МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ СИСТЕМНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ОСВІТИ
ХАРКІВСЬКИЙ АВІАЦІЙНИЙ ІНСТИТУТ

М. М. Чернецький

ЛЕКЦІЇ З НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Київ 1995

514
Ч49

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ СИСТЕМНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ОСВІТИ
ХАРКІВСЬКИЙ АВІАЦІЙНИЙ ІНСТИТУТ

М.М.Чернецький

ЛЕКЦІЇ З НАРИСНОЇ ГЕОМЕТРІЇ

Затверджено Інститутом системних досліджень освіти
Міністерства освіти України
як навчальний посібник
для студентів машинобудівельних вузів
авіаційно-ракетного профілю

Київ 1995

37383М
БИБЛИОТЕКА
Харьковского
авиационного ин-тута
им. Н. Е. Жуковского

УДК 514

Чернецький М.М. Лекції з нарисної геометрії: Навч. посібник. - К.: ІСДО, 1995. - 295 с.

Розглянуто сучасні методи графічного й аналітичного моделювання та відповідні моделі геометричних об"єктів, що дозволяє використовувати останні як геометричне забезпечення САПР.

З графічних моделей розглядаються лише паралельно-проекційні: аксонометричні і комплекси проекцій.

Зміст роботи відповідає розділу "Нарисна геометрія" загального курсу "Інженерна та машинна графіка" /згідно з програмою, затвердженою Міністерством освіти України/ і містить додатковий навчальний матеріал з розділу "Геометричне моделювання" цього курсу.

Рекомендується студентам машинобудівельних втузів авіаційно-ракетного профілю.

Іл. 301, табл. 9. Бібліогр.: 136 назв.

Рецензенти: В.В.Ванін, канд. техн. наук /КПІ/;
В.М.Анухтін, канд. техн. наук /ХПІ/;
І.Д.Гольдін, канд. техн. наук /ХІРЕ/.

ISBN 5 - 7763 - 9693 - X

© М.М.Чернецький, 1995

Умовні позначення, прийняті в посібнику

(AB) – пряма AB;

$[AB]$ – відрізок AB;

$[AB)$ – промінь AB;

$|AB|$ – довжина відрізка AB;

$\{A,B\}$ – множина з елементами A і B;

ϕ – пуста множина;

$A \in \Phi$ – точка A належить до фігури Φ;

$\Phi_1 \subset \Phi$ – фігура Φ_1 – підмножина фігури Φ;

$A \notin \Phi$ – точка A не належить до фігури Φ;

$\Phi_1 \neq \Phi_2$ – фігури Φ_1 і Φ_2 не збігаються;

$\Phi_1 = \Phi_2$ – фігури Φ_1 і Φ_2 збігаються;

$\Phi_1 \cong \Phi_2$ – фігури Φ_1 і Φ_2 конгруентні;

$\Phi_1 \cup \Phi_2$ – об"єднання Φ_1 і Φ_2;

$\Phi_1 \cap \Phi_2$ – перетин Φ_1 і Φ_2;

$\uparrow\uparrow$ – однаково напрямлені /вектори, промені, прямі/;

$\uparrow\downarrow$ – супротивно напрямлені;

$\parallel$ – паралельні;

$\nparallel$ – не паралельні;

$\perp$ – перпендикулярні;

$\overline{\cdot}$ – мимобіжні;

$\angle$ – кут, двогранний кут;

$\wedge$ – величина кута;

(A,B,C) – площина, що проходить через точки A,B,C

$\Rightarrow$ – знак слідування;

$\wedge$ – символ кон"юнкції "і"/ $A \wedge B$ – справджується як A, так і B /;

$\vee$ – символ диз"юнкції "або" / $A \vee B$ – справджується хоча б одне з A або B /;

$\forall$ – квантор загальності / $\forall x$ – для будь-якого x /;

$\exists$ – квантор існування / $\exists x$ – існує хоча б один з x /;

$\alpha,\beta,\ldots\Gamma,\Sigma,\ldots$ – площини;

π – площина проекцій;

π_1,π_2,π_3 – площини проекцій відповідно горизонтальна, фронтальна і профільна;

$A,B,C,\ldots$ – точки-оригінали;

A_1,A_2,A_3 – проекції точки A відповідно горизонтальна, фронтальна і профільна;

l – пряма-оригінал;

l_1,l_2,l_3 – проекції прямої відповідно горизонтальна, фронтальна і профільна

Φ – фігура-оригінал;

Φ_1,Φ_2,Φ_3 – проекції фігури Φ відповідно горизонтальна, фронтальна і профільна;

$\vec{e}^{\,A}$ – вектор напряму проеціювання /напряму зору/;

π^A – площина проекцій, що перпендикулярна до $\vec{e}^{\,A}$;

$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ – проекції площини α відповідно горизонтальна, фронтальна і профільна;

Ω – поверхня-оригінал;

Ω_0 – визначник /детермінант/ поверхні Ω;

A' – проекція точки A, зокрема та, що її побудовано аксонометричним способом.

ВСТУП

Для сучасного етапу розвитку техніки характерне застосування машинної графіки і автоматизація процесу проектування. Задовільного математичного забезпечення цього процесу можна досягти підвищенням рівня математизації загальнотехнічних дисциплін.

У нарисній геометрії цим зумовлюється як використання сучасних методів синтетичного і аналітичного моделювання, так і їх органічне поєднання, а також аналітичне представлення апарата проеціювання.

Досвід викладання /з 1975 р./ підтверджує доцільність прийнятого в підручнику своєрідного розподілу матеріалу й показує, що більш раннє вивчення поверхонь полегшує засвоєння курсу студентами. Проте автор не є прихильником жорсткої однозначної системи викладу матеріалу і припускає можливість її коригування, виходячи з конкретних умов організації навчального процесу.

I. ПРОЕЦІЮВАННЯ

I.I. Предмет нарисної геометрії

У будь-якій галузі техніки креслення - один з основних засобів моделювання об"єктів виробництва /починаючи зі стадії проектування/ і важливий засіб передачі технічної думки.

Предмет вивчення в нарисній геометрії - способи побудови й читання зображень на кресленнях і розв"язування геометричних задач на цих зображеннях.

Як навчальна дисципліна нарисна геометрія виконує важливі освітні функції: поповнює запас просторових уявлень і розвиток просторового мислення.

I.2. Вимоги до зображень на кресленнях

Зображення на кресленнях мають такі властивості: відтворюваність, вимірність і наочність.

Відтворюваність дозволяє за зображенням відтворити зображений об"єкт, а вимірність -зробити це із задовільною для виробничої практики простотою /тобто спрощує вимірювання лінійних і кутових величин, що належать до зображеного об"єкта/. Наочність дає змогу наблизити сприймання зображення спостерігачем до сприймання самого зображуваного об"єкта.

I.3. Проекційні зображення

Властивості відтворюваності, вимірюваності та наочності мають проекційні зображення, назва яких випливає з назви геометричної операції проеціювання, яку застосовують для одержання таких зображень. Зазначена геометрична операція є геометричною абстракцією загальновідомих операцій фотографування, кінопроеціювання та т.п.

Для виконання операції проеціювання складається геометричний апарат проеціювання /рис.I.1/: точка S - центр проеціювання /або центр проекцій/; об"єкт зображення Ω - оригінал; площина π - площина проекцій; (AS), (BS) і (CS) - проеціюючі прямі /або проеціюючі/, де A, B і C - точки, що належать до оригіналу Ω /тобто $A, B, C - \Omega$ /*.

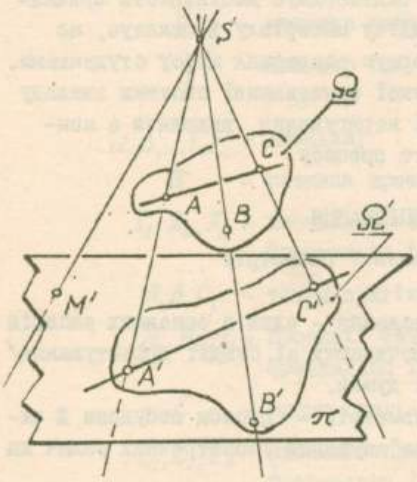


Рис. I.1

Кожна з прямих (AS), (BS) і (CS) має з площиною π перетин-точку: $A' = (AS) \cap \pi$, $B' = (BS) \cap \pi$ і $C' = (CS) \cap \pi$*.

Оригінал Ω розглядаємо як множину точок, що до нього належать. Точкам оригіналу Ω / A, B, C та ін./ відповідають точки площини π / A', B', C' та ін./. Легко помітити, що є й такі точки площини π, які не мають відповідних в оригіналі Ω. Отже, операцію проеціювання можна визначити як відображення Ω в площину π, що відбулося за допомогою прямих (AS), (BS), (CS) та ін., тобто проеціюючих.

Фігура Ω' - множина точок типу A', B', C' та ін. Отже, для будь-якої точки фігури Ω' можна відшукати відповідну точку /одну або кілька/ в оригіналі Ω, тобто точки A, B, C відобра-

---

* Див. умовні позначення.

жують на A', B', C', а оригінал Ω – на Ω'. Точки A', B', C' називаються проекціями точок A, B, C, а фігура Ω' – проекцією оригіналу Ω. Проекцію Ω' й прийматимемо за проекційне зображення оригіналу Ω.

Операцію проеціювання, однак, необхідно гарантувати. Нехай розміщення деякої точки M у просторі таке, що $(MS) \parallel \pi$ /рис. I.2, а/. Домовимося, що $(MS) \cap \pi = M^\infty$ і, отже, перетином (MS) і π є нескінченно-віддалена або невластива точка прямої MS і площини π.

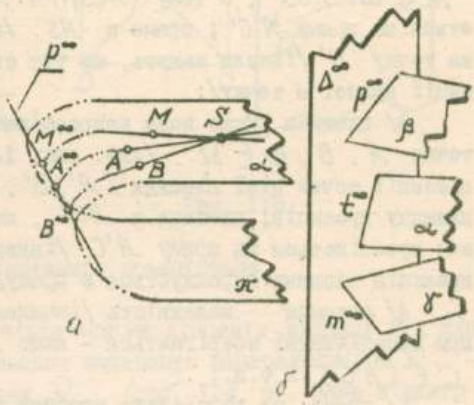


Рис. I.2

У площині $\alpha \ni S$ такій, що $\alpha \parallel \pi$, через S проходить цілий пучок прямих, кожна з прямих якого має свою невластиву точку: $a) A^\infty$, $б) B^\infty$ і т.п. Оскільки ці точки за аналогією з M^∞ належать і площині π, а π з α можуть перетинатися лише по прямій, то точки типу A^∞, B^∞ і т. ін. утворюють невластиву пряму $p^\infty = \alpha \cap \pi$ площини α /і, отже, площини π /.

Кожна площина має, таким чином, невластиву пряму, а тому природно припустити, що множиною невластивих точок простору є невластива площина / Δ^∞ /. Перетином цієї площини з кожною з площин / α, β, δ / є відповідна невластива пряма: m^∞, t^∞, p^∞ /рис. I.2, б/.

Звичайний евклідів простір, що доповнений невластивими точкою, прямою і площиною, називатимемо проективним. Як бачимо, виконання операції проеціювання в такому просторі гарантовано.

I.4. Властивості проеціювання

У практиці виробничого проектування оригінал Ω з"являється спочатку лише в уяві конструктора. Зокрема конструктору відомі геометричні властивості Ω. Тому для виконання Ω' важливо

знати, які з геометричних властивостей Ω зберігаються в результаті проеціювання.

Як зазначалося раніше, проеціювання є точкове відображення.

Властивості цього відображення:

1/ точка проеціюється на точку;

2/ пряма проеціюється на пряму /якщо не є проеціюючою/ - точки A , $C \in \Omega$ /див. рис. I.I/ визначають пряму AC ; пряма $AC \subset$ пл. ACS , а тому $(ACS) \cap \pi = (A'C')$і, отже, (AC) проеціюється на пряму $A'C'$; пряма ж AS /проеціюча/ проеціюється вже на точку A' /інколи кажуть, що тут спостерігається вироджения проекції прямої в точку/;

3/ площина /якщо вона непроеціюча/ проеціюється на площину - точки A , B , $C \in \Omega$ /див. рис. I.1/ визначають площину (ABC) проекцій точок цієї площини /A', B', C' та ін./ покривають усю площину проекцій; площина ж ACS , як проеціюча, бо $(ACS) \supset S$, вже проеціюється на пряму $A'C'$ /інколи кажуть, що в даному випадку проекція площини вироджується в пряму/;

4/ взаємна належність /інцидентність/ геометричних об"єктів при проеціюванні зберігається - якщо A , $C \in (AC)$, то і A' , $C' \in (A'C')$ і т.п.;

5/ пряма, що паралельна площині проекцій, проеціюється в пряму, яка паралельна прямій-оригіналу - якщо $(AC) \parallel \pi$,,то $(A'C') \parallel (AC)$;

6/ фігура-оригінал, що належить площині, паралельній площині проекцій, проеціюється на фігуру, подібну оригіналу - отже, якщо $(ABC) \parallel \pi$, то ΔABC проеціюється в $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$;

7/ якщо фігура-оригінал має площину симетрії σ , що є проеціючою $(\sigma \supset S)$ і перпендикулярною до площини проекцій $(\sigma \perp \pi)$, то проекція теж має вісь симетрії *.

Виявляється, однак, що цих геометричних властивостей, які не змінюються, або, як кажуть, інваріантні щодо проеціювання, замало, щоб дістати зображення, що задовольняють вимогам до зображень на кресленнях. У цьому переконує розв"язання такої задачі.

Задача. Побудувати проекційне зображення квадрата $ABCD$ використовуючи геометричні властивості оригіналу, що інваріантні щодо проеціювання.

---

* Про інваріантність деяких інших геометричних властивостей відносно проеціювання див. у [7; II].

Легко помітити /рис. I.3/, що проекційне зображення квадрата $(A'B'C'D')$ у площині π хоча і виконано, враховуючи властивості оригіналу, інваріантні відносно проеціювання, недостатньо задовольняє вимоги відтворюваності, вимірності й наочності.

Отже, слід знайти додаткові геометричні властивості оригіналу, інваріантні відносно проеціювання. Для цього розглянемо класифікацію проеціювань.

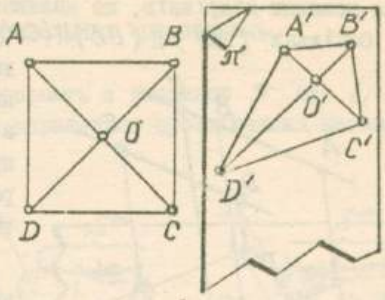


Рис. I.3

I.5. Класифікація проеціювань

Якщо центр проекцій S міститься на кінцевій віддалі від площини проекцій π, то проеціювання називають центральним, а Ω' - центральною проекцією оригіналу Ω /рис. I.4, а/. Якщо ж центр проекцій - нескінченно віддалена точка S^{∞}, то проеціювання називають паралельним /проеціюючі паралельні/, а Ω' - паралельною проекцією Ω /рис. I.4, б/.

Паралельні проекції широко використовують у машинобудуванні, будівництві, а центральні - в геодезії, архітектурі та ін. *.

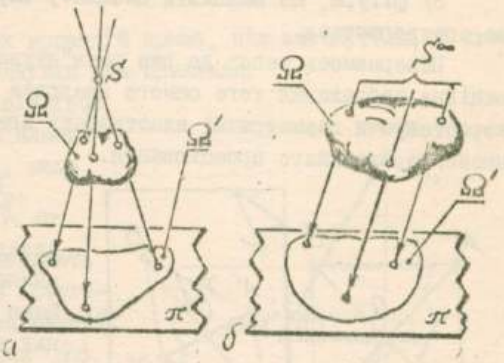


Рис. I.4

---

* Побудову зображень центральних проекцій висвітлено в [2; 4; II] та ін.

I.6. Властивості паралельного проеціювання

Характеристична властивість паралельного проеціювання: відношення довжини відрізків, що належать одній прямій, зберігається.

Оскільки $(AA') \parallel (BB') \parallel (CC')$/рис. I.5/, то (AA') і (CC') визначають площину $AA'CC'$, до якої належать як (AC), так і $(A'C')$, а в площині, як відомо, довільні прямі AC і $A'C'$ перетинаються паралельно прямими / AA', BB' і CC' / так, що $|A'B'|/|B'C'| = |AB|/|BC|$.

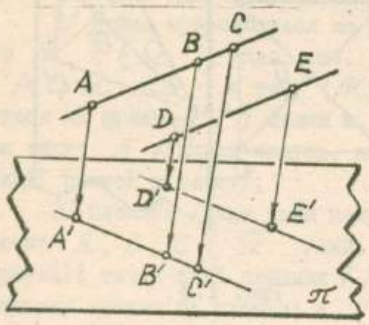


Рис. I.5

З характеристичної властивості випливають інші властивості паралельного проеціювання:

I/ паралельність прямих зберігається, тобто

$$(AC) \parallel (DE) \Rightarrow (A'C') \parallel (D'E').$$

2/ відношення довжини відрізків, що належать паралельним прямим, зберігається, наприклад, якщо $(AC) \parallel (DE)$, то $|A'C'|/|D'E'| = \frac{|AC|}{|DE|}$;

3/ фігура, що належить площині, паралельній площині проекцій, не спотворюється.

Повернемось тепер до вже розв"язуваної задачі і побудуємо проекційне зображення того самого квадрата $ABCD$ /див. рис. I.2/, використовуючи геометричні властивості оригіналу, які інваріантні відносно паралельного проеціювання.

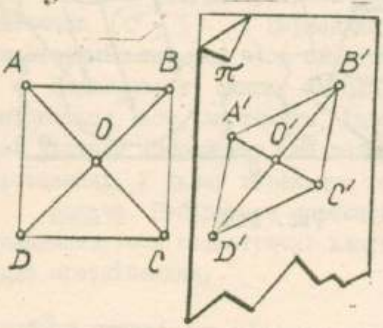


Рис. I.6

Проекційне зображення квадрата $ABCD$, що одержано в даному випадку на площині π /рис.I.6/, являє собою паралелограм $A'B'C'D'$. Воно зберігає більше геометричних властивостей оригіналу, а отже, більш наочне і придатніше, ніж зображення на рис. I.2.

Однак деякі інші геометричні властивості /наприклад, метричні */ оригіналу знов не збереглися. Це змушує продовжувати по-

* Пов"язані з вимірюванням довжини відрізків, величини кутів.

шуки видів проеціювань, які б зберігали більше геометричних властивостей оригіналу.

I.7. Класифікація паралельних проеціювань

Якщо паралельні проеціюючі утворюють з площиною π кут $l_i \wedge \pi = \alpha \neq \pi/2$ /рис. I.7, а/, то паралельне проеціювання називають косокутним, а Ω' – косокутною проекцією оригіналу Ω. Якщо ж кут $\alpha = l_i \wedge \pi = \pi/2$, то дістанемо прямокутне /ортогональне/ проеціювання і відповідно прямокутну /ортогональну/ проекцію оригіналу /рис. I.7, б/.

Ортогональні проекції особливо широко використовуються в машинобудуванні.

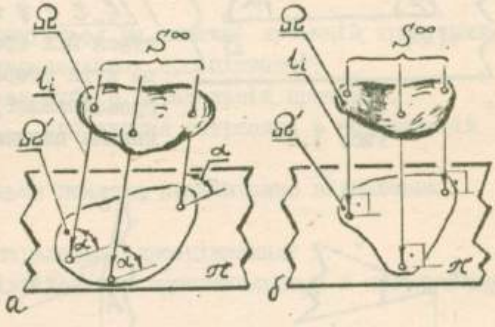


Рис. I.7

I.8. Вимірність ортогональних проекцій

Вимірність ортогональних проекцій краща, ніж косокутних. У цьому легко переконатися, розглянувши два приклади.

