \equiv 0$, тобто функція має постійне значення на інтервалі. Отже, розглянутий оператор є додатно визначеним.

Приклад 9. Розглянемо оператор $\mathcal{L} = -d^2/dx^2$ на відрізку $0 \leq x \leq L_x$ на множині функцій, що на межах інтервалу задовольняють умови $d\varphi/dx + a\varphi = 0$ при $x = 0$ і $d\varphi/dx + b\varphi = 0$ при $x = L_x$, де a, b – константи, такі, що $a < 0, b > 0$. Довести, що оператор є симетричним і додатно визначеним.

Для двох таких функцій, використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} \left(-\varphi_1 \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} \right) dx &= \left\langle -\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx} \right\rangle \Big|_0^{L_x} + \int_0^{L_x} \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d\varphi_2}{dx} dx = \\ &= \left\langle -\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx} \right\rangle \Big|_0^{L_x} + \left\langle \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} \right\rangle \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \varphi_2 \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} dx = \\ &= \left\langle -\varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx} + \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} \right\rangle \Big|_{L_x} - \left\langle \varphi_1 \frac{d\varphi_2}{dx} + \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} \right\rangle \Big|_0 + \int_0^{L_x} \left(-\varphi_2 \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} \right) dx = \\ &= \left\langle \varphi_1 b \varphi_2 + \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} \right\rangle \Big|_{L_x} - \left\langle \varphi_1 a \varphi_2 + \varphi_2 \frac{d\varphi_1}{dx} \right\rangle \Big|_0 + \int_0^{L_x} \left(-\varphi_2 \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} \right) dx = \\ &= \varphi_2 \left\langle \varphi_1 b + \frac{d\varphi_1}{dx} \right\rangle \Big|_{L_x} - \varphi_2 \left\langle \varphi_1 a + \frac{d\varphi_1}{dx} \right\rangle \Big|_0 + \int_0^{L_x} \left(-\varphi_1 \frac{d^2\varphi_2}{dx^2} \right) dx = \\ &= \int_0^{L_x} \left(-\varphi_2 \frac{d^2\varphi_1}{dx^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Вирази в кутових дужках дорівнюють нулю завдяки граничним умовам, накладеним на функції. Очевидно, що оператор має симетрію.

Уважаючи функції рівними, з попередніх співвідношень отримаємо вираз

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} \left(-\varphi \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) dx &= \left(-\varphi \frac{d\varphi}{dx} \right) \Big|_0^{L_x} + \int_0^{L_x} \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} dx = \\ &= -\varphi \frac{d\varphi}{dx} \Big|_{L_x} + \varphi \frac{d\varphi}{dx} \Big|_0 + \int_0^{L_x} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx = \varphi^2 b \Big|_{L_x} - \varphi^2 a \Big|_0 + \int_0^{L_x} \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 dx \geq 0, \end{aligned}$$

оскільки інтеграл від додатної функції є не меншим від нуля та $a < 0, b > 0$. Інтеграл дорівнює нулю, якщо одночасно $\varphi = 0$ на межах інтервалу й перша похідна дорівнює нулю всюди, тобто $\varphi \equiv 0$ на відрізку $0 \leq x \leq L_x$.

Отже, розглянутий оператор є додатно визначеним.

3.2. Варіаційний принцип для симетричних операторів

Нехай $\mathcal{L}$ – симетричний лінійний оператор на множині функцій ϕ , які відповідають *однорідній* крайовій умові (23), а ϕ – деяка функція, для якої виконується *неоднорідна* крайова умова (22). Доведемо таке твердження: функціонал

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi - \phi) + \mathcal{L}\phi + p \right\} d\Omega \quad (26)$$

набуває стаціонарного значення відносно варіацій $\delta \varphi$, що задовольняють *неоднорідну* крайову умову (22), і є розв'язком диференціального рівняння (21).

Зазначимо, що кожна з функцій φ, ϕ задовольняє *неоднорідну* крайову умову (22), а різниця $\varphi - \phi$ задовольняє *однорідну* крайову умову (23), отже,

$$(\mathcal{M}\varphi + r) - (\mathcal{M}\phi + r) = \mathcal{M}(\varphi - \phi) = 0.$$

Оскільки оператор $\mathcal{L}$ лінійний, то варіація функціонала (26) має вигляд

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \left\{ \delta \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi - \phi) + \mathcal{L}\phi + p \right\} + \frac{1}{2} (\varphi - \phi) \mathcal{L} \delta \varphi \right\} d\Omega. \quad (27)$$

Унаслідок симетричності оператора на множині функцій, що задовольняють крайову умову (23), маємо

$$\int_{\Omega} (\varphi - \phi) \mathcal{L} \delta \varphi d\Omega = \int_{\Omega} \delta \varphi (\varphi - \phi) d\Omega. \quad (28)$$

Тоді варіація функціонала (27) з урахуванням (28) набере такого вигляду:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi &= \int_{\Omega} \left\{ \delta \left(\frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi - \phi) + \mathcal{L}\phi + p \right) + \frac{1}{2} (\varphi - \phi) \mathcal{L} \delta \right\} d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \left\{ \delta \left(\frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi - \phi) + \mathcal{L}\phi + p \right) + \delta \frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi - \phi) \right\} d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \{ \mathcal{L}(\varphi) + p \} d\Omega,
\end{aligned} \tag{29}$$

звідки для стаціонарності функціонала через довільність варіації функції отримаємо з (29) рівняння Ейлера

$$\mathcal{L}(\varphi) + p = 0 \text{ на } \Omega, \tag{30}$$

яке збігається з розглянутим диференціальним рівнянням (21).

Таким чином, показано, що диференціальному рівнянню (30) (або (21)) відповідає функціонал (26). Інакше кажучи, диференціальне рівняння (30) (або (21)) є рівнянням Ейлера для функціонала (26).

Покажемо, що в цьому випадку функціонал має *мінімум* у точці стаціонарності.

Розглянемо значення функціонала поблизу точки стаціонарності. Уважатимемо, що $\tilde{\varphi} = \varphi + \delta$. Тоді функціонал можна подати так:

$$\begin{aligned}
\Pi(\tilde{\varphi}) &= \int_{\Omega} \left\{ (\tilde{\varphi} - \phi) \frac{1}{2} \mathcal{L}((\tilde{\varphi} - \phi)) + \mathcal{L}\phi + p \right\} d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \left\{ (\varphi + \delta - \phi) \frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi + \delta - \phi) + \mathcal{L}\phi + p \right\} d\Omega = \\
&= \int_{\Omega} \left\{ (\varphi - \phi) \frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi - \phi) + \mathcal{L}\phi + p \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ (\varphi - \phi) \frac{1}{2} \mathcal{L}(\delta) \right\} d\Omega + \\
&\quad + \int_{\Omega} \left\{ \delta \frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi - \phi) + \mathcal{L}\phi + p \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \delta \frac{1}{2} \mathcal{L}(\delta) \right\} d\Omega
\end{aligned} \tag{31}$$

Другий інтеграл перетворимо відповідно до (28) та (30):

$$\begin{aligned}
\Pi(\tilde{\varphi}) &= \int_{\Omega} \left\{ (\varphi - \phi) \frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi - \phi) + \mathcal{L}\phi + p \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ (\delta) \frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi - \phi) \right\} d\Omega + \\
&\quad + \int_{\Omega} \left\{ \delta \frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi - \phi) + \mathcal{L}\phi + p \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \delta \frac{1}{2} \mathcal{L}(\delta) \right\} d\Omega = \\
&= \Pi(\varphi) + \int_{\Omega} \left\{ (\delta) \frac{1}{2} \mathcal{L}(\varphi - \phi) + \mathcal{L}\phi + p \right\} d\Omega = \\
&= \Pi(\varphi) + \int_{\Omega} \left\{ (\delta) \frac{1}{2} \mathcal{L}\phi + p \right\} d\Omega + \int_{\Omega} \left\{ \delta \frac{1}{2} \mathcal{L}(\delta) \right\} d\Omega = \\
&= \Pi(\varphi) + \int_{\Omega} \left\{ \delta \frac{1}{2} \mathcal{L}(\delta) \right\} d\Omega \geq \Pi(\varphi).
\end{aligned} \tag{32}$$

В останньому рядку враховано, що функціонал є додатно визначеним.

Іншими словами, будь-яка функція, відмінна від розв'язку (30), *збільшує значення функціонала* внаслідок додатності оператора. Тобто в точці стаціонарності функціонал має мінімум.

Розкриваючи дужки в (26), зведемо функціонал до вигляду

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} (\varphi \mathcal{L} \varphi - \varphi \mathcal{L} \varphi + \varphi \mathcal{L} \varphi) + p \varphi d\Omega + \Phi(\varphi), \quad (33)$$

де $\Phi(\varphi)$ – члени, що залежать *тільки* від відомої функції φ .

У багатьох випадках із застосуванням формули перетворення (10) можна виконати заміну (як це показано нижче на прикладах):

$$\int_{\Omega} (\varphi \mathcal{L} \varphi - \varphi \mathcal{L} \varphi) d\Omega = 2 \int_{\Gamma} N \varphi d\Gamma + \Phi_1(\varphi), \quad (34)$$

де N – деякий лінійний оператор; $\Phi_1(\varphi)$ – члени, що залежать тільки від φ . Тоді з урахуванням (33) і (34) розглянутий вище варіаційний принцип є еквівалентним вимозі, щоб при фіксованій функції φ новий функціонал

$$\Pi_1(\varphi) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} \varphi \mathcal{L} \varphi + p \varphi d\Omega + \int_{\Gamma} N \varphi d\Gamma \quad (35)$$

мав би стаціонарне значення на множині допустимих функцій, які задовольняють крайову умову (31). Цей варіаційний принцип формально відповідає (13) і *не потребує наявності функції* φ , що задовольняє ту саму крайову умову.

Приклад 10. Розглянемо задачу аналізу малих відхилень пружної струни із закріпленими кінцями. Рівняння стану струни має вигляд

$$T \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + w(x) = 0 \text{ при } 0 \leq x \leq L_x$$

з крайовими умовами $\varphi = 0$ при $x = 0$ і $x = L_x$, де φ – відхилення від стану рівноваги. Побудувати відповідний функціонал, що має стаціонарність на функції-розв'язку диференціального рівняння.

Раніше було показано, що диференціальний оператор $\mathcal{L} = -d^2/dx^2$ є додатно визначеним на множині допустимих функцій, отже, можна використовувати функціонал (26). Як функцію φ , що задовольняє крайові умови, можна вибрати $\varphi = 0$ при $0 \leq x \leq L_x$. При цих умовах функціонал має вигляд

$$\Pi(\varphi) = \int_0^{L_x} \left(-\frac{T}{2} \varphi \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - w \varphi \right) dx.$$

Інтегруючи частинами, отримаємо

$$\Pi(\varphi) = - \left\langle T \varphi \frac{d\varphi}{dx} \right\rangle \Big|_0^{L_x} + \int_0^{L_x} \left(T \left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 - w \varphi \right) dx.$$

З урахуванням граничних умов вираз у кутових дужках дорівнює нулю, і цей функціонал зводиться до вигляду

$$\Pi(\varphi) = \int_0^{Lx} (T(\frac{d\varphi}{dx})^2 - w\varphi) dx.$$

Приклад 11. Розглянемо двовимірне рівняння теплопровідності (див. прикл. 7). Розподіл температур описується диференціальним рівнянням у частинних похідних

$$\mathcal{L}\varphi + p = -(\frac{\partial}{\partial x}(k\frac{\partial\varphi}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(k\frac{\partial\varphi}{\partial y}) + Q) = 0 \text{ на } \Omega$$

з крайовими умовами на межі $\Gamma = \Gamma_q + \Gamma_\varphi$

$$k\frac{\partial\varphi}{\partial n} + \bar{q} = 0 \text{ на } \Gamma_q,$$

і

$$\varphi = \bar{\varphi} \text{ на } \Gamma_\varphi.$$

Тут $Q, k, \bar{q}, \bar{\varphi}$ – тепловиділення, коефіцієнт теплопровідності, зовнішній потік тепла та задана температура відповідно. Побудуємо відповідний функціонал, що має стаціонарність на розв'язку диференціального рівняння.