Приклад I. Спроеціюємо відрізок $AB\,(A \in \pi)$ ортогонально в площину π. При цьому $A' = A$ і, якщо $[AB] \wedge \pi = \beta$ /рис. I.8/, то $|A'B'| = |AB| \cos\beta$.

Множник $\cos\beta = k_n$ називають коефіцієнтом спотворення при ортогональному /прямокутному/ проеціюванні.

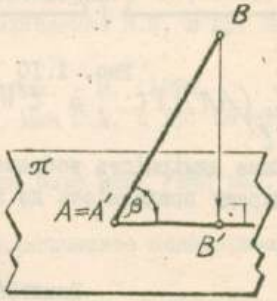


Рис. I.8

Якщо ж той самий відрізок AB спроеціюємо в площину π косокутно так, що $(BB') \wedge \pi = \alpha$, а $(ABB') \wedge \pi = \pi/2$, то $|A'B'| = |AB|\,[\sin(\alpha+\beta)]/\sin\alpha$ /рис. I.9/.

Множник $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} = k_к$ – коефіцієнт спотворення при косокутному проеціюванні.

Якщо $k_п$ залежить від одного параметра (β), то $k_к$ – від двох / α і β /. Отже, реконструкція оригіналу за його прямокутною проекцією простіша, ніж за косокутною.

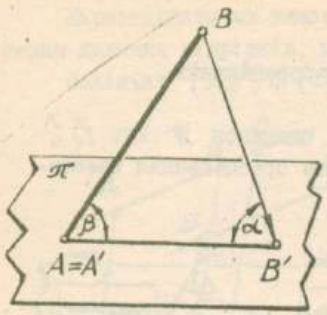


Рис. I.9

Приклад 2. Кут між двома прямими / $\angle l, t$ / у загальному випадку спотворюється при проеціюванні. Натуральна фігура кута зберігається при центральному проеціюванні, якщо площина кута паралельна площині проекцій /рис. I.IO,а,б/.

При ортогональному проеціюванні справедлива теорема /про проеціювання прямого кута/: прямий кут зберігається, якщо хоча б одна з його сторін паралельна площині проекцій, а площина кута не є проеціюючою.

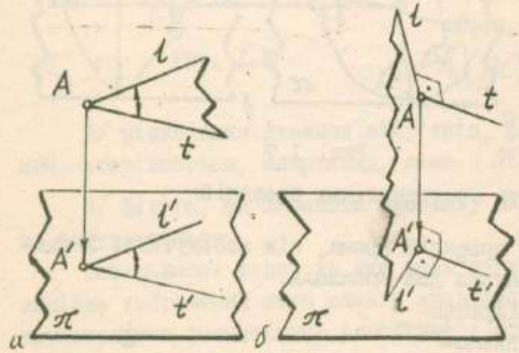


Рис. I.IO

Нехай $t \parallel \pi$, а $l \wedge t = \frac{\pi}{2}$ і $A = l \cap t$ /рис. I.IO, б/. Якщо l' – проекція l, то $l' \subset$ пл. $(l, (AA'))$. Оскільки пл. $(l, (AA')) \perp t$, а $t' \parallel t$, то $t' \perp$ пл. $(l, (AA'))$ і, отже, $t' \perp l'$.

Саме вимірність зображень – ортогональних проекцій – зумовлює їх найкращу придатність до застосування на машинобудівних кресленнях.

Запитання для самоперевірки

I. Завдання курсу нарисної геометрії.
2. Роль креслень у техніці.
3. Роль курсу нарисної геометрії в інженерній освіті.

4. Вимоги до зображень на кресленнях.

5. Метод нарисної геометрії, який найширше застосовується для побудови зображень на кресленнях.

6. Складові частини апарата проеціювання.

7. Властивості проеціювання.

8. Прямі і площини, що називаються проеціюючими.

9. Як класифікуються проеціювання?

10. Властивості паралельного проеціювання.

11. В яких точок їх паралельна проекція збігається з оригіналом?

12. Якими фігурами зображуються на площині проекцій трикутник, паралелограм, трапеція при паралельному проеціюванні?

13. Накресліть зображення куба в паралельній проекції.

14. Який вигляд матиме зображення тетраедра в паралельній проекції?

15. З якою метою вводяться поняття нескінченно віддалених точки, прямої, площини?

16. Як класифікуються паралельні проеціювання?

17. Як спотворюється відрізок при ортогональному й косокутному проеціюванні?

18. Сформулюйте теорему про ортогональне проеціювання прямого кута.

Література

1. Бубенников А.В. Начертательная геометрия. – М., 1985.

2. Колотов С.М., Евстифеев М.Ф., Михайленко В.Е. и др. Начертательная геометрия. – К.: Вища шк., 1975.

3. Котов И.И. Начертательная геометрия. – М., 1970.

4. Крылов Н.Н., Лобандиевский П.И., Мэн С.А. и др. Начертательная геометрия. – М., 1984.

5. Курс начертательной геометрии /на базе ЭВМ/ /Под ред. А.М. евлина. – М.: Высш. шк., 1983.

6. Чернецкий Н.М. Графическое и аналитическое моделирование геометрических объектов. – Харьков, 1980.

7. Чернецкий Н.М. О сохранении симметрии при проецировании /Математические методы анализа динамических систем. – Харьков, 1978. – Вып. 2.

8. Четверухин Н.Ф., Левицкий В.С., Прянишникова З.И. и др. Начертательная геометрия. - М., 1970.

9. Фролов С.А. Начертательная геометрия. - М., 1983.

2. ПОБУДОВА ПРОЕКЦІЙНИХ ЗОБРАЖЕНЬ

Як бачимо, проекційне зображення міститься в точковій відповідності зі своїм оригіналом. Оригінали можуть бути різновимірними: одновимірними /що належать прямій/, двовимірними /що належать площині/, тривимірними /що належать тривимірному простору/ і багатовимірними /що належать багатовимірному простору/. Різновимірність оригіналів зумовлює деякі особливості побудови їх проекційних зображень. Отож спочатку розглянемо побудову проекційних зображень плоских оригіналів.

2.1. Побудова проекційних зображень плоских фігур

Якщо оригінал - плоска фігура, то проекційне зображення його може бути побудовано за допомогою графічного зв"язку з оригіналом.

1. Нехай оригінал Ω /плоска фігура/, що його задано в площині π, проеціюється паралельно вектору $\vec{e}$ на $\Omega' \subset \pi'$. Довільні точки $A, B, C \in \Omega$ проеціюються при цьому на точки $A', B', C' \in \Omega'$ /рис. 2.1/. Як бачимо, двом будь-яким різним точкам /наприклад, A і B / оригіналу Ω відповідають дві різні точки /A', B'/ проекції Ω' і навпаки. Тобто точкова відповідність між Ω і Ω' у даному випадку вже взаємно однозначна, а отже, проеціювання Ω на Ω' тут виступає вже як частинний вид відображення - геометричне перетворення. Назва цього геометричного перетворення - перспективно-афінне перетворення.

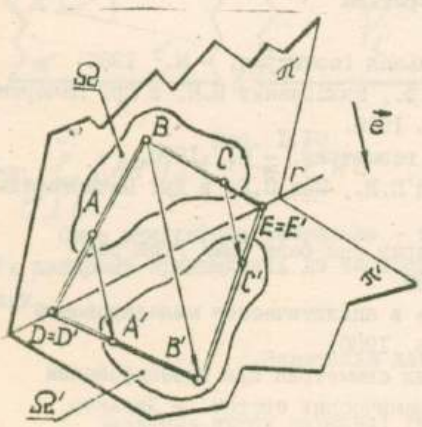


Рис. 2.1

Нехай $\pi \cap \pi' = r$ - пряма. Обертаючи площину π навколо r, суміщаємо π

з площиною π'. Отже, в одній площині / $\pi = \pi'$ / опинилися оригінал Ω і його проекція Ω' /рис. 2.2/. У цьому випадку точкова відповідність між Ω і Ω', а також між точковими полями π і π' виступає як відповідність між точками однієї площини. Вона має такі властивості:

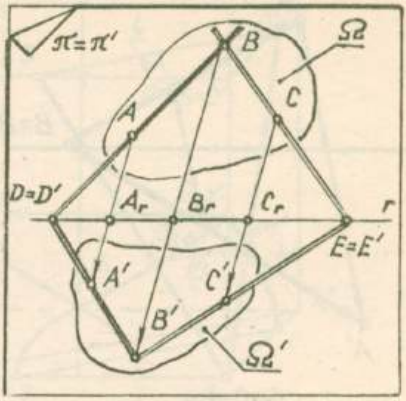


Рис. 2.2

I/ пари відповідних точок /наприклад, A і A', B і B', C і C' / належать прямим одного напряму, який називається напрямом відповідності;

2/ відповідні прямі /наприклад (AB), $(A'B')$ і (BC), $(B'C')$ перетинаються в точках, що належать одній прямій (r), яку називають віссю відповідності.

З властивостей I і 2 випливають властивості:

$$3/\ |A'A_r| / |A_rA| = |B'B_r| / |B_rB| = \ldots = const;$$

4/ точки прямої r відповідні самі собі /подвійні/.

Очевидно, прямі напряму відповідності та вісь відповідності є інваріантними образами відносно даної відповідності.

2. Скористаємося властивостями I-4 відповідності для побудови зображень за допомогою графічного зв"язку з оригіналом.

Задача I. Задано вісь відповідності (r), пару відповідних точок (AA') і точку M. Побудувати точку M' - зображення точки M.

Побудова. Точки A і M, що належать одному точковому полю π, визначають пряму того самого поля / AM; рис. 2.3/. Оскільки $(AM) \cap r = B$, то ясно /властивість 2/, що пряма $(A'M')$, відповідна прямій AM в полі π', має визначатись точками $B' = B$ /властивість 4/ і A'. Отож, будуємо $(A'B')$ і через M проводимо пряму $\ell \parallel (AA')$ /за властивістю I/. Точка $M' = (A'B') \cap \ell$ та, яку треба було дістати.

Інколи побудова зображень за допомогою графічного зв"язку з оригіналом починається з побудови осі відповідності і виявлення напряму відповідності.

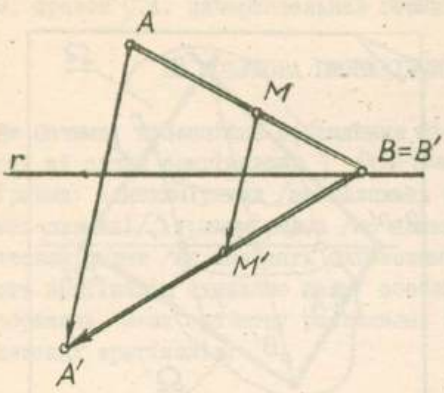


Рис. 2.3

Задача 2. На всіх гранях куба однакові й однаково розміщені криві K. На паралельно-проекційному зображенні куба зображена одна з граней разом з кривою K. Побудувати зображення кривої K на будь-якій з інших граней куба.

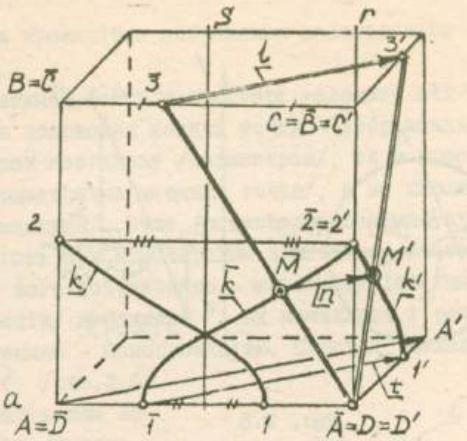
Побудова. Зображення (K') кривої K на бічній грані $A'B'CD$ /рис. 2.4, а/. Насамперед на неспотвореній грані $ABCD$ побудуємо її вісь симетрії S і криву $\bar{K}$, симетричну K відносно S. При цьому і вся грань $ABCD$ симетрична собі відносно осі симетрії S так, що $A = \bar{D}$, $B = \bar{C}$, $D = \bar{A}$ і $C = \bar{B}$. Грань же $\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}$ перебуває в точковій відповідності з гранню $A'B'C'D'$. Ця відповідність визначена віссю відповідності r / $r = \bar{A}\bar{B} = C'D'$/ і напрямом відповідності $A'\bar{D}$. Отже, дістанемо $2' = \bar{2}$ /властивість 4/ і зображення точки $\bar{1}$ – точку $1' = t \cap (A'D')$ /властивість 1/, бо $t \parallel (A'\bar{D})$. Нарешті, зображення довільної точки $M \in K$ будуємо за допомогою прямої $\bar{A}\bar{M}$, що перетинає $(\bar{B}\bar{C})$ в точці $\bar{3}$, якій відповідна точка $3' = \ell \cap (B'C')$, оскільки $\ell \parallel (A'\bar{D})$ /властивість 1/. У зв"язку з тим, що пряма $D'3'$ відповідна прямій $\bar{A}\bar{3} \ni \bar{M}$, маємо точку $M' = (D'3') \cap n$, де $n = (\bar{M}M') \parallel (A'\bar{D})$.

Повторюючи процес побудови точки M', дістанемо інші точки кривої K'. Зокрема точкову відповідність доцільно використовувати як для побудови еліпса /адже еліпс – проекція кола/, так і при розв"язанні деяких геометричних задач, пов"язаних з еліпсом. Прикладом може бути така задача.

Задача. Задано еліпс $(\mathcal{E})$ і точку $A \in \mathcal{E}$. Побудувати дотичну (t) до $\mathcal{E}$ в точці A /рис. 2.4, б/.

Розв"язання. З шкільного курсу геометрії відомо, як побудувати дотичну до кола в точці, що задана на ньому. Отож, відновлюємо те коло $(\mathcal{E}')$, проекцією якого є $\mathcal{E}$. Для цього за допомогою двох пар хорд довільного напряму / $p \parallel \bar{p}$, $m \parallel \bar{m}$ / знаходимо діаметри d

і $\bar{d}$ і центр – $O = d \cap \bar{d}$. Беремо один з діаметрів еліпса (d) за діаметр кола, що перебуває в точковій відповідності з еліпсом. Отже, $d \subset r$, де r – вісь точкової відповідності. Діаметр кола $d' \perp d$ перебуває в точковій відповідності з діаметром еліпса $d \parallel p$, спряженим відносно діаметра d. Кінці їх, точки D і D' визначають напрям відповідності. Будуємо точку $A'((AA') \parallel (DD'))$, відповідну A. В точці A' проводимо дотичну (t') до кола. Нарешті, будуємо t як відповідну до $t' / K' = t' \cap r$; $K = K'$, $AK = t /$.



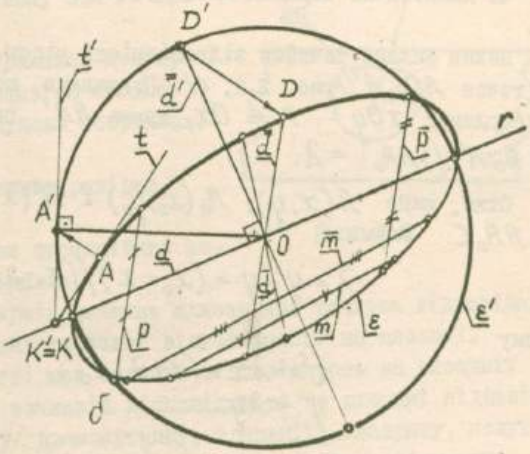


Рис. 2.4

3. Використовуючи перспективно-афінну точкову відповідність для розв"язання геометричних задач на проекційних зображеннях, слід пам"ятати, що кожна така точкова відповідність має так звані головні напрями, тобто такі напрями двох взаємно перпендикулярних прямих точкового поля π, що їм відповідають теж взаємно перпендикулярні прямі поля π'.

ЗАГОТОВКА
БИБЛИОТЕКА
Харьковского
авиационного ин-тута
им. Н. Е. Жуковского

Справді, нехай точкову відповідність у площині $\pi = \pi'$ задано віссю /рис. 2.5, а/ відповідності - r і парою відповідних точок A і A'. Помічаємо, що точка $O = O'$, яку маємо як перетин $O = O' = t \cap r$, де пряма t - геометричне місце точок, рівновіддалених від A і A' /і, отже, $|AB| = |A'B|$/, є центр кола, що проходить через точки A і A'. Оскільки сторони AC і AD, $A'C'$ і $A'D'$ спираються на діаметр CD, то $\widehat{AC,AD} = \widehat{A'C',A'D'} = \frac{\pi}{2}$, а отже, (AC) і (AD) /і відповідно $(A'C')$ і $(A'D')$/ взаємно перпендикулярні прямі головного напряму у відповідності з $\pi \longleftrightarrow \pi'$.

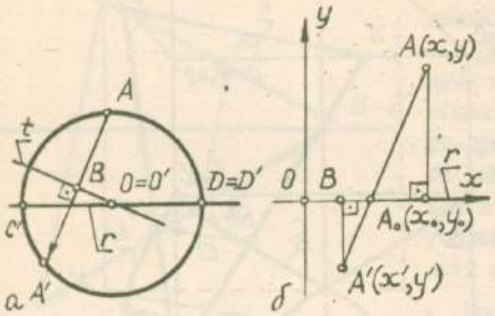


Рис. 2.5

4. Аналітичне подання даної точкової відповідності дістанемо так.

Нехай задано точкову відповідність віссю r і парою відповідних точок A і A' /рис. 2.5, б/. Покладемо, що в прямокутній системі координат xOy $r = Ox$ пряма AA' перетинає r у точці A_0, а $|A_0A'|/|AA_0| = \lambda$.

Отже, якщо $A(x,y)$, $A_0(x_0,y_0)$ і $A'(x',y')$, то з $\Delta A_0A'B$ і ΔAA_0C маємо

$$\lambda = y'/y = (x_0 - x')/(x - x_0),$$

а тому

$$x' = -\lambda x + (1+\lambda)x_0;$$
$$y' = \lambda y.$$

Тобто розглянута точкова відповідність /перспективно-афінне перетворення/ є окремим випадком афінної точкової відповідності, аналітичне зображення якої таке:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13};$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}$$

2.2. Монопроекції просторового оригіналу

Складніше побудувати проекційне зображення просторового /тривимірного/ оригіналу.

Оскільки положення кожної точки в просторі залежить від трьох координат /параметрів/, а положення кожної точки – зображення на площині проекцій – від двох координат /параметрів/, то в просторі маємо ∞^3 точок /трипараметрична множина точок/, а на площині – ∞^2 /двопараметрична множина/. Отже, встановити взаємно однозначну точкову відповідність між просторовим оригіналом /частиною тривимірного простору/ і його зображенням – монопроекцією /частиною двовимірної площини проекцій/ неможливо *, як неможливо і реконструювати оригінал за зображенням – монопроекцією. Справді, нехай Ω' – монопроекція оригіналу Ω /рис.2.6/. Проеціююча (ℓ) має з оригіналом щонайменше дві спільні точки /наприклад, A і B /, а зображуються вони однією точкою / $A' = B'$ /, яка не дає підстав щодо висновку про їх взаємне розміщення.

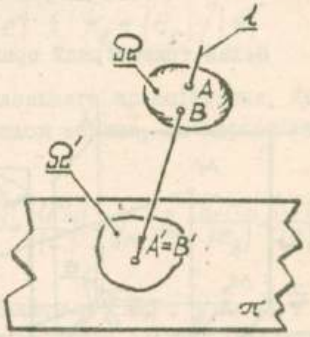


Рис. 2.6

Відтворювані зображення-монопроекції дістають за допомогою аксонометричного методу побудови зображень.

Запитання для самоперевірки

1. Метод побудови проекційних зображень плоских оригіналів.
2. Що означає термін взаємно однозначна точкова відповідність?
3. Способи задання точкової відповідності на площині.
4. Які властивості має точкова відповідність на площині?
5. Яка фігура в точковій відповідності на площині відповідає /в загальному випадку/ прямокутнику, трапеції, квадрату, колу?
6. Чому еліпс має бути центрально-симетричною фігурою?
7. Які діаметри еліпса спряжені?
8. Чи є спряжені діаметри в кола?

* Зображення, що складається з однієї проекції оригіналу, називається монопроекцією.

Література

[8]

I0. Кованцов М.І. Проективна геометрія. - К., I969.

II. Муравьев М.С. Начертательная и проективная геометрия. - М., I960.

I2. Четверухин Н.Ф. Проективная геометрия. - М., I953.

3. АКСОНОМЕТРИЧНИЙ МЕТОД ПОБУДОВИ ЗОБРАЖЕНЬ

Здобуті за цим методом зображення досить наочні, тому інколи його називають методом побудови наочних зображень.

3.I. Апарат проеціювання. Основні поняття

Нехай тривимірний оригінал Ω з фіксованою довільною точкою $M \in \Omega$ віднесено до просторової прямокутної координатної системи $Oxyz$ /у загальному випадку, який тут не розглядається, $Oxyz$ може бути й косокутна/, що її називають системою віднесення /рис. 3.I/.

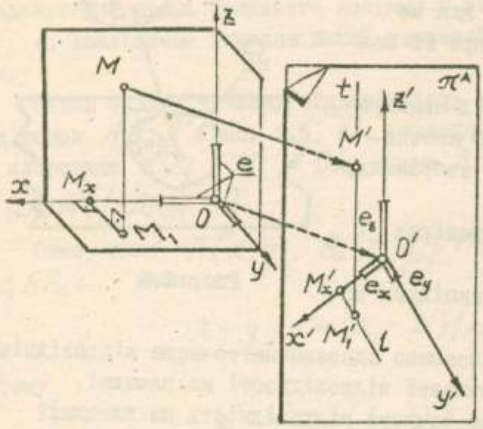


Рис. 3.I

Спроеціюємо точку M ортогонально, тобто паралельно осі Oz, на точку $M_1 \in (Oxy)$. Якщо спроеціювати ортогонально M_1 на точку $M_x \in (Ox)$, то положення M у просторі відносно системи $Oxyz$ цілком визначене триланковою ламаною $OM_x M_1 M$. Таке геометричне визначення положення M у системі $Oxyz$ доповнюється, як відомо, координатним визначенням. Якщо x_M, y_M і z_M - координати M у системі $Oxyz$, то це означає, що

$$x_M = |OM_x|/|e|;\quad y_M = |M_x M_1|/|e|;\quad z_M = |M_1 M|/|e|,$$

де e – одиничний відрізок по осях Ox, Oy і Oz /тобто $|e| = 1$/.

Спроеціюємо систему $Oxyz$ /разом з Ω і $M \in \Omega$/ паралельно в площину π_A, яку називатимемо площиною аксонометричних проекцій *. Якщо $O \to O'$, то $(Ox) \to (O'x)$, $(Oy) \to (O'y)$ і $(Oz) \to (O'z)$. Прямі $O'x'$, $O'y'$ і $O'z'$ – аксонометричні осі. Скористаємося ними для побудови зображення (M') точки M у площині π_A. Зазначимо, що неоднакове розміщення (Ox), (Oy) і (Oz) відносно π_A призводить до проеціювання однакового одиничного відрізка e кожної з цих осей в різні одиничні відрізки відповідних аксонометричних осей /в аксонометричні одиниці/, бо в загальному випадку коефіцієнти спотворення аксонометричних осей різні:

$$k_x = |e_x|/|e|,\quad k_y = |e_y|/|e| \text{ і } k_z = |e_z|/|e|.$$

Проте виходячи з властивостей паралельного проеціювання, координати M' у системі $O'x'y'z'$ виявляються такими, що дорівнюють координатам M у системі $Oxyz$:

$$x'_M = \frac{|O'M'_x|}{|e_x|} = \frac{|OM_x|}{|e|} = x_M,\quad y'_M = \frac{|O'M'_y|}{|e_y|} = \frac{|OM_y|}{|e|} = y_M,\quad z'_M = \frac{|O'M'_z|}{|e_z|} = \frac{|OM_z|}{|e|} = z_M$$

Отже, досить задати точку M координатами $/x_M, y_M, z_M/$ у системі віднесення, щоб стала можливою побудова її аксонометричної проекції (M') і вторинної проекції (M'_1) у будь-якій системі аксонометричних осей.

Щоб побудувати точку M'_x у системі $O'x'y'z'$, слід відрізок e_x відкласти від O' уздовж прямої $(O'x')$ x_M разів. Для побудови точки M'_1 уздовж прямої $\ell) M'_x \wedge \ell \| (O'y')$* від точки M'_x необхідно відкласти відрізок e_y y_M разів. Нарешті, щоб побудувати точку M', треба від точки M'_1 уздовж прямої $t) M'_1 \wedge \wedge t \| (O'z')$ відрізок e_z відкласти z_M разів.

Отож, щоб побудувати M' за координатами M, слід насамперед побудувати її вторинну проекцію M'_i, де $i = 1, 2, 3$. Навпаки, якщо M' задано, а M'_i невідомо /або її не можна побу-

---

* Див. [21].

** $\wedge$ – символ кон"юнкції, який вказує, що пряма ℓ /далі пряма t/ має задовольняти дві умови.

дувати/, то й координати точки M-оригіналу визначити неможливо. Такі зображення називають неповними [ж]. Розв"язання конструктивних задач, що стосуються точки M', на таких зображеннях неможливо.

3.2. Теорема Польке – Шварца

У проектно-конструкторській практиці апарат проеціювання фігурує умоглядно. Тому знати, як саме обирати напрями аксонометричних осей $O'x'$, $O'y'$ і $O'z'$ та довжини відрізків – аксонометричних одиниць e_x, e_y і e_z – дуже важливо.

Згідно з теоремою Польке – Шварца, яка б не була трійка компланарних, але неколінеарних відрізків / e_x, e_y, $e_z \subset \pi_A$ / зі спільним кінцем (O'), її можна взяти за паралельну проекцію трійки будь-яких некомпланарних і неколінеарних відрізків /наприклад, відрізків e / зі спільним кінцем (O), або їй подібної трійка відрізків /рис. 3.2/ [жж].

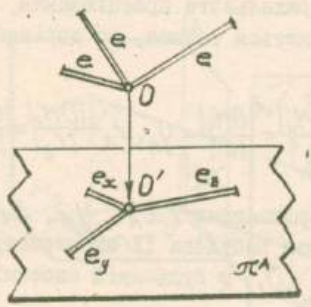


Рис. 3.2

Ця теорема, вперше сформульована Польке /1853/ і доведена Шварцем /1864/, дозволяє цілком довільно обирати і напрями осей $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$, і довжини відрізків e_x, e_y, e_z, а отже, і коефіцієнти спотворення / K_x, K_y, K_z / вздовж відповідних аксонометричних осей.

Проте, надмірна довільність вибору системи аксонометричних осей і одиниць /аксонометричної системи/ має і свої вади: утруднюється, зокрема, сприймання і виконання зображення, не кажучи вже про його відтворюваність.

[ж] Термін і теорія таких зображень належать М.Ф.Четверухіну.

[жж] Центрально-проекційний аналог теореми Польке – Шварца, а також її аналоги щодо багатовимірного простору, запропоновані М.Ф.Четверухіним [20], І.С.Джапарідзе [15], В.М.Первіковою [17], М.М.Бескіним [13] та ін.

Крім того, довільність вибору аксонометричної системи обмежується умовами проеціювання системи віднесення $Oxyz$ на $O'x'y'z'$. Отже, необхідно розглянути класифікацію аксонометричних систем.

3.3. Класифікація аксонометричних систем

А. Одна з ознак класифікації – напрям проеціювання (OO') системи віднесення $Oxyz$ на $O'x'y'z'$ /див. рис. 3.1/.

Якщо $(OO') \wedge \pi_A = \varphi \neq \pi/2$, то здобута аксонометрична система – косокутна й відповідна аксонометрична проекція в площині π_A, виконана за допомогою цієї системи, – косокутна аксонометрична проекція.

У косокутній аксонометричній системі залежність між коефіцієнтами спотворення вздовж осей має такий вигляд:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2 + ctg^2\varphi^{**}. \qquad /3.1/$$

Якщо $(OO') \wedge \pi_A = \varphi = \pi/2$, дістанемо прямокутну аксонометричну систему, а отже, відповідно і прямокутну аксонометричну проекцію, що виконана за допомогою такої системи. Залежність /3.1/ при цьому спрощується:

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 2 \qquad /3.2/$$

В останньому випадку вибір значень k_x, k_y і k_z /а отже, і довжин e_x, e_y і e_z/ не тільки обмежений зверху / < 1/, а й взагалі можливий тільки для двох коефіцієнтів, позаяк значення третього /згідно з /3.2// визначено значеннями перших двох.

Б. Друга ознака класифікації аксонометричних систем – співвідношення значень коефіцієнтів спотворення вздовж аксонометричних осей. Як косокутна, так і прямокутна аксонометричні системи можуть бути:

1/ ізометричними, якщо $k_x = k_y = k_z$;

2/ диметричними, якщо однакові два коефіцієнти спотворення, наприклад, $k_x = k_z \neq k_y$;

3/ триметричними, якщо $k_x \neq k_y \neq k_z \neq k_x$.

** Як довели /незалежно один від одного/ J.Schopp /1965 р./; [25], М.М.Єдицький /1967 р./ [22] і Л.О.Яцкевич /1969 р./ [24]. залежність /3.1/ лише частинний випадок /при $n = 3$ і $k = 2$/ більш загальної $\sum_{i=1}^{n} k_i^2 = k + ctg^2\varphi$,

де $k \leq n-1$ – вимірність простору аксонометричних проекцій π_A; n – вимірність простору, де відбувається аксонометричне проеціювання.

Аксонометричні проекції, що їх одержуємо за допомогою цих систем, називаються ізометричними, диметричними і триметричними аксонометричними проекціями відповідно.

В. З величезної кількості теоретично можливих аксонометричних систем на кресленнях ЄСКД дозволяє використовувати лише стандартні аксонометричні системи /і, відповідно, проекції/. До них належать /згідно з ДЗСТ/:

I. Прямокутні системи:

I/ ізометричні аксонометричні з розміщенням осей $O'x' \hat{} O'y' = O'x' \hat{} O'z' = 120^0$ /рис. 3.3, а/ і співвідношенням коефіцієнтів спотворення:

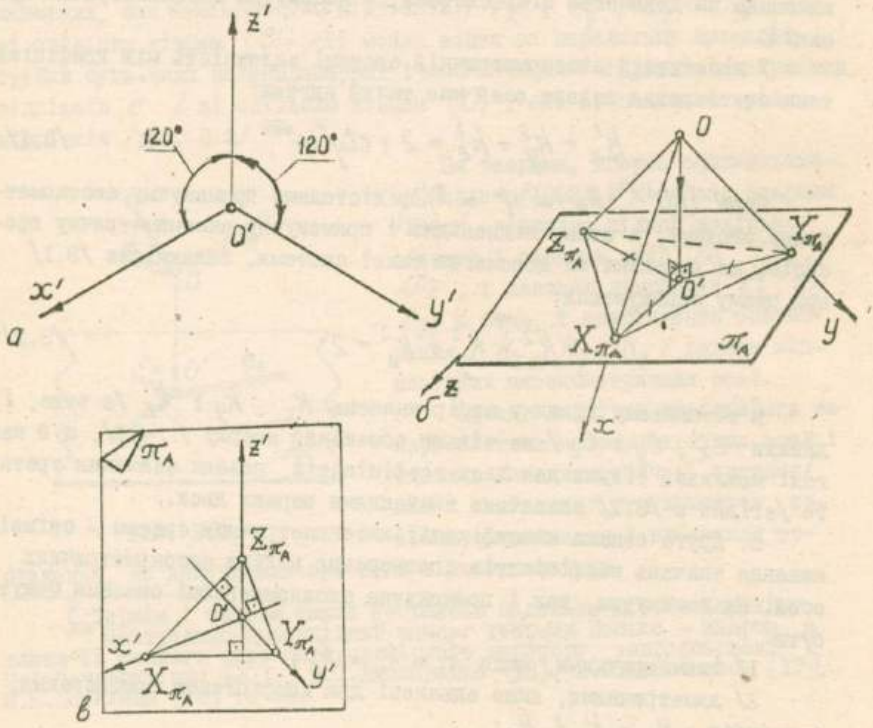


Рис. 3.3

а/ у точної системи

$$k_x = k_y = k_z \approx 0{,}82$$

/що випливає із залежності /3.2// це досягається однаковим розміщенням осей системи віднесення щодо π_A /рис. 3.3, б/;

б/ у зведеної системи /саме її використовують на практиці/

$$k_x = k_y = k_z = 1$$

і, отже, $k_i = \frac{1}{0{,}82} k_i$, де $i = x, y, z$, а $\frac{1}{0{,}82}$ – коефіцієнт зведення, або коефіцієнт подібності аксонометричних проекцій, виконаних за точною чи зведеною системами;

2/ диметричні аксонометричні з розміщенням осей $O'x' \sphericalangle O'z' \approx 97^0 10'$, $O'y' \sphericalangle O'z' \approx 131^0 25'$ /рис.3.4/ і співвідношенням коефіцієнтів спотворення:

а/ у точної системи

$k_x = k_z \approx 0{,}94$ і $k_y \approx 0{,}47$ /що теж легко обчислити за залежністю /3.2//;

б/ у зведеної системи /що використовується на практиці/

$k_x = k_z = 1$ і $k_y = 0{,}5$; отже, тут коефіцієнт зведення /коефіцієнт подібності/ – $\frac{1}{0{,}94}$.

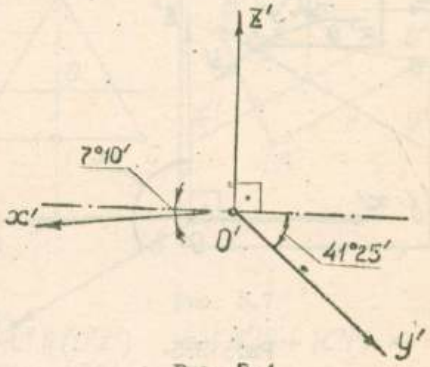


Рис. 3.4

Як бачимо, для одержання зведеної системи слід коефіцієнти спотворення точної системи множити на такий множник /коефіцієнт зведення/, щоб при цьому коефіцієнти зведеної системи /усі, або хоч деякі/ дорівнювали одиниці.

Так званий трикутник слідів $(X_{\pi_A} Y_{\pi_A} Z_{\pi_A})$, сторони якого – сліди площин координатної системи віднесення на площині π_A, має такі властивості: він гострокутний і аксонометричні осі несуть на собі його висоти $((X_{\pi_A} Z_{\pi_A}) \perp (O'y'), (Y_{\pi_A} Z_{\pi_A}) \perp (O'x')$ і $(X_{\pi_A} Y_{\pi_A}) \perp (O'z'))$ /див. рис. 3.3, в/.

2. Косокутні системи.

При косокутному проеціюванні системи віднесення зручність коефіцієнтів спотворення для практичного застосування забезпечена можливістю вибрати напрям проеціювання. Отже, всі аксонометричні косокутні системи мають точні коефіцієнти спотворення;

I/ фронтальні косокутні аксонометричні системи. Їх дістаємо, якщо площина π_A розміщена фронтально, тобто паралельно до площини Oxz системи віднесення $(\pi_A \parallel (Oxz))$ /рис. 3.5, а/. При цьому, очевидно, площина проеціюється без спотворення: $(O'x')\,\hat{}\,(O'z') = 90^0$ /рис. 3.5, б/. Кут α = $= (O'y')\,\hat{}\,(O'z')$ може набути лише три значення: I20, I35 і I50^0.

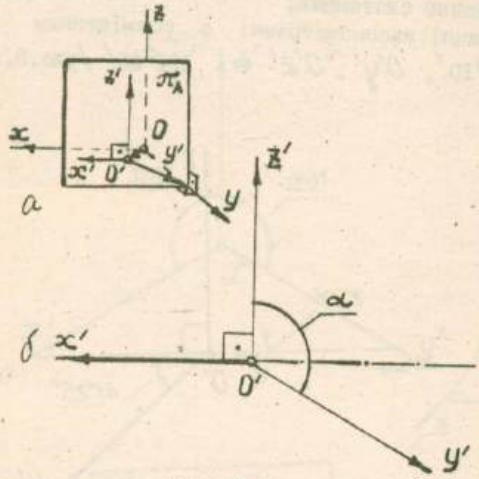


Рис. 3.5

За співвідношенням коефіцієнтів спотворення серед фронтальних косокутних аксонометричних систем розрізняють

а/ ізометричні, якщо $k_x = k_y = k_z = I$;

б/ диметричні, якщо $k_x = k_y = I$ і $k_z = 0{,}5$;

2/ горизонтальні ізометричні косокутні аксонометричні системи. У цьому випадку площина $\pi_A \parallel (Oxy)$ /рис. 3.6, а/, тобто площина π_A розміщена горизонтально. Отже, без спотворення проеціюється вже площина Oxy, а тому $(O'x')\,\hat{}\,(O'y') = 90^0$ /рис. 3.6, б/. Кут α може набувати тільки три значення: I20, I35 і I50^0. Співвідношення коефіцієнтів спотворення: $k_x = k_y = k_z = I$.

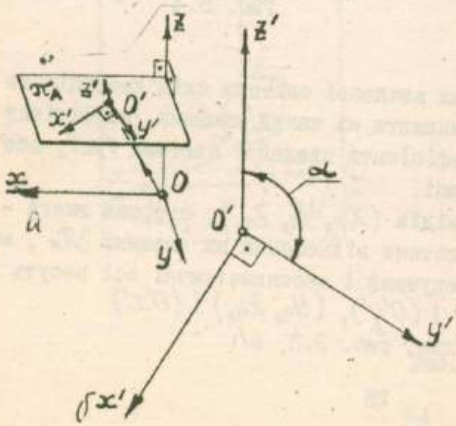


Рис. 3.6

3.4. Приклади побудови зображень аксонометричним методом

Насамперед зазначимо:

1/ зображення, виконані за цим методом, є паралельними проекціями оригіналу, а отже, зберігають усі властивості оригіналу, які інваріантні відносно паралельного проеціювання;

2/ наведені далі /в прикладах/ зображення виконані за допомогою довільних, але ізометричних систем, щоб, з одного боку, продемонструвати загальність методу, а з другого – забезпечити його простоту. При цьому вісь $O'z'$ завжди вертикального напряму. Напрями $(O'x')$ і $(O'y')$ довільні.

Приклад 3.1. Побудувати /аксонометричним методом/ зображення правильного ΔABC.

Побудова. Віднесемо ΔABC /рис. 3.7, а/ до плоскої системи віднесення Oxy так, щоб центр уявлюваного описаного /вписаного/ навколо ΔABC кола збігався з початком координат O, а $[AC] \parallel (Ox)$. Тоді зображення точки $1 = [AC] \cap (Oy)$ здобудемо /рис. 3.7, б/, відкладаючи від O' по $(O'y')$ відрізок $|O'1'| = |OI|$. Сторона $A'C' \parallel (O'x')$, а $|A'1'| = |C'1'| = |A1| = |C1|$. Нарешті, $|B'O'| = |BO|$.

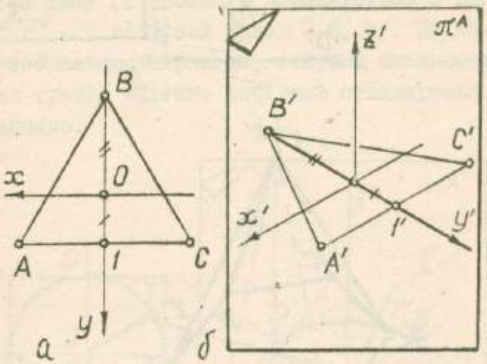


Рис. 3.7

Приклад 3.2. Побудувати зображення піраміди $SABCDEF$ з правильним шестикутником в основі.