Диференціальний оператор $\mathcal{L}$ є симетричним і з урахуванням додатності коефіцієнта k додатно визначеним на множині функцій, що задовольняють однорідні крайові умови $\varphi = 0$ на Γ_φ і $k\partial\varphi/\partial n = 0$ на Γ_q (див. прикл. 8). Відповідно до (33) можна запропонувати відповідний функціонал, що має стаціонарність для функції, яка є розв'язком задачі:

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi) = & \int_{\Omega} -\frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial\varphi}{\partial x}) - \frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial\varphi}{\partial y}) - Q\varphi d\Omega + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \phi \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial\varphi}{\partial x}) + \phi \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial\varphi}{\partial y}) - \varphi \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial\phi}{\partial x}) - \varphi \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial\phi}{\partial y}) d\Omega, \end{aligned}$$

де ϕ – деяка довільна функція, яка задовольняє *неоднорідні крайові умови* $\phi = \bar{\varphi}$ на Γ_φ і $k\partial\phi/\partial n = \bar{q}$ на Γ_q . Другий інтеграл перетворимо за формулою (10):

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \phi \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial\varphi}{\partial x}) + \phi \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial\varphi}{\partial y}) - \varphi \frac{\partial}{\partial x} (k \frac{\partial\phi}{\partial x}) - \varphi \frac{\partial}{\partial y} (k \frac{\partial\phi}{\partial y}) d\Omega = \\ & = \int_{\Gamma} (\phi k \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi k \frac{\partial\phi}{\partial n}) d\Gamma + \int_{\Gamma_q} (\phi k \frac{\partial\varphi}{\partial n} - \varphi k \frac{\partial\phi}{\partial n}) d\Gamma. \end{aligned}$$

З урахуванням отриманого виразу і крайових умов перетворимо функціонал:

$$\begin{aligned}
\Pi(\varphi) &= \int_{\Omega} -\frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - Q \varphi) d\Omega + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varphi}} \left(\varphi k \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi k \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \left(\varphi k \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi k \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma = \\
&= \int_{\Omega} -\frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - Q \varphi) d\Omega + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varphi}} \left(\overline{\varphi} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \overline{\varphi} k \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} (-\varphi \overline{q} + \overline{\varphi} q) d\Gamma = \\
&= \int_{\Omega} -\frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \frac{\varphi}{2} \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - Q \varphi) d\Omega + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varphi}} \overline{\varphi} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \overline{\varphi} q d\Gamma + \Psi(\phi),
\end{aligned}$$

де $\Psi(\phi) = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varphi}} \overline{\varphi} k \frac{\partial \phi}{\partial n} d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \overline{\varphi} q d\Gamma$ – члени, які не залежать від φ .

Тепер застосуємо формулу (10) до першого інтеграла:

$$\begin{aligned}
\Pi(\varphi) &= \int_{\Omega} \left[-\left(\frac{\varphi}{2}\right) \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) - \left(\frac{\varphi}{2}\right) \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) - Q \varphi \right] d\Omega + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varphi}} \overline{\varphi} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \overline{\varphi} q d\Gamma + \Psi(\phi) = \\
&= \int_{\Omega} \left[\frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - Q \varphi \right] d\Omega - \int_{\Gamma} \left[\frac{\varphi}{2} k \frac{\partial \varphi}{\partial x} n_x + \frac{\varphi}{2} k \frac{\partial \varphi}{\partial y} n_y \right] d\Gamma + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varphi}} \overline{\varphi} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \overline{\varphi} q d\Gamma + \Psi(\phi) = \int_{\Omega} \left[\frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - Q \varphi \right] d\Omega - \\
&- \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \overline{\varphi} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varphi}} \overline{\varphi} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \overline{\varphi} q d\Gamma + \Psi(\phi) \neq \\
&= \int_{\Omega} \left[\frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - Q \varphi \right] d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varphi}} \overline{\varphi} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \overline{\varphi} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varphi}} \overline{\varphi} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \overline{\varphi} q d\Gamma + \Psi(\phi) \neq \int_{\Omega} \left[\frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - Q \varphi \right] d\Omega - \\
&- \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varphi}} \overline{\varphi} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \overline{\varphi} k q d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{\varphi}} \overline{\varphi} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_q} \overline{\varphi} k q d\Gamma + \Psi(\phi) \neq
\end{aligned}$$

$$= \int_{\Omega} \left(\frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - Q \varphi \right) d\Omega + \int_{\Gamma_q} k \bar{q} d\Gamma + \Psi(\varphi).$$

Приклад 12. Розглянемо балку завдовжки L_x з защемленими кінцями, на яку діє розподілене поперечне навантаження інтенсивністю $w(x)$, нехтуючи вагою. Позначимо $R = EI$ – жорсткість балки на згин, яка є функцією координати. Тоді прогин балки задовольняє рівнянню пружної лінії балки

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(R(x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) = w(x)$$

з граничними умовами

$$\varphi = 0, \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ та } x = L_x.$$

Покажемо, що φ мінімізує функціонал

$$\Pi(x) = \int_0^{L_x} \left(R(x) \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 - 2w(x) \varphi \right) dx$$

на множині допустимих функцій, тобто таких, що задовольняють записані граничні умови.

Покажемо, що оператор задачі є симетричним, за допомогою правила інтегрування частинами (1). Як і раніше (див. (24), прикл. 8 і 9), розглянемо дві функції

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} \varphi_1 \frac{d^2}{dx^2} \left(R \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} \right) dx &= \varphi_1 \frac{d}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} \right) \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \frac{d\varphi_1}{dx} \frac{d}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} \right) dx = \\ &= \varphi_1 \frac{d}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} \right) \Big|_0^{L_x} - \frac{d\varphi_1}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} \right) \Big|_0^{L_x} + \int_0^{L_x} \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} \left(R \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} \right) dx = \\ &= \varphi_1 \frac{d}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} \right) \Big|_0^{L_x} - \frac{d\varphi_1}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi_2}{dx^2} \right) \Big|_0^{L_x} + \frac{d\varphi_2}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} \right) \Big|_0^{L_x} - \\ &- \varphi_2 \frac{d}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} \right) \Big|_0^{L_x} + \int_0^{L_x} \varphi_2 \frac{d^2}{dx^2} \left(R \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} \right) dx = \int_0^{L_x} \varphi_2 \frac{d^2}{dx^2} \left(R \frac{d^2 \varphi_1}{dx^2} \right) dx, \end{aligned}$$

оскільки всі інші вирази дорівнюють нулю відповідно до крайових умов. Очевидно, оператор відповідає умові симетрії.

Оскільки оператор є симетричним, то функціонал є додатно визначеним (див. прикл. 8) і відповідно до (33) існує еквівалентний функціонал

$$\Pi_1(\varphi) = \int_0^{L_x} \left(\frac{1}{2} \left(\varphi \frac{d^2}{dx^2} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) - \varphi \frac{d^2}{dx^2} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) + \varphi \frac{d^2}{dx^2} \left(R \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) \right) - w \varphi \right) dx,$$

де ϕ – деяка функція, яка задовольняє зазначені граничні умови.

Перетворимо останній вираз, використовуючи формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \Pi_1(\varphi) = & \frac{1}{2} \varphi \frac{d}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \Big|_0^{L_x} - \frac{1}{2} \phi \frac{d}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \Big|_0^{L_x} + \frac{1}{2} \varphi \frac{d}{dx} \left(R \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) \Big|_0^{L_x} - \\ & - \int_0^{L_x} \left(\frac{1}{2} \frac{d \varphi}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) - \frac{d \phi}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) + \frac{d \varphi}{dx} \left(R \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) \right) + w \varphi \Big) dx \end{aligned}$$

Перші три складові дорівнюють нулю згідно з крайовими умовами. Перетворимо далі інтеграл, використовуючи формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} \Pi_1(\varphi) = & -\frac{1}{2} \frac{d \varphi}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \Big|_0^{L_x} + \frac{1}{2} \frac{d \phi}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \Big|_0^{L_x} - \frac{1}{2} \frac{d \varphi}{dx} \left(R \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) \Big|_0^{L_x} + \\ & + \int_0^{L_x} \left(\frac{1}{2} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) - \frac{d^2 \phi}{dx^2} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) + \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \left(R \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) \right) - w \varphi \Big) dx. \end{aligned}$$

Знову перші три складові дорівнюють нулю згідно з крайовими умовами, друга і третя складові під знаком інтеграла – протилежні. З урахуванням цих зауважень отримаємо шуканий вигляд функціонала:

$$\Pi(\varphi) = \Pi_1(\varphi) = \int_0^{L_x} \left(\frac{R}{2} \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 - w \varphi \right) dx.$$

Приклад 13. Розглянемо балку завдовжки L_x з одним затисненим та іншим вільним кінцями, що зазнає дії розподіленого поперечного навантаження інтенсивністю $w(x)$, нехтуючи силами ваги. Як і в попередньому прикладі, прогин балки задовольняє рівнянню пружної лінії

$$\frac{d^2}{dx^2} \left(R(x) \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) = w(x),$$

але з іншими граничними умовами

$$\begin{aligned} \varphi = 0, \quad \frac{d \varphi}{dx} = 0 \quad \text{при } x = 0, \\ \frac{d^2 \varphi}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^3 \varphi}{dx^3} = 0 \quad \text{при } x = L_x. \end{aligned}$$

Використовуємо результати прикл. 12. Функціонал спочатку має той же вигляд. Після першого перетворення функціонала за допомогою правила інтегрування частинами перші три складові також дорівнюють нулю внаслідок крайових умов. Слід ураховувати, що на верхній межі

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \varphi \frac{d}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \Big|_0^{Lx} &= \frac{1}{2} \varphi \frac{d}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \Big|^{Lx} - \frac{1}{2} \varphi \frac{d}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \Big|_0 = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{dR}{dx} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + R \frac{d^3 \varphi}{dx^3} \right) \Big|^{Lx} - \frac{1}{2} \varphi \frac{d}{dx} \left(R \frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right) \Big|_0 = 0. \end{aligned}$$

Повторне застосування формули інтегрування частинами також дає вираз, складові якого дорівнюють нулю, унаслідок чого отримуємо той же вигляд функціонала

$$\Pi(\varphi) = \int_0^{Lx} \left(\frac{R}{2} \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} \right)^2 - w \varphi \right) dx.$$

Відмінність цього результату від попереднього полягає в тому, що функція φ задовольняє *інші* крайові умови при $x = Lx$.