Побудова. Як і при побудові в попередньому прикладі, віднесемо шестикутник основи $ABCDEF$ /рис. 3.8, а/ до системи віднесення, але цього разу просторової $Oxyz$ так, щоб центр уявної описаної навколо шестикутника основи кола збігався з початком координат O, діагональ $CF \subset (Oy)$, а вершина піраміди $S \in (Oz)$. Зображення точок C, F, 1 і 2 здобудемо виходячи з $|C'O'| = |F'O'| = |CO| = |FO|$ /рис. 3.8, б/ і $|O'1'| = |O'2'| = |O1| = |O2|$.

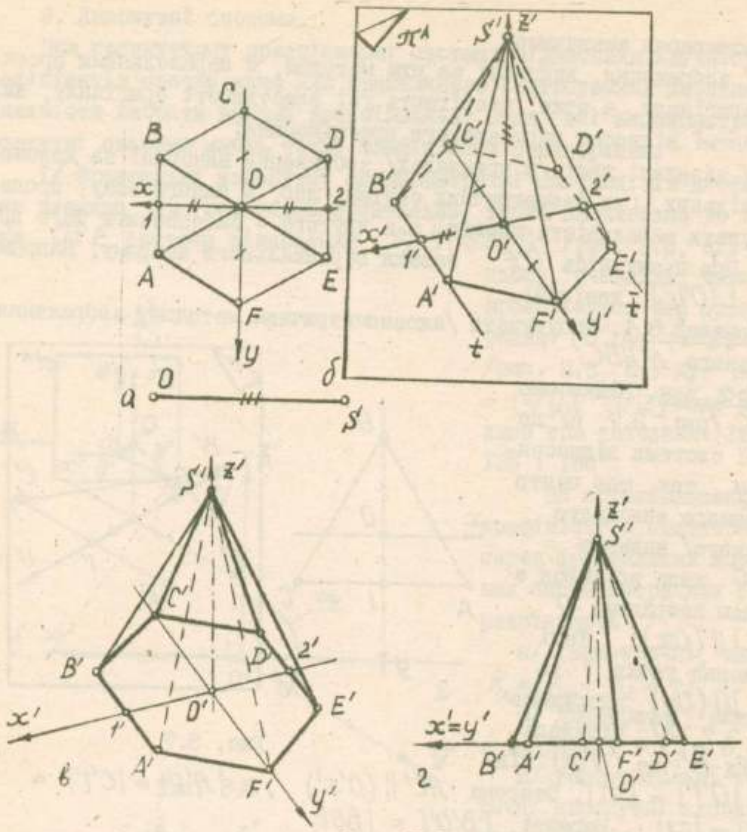


Рис. 3.8

Оскільки $(AB)\parallel(ED)\parallel(Oy)$, то проведемо прямі $t\ni 1'\wedge t\parallel(O'y')$ і $\bar{t}\ni 2'\wedge\bar{t}\parallel(O'y')$. Уздовж t і $\bar{t}$, від точок 1' і 2', відкладемо відповідно відрізки $|A'1'|=|B'1'|=|E'2'|=|D'2'|=|A1|=|B1|=|E2|=|D2|$. Відрізок $|O'S'|=|OS|$. Наносячи зображення ребер піраміди - бокових /$[A'S']$, $[B'S']$, $[C'S']$, $[D'S']$, $[E'S']$, $[F'S']$ / і основи /$[A'B']$, $[B'C']$, $[C'D']$, $[D'E']$, $[E'F']$, $[F'A']$/, слід враховувати їх видимість: видимі виконують суцільною, а невидимі - штриховою, вдвічі тоншою лінією. В даному разі теоретично можливі три варіанти:

I/ око спостерігача /або центр проеціювання/ розміщений над площиною Oxy* і, отже, видимі $[A'S']$, $[B'S']$, $[E'S']$, $[F'S']$, $[A'B']$, $[A'F']$, $[E'F']$, а невидимі $[C'S']$, $[D'S']$, $[B'C']$, $[C'D']$, $[D'E']$; саме цей варіант - стандартний;

2/ око спостерігача міститься під площиною Oxy** і тоді вже видимі $[B'S']$, $[C'S']$, $[D'S']$, $[E'S']$, $[A'B']$, $[A'F']$, $[E'F']$, $[B'C']$, $[C'D']$, $[D'E']$, а невидимі $[A'S']$, $[F'S']$ /рис. 3.8, в/;

зауважимо, що ребра $[B'S']$, $[E'S']$, $[A'B']$, $[A'F']$, $[E'F']$ видимі в обох варіантах - вони належать до границі зображення піраміди-обрису або окреслення;

3/ око спостерігача міститься в площині Oxy і, отже, площина Oxy - проеціююча, а тому її проекція вироджується в пряму і шестикутник $A'B'C'D'E'F'$ - у відрізок /рис. 3.8, г/. Це настільки погіршує наочність зображення піраміди, зокрема аксонометричних зображень взагалі, що третій варіант доцільно стандартних аксонометричних систем виключено.

Приклад 3.3. Побудувати зображення кола одиничного радіуса /тобто такого, що $R = |e| = 1$/.

Побудова. Початок системи віднесення $Oxyz$ суміщаємо з центром даного кола - оригіналу, яке розмістимо в площині Oxy. Навколо кола-оригіналу опишемо квадрат, задля чого через точки перетину кола з осями A, B, C, D; рис. 3.9 а/ проведемо прямі, що паралельні відповідним осям координат.

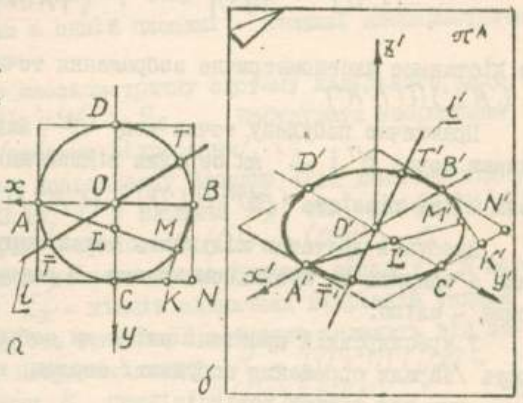


Рис. 3.9

---

* Око спостерігача - $S_0^\infty = (S_0^\infty O) \cap (X^\infty Y^\infty Z^\infty) \parallel (X_{\Pi_A} Y_{\Pi_A} Z_{\Pi_A})$ належить зовнішній області двогранного кута $\angle(ABS), (EFS)$ і міститься нижче площин BCS, CDS і DES, як і відрізок $S_0^\infty(S_0^\infty)$, де $(S_0^\infty) = (S_0^\infty(S_0^\infty)_1) \cap (Oxy)$, а $(S_0^\infty(S_0^\infty)_1) \perp (Oxy)$.

** у цьому випадку око спостерігача (S_0^∞) симетричне до відносно початку системи координат - т. O.

Побудуємо зображення цього квадрата, для чого попередньо побудуємо точки A', B', C' і D' в системі $O'x'y'z'$ і через них проведемо прямі, що паралельні відповідним аксонометричним осям /рис. 3.9, б/.

Далі побудуємо зображення довільної точки (M) кола. Помітимо, що точки $K = [BM] \cap [CN]$ і $L = [AM] \cap [CM]$ розділяють відрізки відповідно CN і CD в однакових пропорціях. Справді,

$$\hat{AMB} = \pi/2 \Rightarrow \Delta ABM \sim \Delta BKN \wedge \Delta ABM \sim \Delta ADL, \text{ але}$$

$$[AD] \cong [BN] \Rightarrow \Delta ADL \cong \Delta BNK \Rightarrow |KN| = |LO| \Rightarrow \frac{|CO|}{|LO|} = \frac{|CN|}{|NK|} \quad /3.3/$$

Довільність добору точки M показує, що рівність /3.3/ дійсна і для будь-якої іншої точки кола. Оскільки /властивість паралельного проеціювання/

$$\frac{|C'D'|}{|L'D'|} = \frac{|CO|}{|LO|} \quad \text{і} \quad \frac{|C'N'|}{|K'N'|} = \frac{|CN|}{|KN|},$$

то дістанемо аксонометричне зображення точки M - точку $M' = (A'L') \cap (B'K')$

Практично побудову точок типу M' найзручніше починати з побудови точок K' і L' як середин відповідних відрізків, тобто, щоб мала місце рівність $|C'O'|/|L'O'| = |C'N'|/|K'N'| = 2$

Здобувши достатню кількість точок типу M', за допомогою лекала з"єднують їх суцільною кривою. В даному випадку лекальна крива - еліпс.

У креслярській практиці еліпс як зображення кола часто замінюють /заради спрощення побудови/ овалом, що складається із спряжених дуг кіл різних радіусів.

Звичайно еліпс можна одержати як проекцію кола будь-якого радіуса. Але еліпс, як проекція кола одиничного радіуса, відіграє особливу роль.

Проведемо через точку O' пряму ℓ', що перетинає побудований еліпс /рис. 3.9, б/ у точках T' і $\bar{T}'$. Ясно, що $[O'T']$ і $[O'\bar{T}']$ - півдіаметри еліпса. Їх оригінали $[OT]$ і $[O\bar{T}]$ - радіуси кола. За побудовою $[OT] = 1$. Тоді коефіцієнт спотворення вздовж прямої ℓ : $k_\ell = \frac{|O'T'|}{|OT|} = |O'T'|$. Зі зміною напряму ℓ' змінюється значення $|O'T'|$, а отже, і коефіцієнт спотворення k_ℓ. Саме через це

побудований еліпс називають масштабним еліпсом, бо він дозволяє визначити коефіцієнт спотворення в будь-якому напрямі на зображенні площини Oxy . Аналогічно можна визначити коефіцієнти спотворення в довільних напрямах на зображеннях площин Oxz і Oyz , а за допомогою масштабного еліпсоїда й на зображенні простору $Oxyz$.

Отже, вимірюваність монопроекційних зображень аксонометричних проекцій ускладнюється тим, що у них у кожному напрямі існує свій коефіцієнт спотворення.

3.5. Побудова аксонометричних проекцій плоских оригіналів за допомогою точкової відповідності

Точкова відповідність плоских полів точок може бути зведена до відповідності двох плоских точкових полів однієї площини. Отже, цілком натурально використати точкову відповідність між плоскими полями площин аксонометричних проекцій / $O'x'y'$. $O'x'z'$. $O'y'z'$ / і відповідними плоскими полями / Oxy . Oxz . Oyz / системи віднесення, розмістивши їх попередньо в одній площині – площині аксонометричних проекцій π_A.

Приклад 3.4. Задано аксонометричну систему довільного виду, але таку, що $k_z = 1$: $O'x'y'z' \subset \pi_A$. Побудувати зображення кривої $AB \subset Oxz$ /системи віднесення/.

Побудова. Розміщуємо координатну площину Oxz системи віднесення з кривою AB /рис. 3.10, а/ у площині π_A так, щоб $(Oz) \parallel (O'z')$. Очевидно, найпростіше було б сумістити $(Oz) = (O'z') = r$ /рис. 3.10, а/, визначаючи точкову відповідність віссю r й парою відповідних точок E_x і E'_x – кінців одиничних відрізків уздовж осей Oz і $O'z'$. Складність графічної побудови залежить від вигляду AB /оригіналу/. Побудуємо точку $K = (O'x') \cap (Ox)$. Якщо проведемо через точку K пряму $r \parallel (Oz) \parallel (O'z')$, то, як легко уявити, дістанемо точкову відповідність з віссю r і парою відповідних точок O і O'. Побудову M' за заданою M і зображення кривої $(A'B')$ за заданою AB показано на рис. 3.10, а.

Приклад 3.5. Аналогічна конструкція встановлення точкової відповідності задля побудови $C'D'$ за заданою кривою CD поля $O'y'z'$ з полем Oyz , де вісь відповідності – пряма $r (r \parallel (Oz) \parallel (O'z') \wedge r) K = (Oy) \cap (O'y')$ і, отже, $k_z = 1$, а пара відповідних точок: O і O' /рис. 3.10, б/.

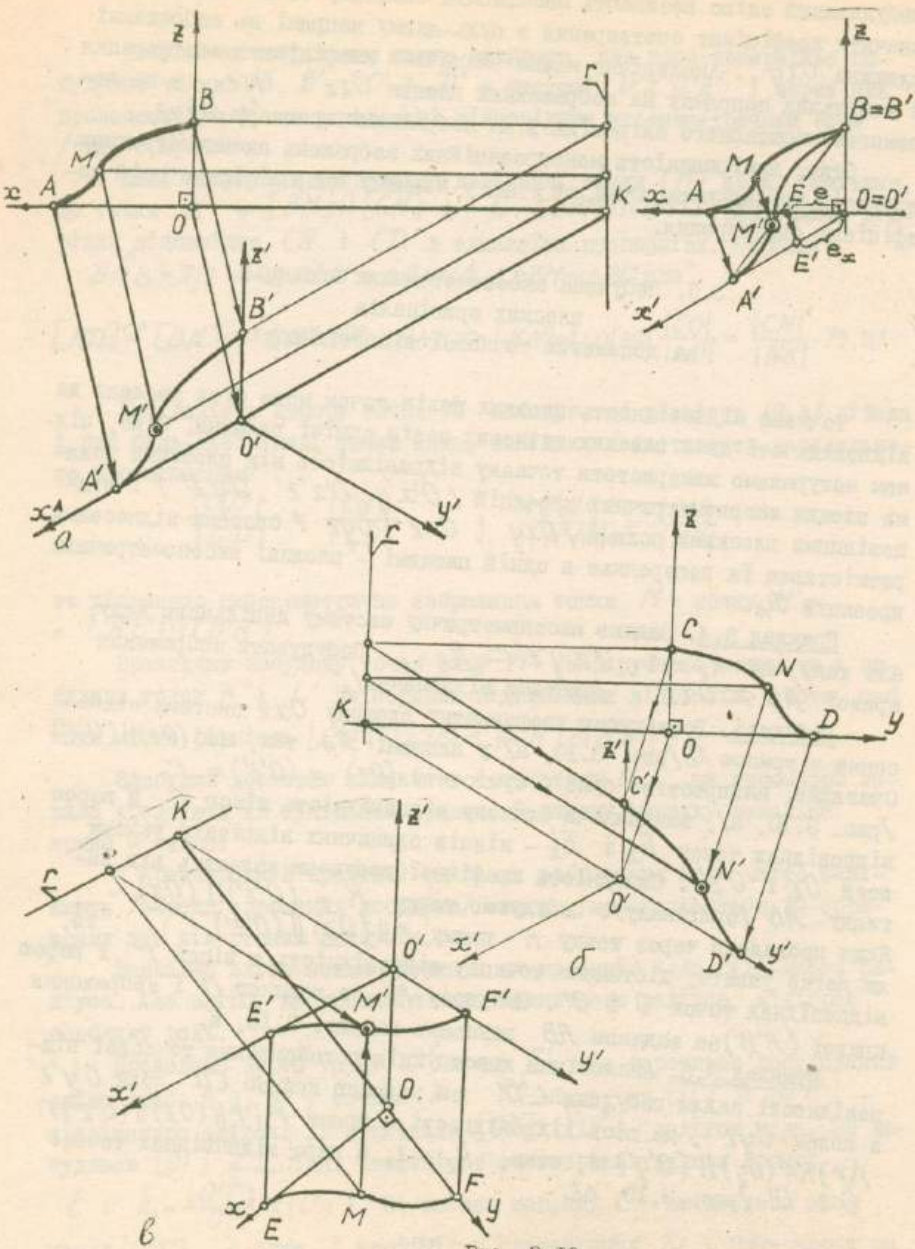

z
B
M
x
A
0
K
z'
B'
M'
0'
A'
x'
y'
a
B=B'
M
x
A
E
e
0=0'
M'
E'
e_x
A'
x'
z
C
N
K
D
y
z'
0
C'
N'
0'
D'
y'
x'
б
K
z'
0'
x'
E'
M'
F'
y'
x'
0
F
x
E
M
y
в

Рис. 3.10

Приклад 3.6. На рис. 3.10, в проілюстровано побудову кривої $E'F' \subset (Ox'y')$ як зображення заданої в площині системи відношення Oxy кривої EF. Для цього використано точкову відповідність полів $O'x'y'$ і Oxy з віссю r /де $r \parallel (Oz) \parallel (O'z') \wedge \wedge r \ni K = (Oy) \cap (O'y')$ і, отже, $K_x = 1$/ та парою відповідних точок O' і O.

В усіх трьох прикладах використано визначення точкової відповідності плоских полів точок за заданим напрямом $(r \parallel (Oz) \parallel (O'z'))$ - у прикладах 3.4 і 3.5, $r \parallel (Ox) \parallel (O'x')$ - у прикладі 3.6/ осі відповідності (r), парою відповідних прямих /Ox і Ox' - у прикладі 3.4, Oy і $O'y'$ - у 3.5-3.6/ і парою відповідних точок /O і O'/.

3.6. Реконструкція оригіналу за аксонометричною проекцією

Відтворення /реконструкція/ оригіналу /геометричного об"єкта/ за його зображенням аксонометричною проекцією можливе, якщо можна знайти координати оригіналу будь-якої точки цього об"єкта за її аксонометричним зображенням.

На рис. 3.11 показано, як знайти координати x_M, y_M, z_M оригіналу довільної точки M, що належать поверхні прямого кругового конуса за її прямокутним ізометричним зображенням M' /цифри зазначають порядок нанесення ліній побудови/. Дістанемо $x_M = x'_M = |O'M'_z|$, $y_M = y'_M = |M'_x M'|$ і $z_M = z'_M = |M'_1 M'|$, де $(M'M'_1) \parallel (O'z')$, а $(M'_1 M'_x) \parallel (O'y')$. Як бачимо, рішенням задачі є побудова вторинної точки M - точки M'_1.

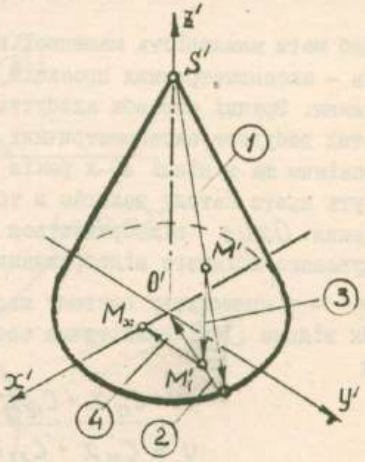


Рис. 3.11

У випадку оригіналу (Ω) загального виду координати точки $M \in \Omega$ за заданою точкою $M' \in \Omega'$, де Ω' - аксонометрична проекція оригіналу, теж можуть бути знайдені, якщо можна побудувати якусь з вторинних проекцій точки M, наприклад M'_1. Наведену далі побудову доцільно розглядати при повторенні курсу, після засвоєння попередніх розділів навчального матеріалу.

Отож, нехай задано прямокутну ізометричну аксонометричну проекцію об"єкта Ω – поверхні обертання /рис. 3.12/ з точкою $M \in \Omega : \Omega'$ і $M' \in \Omega'$. Координати точки M знаходимо так:

1/ вважаємо, що точка M' – проекція прямої $\ell \ni M \wedge \ell \parallel (OO')$, де (OO') – напрям проеціювання системи $Oxyz$ в площину π_1; тоді $M' = \ell' = N' = L'$, а $N = \ell \cap (Oxz)$ і $L = \ell \cap (Oyz)$;

2/ оскільки система $O'x'y'z'$ – прямокутна ізометрична, то координати точки N : $x_N = |O'N'_x|$. $y_N = 0$ і $z_N = |O'N'_z|$, а координати точки L : $x_L = 0$. $y_L = |O'L'_y|$ і $z_L = |O'L'_z|$;

3/ побудуємо комплекс проекцій /КП/ поверхні Ω і прямої LN;

4/ перезадамо на КП поверхню Ω каркасом паралелей $\{p'\}$;

5/ побудуємо на КП переріз поверхні Ω площиною $\Sigma \supset \ell \wedge \Sigma \perp \pi_1 : \omega = \Sigma \cap \Omega$;

6/ нарешті, побудуємо на КП $M = \omega \cap \ell$ і дістанемо її координати: x_M . y_M . z_M;

7/ знайдемо координати x_M . y_M . z_M як координати точки перетину $M = (LN) \cap \Omega$.