4. МЕТОД РЕЛЕЯ – РІТЦА

Використовуємо отримані в розд. 3 загальні результати для побудови методу наближених розв'язків диференціального рівняння (21) з лінійними граничними умовами загального вигляду (22). Уважаємо, що диференціальний оператор $\mathcal{L}$ є симетричним відносно функцій, що відповідають однорідним крайовим умовам (23). Цей метод вперше був використаний Релеєм, а потім узагальнений Рітцем.

Визначимо деяку функцію ϕ , що задовольняє крайові умови

$$\mathcal{M}\phi + r = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (36)$$

і виберемо систему лінійно незалежних базисних функцій $\{N_m, m = 1, 2, \dots\}$, таких, що

$$\mathcal{M}N_m = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (37)$$

Апроксимацію розв'язку диференціального рівняння візьмемо у вигляді лінійної комбінації базисних функцій, яку можна також подати як обмежений ряд

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \phi + \sum_{m=1}^M a_m N_m, \quad (38)$$

де $a_m, m = 1, \dots, M$ – коефіцієнти апроксимації, які потрібно знайти; M – загальна кількість базисних функцій і коефіцієнтів. При цьому крайові умови (36) виконуються для будь-яких значень коефіцієнтів $a_1, a_2, \dots, a_M$.

Суть методу Релея – Рітца полягає у визначенні коефіцієнтів $a_1, a_2, \dots, a_M$, що забезпечують стаціонарне значення функціонала

$$\Pi(\hat{\varphi}) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{2} \mathcal{L}(\hat{\varphi} - \phi) + \mathcal{L}\phi + p \right\} d\Omega. \quad (39)$$

Раніше показано (32), що $\Pi(\hat{\varphi}) \geq \Pi(\phi)$, тобто в стаціонарному стані функціонал має мінімальне значення. Відомо також, що для додатно визначеного оператора апроксимація (38) асимптотично прямує до функції φ у тому сенсі, що $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (\varphi - \hat{\varphi})^2 d\Omega = 0$.

Використовуючи подання апроксимації функції у вигляді (38), функціонал (39) можна звести до такого вигляду:

$$\begin{aligned} \Pi(\hat{\varphi}) &= \Phi(a_1, a_2, \dots, a_M) = \\ &= \int_{\Omega} \left\langle \left(\sum_{l=1}^M a_l N_l \right) \left(\frac{1}{2} \mathcal{L} \left(\sum_{m=1}^M a_m N_m \right) + \mathcal{L}\phi + p \right) \right\rangle d\Omega = \\ &= \sum_{l=1}^M \sum_{m=1}^M \left(\frac{a_l a_m}{2} \right) \int_{\Omega} N_l \mathcal{L} N_m d\Omega + \sum_{l=1}^M a_l \int_{\Omega} N_l (\mathcal{L}\phi + p) d\Omega \end{aligned} \quad (40)$$

Усі визначені інтеграли в (40) – деякі числа, тому вираз можна розглядати як *квадратичну форму* відносно коефіцієнтів апроксимації $a_1, a_2, \dots, a_M$. Стаціонарність функціонала, яка згідно з (32) відповідає мінімальності квадратичної форми, досягається, коли всі частинні похідні форми як функції коефіцієнтів дорівнюють нулю:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_l} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M. \quad (41)$$

Обчислимо похідні для функціонала (40), які визначають M виразів такого вигляду:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_l} = \sum_{m=1}^M a_m \int_{\Omega} N_l \mathcal{L} N_m d\Omega + \int_{\Omega} N_l (\mathcal{L} \phi + p) d\Omega = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M. \quad (42)$$

Сукупність співвідношень (42) можна розглядати як *систему лінійних алгебраїчних рівнянь* відносно множини коефіцієнтів апроксимації $a_1, a_2, \dots, a_M$, яка може набрати матрично-векторної форми

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f}, \quad (43)$$

де $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_M)^T$ – вектор (поки що) невідомих коефіцієнтів апроксимації; $\mathbf{K}$ – матриця системи; $\mathbf{f}$ – вектор правих частин з коефіцієнтами

$$K_{lm} = \int_{\Omega} N_l \mathcal{L} N_m d\Omega, \quad f_l = - \int_{\Omega} N_l (\mathcal{L} \phi + p) d\Omega \quad (44)$$

Очевидно, що матриця є симетричною, тобто $K_{lm} = K_{ml}$.

Зазначимо, що коефіцієнти (44) рівняння (43) для визначення коефіцієнтів апроксимації (38) *збігаються* з такими ж коефіцієнтами, отриманими для розв'язку тієї ж задачі наближеного розв'язання диференціального рівняння за *методом зважених відхилів* (МЗВ) у формі методу Гальоркіна, коли множина вагових функцій збігається з множиною базисних функцій $W_l = N_l$. Отже, апроксимації, що одержуються методами Релея – Рітца і МЗВ Гальоркіна для розв'язання диференціального рівняння (21) з граничними умовами (22), будуть тотожними, якщо оператор $\mathcal{L}$ є симетричним. Метод МЗВ Гальоркіна має більш широку область застосування, оскільки метод Релея – Рітца застосовується *тільки* тоді, коли існує варіаційна постановка задачі.

Приклад 14. Розглянемо розв'язання диференціального рівняння

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \varphi = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq L_x$$

з крайовими умовами

$$\varphi = 0 \text{ при } x = 0 \text{ та } \frac{d\varphi}{dx} = \bar{q} \text{ при } x = L_x.$$

Знайти розв'язок цього рівняння за методом Релея – Рітца.

Покажемо, що оператор $\mathcal{L} = -d^2/dx^2$ на відрізку $0 \leq x \leq L_x$ на множині функцій з крайовими умовами $\theta = 0$ при $x = 0$ та $\partial\theta/\partial x = 0$ при $x = L_x$ є симетричним та позитивно визначеним. Для двох таких функцій, використовуючи формулу інтегрування частинами, отримаємо

$$\begin{aligned} \int_0^{L_x} \left(-\theta_1 \frac{d^2 \theta_2}{dx^2} \right) dx &= \left\langle -\theta_1 \frac{d\theta_2}{dx} \right\rangle \Big|_0^{L_x} + \int_0^{L_x} \frac{d\theta_1}{dx} \frac{d\theta_2}{dx} dx = \\ &= \left\langle \theta_2 \frac{d\theta_1}{dx} \right\rangle \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \left(\theta_2 \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} \right) dx = \int_0^{L_x} \left(-\theta_2 \frac{d^2 \theta_1}{dx^2} \right) dx. \end{aligned}$$

Вирази в кутових дужках дорівнюють нулю відповідно до граничних умов, накладених на функції. Очевидно, оператор має симетрію.

Уважаючи функції однаковими, з попередніх співвідношень маємо

$$\int_0^{L_x} \left(-\theta \frac{d^2 \theta}{dx^2} \right) dx = \int_0^{L_x} \frac{d\theta}{dx} \frac{d\theta}{dx} dx = \int_0^{L_x} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 dx \geq 0,$$

оскільки інтеграл від додаткової функції є більшим від нуля і дорівнюватиме нулю тільки тоді, коли $\theta \equiv 0$ на відрізку $0 \leq x \leq L_x$, тому що $\theta = 0$ та $d\theta/dx = 0$ на межах інтервалу, тобто функція має постійне значення, що дорівнює нулю.

Отже, ця задача є еквівалентною визначенню функції, що задовольняє крайові умови задачі і мінімізує функціонал вигляду (33)

$$\Pi(\varphi) = \int_0^{L_x} \left(\varphi \left(-\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \varphi \right) + \phi \left(-\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \varphi \right) + \phi \left(-\frac{d^2 \phi}{dx^2} + \phi \right) \right) dx,$$

де ϕ – деяка функція, що задовольняє крайові умови задачі.

Використовуючи формулу інтегрування частинами, перетворимо функціонал:

$$\begin{aligned} \Pi(\varphi) &= \int_0^{L_x} \left(-\varphi \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \varphi^2 + \phi \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \varphi \frac{d^2 \phi}{dx^2} \right) dx = \\ &= -\left(\varphi \frac{d\varphi}{dx} - \phi \frac{d\varphi}{dx} + \phi \frac{d\phi}{dx} \right) \Big|_0^{L_x} - \int_0^{L_x} \left(-\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} - \varphi^2 + \frac{d\phi}{dx} \frac{d\varphi}{dx} - \frac{d\varphi}{dx} \frac{d\phi}{dx} \right) dx = \end{aligned}$$

$$= \int_0^{Lx} ((\frac{d\varphi}{dx})^2 + \varphi^2) dx - (\varphi \frac{d\varphi}{dx} - \phi \frac{d\varphi}{dx} + \varphi \frac{d\phi}{dx}) \Big|_{Lx} + (\varphi \frac{d\varepsilon}{dx} - \phi \frac{d\varphi}{dx} + \varphi \frac{d\phi}{dx}) \Big|_0.$$

Урахуємо крайові умови й отримаємо

$$\Pi(\varphi) = \int_0^{Lx} ((\frac{d\varphi}{dx})^2 + \varphi^2) dx - 2\varphi\bar{q} \Big|_{Lx} + \phi\bar{q} \Big|_{Lx}.$$

Останній доданок залежить тільки від ϕ і не змінюється при варіюванні φ , у зв'язку з чим умова стаціонарності цього функціонала збігається з такою ж умовою для еквівалентного функціонала

$$\Pi_1(\varphi) = \int_0^{Lx} ((\frac{d\varphi}{dx})^2 + \varphi^2) dx - 2\varphi\bar{q} \Big|_{Lx}.$$

Крайова умова на лівій межі є головною, а умова на правій межі – природною.

Побудуємо поліноміальну апроксимацію, що задовольняє крайову умову при $x = 0$, але не при $x = Lx$:

$$\hat{\varphi} = a_1x + a_2x^2 + \dots a_Mx^M = \sum_{m=1}^M a_mx^m.$$

Множину коефіцієнтів $a_1, a_2, \dots a_M$ визначимо за методом Релея – Рітца для мінімізації останнього функціонала $\Pi_1(\varphi)$.

Наприклад, при використанні *двохелементної апроксимації* маємо

$$\begin{aligned} \Pi_1(\varphi) &= \int_0^{Lx} ((\frac{d\varphi}{dx})^2 + \varphi^2) dx - 2\varphi\bar{q} \Big|_{Lx} = \\ &= \int_0^{Lx} ((a_1 + 2a_2x)^2 + (a_1x + a_2x^2)^2) dx - 2(a_1Lx + a_2Lx^2)\bar{q}. \end{aligned}$$

Умови стаціонарності функціонала є такими:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} &= 2 \int_0^{Lx} [(a_1 + 2a_2x) + x(a_1x + a_2x^2)] dx - 2Lx\bar{q} = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} &= 2 \int_0^{Lx} [2x(a_1 + 2a_2x) + x^2(a_1x + a_2x^2)] dx - 2Lx^2\bar{q} = 0. \end{aligned}$$

Після інтегрування і перетворень цей вираз можна звести до такого числового вигляду:

$$\frac{8}{6}a_1 + \frac{10}{8}a_2 = 2\bar{q},$$

$$\frac{10}{8}a_1 + \frac{46}{30}a_2 = 2\bar{q}.$$

Зазначимо, що отримана система рівнянь збігається з системою, отриманою за методом зважених відхилів у формі Гальоркіна. Розв'язок системи рівнянь при $\bar{q} = 20$ має вигляд $a_1 = 11,7579, a_2 = 3,4582$.

Нижче наведено порівняння двох-, трьох- і чотирьохелементних апроксимацій, а також точного аналітичного розв'язків варіаційного рівняння.

На рис. 5 показано графіки точної (ϕ_{an}) і наближених ($M = 2, 3, 4$) функцій, що забезпечують стаціонарність функціонала. У масштабі графіка криві практично збігаються. Отже, уже при двохелементній апроксимації наближений розв'язок має досить малу похибку.

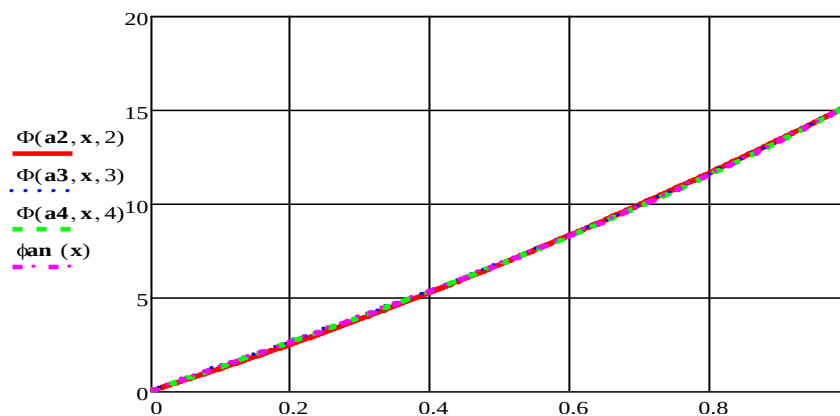


Рис. 5. Точний і наближені розв'язки

На рис. 6 зображено різниці наближених і точного розв'язків, які можна розглядати як *варіації функції* поблизу точки стаціонарності функціонала. Видно, що зі збільшенням кількості членів ряду в

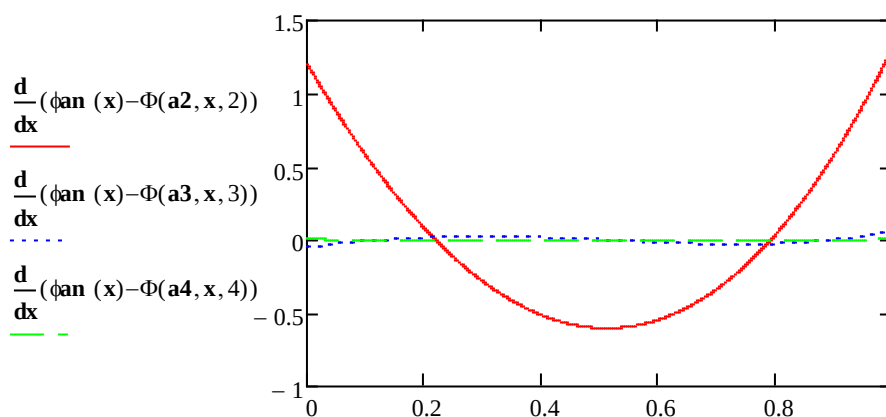


Рис. 6. Похибки наближених розв'язків

апроксимувальних виразах похибка інтенсивно зменшується; якщо при $M = 2$ відносна похибка становить близько 1 %, то вже при $M = 3$ – близько 0.02 %. Гранична умова на лівій межі задовольняється точно.

На рис. 7 зображено залежності похідних тих же функцій. Видно, що похідна функції-наближення при $M = 2$ значно відрізняється від точного значення. Але при $M = 3, 4$ похідні збігаються з точним розв'язком; граничні умови на правій межі задовольняються досить точно.

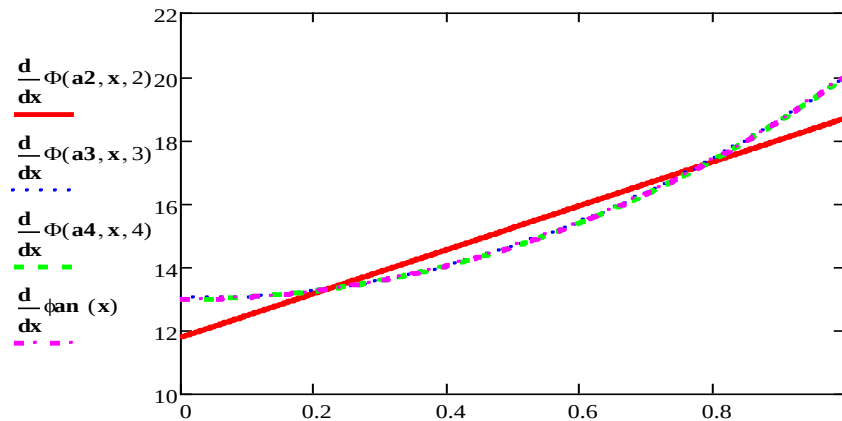


Рис. 7. Похідні точного й наближених розв'язків

На рис. 8 показано різниці похідних, тобто похибки похідних, які можна розглядати як похідні варіацій.

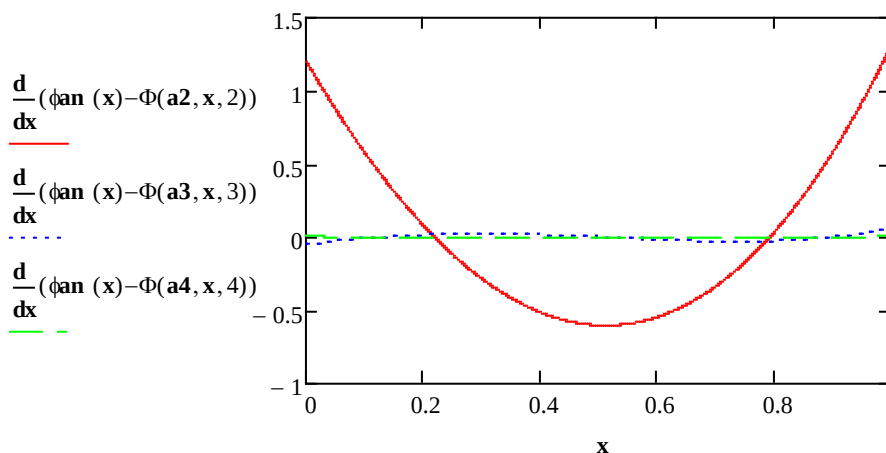


Рис. 8. Похибки похідних

Зі збільшенням кількості членів в апроксимувальних виразах точність похідної зростає; при $M = 2$ похибка становить 1,20, а при $M = 3$ похибка зменшується до 0,03. На цьому прикладі бачимо високу швидкість збіжності наближених розв'язків, а також їх похідних, одержаних за методом Релея – Рітца.

Зі збільшенням кількості доданків в апроксимації підвищується точність визначення функціонала в точці стаціонарності. При $M = 2$ функціонал дорівнює -304,323, при $M = 3$ – -304,637, при $M = 4$ – -304,638, тобто дорівнює точному аналітичному значенню. На рис. 9 показано залежність функціонала від коефіцієнтів a_1, a_2 у випадку

$M = 2$. Значення функціонала наближається до точного значення, як і передбачено теоретично, зверху.

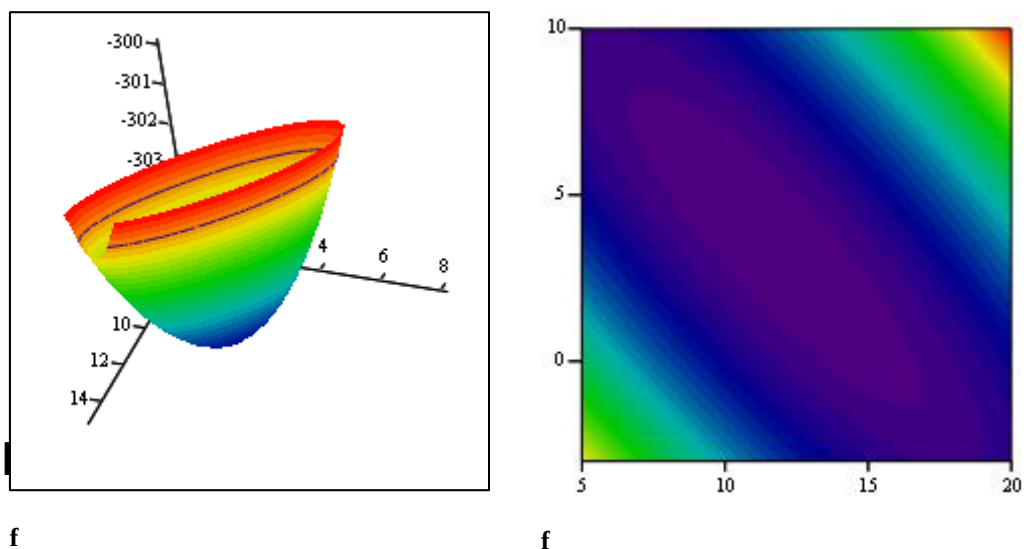


Рис. 9. Залежність функціонала поблизу точки стаціонарності

На лівому рисунку видно, що поверхня функціонала являє собою сильно стиснений параболічний еліпсоїд. На правому рисунку видно, що поблизу точки стаціонарності значення функціонала змінюється незначно.

5. МЕТОД МНОЖНИКІВ ЛАГРАНЖА

Раніше було розглянуто розв'язання задачі про визначення функції, що забезпечує стаціонарний стан деякого *лінійного* функціонала на множині *допустимих* функцій, тобто функцій, що задовольняють крайові умови загального вигляду.

Тепер розглянемо розв'язання такої ж задачі на множині функцій *загального вигляду* без обов'язкової відповідності крайовим умовам. При цьому будемо розглядати крайові умови як *додаткове обмеження*, що враховується за допомогою підходу, розвиненого Ж. Лагранжем.

Побудуємо *новий функціонал*

$$\Pi_1(\varphi, \lambda) = \Pi(\varphi) + \int_{\Gamma} \lambda (\mathcal{M}\varphi + r) d\Gamma, \quad (45)$$

де $\Pi(\varphi)$ – функціонал вигляду (26), λ – *множник Лагранжа* як деяка функція координат. Тоді перша варіація нового функціонала має вигляд

$$\delta \Pi_1(\varphi, \lambda) = \delta \Pi(\varphi) + \int_{\Gamma} \delta (\lambda (\mathcal{M}\varphi + r)) d\Gamma + \int_{\Gamma} \lambda \mathcal{M} \delta \varphi d\Gamma. \quad (46)$$

Якщо Π_1 набуває стаціонарного значення, тобто $\delta \Pi_1 = 0$ при всіх довільних варіаціях $\delta \varphi$, $\delta \lambda$, то має виконуватися умова

$$\mathcal{M}\varphi + r = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (47a)$$

що є еквівалентною умові

$$\mathcal{M} \delta \varphi \neq 0 \text{ на } \Gamma, \quad (47b)$$

отже, має виконуватися умова

$$\delta \Pi_1 = 0 \text{ на } \Omega. \quad (47v)$$

Умова (47v) є умовою стаціонарності початкового функціонала, для якого раніше показано, що умовою стаціонарності є рівняння Ейлера

$$\mathcal{L}\varphi + p = 0 \text{ на } \Omega. \quad (48)$$

Таким чином, функція φ , що забезпечує стаціонарне значення *нового функціонала* Π_1 , задовольняє диференціальному рівнянню (47v) і граничним умовам (47a) або (47b).

На відміну від функціонала Π , який розглядається на множині допустимих функцій, тобто таких, що заздалегідь задовольняють крайові умови, функціонал Π_1 розглядається на *розширеній множині* функцій φ, λ без будь-яких обмежень, а умова (47a) є природною внаслідок стаціонарності функціонала.