3.7. Аналітичне зображення аксонометричних проекцій

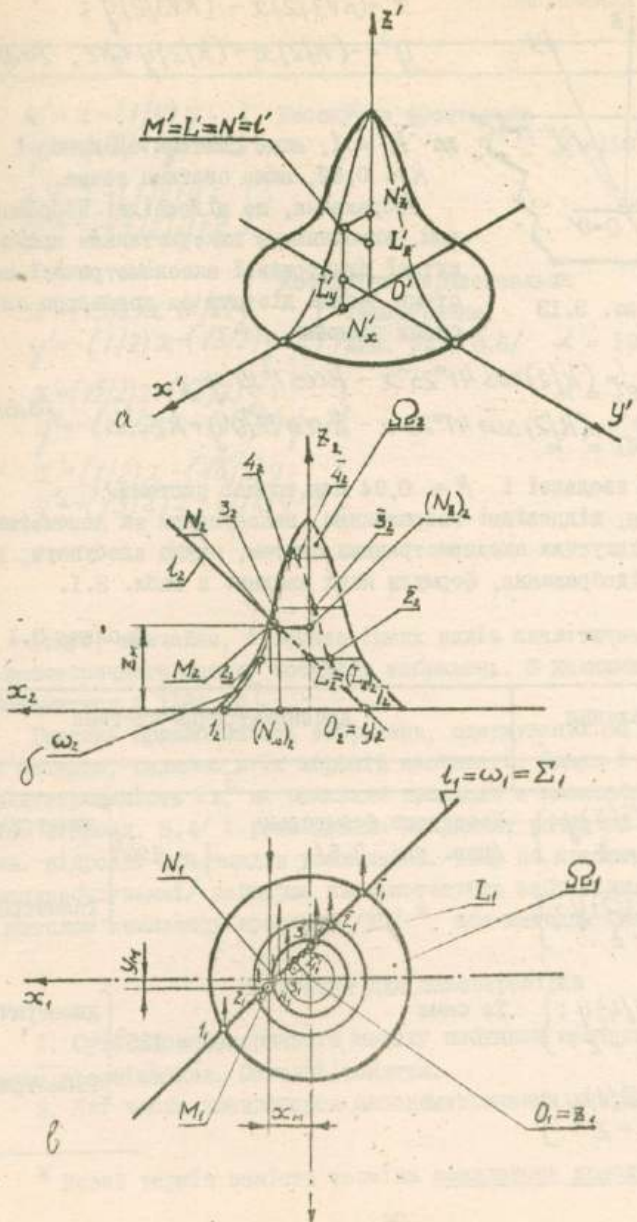
Щоб мати можливість машинної побудови /за допомогою ЕОМ/ зображень – аксонометричних проекцій, доцільно дістати їх аналітичні зображення. Зручні способи здобуття таких зображень дає обчислювальний метод побудови аксонометричних проекцій, що запропоновано М.М.Бескіним ще в кінці 40-х років [13].

Суть цього методу полягає в тому, що оригінал разом з системою віднесення $Oxyz$ відображається /не проеціюється/ за допомогою виродженого афінного відображення [13] в площину π_1, причому $Oxyz$ – в прямокутну систему координат $O'x'y'$ /рис. 3.13/.

Як відомо [16], аналітичне зображення цього відображення має вигляд

$$x' = c_{11}x + c_{12}y + c_{13}z;$$
$$y' = c_{21}x + c_{22}y + c_{23}z. \qquad /3.4/$$

Для одержання зображень, що відповідають зображенням, виконуваним за допомогою прямокутної ізометричної аксонометричної системи, слід користуватися частинним випадком /3.4/:


M'=L'=N'=l'
z'
x'
y'
а
б
в
Рис. 3.12

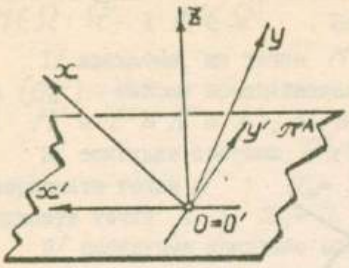


Рис. 3.13

$$x' = (k\sqrt{3}/2)x - (k\sqrt{3}/2)y;$$
$$y' = -(k/2)x - (k/2)y + kz, \quad /3.5/$$

де k = I, якщо система зведена, і $k \approx 0{,}82$, якщо система точна.

Зображення, що відповідні зображенням, виконаним з використанням прямокутної диметричної аксонометричної системи, можна дістати за допомогою системи рівнянь

$$x' = (k/2)\cos 41°25'x - k\cos 7°10'y;$$
$$y' = -(k/2)\sin 41°25'x - k\sin 7°10'y + kz, \quad /3.6/$$

де k = I для зведеної і $k \approx 0{,}94$ для точної системи.

Зображення, відповідні зображенням, виконуваним за допомогою стандартних косокутних аксонометричних систем, можна здобувати, використовуючи відображення, формули яких зведені в табл. 3.I.

Таблиця 3.I

№ п/п	Відображення	Аксонометрична система
I	2	3
I	$x' = x - (\sqrt{3}/4)y;$ $y' = -\frac{1}{4}y + z$	Косокутна фронтальна /див. рис. 3.5/	α = I20° — диметрична
	$x' = x - (\sqrt{3}/2)y;$ $y' = -\frac{1}{2}y + z$		α = I20° — ізометрична
2	$x' = x - (\sqrt{2}/4)y;$ $y' = -\frac{\sqrt{2}}{4}y + z$	Те саме	α = I35° — диметрична
	$x' = x - (\sqrt{2}/2)y;$ $y' = -\frac{\sqrt{2}}{2}y + z$		α = I35° — ізометрична

Закінчення табл. 3.I

I	2	3
3	$x'=x-(1/4)y;$ $y'=-(\sqrt{3}/4)y+z$	Косокутна фронтальна, $\alpha=150^0$: диметрична
	$x'=x-(1/2)y;$ $y'=-(\sqrt{3}/2)y+z$	Косокутна фронтальна, $\alpha=150^0$: ізометрична
	$x'=(\sqrt{3}/2)x-(1/2)y$ $y'=-(1/2)x-(\sqrt{3}/2)y+z$	Косокутна горизонтальна ізометрична /див. рис. 3.6/ $\alpha=120^0$
4	$x'=(\sqrt{2}/2)x-(\sqrt{2}/2)y;$ $y'=-(\sqrt{2}/2)x-(\sqrt{2}/2)y+z$	$\alpha=135^0$
	$x'=(1/2)x-(\sqrt{3}/2)y;$ $y'=-(\sqrt{3}/2)x-(1/2)y+z$	$\alpha=150^0$

Існує, звичайно, і багато інших видів аналітичного зображення аксонометричного методу побудови зображень. З деякими з них можна ознайомитися в [16; 22].

Головна привабливість зображень, одержуваних за аксонометричним методом, полягає в їх хорошій наочності. Однак і вимірюваність і відтворюваність їх, як показали приклади з масштабним еліпсом /див. підрозд. 3.4/ і розміщенням координат точки за її зображенням /див. підрозд. 3.6/, надто ускладнені. Тому на кресленнях /особливо в машинобудуванні/ найширше використовують зображення, що виконані за методом комплексу проекцій /КП/ *, або методом Монжа.

Запитання для самоперевірки

I. Суть аксонометричного методу побудови наочного зображення. Апарат проеціювання. Основні поняття.

2. Які числа називаються аксонометричними координатами?

---

* Новий термін замість терміна комплексне креслення.

3. Як довести, що натуральні координати точки дорівнюють її аксонометричним координатам?

4. Як за натуральними координатами точки побудувати її аксонометричну і повторну проекції?

5. Як формулюється теорема Польке - Шварца?

6. Які елементи складають аксонометричну систему?

7. Суть способу задання аксонометричної системи координат, який грунтується на теоремі Польке - Шварца.

8. Як класифікуються аксонометричні системи?

9. Які аксонометричні системи прийнято як стандартні?

Література

[1-6; 8; 9].

13. Бескин Н.М. Основные предложения аксонометрии // Вопросы современной начертательной геометрии. - М., 1947.

14. Глазунов Е.А., Четверухин Н.Ф. Аксонометрия. - М., 1953.

15. Джапаридзе И.С. Проективно-синтетическое доказательство теоремы Н.М.Бескина // Методы начертательной геометрии и ее приложения. - М., 1955.

16. Котов И.И., Полозов В.С., Широкова А.В. Алгоритмы машинной графики. - М., 1977.

17. Первикова В.Н. Обобщение основной теоремы центральной аксонометрии на пространства -измерений // Методы начертательной геометрии и ее приложения. - М., 1955. - С. 141-155.

18. Чернецкий Н.М. Аналитические методы построения аксонометрических изображений. - Харьков, 1977.

19. Чернецкий Н.М. Аналитические алгоритмы построения наглядных изображений // Математические методы анализа динамических систем. - Харьков, 1979. - Вып. 3.

20. Четверухин Н.Ф. Основная теорема аксонометрии и построение аксонометрических систем в центральной проекции // Методы начертательной геометрии и ее приложения. - М., 1955.

21. Юдицкий М.М. Центральные аксонометрические проекции // Тр. Новосибирск. электротехн. ин-та. - Новосибирск, 1958. - Т. 1.

22. Юдицкий М.М. Аксонометрические чертежи и проекционные модели пространства и их применение для передачи геометрической информации в ЭЦВМ // Тр. Мелитопольск. ин-та механ. с.х. - 1967. - Т. 5. - Вып. 1.

23. Юдицкий М.М., Казанчан А.К. Аналитический и векторный способы построения аксонометрических проекций образов четырехмерного пространства // Тр. Тбилисск. политех. ин-та. - 1967.

24. Яцкевич Л.А. О параллельной аксонометрии -мерного евклидова пространства E_n // Тр. Московск. авиац. ин-та. - 1969. - Вып. 187.

25. Schopp J. Über die n-dimensionalen Axonometrien // Elem. Math. - 1965. - 19 - N5.

4. ПОБУДОВА ЗОБРАЖЕНЬ ЗА МЕТОДОМ КОМПЛЕКСУ ПРОЕКЦІЙ /КП/. КП ОСНОВНИХ ГЕОМЕТРИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Цей метод інтуїтивно використовували при складанні креслення А.К.Нартов, Д.Уатт, І.К.Кулібін, Р.Фултон та ін. Теоретичне обґрунтування його дав у 1799 р. Г.Монж /1746-1818/. Він же поклав вивчення цього методу в основу інженерної освіти, впровадивши курс "Нарисна геометрія" у славнозвісній французькій Політехнічній школі.

На підставі попереднього матеріалу /див. підрозд. 2.2/ можна було переконатися, що зображення - монопроекція невідтворне. Відтворюваність зображень, виконаних аксонометричним методом, забезпечується їх зв"язком з аксонометричною системою через вторинну проекцію.

Переконаємося в тому, що біпроекційне зображення відтворюване. Нехай оригінал Ω проецюється з двох центрів проецювання: S^1 і S^2. У площині проекцій π дістанемо дві проекції: Ω_1 і Ω_2 /рис. 4.1/. Для $\forall M \in \Omega$ * маємо $M_1 \in \Omega_1$ і $M_2 \in \Omega_2$.

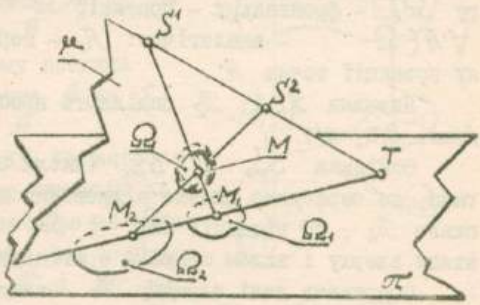


Рис. 4.1

* $\forall$ - квантор загальності, що означає в даному випадку для усіх M, які належать Ω ...

Проеціюючі прямі MS^1 і MS^2, перетинаючись, визначають проеціюючу площину μ. Очевидно, $\mu \cap \pi = (M_1M_2)$. Пряму M_1M_2 називають лінією проекційного зв"язку /ЛПЗ/ проекцій M_1 і M_2. Фіксоване взаємне положення S^1, S^2 і π визначає положення точки $T = (S^1S^2) \cap \pi$, через яку проходять лінії проекційного зв"язку пар точок-проекцій будь-якої точки. Легко помітити, що фіксація взаємного положення проекцій M_1 і M_2 на лінії проекційного зв"язку однозначно визначає положення оригіналу - точки M. Отож, зображення оригіналу Ω, складене з двох проекцій Ω_1 і Ω_2, зв"язаних проекційно /за допомогою ліній проекційного зв"язку/, відтворюване *.

4.I. Двокартинний комплекс проекцій точки

Скористаємося відтворюваністю біпроекційного зображення, щоб одержати зображення, яке об"єднує в собі дві властивості: I/ достатню вимірюваність ортогональної проекції; 2/ відтворюваність біпроекційного зображення. Для цього оригінал Ω спроеціюємо ортогонально з нескінченно віддаленого центра проеціювання S^1_∞ у горизонтально розміщену площину проекцій, позначену π_1 і яка називається горизонтальною площиною проекцій, а з нескінченно віддаленого центра S^2_∞ - у вертикально розміщену площину, що називається фронтальною площиною проекцій і позначається π_2. Відповідно дістанемо в площині π_1 фігуру Ω_1 - горизонтальну і в площині π_2 фігуру Ω_2 - фронтальну - проекції Ω /рис. 4.2, а/. Для точки $\forall A \in \Omega$ - аналогічно: A_1 - горизонтальну і A_2 - фронтальну проекції точки A.

Площини π_1 і π_2 поділяють простір на чверті: I, II, III, IУ /рис. 4.2, а/.

Оскільки S^1_∞ і S^2_∞ інколи беруть за точки зору спостерігача, що перебуває далеко відповідно над площиною π_1 і перед площиною π_2, то проекції Ω_1 і Ω_2 називають інколи відповідно видом зверху і видом спереду оригіналу Ω.

Обертаючи далі площину π_1 навколо прямої $x = \pi_1 \cap \pi_2$, суміщуємо площини π_1 і π_2 /положення π_2 залишається незмінним/.

---

* Питанням конструювання зображень-моделей різного виду й вивченням їх властивостей займалися Є.С.Федоров [35], І.С.Джапарідзе [29], І.І.Котов [30], К.І.Вальков [27] та ін.

У підсумку в площині $\pi_1 = \pi_2$ здобули зображення, що складається з двох проекційно зв"язаних ортогональних проекцій Ω_1 і Ω_2, в якому, якщо $A_1 \in \Omega_1$, а $A_2 \in \Omega_2$, то пряма $A_1A_2 \perp x$ – лінія проекційного зв"язку /ЛПЗ/ і проходить через точку T_∞, що з даному випадку є нескінченно віддаленою точкою /див. підрозд. I.3/.

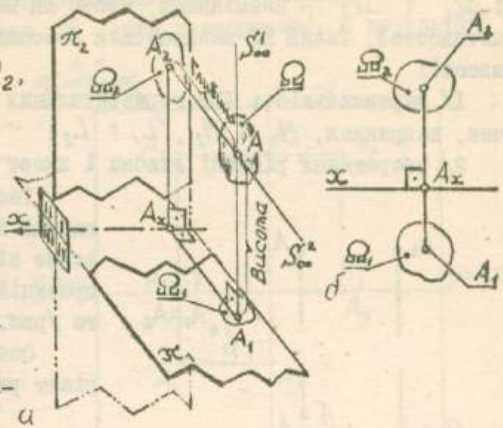


Рис. 4.2

Таке біпроекційне зображення називається двокартинним комплексом проекцій /КП/ оригіналу Ω /рис. 4.2, б/.

Пряма x на КП називається віссю проекцій.

Властивості двокартинного КП:

1/ пряма x розміщена горизонтально;

2/ ЛПЗ $A_1A_2 \perp x$, тобто розміщена вертикально $(A_x = (A_1A_2) \perp x)$;

3/ $|A_1A_x| = |AA_2|$, а отже, довжина $[A_1A_x]$ дорівнює відділі точки A до π_2 і називається глибиною точки A;

4/ $|A_2A_x| = |AA_1|$ і тому довжина $[A_2A_x]$ дорівнює відстані точки A до π_1 і називається висотою точки A.

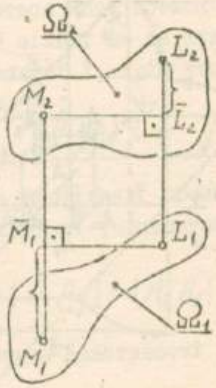


Рис. 4.3

Безвісний двокартинний КП. На виробничих кресленнях зображення, що виконані за методом двокартинного КП, звичайно не мають осі x /рис. 4.3/. Це означає, що відстані від $\forall M \in \Omega$ до площин π_1 і π_2 не фіксовані, а отже, як глибина, так і висота точки M на такому КП не відображені. Але й на такому КП можна для будь-якої пари точок $M, L \in \Omega$ знайти як різницю їх глибин $(|\bar{M}_1\bar{L}_1|)$, так і різницю висот $(|L_2L_2|)$, а отже, взаємне розміщення точок M і L залишається цілком визначе-

ним, точкова структура оригіналу Ω – непорушною і, звідси, проекції Ω_1 і Ω_2 – незмінними, тобто КП не втрачає своїх основних властивостей. Такий КП називається безосним двокартинним. Його властивості:

1/ вертикальність ЛПЗ горизонтальних і фронтальних проекцій точок, наприклад, M_1 і M_2, L_1 і L_2;

2/ збереження різниці глибин і висот для будь-яких пар точок.

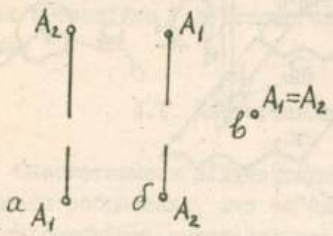


Рис. 4.4

Теоретично безвісний двокартинний КП точки A може мати залежно від взаємного розміщення проекцій, три рівноцінних варіанти /рис. 4.4, а, б, в/.

Основним практично взято варіант рис. 4.3, а.

4.2. Трикартинний КП точки

Як вже переконалися, двокартинний КП має властивість відтворюваності і добру вимірюваність, оскільки складається з ортогональних проекцій, але за його допомогою визначити точне розміщення оригіналу в просторі неможливо.

Отож, вдамося до трикартинного КП.

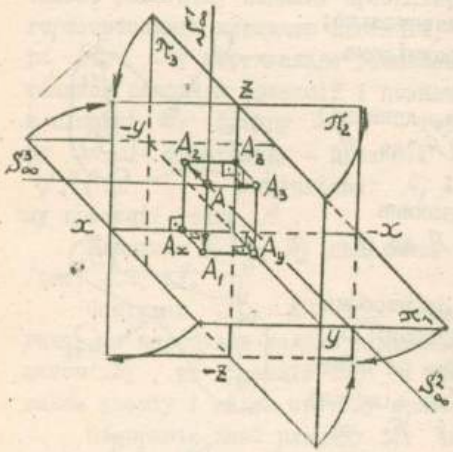


Рис. 4.5

А. Доповнимо систему площин проекцій π_1 і π_2 площиною π_3 ($\pi_3 \perp \pi_1 \wedge \pi_3 \perp \pi_2$). Довільну точку A спроеціюємо ортогонально на A_1 і A_2 /випадок двокартинного КП/, а також на $A_3 \in \pi_3$ з центра S^3_∞ – нескінченно віддаленої точки /рис. 4.5/.