Аналогічно до розд. 4 побудуємо наближений розв'язок для стаціонарності функціонала Π_1 . Апроксимації функцій шукаємо в звичній формі:

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M a_m N_{m,1}, \quad \lambda \approx \hat{\lambda} = \sum_{m=1}^M b_m N_{m,2}, \quad (49)$$

де $\hat{\varphi}$ – функція, яка не має задовольняти крайові умови; $N_{m,1}, N_{m,2}$ – дві різні множини базисних функцій, а константи a_m, b_m визначаються з умови стаціонарності функціонала $\Pi_1(\hat{\varphi}, \hat{\lambda})$ на об'єднаній множині базисних функцій.

Підставивши апроксимації (49) у вираз для функціонала (45), отримаємо

$$\Pi_1(\hat{\varphi}, \hat{\lambda}) = \Phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \Pi(\hat{\varphi}) + \int_{\Gamma} \sum_{l=1}^M b_l N_{l,2} (\mathcal{M} \sum_{m=1}^M a_m N_{m,1} + r) d\Gamma, \quad (50)$$

де $\Phi(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ – функція коефіцієнтів апроксимації; $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ – вектори коефіцієнтів.

Для забезпечення стаціонарності функціонала необхідно, щоб

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_l} = \frac{\partial \Pi}{\partial a_l} + \int_{\Gamma} \sum_{m=1}^M b_m N_{m,2} \mathcal{M} N_{l,1} d\Gamma = 0, \quad (51a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial b_l} = \frac{\partial \Pi}{\partial b_l} + \int_{\Gamma} N_{l,2} (\mathcal{M} \sum_{m=1}^M a_m N_{m,1} + r) d\Gamma = 0. \quad (51b)$$

Перший доданок у (51a) визначається згідно з (43), (44). Систему співвідношень (51a), (51b) можна подати в матрично-векторній формі

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}_1 \\ \mathbf{K}_1^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{f}_1 \end{bmatrix}, \quad (52)$$

де коефіцієнти матриці й вектора правих частин мають такий вигляд:

$$[\mathbf{K}_1]_{lm} = \int_{\Gamma} N_{m,2} \mathcal{M} N_{l,1} d\Gamma, \quad [\mathbf{f}_1]_l = \int_{\Gamma} N_{l,2} d\Gamma. \quad (53)$$

Отримана система рівнянь має набагато більший розмір, ніж раніше за методом Релея – Рітца (44), крім того, матриця містить нульовий блок, що доцільно враховувати під час розроблення програм для розв'язання таких систем.

Зазначимо, що метод множників Лагранжа може використовуватися для врахування *інших додаткових умов і обмежень*, ніж задані крайові умови, а також для *перетворення* варіаційних принципів.

У деяких випадках множники Лагранжа мають не тільки формально математичне значення, але їх можна ототожнити з важливими фізичними величинами.

Приклад 15. Розглянемо двовимірну задачу стаціонарної теплопровідності (див. прикл. 7) з крайовими умовами

$$\varphi = \bar{\varphi} \text{ на } \Gamma.$$

Побудуємо на основі прикл. 7 функціонал з множниками Лагранжа

$$\Pi_1(\varphi, \lambda) = \int_{\Omega} \left[\frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - Q \varphi \right] d\Omega + \int_{\Gamma} [\lambda \varphi - \bar{\varphi}] d\Gamma, \quad (a)$$

який відповідно до попереднього набуває стаціонарного значення.

Візьмемо варіацію функціонала

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \left[k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial x} + k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial (\delta \varphi)}{\partial y} - Q \delta \varphi \right] d\Omega + \int_{\Gamma} [\lambda \delta \varphi - \delta \bar{\varphi}] d\Gamma + \int_{\Gamma} \delta \lambda \varphi d\Gamma$$

і застосуємо до неї формулу перетворення (10):

$$\begin{aligned} \delta \Pi = \int_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + Q \right] \delta \varphi d\Omega + \int_{\Gamma} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} \delta \varphi d\Gamma + \\ + \int_{\Gamma} \delta [\lambda \varphi - \bar{\varphi}] d\Gamma + \int_{\Gamma} \delta \lambda \varphi d\Gamma. \end{aligned}$$

Якщо функціонал набуває стаціонарного значення при всіх варіаціях $\delta \varphi$, то з цього випливають рівності

$$\varphi - \bar{\varphi} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (б)$$

$$\lambda + k \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \text{ на } \Gamma, \quad (в)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + Q = 0 \text{ на } \Omega. \quad (г)$$

Вирази (б) і (г) дають змогу стверджувати, що функція φ є шуканим розв'язком задачі, а вираз (в) визначає λ . Знаємо, що вираз $-k \partial \varphi / \partial n$ на межі визначає потік тепла, тому *можемо інтерпретувати* множник λ як потік тепла в цьому випадку.

Зазначимо, що умови (б) і (в) мають виконуватися одночасно на кожній ділянці межі. Щоб уникнути суперечності, необхідно *явно задавати* лише одну з них, тоді інша буде *визначатися розв'язком* диференціального рівняння.

Ці зауваження відкривають *спосіб перетворення* (переформулювання) варіаційних принципів, що полягає в явному відображенні альтернативної граничної умови, яка неявно була виражена через множник Лагранжа. У цьому випадку після заміни множника λ у формулюванні функціонала (а) на множник, що відповідає йому у виразі (б), отримаємо

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} \left[\frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 - Q \varphi \right] d\Omega - \int_{\Gamma} k \frac{\partial \varphi}{\partial n} [\varphi - \bar{\varphi}] d\Gamma. \quad (д)$$

Зауважимо:

- на функцію φ не накладається ніяких обмежень;
- при реалізації обчислень виходячи з функціонала (д) значно (удвічі порівняно з (в)) зменшується кількість шуканих коефіцієнтів

апроксимації, а отже, знижується обчислювальна трудомісткість і складність розв'язання.

Приклад 16. Розглянемо розв'язання диференціального рівняння

$$-\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \varphi = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq L_x$$

з крайовими умовами

$$\varphi = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{і} \quad \varphi = \bar{\varphi} \quad \text{при } x = L_x.$$

Раніше ця задача розв'язувалася за методом зважених відхилів з використанням базисних функцій, що *априорі* не задовольняли крайові умови. Нижче задача розв'язується варіаційним методом з використанням апроксимувальної функції.

Побудуємо функціонал з використанням множників Лагранжа для задачі

$$\Pi_1(\varphi, \lambda) = \int_0^{L_x} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \varphi^2 \right) dx + \lambda (\varphi - \bar{\varphi}) \Big|_0^{L_x},$$

де $\varphi = 0$ при $x = 0$ і $\varphi = \bar{\varphi}$ при $x = L_x$.

Обчислимо варіацію функціонала:

$$\delta \Pi = \int_0^{L_x} \left(\frac{d\varphi}{dx} \frac{d\delta\varphi}{dx} - \varphi \delta\varphi \right) dx + \delta (\lambda (\varphi - \bar{\varphi})) \Big|_0^{L_x} + \lambda \delta \Big|_0^{L_x} \varphi.$$

Запишемо умову стаціонарності, перетворивши функціонал з використанням формул інтегрування частинами (1) для виділення залежності від δ :

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= - \int_0^{L_x} \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \varphi \right) \delta\varphi dx + \frac{d\varphi}{dx} \delta\varphi \Big|_0^{L_x} + \delta (\lambda (\varphi - \bar{\varphi})) \Big|_0^{L_x} + \lambda \delta \Big|_0^{L_x} \varphi = \\ &= - \int_0^{L_x} \left(\frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \varphi \right) \delta\varphi dx + \left(\frac{d\varphi}{dx} + \lambda \right) \delta\varphi \Big|_0^{L_x} + \delta (\lambda (\varphi - \bar{\varphi})) \Big|_0^{L_x} = 0. \end{aligned}$$

Ця умова буде задовольнятися, якщо одночасно будуть виконуватися співвідношення

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \varphi}{dx^2} - \varphi &= 0 \quad \text{на } 0 < x < L_x, \\ \frac{d\varphi}{dx} + \lambda &= 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{і} \quad x = L_x, \\ \varphi - \bar{\varphi} &= 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{і} \quad x = L_x. \end{aligned}$$

Перше співвідношення є диференціальним рівнянням, друге й третє – крайовими умовами, які виконуються одночасно. З другого співвідношення отримаємо форму множника Лагранжа, тобто

$$\lambda = -\frac{d\varphi}{dx},$$

отже, функціоналу можна надати такого вигляду:

$$\begin{aligned}\Pi(\varphi) &= \int_0^{Lx} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \varphi^2 \right) dx - \frac{d\varphi}{dx} (\varphi - \bar{\varphi}) \Big|_0^{Lx} = \\ &= \int_0^{Lx} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \varphi^2 \right) dx - \frac{d\varphi}{dx} (\varphi - \bar{\varphi}) \Big|_{Lx} + \frac{d\varphi}{dx} \varphi \Big|_0.\end{aligned}$$

Розглянемо трьохелементну апроксимацію функції

$$\tilde{\varphi} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2,$$

коефіцієнти якої визначимо за методом Релея – Рітца.

Після підстановки апроксимації у функціонал одержимо його у вигляді функції від коефіцієнтів:

$$\begin{aligned}\Pi &= \int_0^{Lx} \frac{1}{2} \left((a_2 + 2a_3 x)^2 + (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^2 \right) dx - \\ &- (a_2 + 2a_3 Lx) (a_1 + a_2 Lx + a_3 Lx^2 - \bar{\varphi}) + a_2 a_1.\end{aligned}$$

Умови, що накладаються на значення коефіцієнтів, – це умови стаціонарності функціонала в просторі коефіцієнтів:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_l} = 0, \quad l = 1, 2, 3 \quad \text{або}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} &= \int_0^{Lx} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2) dx - (a_2 + 2a_3 Lx) + a_2 = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} &= \int_0^{Lx} [(a_2 + 2a_3 x) + x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)] dx - \\ &- (a_1 + a_2 Lx + a_3 Lx^2 - \bar{\varphi}) - Lx(a_2 + 2a_3 Lx) + a_1 = 0, \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_3} &= \int_0^{Lx} [2x(a_2 + 2a_3 x) + x^2(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)] dx - \\ &- 2Lx(a_1 + a_2 Lx + a_3 Lx^2 - \bar{\varphi}) = 0.\end{aligned}$$

Після інтегрування (при $Lx = 1$) і найпростіших перетворень ці умови можна записати у вигляді системи лінійних алгебраїчних рівнянь в матрично-векторній формі

$$Ka = f,$$

де

$$K = \begin{vmatrix} 1 & 1/2 & -5/3 \\ 1/2 & -2/3 & -7/4 \\ -5/3 & -7/4 & -37/15 \end{vmatrix}, \quad f = \begin{vmatrix} 0 \\ -q \\ -2q \end{vmatrix}.$$

При $q = 1$ розв'язок має вигляд $a_1 = -0,045, a_2 = 0,860, a_3 = 0,231$.

На рис. 10 зображено графіки функцій та їх похідних. На лівому графіку синя крива відображає точний аналітичний розв'язок, а червона – наближений. На графіку справа показано залежності похідних, синя крива – точний розв'язок, а червона – наближений.

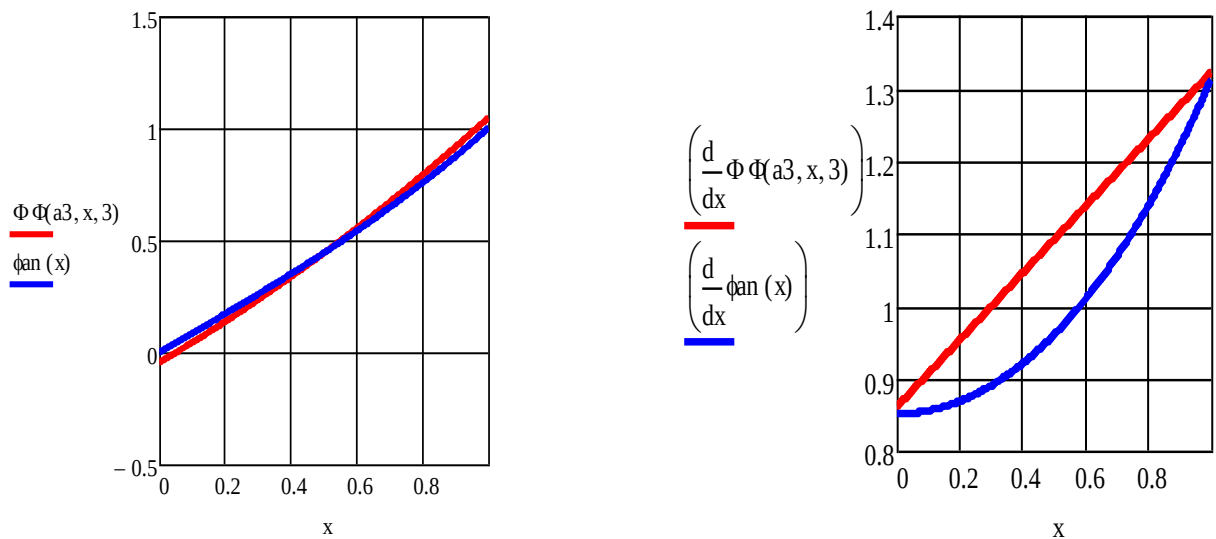


Рис. 10. Графіки функцій (зліва) та їх похідних (справа)

Видно, що апроксимація функції є найбільш точною в середній частині інтервалу, тоді як похідна є найбільш точною на кінцях.

Точне аналітичне значення функціонала в точці стаціонарності дорівнює 0,657, а для наближеного розв'язку значення функціонала дорівнює 0,661.

На рис. 11 показано графіки варіації функції та її похідної.

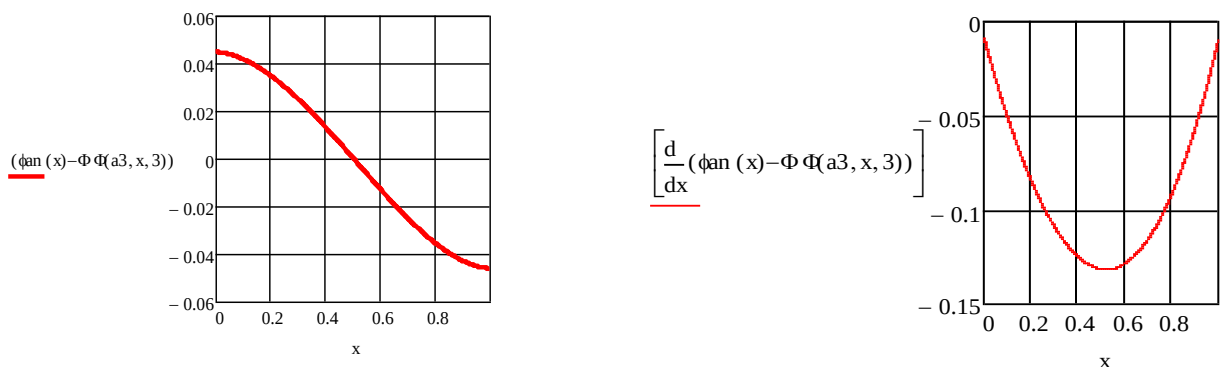
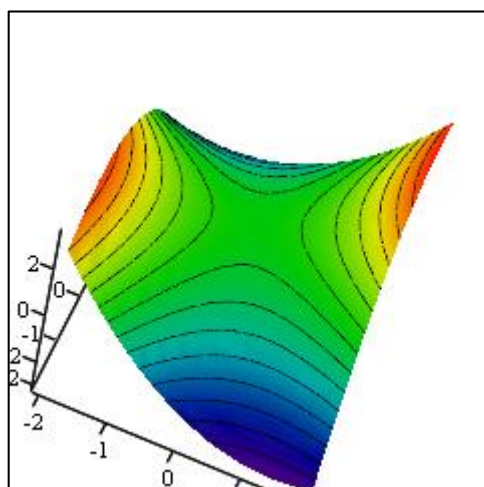
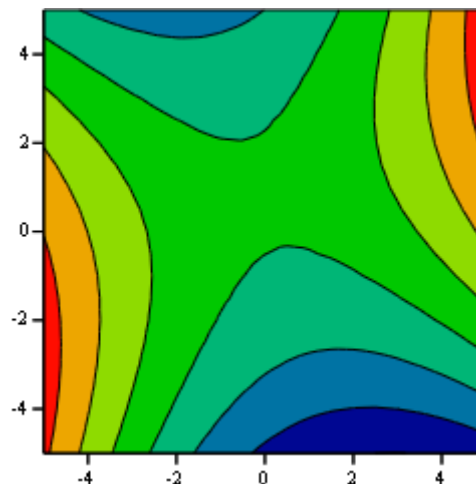


Рис. 11. Графіки варіації функції (зліва) та її похідної (справа)

Поверхня наближеного функціонала будується в чотиривимірному просторі (три коефіцієнти і функція), нижче показано перерізи цієї поверхні поблизу точки стаціонарності.



F1



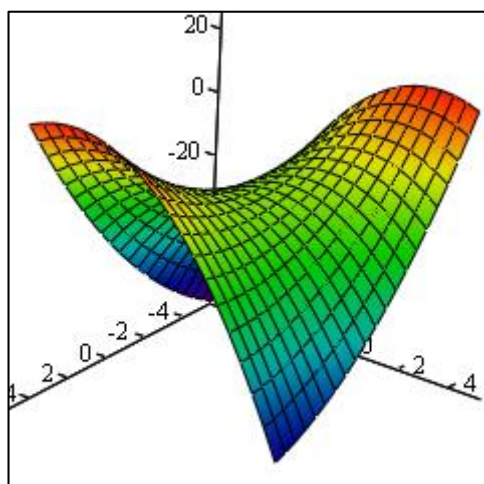
F1

Рис. 12. Вигляд поверхні функціонала при $a_3 = 0,231$

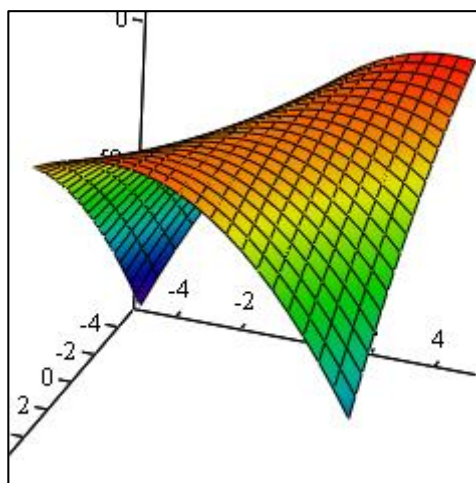
На рис. 12 зображено поверхню функціонала в перерізі $a_3 = 0,231$ поблизу точки стаціонарності. Видно, що поверхня має форму сідла, у напрямку зверху-вниз спостерігається максимум, тоді як в напрямку зліва-направо спостерігається мінімум.

На рис. 13 показано перерізи гіперповерхні функціонала площинами $a_2 = 0,86$ (зліва) і $a_1 = -0,045$ (справа).

Ці поверхні також мають сідловату форму.



F2



F3

Рис. 13. Вигляд поверхні функціонала при $a_2 = 0,86$ (зліва) та $a_1 = -0,045$ (справа)

Цей приклад демонструє поширений варіант стаціонарності функціонала – так званий мінімакс, коли в точці стаціонарності вздовж одних координат спостерігається мінімум, а вздовж інших – максимум.

6. ЗАГАЛЬНІ ВАРІАЦІЙНІ ПРИНЦИПИ

Метод множників Лагранжа приводить до загальної процедури побудови варіаційного принципу для диференціальних рівнянь *загального* вигляду

$$\mathcal{L}\varphi + p = 0 \text{ на } \Omega, \quad (54)$$

де оператор $\mathcal{L}$ зовсім необов'язково має властивості, що забезпечують існування природного варіаційного принципу. Розглядаючи (54) як обмеження, що накладаються на функцію, можна відразу записати вигляд функціонала за допомогою множників Лагранжа

$$\Pi(\varphi, \lambda) = \int_{\Omega} (\mathcal{L}\varphi + p) \lambda d\Omega \quad (55)$$

і вимагати, щоб він мав стаціонарність відносно всіх варіацій $\delta\varphi$ на множині *допустимих функцій* φ , тобто таких, які задовольняють крайові умови задачі.

Візьмемо варіацію функціонала (55)

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \delta(\mathcal{L}(\varphi) + p) \lambda d\Omega + \int_{\Omega} \mathcal{L}(\delta\varphi) \lambda d\Omega. \quad (56)$$

Уведемо до розгляду *спряжений оператор* $\mathcal{L}^*$, що має властивість

$$\int_{\Omega} \mathcal{L}(\delta\varphi) \lambda d\Omega = \int_{\Omega} \delta\varphi \mathcal{L}^*(\lambda) d\Omega. \quad (57)$$

У такій формі спряжений оператор призначається для лінійних задач.

Умові стаціонарності функціонала (55) з урахуванням (56), (57) можна надати вигляду

$$\delta \Pi = \int_{\Omega} \delta(\mathcal{L}(\varphi) + p) \lambda d\Omega + \int_{\Omega} \delta\varphi \mathcal{L}^*(\lambda) d\Omega = 0.$$

Очевидно, умова стаціонарності буде задовольнятися, якщо *одночасно* будуть виконуватися умови

$$(\mathcal{L}(\varphi) + p) = 0 \text{ на } \Omega, \quad (58)$$

$$\mathcal{L}^* \lambda = 0 \text{ на } \Omega. \quad (59)$$

Розглянемо одночасну апроксимацію шуканої функції і множника Лагранжа

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \varphi + \sum_{m=1}^M a_m N_{m,1}, \quad \lambda \approx \hat{\lambda} = \sum_{m=1}^M b_m N_{m,2}, \quad (60)$$

що приводить до *збільшення (подвоєння) кількості* невідомих коефіцієнтів $a_m, b_m, m = 1, \dots, M$, які можна визначити, якщо повторювати ті ж кроки, що й раніше: (50)–(53).