Проекцію A_3 називають профільною або видом зліва. На прямих x ($x = \pi_1 \cap \pi_2$), y ($y = \pi_1 \cap \pi_3$, z ($z = \pi_2 \cap \pi_3$) додатні і від"ємні напрями відліку обираємо так /початок відліку точка O=

$= x \cap y \cap z \cap x /$, як показано на рис. 4.4. Так само зазначено напрям обертання площини π_1 навколо прямої x до суміщення її з π_2 /що непорушна/, і обертання площини π_3 /навколо z / до суміщення її все з тією самою π_2 /знов непорушною/. У результаті одержуємо зображення /рис. 4.6/ точки A , що складається з трьох проекційно зв"язаних ортогональних проекцій в одній площині $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3$ і називається трикартинним КП точки A . При цьому пряма y виявилася ніби роздвоєною і суміщеною з прямою x і з прямою z так, що $[Oy) = -[Ox)$, $[Oy) = -[Oz)$, $-[Oy) = [Ox)$ і $-[Oy) = [Oz)$.

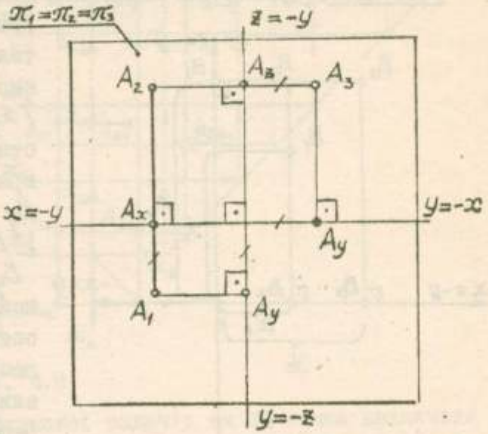


Рис. 4.6

Властивості трикартинного КП:

1/ порівняно з двокартинним КП на трикартинному КП точки A з"являється нова проекція A_3 і нова вісь проекцій $z = y$ - вертикальна. З огляду на це стара вісь проекцій $x = y$ дістає назву горизонтальної і, крім того, тепер пряма x - результат злиття її з прямою y ;

2/ з"являється нова ЛПЗ - горизонтальна: $(A_2 A_3) \perp z = y$ /або $(A_2 A_3) \| x = y /$;

3/ $|A_2 A_3| = |A_x A_1| = |A_2 A|$, тобто віддаль профільної проекції точки від вертикальної осі проекцій дорівнює віддалі горизонтальної проекції від горизонтальної осі;

4/ відстань від точки A до π_3 $(|A_3 A| = |A_1 A_y| = |A_2 A_z|)$ називається широтою точки A ;

5/ щодо проекцій A_1 і A_2 , то зберігаються властивості двокартинного КП.

Б. Координація КП. Вважаючи, що в системі трьох взаємно перпендикулярних площин проекцій / π_1 , π_2 і π_3 ; див. рис. 4.5/ прямі x , y і z можуть бути взяті відповідно як осі деякої прямокутної системи координат з початком - точкою O , дістаємо можливість розв"язати таку задачу.

Задача. Задано точку B (I, -2, 3), де $x_B = I$, $y_B = -2$, $z_B = 3$ – координати точки B. Побудувати трикартинний КП точки B.

Розв"язок. Призначимо одиничний відрізок для осей проекцій /рис. 4.7/. Вздовж горизонтальної осі проекцій відкладаємо один одиничний відрізок / $x_B = I$/ від точки O і дістаємо точку B_x. Аналогічно, враховуючи знаки, маємо точки B_y /у неї має бути двійник/ і B_z. Потім у точках B_x, B_y і B_z встановлюємо перпендикуляри відповідно до осей Ox, Oy і Oz. Легко помітити, що ці перпендикуляри зливаються з відповідними ЛПЗ. Перетин перпендикулярів, встановлених у точках B_x і B_y – точка B_1, перпендикулярів, встановлених у точках B_x і B_z – точка B_2, а перпендикулярів, установлених у точках B_y і B_z – точка B_3.

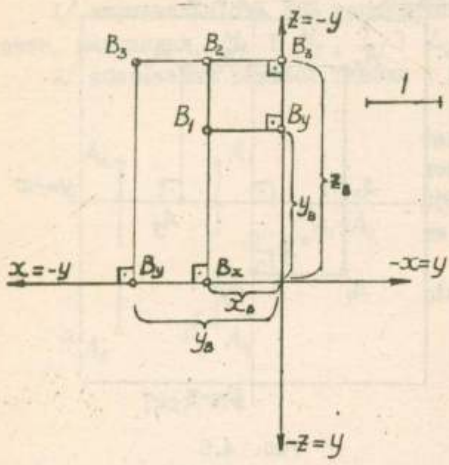


Рис. 4.7

Отже, можлива побудова КП будь-якої точки B, що задана трьома координатами / x_B, y_B і z_B /. Навпаки, за КП будь-якої точки можна визначити її координати.

Тобто можлива побудова КП будь-якого тривимірного оригіналу. Для побудови зображення n-вимірного оригіналу можна скористатися яким-небудь з узагальнень КП на n-вимірний простір, наприклад, епюром Філіпова [36], епюром Радищева [34] /рис. 4.8, КП точки A / або повнопольним КП [37] багатовимірного простору /ПКП-n/ /рис. 4.8, б, ПКП-n точки A / та ін.

Різні аспекти КП багатовимірного простору вивчали Н.В.Наумович [32], В.М.Первікова [33] та її учні, П.В.Філіпов та його учні та ін.

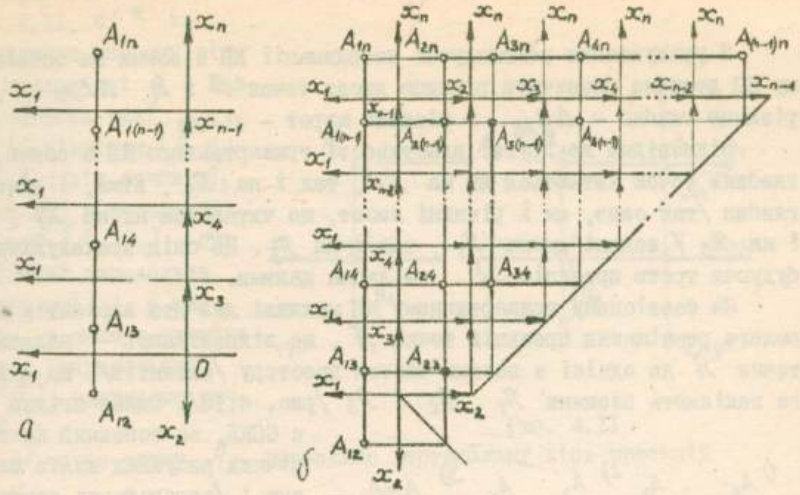


Рис. 4.8

Очевидний розв"язок і оберненої задачі: за КП точки визначити її координати. Це і є доказ того, що трикартинний КП точки цілком визначає положення її в просторі.

В. Безвісний трикартинний КП. Як і у випадку двокартинного КП, трикартинний КП у виробничій практиці використовується в безвісному варіанті (рис. 4.9).

Якщо таке зображення містить у собі проекції хоча б двох точок оригіналу, можна виявити всі його властивості. На рис. 4.9 дано трикартинний КП оригіналу Ω та його точок A , $B \in \Omega$. Як і на трикартинному КП з осями, тут і (A_1A_2), і (B_1B_2) вертикальні, а (A_2A_3) і (B_2B_3) – горизонтальні ЛПЗ. Але оскільки осі $x = y$ і $y = z$ не фіксовані /а отже, не фіксоване положення площин проекцій/, тут немає ані глибин, ані висот, ані широт точок A і B , але є їх різниці.

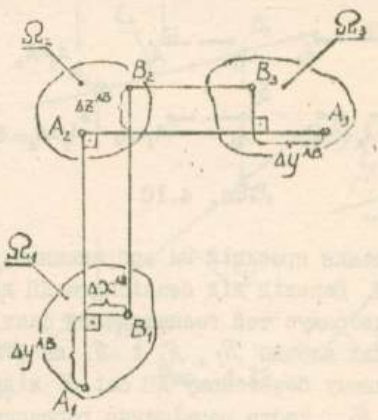


Рис. 4.9

З урахуванням розглянутої координації КП з осями на безвісному КП доречно позначити різницю висот точок A і B Δz_{AB}, різницю глибин – Δy_{AB} і різницю широт – Δx_{AB}.

Відповідно до другої властивості трикартинного КП з осями, глибини точок читаються як на Π_1, так і на Π_3, отже, і різниці глибин /так само, як і різниці висот, що читаються як на Π_2, так і на Π_3 / подані як на Π_1, так і на Π_3. Це слід враховувати, будуючи третю проекцію Ω за двома даними.

На безвісному трикартинному КП можливі дев"ять варіантів взаємного розміщення проекцій точки A, що відповідають належності точки A до однієї з восьми частин простору /октантів/, на які його поділяють площини Π_1, Π_2 і Π_3 /рис. 4.10/. Однак згідно з ЄСКД, за основний на технічних рисунках взято варіант I /європейська система розміщення проекцій. Варіант 9 відповідає випадку належності оригіналу A прямій перетину бісектральних площин двогранних кутів $\angle\Pi_1\Pi_2$ і $\angle\Pi_2\Pi_3$, точки якої мають додатні абсциси й аплікати і від"ємні ординати або від"ємні абсциси й аплікати і додатні ординати. Нарешті, варіант 5 відповідає КП, виконаним згідно з так званою американською системою розміщення проекцій на зображеннях, що використовуються в кресленнях.

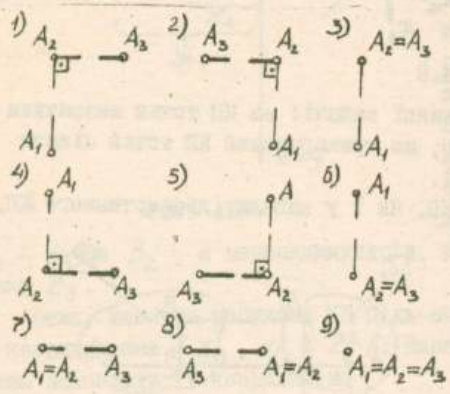


Рис. 4.10

Г. Перехід від безвісного КП до КП з осями. Відсутність осей на КП відображує той геометричний факт, що положення взаємно перпендикулярних площин Π_1, Π_2 і Π_3 не фіксовано. Отже, нанесення на трикартинному безвісному КП осі x відповідає фіксації положення площин Π_1 і Π_2, тобто розміщення горизонтальної осі можна обирати цілком довільно /рис. 4.11, а/.

Нанесення горизонтальної осі проекцій $x = y$ цілком визначає висоти й глибини / z_A і y_A / точок оригіналу. Тому при нанесенні згодом вертикальної осі проекцій $z = y$ необхідно забезпечити

такі самі глибини відповідних точок на точковому полі π_3 /рис. 4.II, б/ * із збереженням напряму відліку вздовж осі y. Цього досягають так:

I/ відрізок $|A_3A_2|=|A_1A_x|$ від точки A_3 на (A_2A_3) відкладають так, щоб $[A_2A_x]$ був розміщений паралельно променю осі y з тим знаком, з яким є промінь осі y, паралельний $[A_xA_1]$, одержуємо точку A_2;

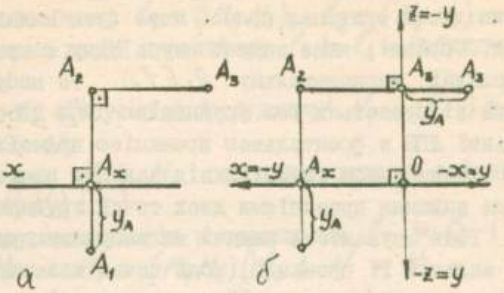


Рис. 4.II

2/ через точку A_2 проводимо вертикальну вісь проекцій $z-y$.

4.3. КП прямої

Оскільки взаємне розміщення точок оригіналу цілком визначене двокартинним КП і, отже, останній є відтворюваним, надалі, якщо тільки не виникне особливої необхідності, будемо користуватися саме двокартинним КП і здебільшого безвісним.

I. Як відомо зі шкільного курсу стереометрії, дві точки цілком визначають пряму. Отож, якщо на КП задано дві точки, то задано й пряму, яку вони визначають. На рис. 4.I2, а точки A_1 і B_1 визначають ℓ_1, а A_2 і B_2 – ℓ_2. Отже, точки – оригінали A і B визначають пряму-оригінал (ℓ). Легко помітити,

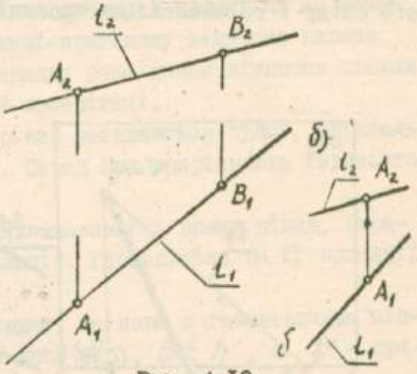


Рис. 4.I2

* На КП з осями будувати третю проекцію точки за двома заданими можна і за допомогою так званої постійної прямої КП [8, с.33], але це нераціонально [38].

що КП на рис. 4.12, б теж КП прямої, але оригінал прямої тут визначається не двома точками, а проекціями ℓ_1 і ℓ_2. У тому, що й таким чином оригінал прямої може бути задано, неважко переконатися. Справді, якщо задано якусь одну з проекцій точки $A \in \ell$, наприклад, горизонтальну $A_1 \in \ell_1$, то побудова другої проекції точки відбувається без труднощів: A_2 дістаємо як перетин вертикальної ЛПЗ з фронтальною проекцією прямої: $A_2 = (A_1 A_2) \cap \ell_2$.

Таким чином, перехід від задання прямої на КП двома проекціями її до задання проекціями двох точок труднощів не викликає.

Розв"язуваність задачі на побудову другої проекції точки по одній заданій її проекції, коли точка належить оригіналу /в даному разі - прямій/ - критерій задання оригіналу проекціями на КП.

2. Задання прямої слідами. Якщо положення площин π_1 і π_2 фіксовано, тобто коли двокартинний КП має вісь проекцій, постає питання: як побудувати точку зустрічі прямої ℓ з π_1 і π_2 або, як її називають, сліди прямої ℓ.

Нехай $\ell \cap \pi_1 = M$ - горизонтальний слід прямої, а $\ell \cap \pi_2 = N$ - фронтальний. Розглядаючи рис. 4.13, а, помічаємо, що горизонтальний слід прямої ℓ загального випадку розміщення - $M = M_1$, тобто слід суміщається зі своєю горизонтальною проекцією, а фронтальний - з фронтальною: $N = N_2$. Крім того, фронтальна проекція горизонтального сліду і горизонтальна проекція фронтального - основи перпенди-

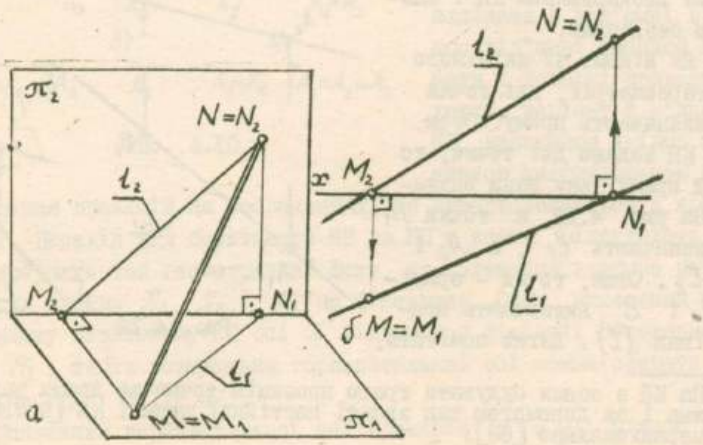


Рис. 4.13

кулярів, що одущені на вісь проекцій з точок M і N відповідно в площинах π_1 і π_2: $M_2 = (MM_2) \cap x$ і $N_1 = (NN_1) \cap x$, де $(MM_2) \perp x$ і $(NN_1) \perp x$. Отож, $\ell_1 = (M_1, N_1)$, $\ell_2 = (M_2 N_2)$.

Задача. Пряму ℓ задано на КП проекціями ℓ_1 і ℓ_2. Побудувати її сліди M і N.

Алгоритм розв"язання. I. Фіксуємо /або будуємо/ $N_1 = \ell_1 \cap x$ і $M_2 = \ell_2 \cap x$ /рис. 4.I3, б/.

2. Встановлюємо в точках N_1 і M_2 перпендикуляри до осі проекцій x $((M_1 M_2) \perp x, (N_1 N_2) \perp x)$.

3. У перетині отих перпендикулярів з проекціями ℓ_1 і ℓ_2 і дістаємо сліди прямої: $M = M_1 = (M_1 M_2) \cap \ell_1$ і $N = N_2 = (N_1 N_2) \cap \ell_2$.

Розв"язання оберненої задачі. Побудувати проекції прямої - ℓ_1 і ℓ_2. Задано сліди прямої M і N.

Алгоритм розв"язання. I. Фіксуємо $M_1 = M$ і $N_2 = N$.

2. Опускаємо перпендикуляри з M_1 і N_2 на вісь проекцій x, одержуючи точки $M_2 = (M_1 M_2) \cap x$ і $N_1 = (N_1 N_2) \cap x$.

3. $\ell_1 = (M_1 N_1)$ і $\ell_2 = (M_2 N_2)$.

Отже, маємо ще один варіант задання прямої на КП - за допомогою слідів.

3. КП прямих окремого випадку розміщення.

Залежно від характеру розміщення проекцій прямої на КП можна дійти висновку щодо розміщення прямої-оригіналу відносно площин проекцій. Серед прямих окремого випадку розміщення відносно площин проекцій розрізняють прямі рівня й проеціюючі.

А. КП прямих рівня. Прямими рівня називаються прямі, паралельні хоча б одній з площин проекцій. Серед них розрізняють горизонталі, фронталі й профільні прямі.

а/ КП горизонталі. Горизонталлю називають пряму рівня, паралельну горизонтальній площині проекцій. Горизонталь та її проекції прийнято позначати h (h_1, h_2).

З означення горизонталі випливає, що вона є геометричним місцем точок однакової висоти. Отож, якщо A, $B \in h$, а t - пряма горизонтального напряму, то за означенням горизонталі $h \parallel \pi_1 \Rightarrow |A_1 B_1| = |AB|$, $h_1, \hat{t} = h_1 \hat{\pi}_{12}$, h_2 - горизонтальна пряма /рис. 4.I4/.

б/ КП фронталі. Фронталлю називають пряму рівня, паралельну фронтальній площині проекцій. Позначення фронталі та її проекцій: $f(f_1, f_2)$

З означення фронталі випливає, що вона є геометричним місцем точок однакової глибини. Тому, якщо $A, B \in f$, то $f \parallel \pi_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow |A_2B_2| = |AB|$. $f_2 \,\hat{.}\, t$ = $= f \,\hat{.}\, \pi_1$ і f_1 - горизонтальна пряма /рис. 4.I5/.

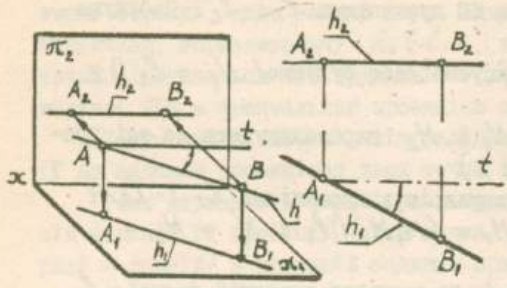


Рис. 4.I4

в/ КП профільної прямої. Профільною прямою називають пряму рівня, паралельну профільній площині проекцій. Тобто вона є геометричним місцем точок однакової широти. Спеціального позначення профільна пряма не має. Слід зазначити, що дві проекції профільної прямої не визначають її положення, а отже, на двокартинному КП профільна пряма може бути задана лише двома точками, що до неї належать. З означення $/(AB) \parallel \pi_3$ / випливає, що $|A_3B_3| = |AB|$. $(B_2B_3)\,\hat{}\,(A_3B_3) = (AB) \,\hat{.}\, \pi_1$, $(A_3B_3), \hat{} \, t = (AB) \,\hat{.}\, \pi_2$ і (A_1B_1) та (A_2B_2) - вертикальні /рис. 4.I6/ *.

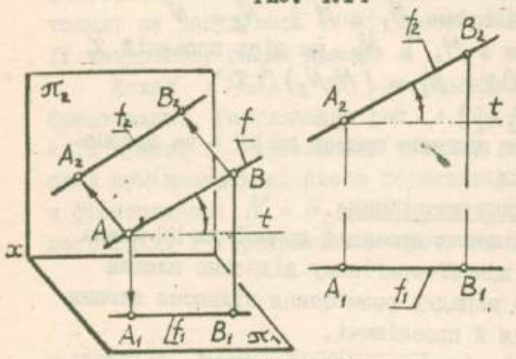


Рис. 4.I5

Б. КП проеціюючих прямих. Проеціюючою на КП називається пряма, перпендикулярна до площини проекцій. Розрізняють горизонтально-

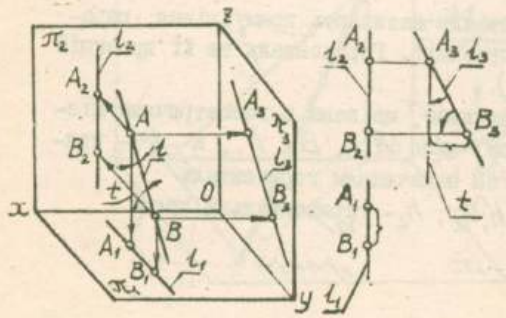


Рис. 4.I6

* Тут t - вертикальна пряма.

проеціюючі, фронтально-проеціюючі та профільно-проеціюючі прямі.

а/ КП горизонтально-проеціюючої прямої. Горизонтально-проеціюючою називається проеціююча, що перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій. З означення /$\ell \perp \pi_1$ / випливає, що ℓ_1 - точка, а ℓ_2 - вертикальна пряма /рис. 4.17/. Якщо A , $B \in \ell$, то $|A_2B_2| = |AB|$ $A_1 = B_1 = \ell_1$.

Тут необхідно зробити два зауваження, важливі для подальшого викладу:

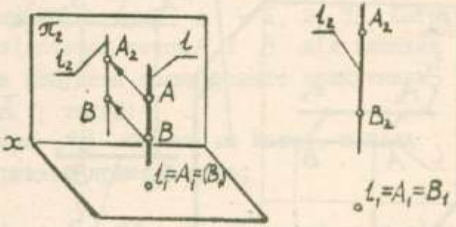


Рис. 4.17

1/ проекція якогось елемента оригіналу, яка збирає на собі однойменні проекції всіх інших елементів, що належать тому самому оригіналу, має збиральну властивість /у даному випадку таку властивість має ℓ_1 , бо $A_1 = \ell_1$ і $B_1 = \ell_1$ /;

2/ точки, в яких збігаються однойменні проекції, називають конкуруючими /в даному випадку A і B є горизонтально-конкуруючими, бо $A_1 = B_1$ /.

б/ КП фронтально-проеціюючої прямої. Фронтально-проеціюючою називається проеціююча, що перпендикулярна до фронтальної площини проекцій. Оскільки $\ell \perp \pi_2$, то ℓ_2 - точка, а ℓ_1 - вертикальна пряма /рис. 4.18/.

Якщо A , $B \in \ell$, то $|A_1B_1| = |AB|$, а $A_2 = B_2 = \ell_2$, тобто ℓ_2 має збиральну властивість. Точки A і B у даному випадку фронтально-конкуруючі.

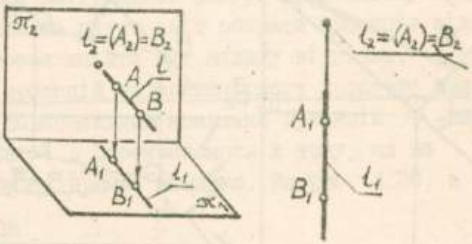


Рис. 4.18

в/ КП профільно-проеціюючої прямої. Профільно-проеціюючою називається проеціююча, що перпендикулярна до профільної площини проекцій. За визначенням $\ell \perp \pi_3$, і, отже, ℓ_1 та ℓ_2 - горизонтальні прямі /а ℓ_3 - точка, що має збиральну властивість: $A, B \in \ell \Rightarrow A_3 = B_3 = \ell_3$. Очевидно, $|A_1B_1| = |A_2B_2| = |AB|$ /рис. 4.19/.

4. Довжина відрізка й кути нахилу до площин проекцій.

Якщо на КП зображено пряму окремого випадку розміщення, то, як бачимо, принаймні на одній з площин проекцій як відрізки прямої, так і кути її нахилу до площин проекцій не спотворюються. Інакше з прямою загального випадку розміщення. Без додаткової побудови тут не обійтись.

Отож, виникає задача: задано на КП пряму l загального випадку розміщення й відрізок $AB \subset l$. Побудувати натуральні фігури відрізка AB й кутів нахилу l до π_1 і π_2 /рис. 4.20, а/.

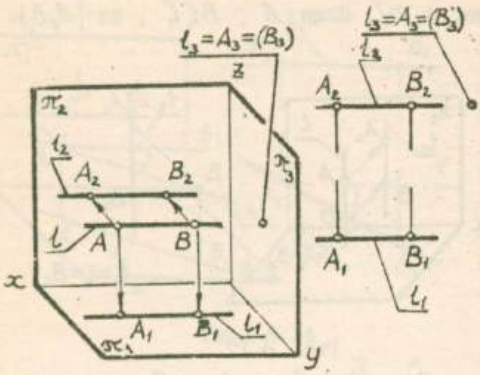


Рис. 4.19

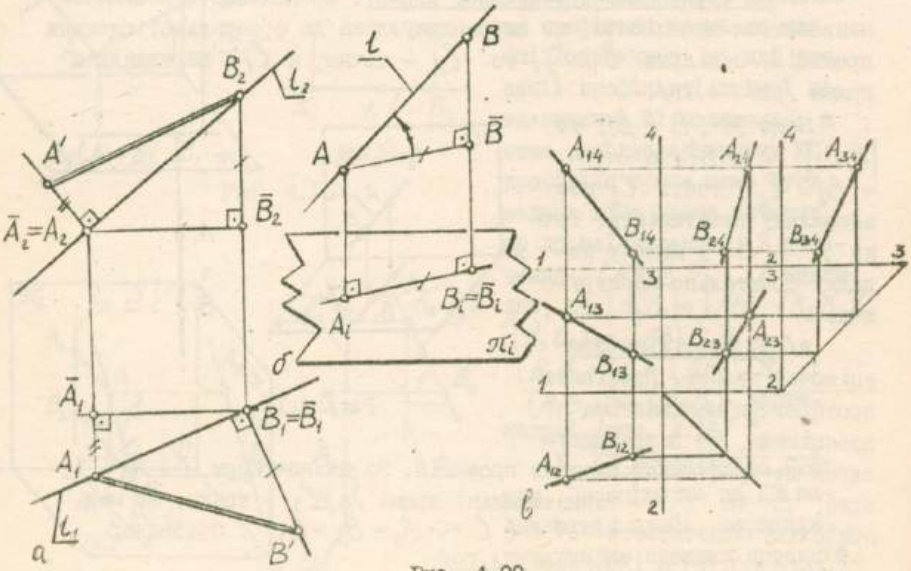


Рис. 4.20

Розв"язання. Відрізок AB /рис. 4.20, б/ - гіпотенуза прямокутного $\Delta A\bar{A}B\bar{B}$. Отже, для знаходження натуральної фігури $[AB]$ достатньо побудувати на КП трикутник, конгруентний $\Delta A\bar{A}B\bar{B}$. Помічаємо, що катет $A\bar{A}$ конгруентний $[A_i A_i]$ - проекції $[AB]$ в площині проекцій π_i /нею може бути як π_1, так і π_2, звичайно як і π_3 - на трикартинному КП, а тому $i = 1, 2, 3$/. Катет же $B\bar{B}$ за довжиною є різницею відстаней точок A і B від площини проекцій π_i. Звідси алгоритм побудови прямокутного трикутника, конгруентного трикутнику $A\bar{A}B\bar{B}$, такий:

1/ одну з проекцій відрізка AB беремо за катет, кінець /будь-який/ якого обираємо вершиною прямого кута;

2/ будуємо прямий кут;

3/ за другою проекцією відрізка AB визначаємо різницю відстаней точок A і B від тієї площини проекцій, з якої взято катет-проекцію. Ця різниця і є довжиною другого катета.

На рис. 4.20, а показано побудову $\Delta A_1 B'B_1 \cong \Delta A\bar{A}B\bar{B}$, де за π_i було взято π_1. Відрізок $A_1B' \cong [AB]$, а $(A_1B_1)\hat{}(A_1B') = (AB)\hat{}\pi_1$. Тут же показано $\Delta A_2A'B_2$, побудований за тим самим алгоритмом, але при цьому за π_i правила π_2. Очевидно $[A_2A'] \cong [AB]$, а $(A_2A')\hat{}_1(A_2B_2) = (AB)\hat{}_1\pi_2$.

Якщо, за умовою задачі, слід здобути натуральну фігуру відрізка, то байдуже, який з трикутників $A_1B'B_1$ чи $A_2A'B_2$ будувати, бо $[A_1B'] \cong [A'B_2]$. Для одержання ж натуральної фігури кута нахилу при побудові прямокутного трикутника за катет слід обирати проекцію відрізка на ту площину, до якої треба знайти кут нахилу відрізка.

5. Повнопольний комплекс проекцій чотиривимірного простору прямої. На рис. 4.8, б показано повнопольний комплекс проекцій n-вимірного простору /ПКП-n/ точки A. Переконаємося в тому, що на базі ПКП-n точки дістати ПКП-n прямої неважко. На рис. 4.20, в зображено ПКП-4 прямої AB.

4.4. КП площини

1. Площину задано на КП, якщо на КП задано геометричні елементи, що її визначають. На рис. 4.21 показано деякі варіанти задання площини на КП: трьома точками /а/, прямими, що перетинаються /б/, паралельними прямими /в/, точкою і прямою /г/.

Площину, за аналогією з прямою, можна задавати також слідами, але на такому КП, на якому положення площини проекцій π_1 і π_2 фіксоване – на КП з віссю.

Якщо задано площину Σ, то розрізняють її горизонтальний слід – пряму $m^{\Sigma} = \Sigma \cap \pi_1$ і фронтальний – пряму $n^{\Sigma} = \Sigma \cap \pi_2$ /рис. 4.22, а/. На трикартинному КП з"являється звичайно й третій слід площини – профільний. При цьому доцільним позначенням слідів може бути таке: $(\Sigma_x \Sigma_y)$ – горизонтальний, $(\Sigma_x \Sigma_z)$ – фронтальний, $(\Sigma_y \Sigma_z)$ – профільний, де Σ_x , Σ_y , Σ_z – точки сходу слідів /$\Sigma_x = \Sigma \cap x$, $\Sigma_y = \Sigma \cap y$ і $\Sigma_z = \Sigma \cap z$/ /рис. 4.22, б, в/.

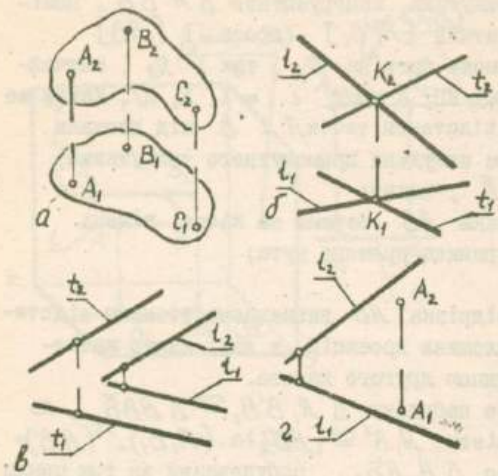


Рис. 4.21

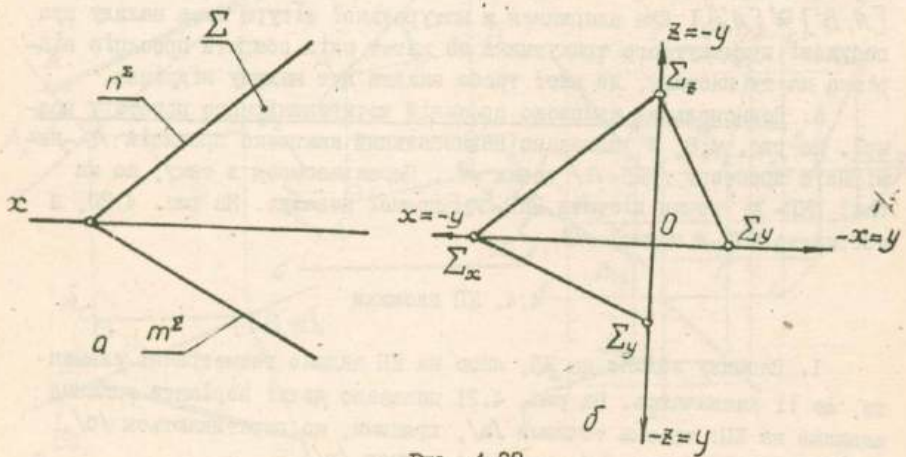


Рис. 4.22

На рис. 4.23 показано, як від задання площини двома прямими, що перетинаються $(\ell \cap t)$, перейти до задання її слідами. Для цього треба побудувати сліди прямої $\ell \,/\, M^\ell$ і $N^\ell /$ і прямої $t \,/\, M^t$ і $N^t /$, які попарно визначають однойменні сліди площини $(M^\ell M^t) = (\Sigma_x \Sigma_y)$ і $(N^\ell N^t) = (\Sigma_x \Sigma_z)$.

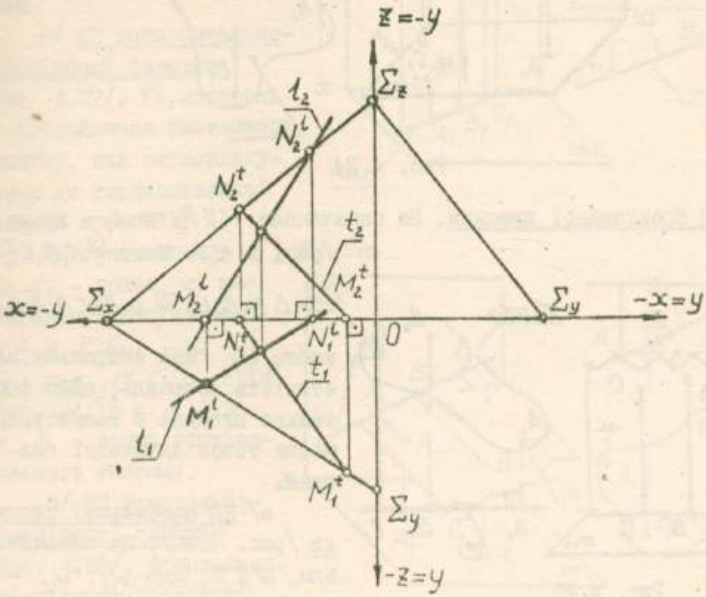


Рис. 4.23

2. КП площин окремого випадку розміщення.

За розміщенням відносно площин проекцій розрізняють площини рівня і проеціюючі площини.

А. КП площин рівня. Площиною рівня на КП називають площину, що паралельна до одної з площин проекцій.

Серед площин рівня існують горизонтальні, фронтальні та профільні.

а/ КП горизонтальної площини. Горизонтальною називається площина рівня, паралельна до горизонтальної площини проекцій. З $\alpha \parallel \pi_1$ випливає, що α_2 – пряма /рис. 4.24/ горизонтального напряму, бо горизонтальна площина є геометричним місцем точок однакової висоти.

Якщо $\forall A, B, C \in \alpha \Rightarrow \Delta A_1 B_1 C_1 \cong \Delta ABC \wedge A_2, B_2, C_2 \in \alpha_2$, тобто α_2 має збиральну властивість.

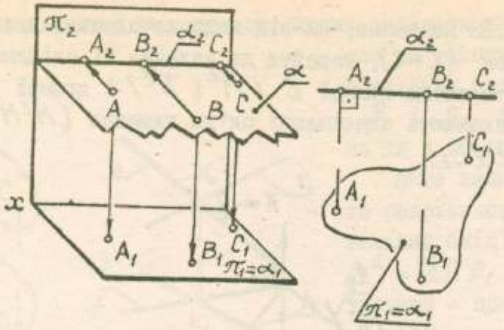


Рис. 4.24

б/ КП фронтальної площини. За означенням $\alpha \parallel \pi_2 \Rightarrow \alpha_1$ - пряма /рис. 2.45/. Якщо $\forall A,B,C \in \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow \Delta A_2B_2C_2 \cong \Delta ABC \wedge A_1B_1C_1 \in \alpha_1$,

тобто α_1 має збиральну властивість. Справді, адже фронтальна площина є геометричне місце точок однакової глибини.

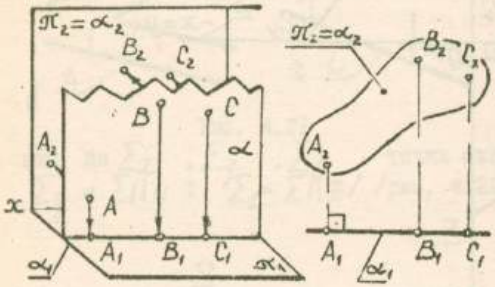


Рис. 4.25

в/ КП профільної площини /рис. 4.26/. За означенням, $\alpha \parallel \pi_3 \Rightarrow \alpha_1$, α_2 - вертикальні прямі, що мають збиральну властивість, адже профільна площина - це геометричне місце точок однакової широти: якщо $\forall A,B,C \in \alpha \Rightarrow$

$\Rightarrow A_1,B_1,C_1 \in \alpha_1 \wedge A_2,B_2,C_2 \in \alpha_2$.

Крім того, $\Delta A_3B_3C_3 \cong \cong \Delta ABC$

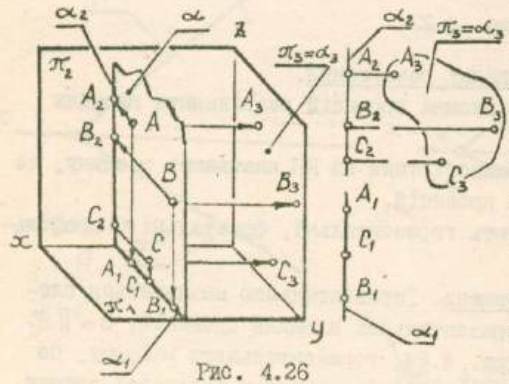


Рис. 4.26

Б. КП проеціюючих площин. Проеціюючою на КП називають площину, що перпендикулярна хоча б до однієї

з площин проекцій. Отже, кожна з площин рівня теж проеціююча, бо вона перпендикулярна до двох площин проекцій.

Розрізняють горизонтально-, фронтально- і профільно-проеціюючі площини.

а/ КП горизонтально-проеціюючої площини /рис. 4.27/. Горизонтально-проеціюючою називають площину, яка перпендикулярна до горизонтальної площини проекцій.

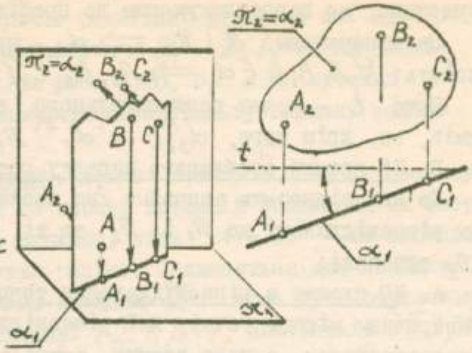


Рис. 4.27

За означенням, $\alpha \perp \pi_3 \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha_1$ - пряма, що має збиральну властивість: $\forall A, B, C \in \alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow A_1, B_1, C_1 \in \alpha_1$. Крім того, $\alpha_1, \hat{t} = \alpha \hat{,} \pi$, де t - пряма горизонтального напряму.