Підставивши апроксимації (60) у вираз для функціонала (55), одержимо

$$\Pi(\phi, \lambda) = \Phi(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int_{\Omega} \sum_{l=1}^M b_l N_{l,2} (\mathcal{L} \sum_{m=1}^M (\phi + a_m N_{m,1}) + p) d\Omega.$$

Для забезпечення стаціонарності функціонала необхідно, щоб

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial b_l} &= \int_{\Omega} N_{l,2} (\mathcal{L} \sum_{m=1}^M (\phi + a_m N_{m,1}) + p) d\Omega = 0, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial a_l} &= \int_{\Omega} \sum_{m=1}^M b_m N_{m,2} \mathcal{L} N_{l,1} d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Отримані співвідношення можна розглядати як систему алгебраїчних рівнянь відносно вектора коефіцієнтів апроксимації, яку подамо в матричній формі:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (61)$$

де

$$K_{lm} = \int_{\Omega} N_{l,2} \mathcal{L} N_{m,1} d\Omega, \quad f_l = - \int_{\Omega} N_{l,2} [\mathcal{L} \phi + p] d\Omega. \quad (62)$$

Система рівнянь (61) розпадається на *дві незалежні системи рівнянь*

$$\mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{f},$$

$$\mathbf{K}^T \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Перша система рівнянь є тотожною системою, отриманій за методом зважених відхилів. Отже, із загального варіаційного принципу одержали рівняння методу зважених відхилів. Таким чином встановлено зв'язок між варіаційними методами й методом зважених відхилів. Розв'язок цієї системи дає вектор коефіцієнтів апроксимації шуканої функції.

Друга система є *однорідною системою*, отже, вона має *безліч розв'язків*, які визначаються з точністю до константи-множника. Це означає, що множник Лагранжа, для визначення якого використовуються коефіцієнти b_l , також визначено з *точністю до множення на ту ж константу*. Якщо нас не цікавить вигляд множника Лагранжа, немає необхідності визначати ці коефіцієнти, таким чином можна зменшити обчислювальну трудомісткість розв'язання задачі.

7. ШТРАФНІ ФУНКЦІЇ

Раніше було розглянуто підхід для врахування додаткових умов, накладених на шукану функцію множниками Лагранжа. Реалізація цього підходу пов'язана з розв'язанням розширених систем рівнянь, що містять нульові блоки матриці (61); розв'язання таких систем рівнянь призводить до додаткової складності й обчислювальних труднощів при реалізації.

Розглянемо альтернативний підхід, який не має перелічених недоліків.

Знову розглянемо задачу з розд. 5 про мінімізацію функціонала $\Pi(\varphi)$ на множині функцій, що задовольняють додаткову (крайову) умову

$$\mathcal{M}\varphi + r = 0 \text{ на } \Gamma. \quad (63)$$

Уведемо модифікований функціонал такого вигляду:

$$\Pi_1(\varphi) = \Pi(\varphi) + \alpha \int_{\Gamma} (\mathcal{M}\varphi + r)^2 d\Gamma, \quad (64)$$

де α – параметр штрафу, що є досить великим додатним числом.

Умова стаціонарності модифікованого функціонала

$$\delta \Pi = \delta \Pi + \alpha \int_{\Gamma} 2(\mathcal{M}\varphi + r) \delta \varphi d\Gamma = 0$$

являє собою сукупність умови стаціонарності початкового функціонала $\Pi(\varphi)$ та умови (63).

Перевага цього підходу полягає в тому, що *не вводяться нові додаткові змінні та* не збільшується обчислювальна трудомісткість задачі. При використанні апроксимації функції через необхідність обнулення другого доданка зі збільшенням штрафного множника потребується все більш точне вираження крайової умови (63). Цей підхід не порушує симетрії й додаткової визначеності матриць системи, якщо таке було властивим для початкового функціонала.

Приклад 16. Розв'язати диференціальне рівняння

$$-\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \varphi = 0 \text{ при } 0 \leq x \leq L_x$$

з крайовими умовами

$$\varphi = 0 \text{ при } x = 0 \text{ і } \varphi = \bar{\varphi} \text{ при } x = L_x$$

з використанням штрафних функцій. Ця задача раніше розв'язувалася в прикл. 15.

Модифікований функціонал має вигляд

$$\Pi_1(\varphi, \lambda) = \int_0^{Lx} \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d\varphi}{dx} \right)^2 + \varphi^2 \right) dx + \alpha \left. \varphi^2 \right|_0 + \alpha (\varphi - \bar{\varphi})^2 \Big|_{Lx},$$

де α – параметр штрафу.

Використовуємо трьохелементну апроксимацію

$$\hat{\varphi} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2,$$

коефіцієнти якої визначимо з умови стаціонарності модифікованого функціонала

$$\begin{aligned} \Pi_1(\varphi, \lambda) = & \int_0^{Lx} \frac{1}{2} \left((a_2 + 2a_3 x)^2 + (a_1 + a_2 x + a_3 x^2)^2 \right) dx + \\ & + \alpha a_1^2 + \alpha (a_1 + a_2 Lx + a_3 Lx^2 - \bar{\varphi})^2. \end{aligned}$$

Як умову стаціонарності використовуємо

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_1}{\partial a_2} = 0, \quad \frac{\partial \Pi_1}{\partial a_3} = 0.$$

Запишемо ці умови в явній формі:

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial a_1} = \int_0^{Lx} (a_1 + a_2 x + a_3 x^2) dx + 2\alpha a_1 + 2\alpha (a_1 + a_2 Lx + a_3 Lx^2 - \bar{\varphi}) = 0,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial a_2} = & \int_0^{Lx} [a_2 + 2a_3 x + x(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)] dx + \\ & + 2\alpha Lx(a_1 + a_2 Lx + a_3 Lx^2 - \bar{\varphi}) = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_1}{\partial a_3} = & \int_0^{Lx} [2x(a_2 + 2a_3 x) + x^2(a_1 + a_2 x + a_3 x^2)] dx + \\ & + 2\alpha Lx^2(a_1 + a_2 Lx + a_3 Lx^2 - \bar{\varphi}) = 0. \end{aligned}$$

Цим умовам можна надати матрично-векторної форми

$$Ka = f,$$

де

$$K = \begin{vmatrix} \int_0^{Lx} dx + 4\alpha & \int_0^{Lx} x dx + 2 dLx & \int_0^{Lx} x^2 dx + 2 dLx^2 \\ \int_0^{Lx} x dx + 2 dLx & \int_0^{Lx} [1+x^2] dx + 2 dLx^2 & \int_0^{Lx} [2x+x^3] dx + 2 dLx^3 \\ \int_0^{Lx} x^2 dx + 2 dLx^2 & \int_0^{Lx} [2x+x^3] dx + 2 dLx^3 & \int_0^{Lx} [4x^2+x^4] dx + 2 dLx^4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} Lx + 4\alpha & \frac{Lx^2}{2} + 2 dLx & \frac{Lx^3}{3} + 2 dLx^3 \\ \frac{Lx^2}{2} + 2 dLx & Lx + \frac{Lx^3}{3} + 2 dLx^2 & Lx^2 + \frac{Lx^4}{4} + 2 dLx^3 \\ \frac{Lx^3}{3} + 2 dLx^3 & Lx^2 + \frac{Lx^4}{4} + 2 dLx^3 & \frac{4Lx^3}{3} + \frac{Lx^5}{5} + 2 dLx^4 \end{vmatrix},$$

$$f = \begin{vmatrix} 2\bar{\alpha}\bar{\varphi} \\ 2dLx - \bar{\varphi} \\ 2dLx^2 - \bar{\varphi} \end{vmatrix}.$$

Для $Lx=1$ отримано залежність розв'язку від різних значень штрафного коефіцієнта $2\bar{\alpha}\bar{\varphi}$ (табл.1).

Таблиця 1

$2\bar{\alpha}\bar{\varphi}$	$\hat{\varphi} _{x=0}$	$\hat{\varphi} _{x=Lx}$
1	0,1841	0,4999
10	$0,67 \cdot 10^{-1}$	0,8899
100	$0,83 \cdot 10^{-2}$	0,8871
1000	$0, \cdot 10^{-3}$	0,998

Очевидно, спостерігається асимптотичний збіг значень функції-розв'язку в межових точках інтервалу.

8. МЕТОД НАЙМЕНШИХ КВАДРАТІВ

У розд. 6 описано застосування множників Лагранжа для побудови загального варіаційного принципу, що базується на розгляді диференціального рівняння як *обмеження на вигляд функції*, накладене по всіх точках області.

Застосуємо цей підхід до варіаційного принципу, коли використовуються штрафні функції.

Розглянемо розв'язання диференціального рівняння

$$\mathcal{L}(\varphi) + p = 0 \text{ на } \Omega \quad (65)$$

виходячи зі стаціонарності функціонала, побудованого за допомогою штрафних функцій

$$\Pi(\varphi) = \int_{\Omega} (\mathcal{L}(\varphi) + p)^2 d\Omega, \quad (66)$$

на множині допустимих функцій, що задовольняють крайові умови. Штрафний множник *не змінює факту стаціонарності* на визначеній функції, тому в подальшому вважаємо його таким, що дорівнює одиниці.

Підставимо апроксимацію

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \varphi + \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (67)$$

у вираз (66) та одержимо

$$\begin{aligned} \Pi(\hat{\varphi}) &= \int_{\Omega} (\mathcal{L}(\hat{\varphi}) + p)^2 d\Omega = \Phi(\mathbf{a}) = \\ &= \int_{\Omega} \mathcal{L}(\varphi + \sum_{l=1}^M a_l N_l) (\mathcal{L}(\varphi + \sum_{m=1}^M a_m N_m) + p) d\Omega. \end{aligned} \quad (68)$$

Зазначимо, що підінтегральний вираз можна розглядати як *квадрат відхилу деякої функції*, а функціонал у зв'язку з цим являє собою інтеграл квадратичного відхилу (варіації) цієї функції від її точного (нульового) значення. Ця особливість пояснює походження терміну «варіаційний принцип найменших квадратів».

Підінтегральний вираз являє собою додатно визначену квадратичну форму відносно коефіцієнтів апроксимації a_m .

Умовою для визначення коефіцієнтів квадратичної форми є мінімальність квадратичної помилки апроксимації, яка досягається, якщо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a_l} = 2 \int_{\Omega} (\mathcal{L}\varphi + \mathcal{L}(\sum_{m=1}^M a_m N_m) + p) N_l d\Omega = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M. \quad (69)$$

Співвідношення (69) можна подати системою алгебраїчних рівнянь відносно коефіцієнтів апроксимації a_m , яка в матрично-векторній формі має вигляд

$$Ka = f, \quad (70)$$

де

$$K_{lm} = \int_{\Omega} (\mathcal{L}N_l)(\mathcal{L}N_m) d\Omega, \quad f_l = - \int_{\Omega} [(\mathcal{L}\phi)(\mathcal{L}N_l) + p(\mathcal{L}N_l)] d\Omega. \quad (71)$$

Варіаційний принцип найменших квадратів може бути побудований для будь-якого диференціального рівняння без введення додаткових змінних. У літературі зазначається, що застосування методу найменших квадратів іноді призводить до помилкових розв'язків.

Приклад 17. Розв'язати диференціальне рівняння

$$k \frac{d^2 \varphi}{dx^2} + Q = 0 \quad \text{при } 0 \leq x \leq L_x,$$

де $k = 1$, а $Q = 1$ для $x < \frac{1}{2}$, $Q = 0$ для $x > \frac{1}{2}$,

з крайовими умовами

$$\varphi = 0 \quad \text{при } x = 0 \quad \text{і} \quad \frac{d\varphi}{dx} = 0 \quad \text{при } x = L_x,$$

використовуючи метод найменших квадратів. (Ця задача інакше розв'язувалася раніше за допомогою методу зважених відхилів).

Виберемо скінченно-елементну апроксимацію розв'язку вигляду

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M \varphi_m N_m,$$

тоді коефіцієнти матриці K системи (70) відповідно до (71) будуть такими:

$$K_{lm} = \int_0^{L_x} k^2 \left\langle \frac{d^2 N_l}{dx^2} \right\rangle \left\langle \frac{d^2 N_m}{dx^2} \right\rangle dx.$$

Така форма коефіцієнтів потребує дворазової диференційованості базисних функцій. Щоб знизити вимоги до диференційованості, перейдемо до системи диференціальних рівнянь першого порядку

$$k \frac{d\varphi}{dx} + q = 0, \quad \frac{dq}{dx} = Q.$$

Уведемо вектор

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi \\ q \end{pmatrix}$$

і подамо систему звичайних диференціальних рівнянь у матрично-векторній формі

$$\mathcal{L}\varphi + p = 0,$$

де

$$\mathcal{L} = \begin{vmatrix} k \frac{d}{dx} & 1 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{vmatrix}, \mathbf{p} = \begin{vmatrix} 0 \\ Q \end{vmatrix}.$$

У векторно-матричній формі апроксимація та її похідна набирають вигляду

$$\varphi \approx \hat{\varphi} = \sum_{m=1}^M \begin{vmatrix} \varphi_m \\ q_m \end{vmatrix} N_m, \frac{d\varphi}{dx} \approx \frac{d\hat{\varphi}}{dx} = \sum_{m=1}^M \begin{vmatrix} \varphi_m \\ q_m \end{vmatrix} \frac{dN_m}{dx},$$

а функціонал (68)

$$\begin{aligned} \Pi(\hat{\varphi}) &= \int_0^{Lx} (\mathcal{L}(\hat{\varphi}) + \mathbf{p})^T (\mathcal{L}(\hat{\varphi}) + \mathbf{p}) dx = \Phi(\varphi, \mathbf{q}) = \\ &= \int_0^{Lx} \left\langle \left(k \sum_{m=1}^M \left\langle \varphi_m \frac{dN_m}{dx} \right\rangle + \sum_{m=1}^M \langle q_m N_m \rangle \right), \left(\sum_{m=1}^M \left\langle q_m \frac{dN_m}{dx} \right\rangle + Q \right) \right\rangle \times \\ &\quad \times \left| \begin{array}{c} k \sum_{m=1}^M \left\langle \varphi_m \frac{dN_m}{dx} \right\rangle + \sum_{m=1}^M \langle q_m N_m \rangle \\ \sum_{m=1}^M \left\langle q_m \frac{dN_m}{dx} \right\rangle + Q \end{array} \right| dx = \\ &= \int_0^{Lx} \left\langle \left(k \sum_{m=1}^M \left\langle \varphi_m \frac{dN_m}{dx} \right\rangle + \sum_{m=1}^M \langle q_m N_m \rangle \right)^2 + \left(\sum_{m=1}^M \left\langle q_m \frac{dN_m}{dx} \right\rangle + Q \right)^2 \right\rangle dx = \\ &= \int_0^{Lx} \left\langle k^2 \left(\sum_{m=1}^M \left\langle \varphi_m \frac{dN_m}{dx} \right\rangle \right)^2 + \right. \\ &\quad + 2k \left(\sum_{m=1}^M \left\langle \varphi_m \frac{dN_m}{dx} \right\rangle \right) \left(\sum_{m=1}^M \langle q_m N_m \rangle \right) + \left(\sum_{m=1}^M \langle q_m N_m \rangle \right)^2 + \\ &\quad \left. + \left(\sum_{m=1}^M \left\langle q_m \frac{dN_m}{dx} \right\rangle \right)^2 + 2Q \left(\sum_{m=1}^M \left\langle q_m \frac{dN_m}{dx} \right\rangle \right) + Q^2 \right\rangle dx \end{aligned}$$

має набувати мінімуму.

Розглянемо систему чотирьох однакових скінченних елементів з лінійними базисними функціями (рис. 14).

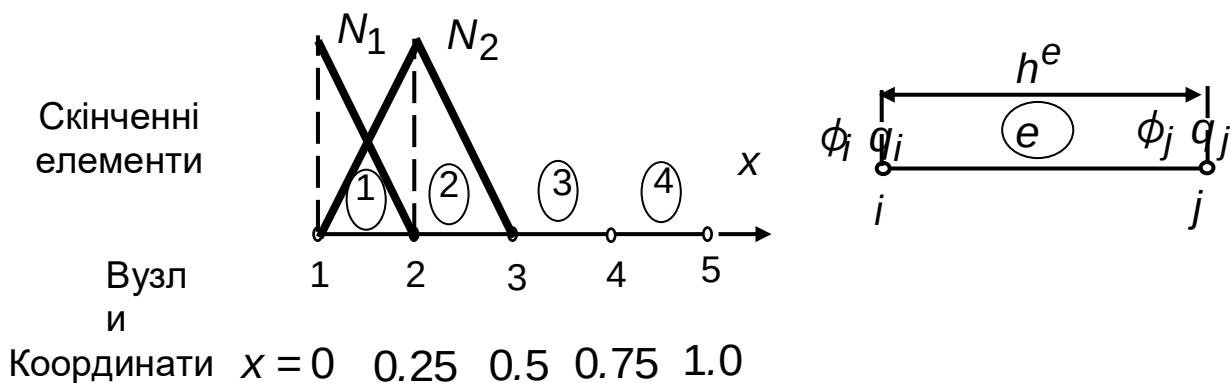


Рис. 14. Схема скінченних елементів та позначення

Умовою мінімуму (стаціонарності) функціонала є система рівнянь

$$\left. \begin{array}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_l} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q_l} \end{array} \right| = 0, \quad l = 1, 2, \dots, M.$$

З використанням позначень

$$\varphi = \begin{vmatrix} \varphi \\ q_l \end{vmatrix}$$

умову стаціонарності можна записати в блоковій векторно-матричній формі

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{12} & \cdots & \mathbf{K}_{1M} \\ \mathbf{K}_{21} & \mathbf{K}_{22} & \cdots & \mathbf{K}_{2M} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \mathbf{K}_{M1} & \mathbf{K}_{M2} & \cdots & \mathbf{K}_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \cdots \\ \varphi_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{f}_2 \\ \cdots \\ \mathbf{f}_M \end{bmatrix}$$

Блоки матриці й вектора визначимо, досліджуючи похідні

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi_l} &= 2 \int_0^{Lx} k \sum_{m=1}^M \left\langle \varphi_m \frac{dN_m}{dx} \right\rangle + \sum_{m=1}^M \langle q_m N_m \rangle \frac{dN_l}{dx} dx = \\ &= 2 \int_0^{Lx} \left(\sum_{m=1}^M \left\langle k \varphi_m \frac{dN_m}{dx} + q_m N_m \right\rangle \right) \frac{dN_l}{dx} dx, \\ \frac{\partial \Phi}{\partial q_l} &= 2 \int_0^{Lx} \left(k \sum_{m=1}^M \left\langle \varphi_m \frac{dN_m}{dx} \right\rangle + \sum_{m=1}^M \langle q_m N_m \rangle \right) N_l + \end{aligned}$$

$$+ \left(\sum_{m=1}^M \left\langle q_m \frac{dN_m}{dx} \right\rangle + Q \right) \frac{dN_I}{dx} \Bigg\rangle dx =$$

$$= 2 \int_0^{Lx} \left\langle \left(\sum_{m=1}^M \left\langle k \varphi_m \frac{dN_m}{dx} N_I + q_m \left(N_m N_I + \frac{dN_m}{dx} \frac{dN_I}{dx} \right) \right\rangle \right) + Q \frac{dN_I}{dx} \right\rangle dx.$$

Звідси маємо

$$K_{Im} = \int_0^{Lx} \left| \begin{array}{cc} k \frac{dN_I}{dx} \frac{dN_m}{dx} & \frac{dN_I}{dx} N_m \\ k N_I \frac{dN_m}{dx} & \frac{dN_I}{dx} \frac{dN_m}{dx} + N_I N_m \end{array} \right| dx, \quad f_I = \int_0^{Lx} \left| \begin{array}{c} 0 \\ Q \frac{dN_I}{dx} \end{array} \right| dx.$$

Слід зазначити, що тепер для базисних функцій потребується *одноразова диференційованість*, тобто C^0 -гладкість.

Скінченно-елементні матриця й вектор правих частин набувають вигляду

$$k^e = \int_{\Omega^e} \Phi(x) dx,$$

$$f^e = \int_{\Omega^e} \left| \begin{array}{c} 0 \\ Q \frac{dN_i}{dx} \\ 0 \\ Q \frac{dN_j}{dx} \end{array} \right| dx,$$

де

$$\Phi(x) = \left| \begin{array}{cccc} k \left(\frac{dN_i^e}{dx} \right)^2 & \frac{dN_i^e}{dx} N_i^e & k \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} & \frac{dN_i^e}{dx} N_j^e \\ \frac{dN_i^e}{dx} N_i^e & (N_i^e)^2 + \left(\frac{dN_i^e}{dx} \right)^2 & N_i^e \frac{dN_j^e}{dx} & \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + N_i^e N_j^e \\ k \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} & N_i^e \frac{dN_j^e}{dx} & k \left(\frac{dN_j^e}{dx} \right)^2 & \frac{dN_j^e}{dx} N_j^e \\ N_j^e \frac{dN_i^e}{dx} & \frac{dN_i^e}{dx} \frac{dN_j^e}{dx} + N_i^e N_j^e & \frac{dN_j^e}{dx} N_j^e & (N_j^e)^2 + \left(\frac{dN_j^e}{dx} \right)^2 \end{array} \right|$$

Числове розв'язання задачі для, наприклад, системи п'яти скінченних елементів дає такі результати:

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0,0926, \varphi_3 = 0,1224, \varphi_4 = 0,1224, \varphi_5 = 0,1224,$$

$$q_1 = -0,4974, q_2 = -0,2487, q_3 = 0,0, q_4 = 0,0, q_5 = 0,0.$$

Підіб'ємо підсумки. Розглянуто методи числового розв'язання задач пошуку наближень функцій, що забезпечують стаціонарний стан заданого функціонала, конструювання варіаційних принципів, використання множників Лагранжа, штрафних функцій, а також використання скінченно-елементної апроксимації. Ці методи використовуються для розв'язання диференціальних рівнянь і задач оптимального проектування нових конструкцій і процесів.

БІБЛІОГРАФІЧНИЙ СПИСОК

- Васидзу, К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности : пер. с англ. / К. Васидзу. – М. : Мир, 1987. – 542 с.
- Загорулько, А. В. Чисельні методи у механіці / А. В. Загорулько. – Суми : СумДУ, 2008. – 186 с.
- Зенкевич, О. Конечные элементы и аппроксимация : пер. с англ. / О. Зенкевич, К. Морган. – М. : Мир, 1986. – 318 с.

Навчальне видання

Нарижний Олександр Георгійович

**СПЕЦІАЛЬНИЙ МАТЕМАТИЧНИЙ АПАРАТ
АВТОМАТИЗОВАНОГО ПРОЄКТУВАННЯ**

Редактор Т. О. Іващенко

Зв. план, 2022

Підписано до видання 25.10.2022

Ум. друк. арк. 3. Обл.-вид. арк. 3,38. Електронний ресурс

Видавець і виготовлювач
Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського
«Харківський авіаційний інститут»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
[http:// www.khai.edu](http://www.khai.edu)
Видавничий центр «ХАІ»
61070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
izdat@khai.edu

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи
до Державного реєстру видавців, виготовлювачів і розповсюджувачів
видавничої продукції сер. ДК № 391 від 30.03.2001