б/ КП фронтально-проеціюючої площини /рис. 4.28/. Фронтально-проеціюючою називають площину, що перпендикулярна до фронтальної площини проекцій.

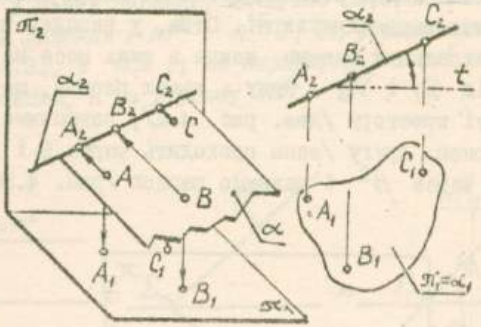


Рис. 4.28

За означенням, $\alpha \perp \pi_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \alpha_2$ - пряма, що має збиральну властивість:

$$\forall A, B, C \in \alpha \Rightarrow A_2, B_2, C_2 \in \alpha_2$$

Якщо t - пряма горизонтального напряму, то, крім того, $\alpha_2, \hat{t} = \alpha_1 \hat{,} \pi_1$.

в/ КП профільно-проеціюючої площини /рис. 4.29/ Профільно-проеціюючою називають-

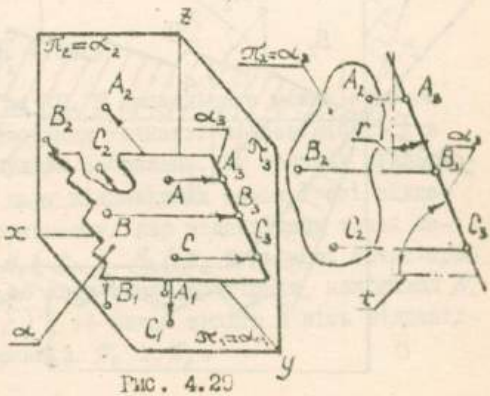


Рис. 4.29

ся площина, що перпендикулярна до профільної площини проекцій.

За означенням, $\alpha \perp \pi_3 \Rightarrow \alpha_3$ - пряма, що має збиральну властивість: $\forall A, B, C \in \alpha \Rightarrow A_3, B_3, C_3 \in \alpha_3$.

Якщо t - пряма горизонтального, а r - вертикального напрямів, то, крім того, $\alpha_3 \wedge t = \alpha \wedge \pi_1$ і $\alpha_3 \wedge r = \alpha \wedge \pi_2$.

В. КП площин особливого випадку розміщення.

До них відносять звичайно /на двокартинному КП/ площини, точки яких рівновіддалені до π_1 і π_2 та ті, кути нахилу яких до π_1 і π_2 однакові.

А. КП площин з рівновіддалених точок. Як відомо із стереометрії, геометричним місцем точок, які рівновіддалені від двох даних площин, що перетинаються, є пара площин, кожна з яких проходить через пряму перетину даних площин. Площини такої пари називають бісектральними, бо кожна з них рівнонахилена до даних площин. Бісектральні площини взаємно перпендикулярні. Отож, у випадку площин π_1 і π_2 існує пара бісектральних площин, кожна з яких несе на собі точки, рівновіддалені від π_1 і π_2. Одну з таких площин, що проходить через I і III чверті простору /див. рис. 4.2/, позначимо через β^1; її назвемо непарною. Другу /вона проходить через II і IV чверті простору/ позначимо через β^2 і назвемо парною /рис. 4.30, а/.

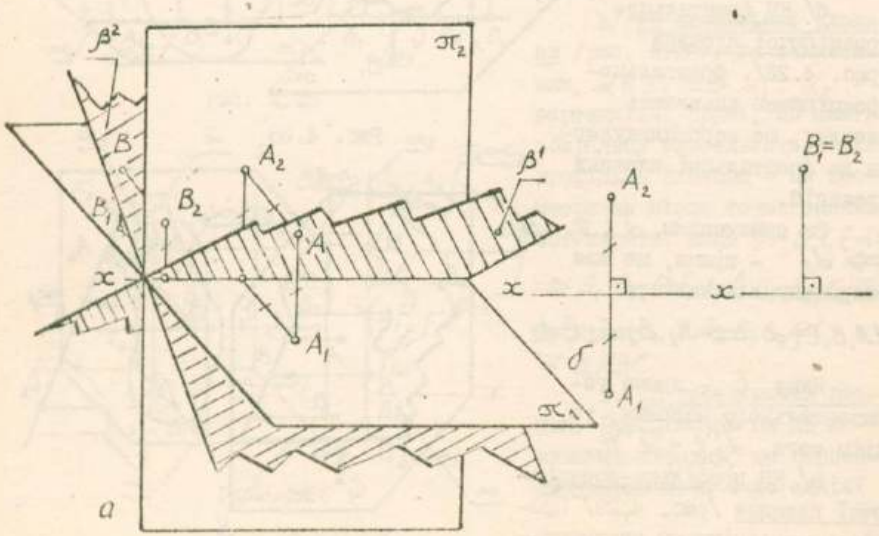


Рис. 4.30

Оскільки проекції точки A, що належать непарній бісектральній площині $(A \in \beta^1)$, симетрично розміщені відносно осі проекцій, а проекції точки $B \in \beta^2$ суміщаються / $B_1 = B_2$ /, то КП площини β^1 має такий вигляд, як на рис. 4.30, б, а КП площини β^2 – як на рис. 4.30, в /в обох випадках бісектральну площину задано точкою і віссю x /.

Б. КП рівнонахилених площин. Легко побачити, що кут нахилу (α) рівнонахиленої площини до площин проекцій обмежений як зверху, так і знизу: $45 \leq \alpha \leq 90^0$. Випадок, коли $\alpha = 90^0$ – це випадок профільної площини, розглянутий раніше. Залишаються два випадки: I/ $\alpha = 45^0$; тут рівнонахилена площина Σ може бути паралельна або непарній бісектральній площині / $\Sigma \| \beta^1$ /, або парній / $\Sigma \| \beta^2$ /. Користуючись слідами площин / m^Σ ; n^Σ /, дістанемо КП Σ на рис. 4.31, а /у випадку непарної/ і на рис. 4.31, б /у випадку парної/; 2/ $45^0 < \alpha < 90^0$; у цьому випадку, як легко переконатися, використовуючи знову сліди площини / m^Σ і n^Σ /, КП рівнонахиленої Σ відповідає рис. 4.31, в або г; на першому m^Σ і n^Σ – симетричні відносно осі проекцій, а на другому $m^\Sigma = n^\Sigma$.

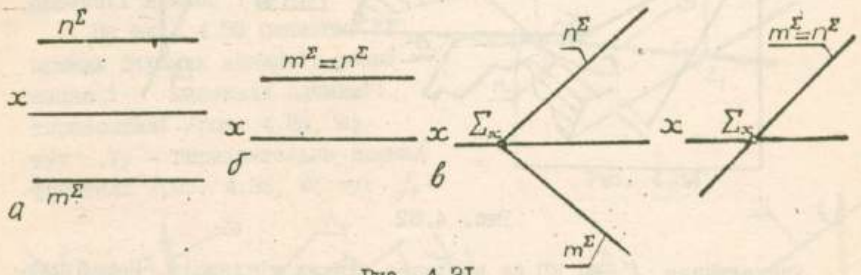


Рис. 4.31

4. Точкова відповідність на КП. З викладеного можна зробити висновок про доцільність використання точкової відповідності для розв"язання деяких задач з побудови зображень. Цю точкову відповідність можна одержати, задаючи пару відповідних точок і осі відповідності. На КП /зокрема, двокартинному/ пар відповідних точок довольі: це пари проекцій-точок $A_1 \in \pi_1$ і $A_2 \in \pi_2$ будь-якої точки-оригіналу. Неважко переконатися, що коли точки-оригінали, наприклад A, належать якійсь площині $(A \in \Sigma)$, то можна знайти й вісь відповідності між точковими полями проекцій π_1 і π_2.

Справді, вісь відповідності r має ту властивість, що її точки самі собі відповідали, тобто вона є прямою подвійних точок.

Як показано в попередньому розділі, суміщаються, тобто є подвійними проекції точок, які належать парній бісектральній площині β^2. Отже, задання на КП деякої площини Σ автоматично індукує на КП точкову відповідність між проекціями / A_1 і A_2 / точок $\forall A \in \Sigma$. Ця відповідність має вісь відповідності $r = \Sigma \cap \beta^2$ /рис. 4.32, а/.

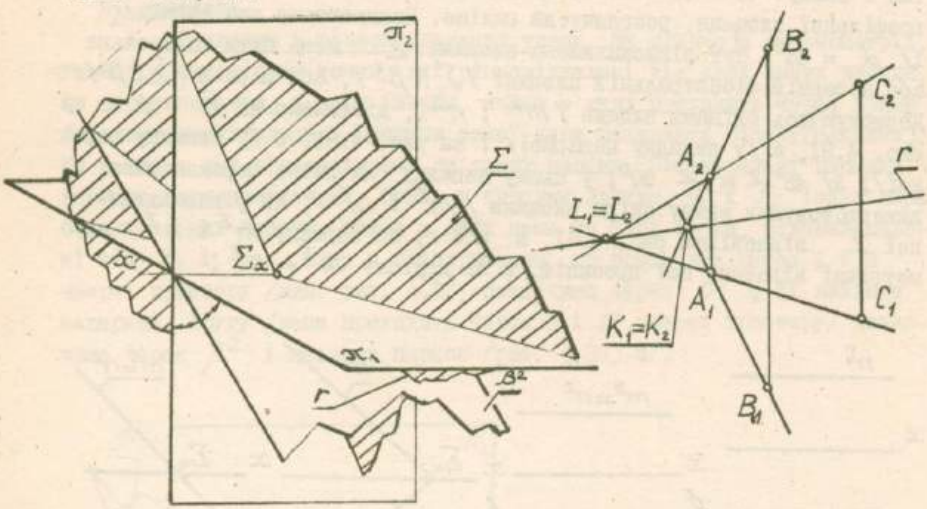


Рис. 4.32

Знаходження r на КП не викликає ніяких труднощів. Нехай площину Σ задано точками A, B і C /рис. 4.32, б/. Тоді на КП маємо три пари відповідних точок - A_1 і A_2, B_1 і B_2, C_1 і C_2 з напрямом відповідності, що визначено ЛПЗ. Прямій A_1B_1 відповідає A_2B_2, отже, дістаємо $(A_1B_1) \cap (A_2B_2) = K_1 = K_2 \in r$ і аналогічно - $(A_1C_1) \cap (A_2C_2) = L_1 = L_2 \in r$, оскільки $K = (AB) \cap \beta^2$ і $L = (AC) \cap \beta^2$. Отож, точки $K_1 = K_2$ і $L_1 = L_2$ визначають пряму r - вісь відповідності. Якщо m^Σ і n^Σ - сліди Σ, то $r = m^\Sigma = n^\Sigma$.

5. Пряма і точка в площині. КП плоскої фігури. Питання про те, чи задано площину на КП чи ні, можна розв"язати аналогічно тому, як його було розв"язано щодо прямої /у підрозд. 4.3/. Там як критерій заданості прямої на КП було використано розв"язуваність та-

кої задачі: за заданою проекцією точки, що належить прямій, побудувати її другу проекцію.

У цьому ж випадку для розв"язання аналогічної задачі попередньо розглянемо умови приналежності прямої і точки до площини.

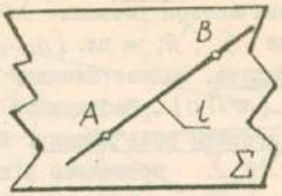


Рис. 4.33

З курсу стереометрії відомо, що пряма l належить площині Σ, якщо хоча б дві її точки /A, B/ належать площині Σ /рис. 4.33/. Скористаємося цією ознакою приналежності для побудови прямої l у площині, визначеній прямими m і n, що перетинаються /рис. 4.34/, де стрілками позначено порядок виконання побудови, яка починається з нанесення фронтальної проекції прямої (l_2).

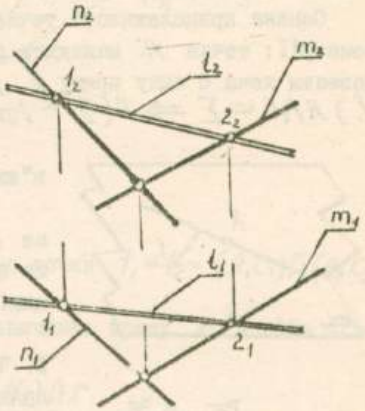


Рис. 4.34

На рис. 4.35 показано КП прямих окремих випадків розміщення і належних площині: горизонталі /рис. 4.35, а; тут h_2 - горизонтальна пряма/. фронталі /рис. 4.35, б; тут f_1 -

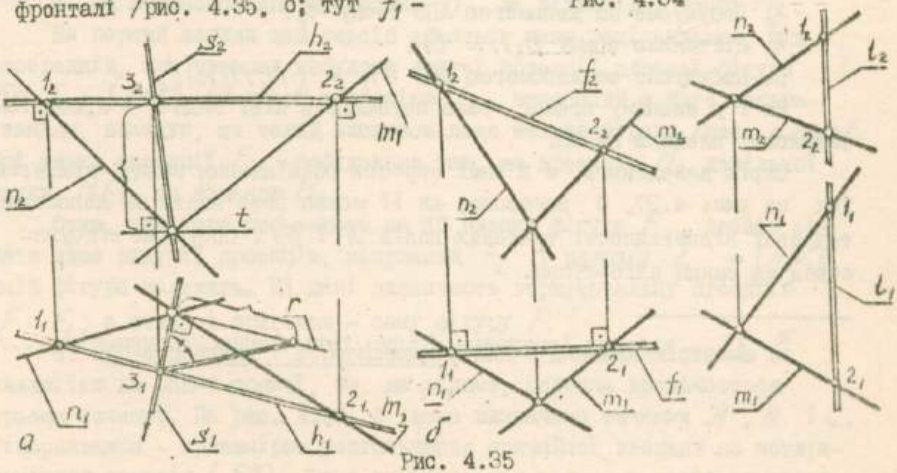


Рис. 4.35

горизонтальна пряма/ і профільної прямої /рис. 4.35, в; де ℓ_1 і ℓ_2 - вертикальні прямі/.

На рис. 4.35, а зображена, крім того, лінія скату / S_1 , S_2 /, що визначається умовами: $S \subset$ пл. $(m,n) \wedge S \perp h$. Звідси випливає, що $S \hat{\cdot} \pi_1 =$ пл. $(m \hat{\cdot} n) \hat{\cdot} \pi_1$ і алгоритм розв"язання задачі.

Задача. Задано площину Σ , визначену прямими, що перетинаються $(m \cap n)$. Побудувати кут нахилу Σ до $\pi_1 (\Sigma, \hat{\pi}_1)$

Алгоритм розв"язання. I. Побудуємо якусь горизонталь $h \subset \Sigma$.

2. У Σ проведемо лінію скату $S \perp h$

3. Знайдемо кут нахилу лінії скату до π_1 : $S \hat{\cdot} \pi_1 = \Sigma_1 \hat{\pi}_1$, як це рекомендовано в підрозд. 4.3 за допомогою побудови прямокутного $\Delta K_1 3_1 3'$ /рис. 4.35, а/.

Ознака приналежності точки до площини також відома з курсу стереометрії: точка A належить площині Σ , якщо через неї можна провести хоча б одну пряму ℓ , яка належить площині, тобто $\exists \ell) A \wedge \ell \subset \Sigma \Rightarrow A \in \Sigma$ * /рис. 4.36/.

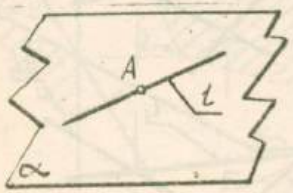


Рис. 4.36

Скористаємося цією ознакою для розв"язання наступної задачі.

Задача. За даною проекцією (M_2) точки M побудувати її другу проекцію, якщо відомо, що точка належить даній площині (ABC).

Алгоритм розв"язання /рис. 4.37, а/.

I. Через точку M_2 проведемо довільну пряму ℓ_2 /для спрощення $\ell_2 \ni B_2$ /.

2. Зафіксуємо точку $1_2 = \ell_2 \cap (A_2 C_2)$

3. Побудуємо за допомогою ЛПЗ точку 1_1.

4. Дістанемо пряму $B_1 1_1 = \ell_1$.

5. Побудуємо за допомогою ЛПЗ $M_1 = (M_1 M_2) \cap \ell_2$.

Як і у випадку прямої, розв"язуваність цієї задачі є критерієм заданості площини на КП.

Окрім наведеного, є й інші способи розв"язання задачі-критерію. Так, на рис. 4.37, б показано, як її можна розв"язати за допомогою точкової відповідності точкових полів Π_1 і Π_2 . Побудова відбувається за таким алгоритмом.

---

* $\exists$ - квантор існування /існує хоча б одна ℓ така, що .../.

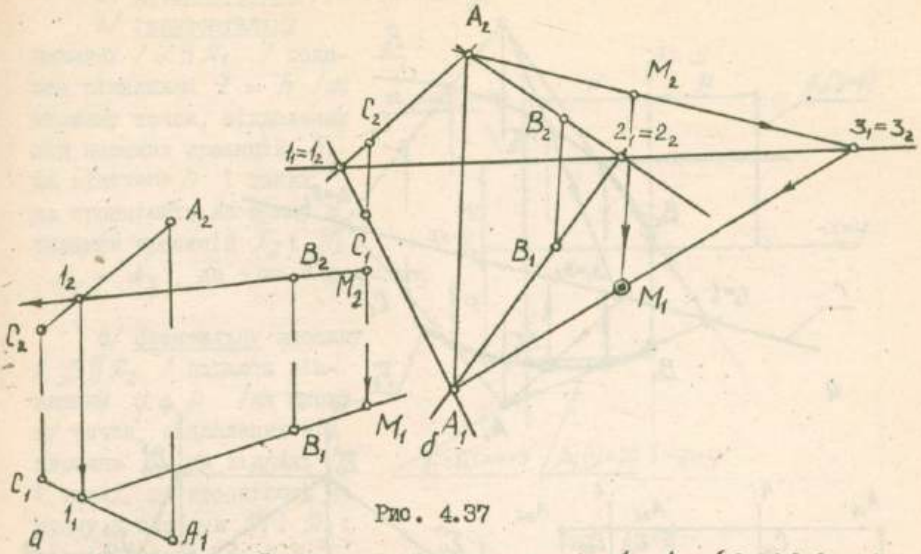


Рис. 4.37

Алгоритм розв"язання. I. Знайдемо точки $1_1 = 1_2 = (A_1C_1) \cap (A_2C_2)$ і $2_1 = 2_2 = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$.

2. Точки $1_1 = 1_2$ і $2_1 = 2_2$ визначають пряму r – вісь відповідності.

3. Побудуємо точку $3_1 = 3_2 = (A_2M_2) \cap r$.

4. Побудуємо пряму $A_1 3_1$, що відповідна прямій $A_2 3_2$.

5. За допомогою ЛПЗ дістанемо M_1 як відповідну точці M_2.

На перший погляд цей спосіб здається менш раціональним, ніж попередній, але приклад побудови другої проекції плоскої фігури $F \subset \Sigma = (ABC)$ за даною проекцією F_2, виконаний з його використанням, показує, що такий висновок дещо неправомірний /рис. 4.38,а/. Усі точки проекції F_2 побудовано так, як проекція M_1 довільної точки $M \in F$ за заданою M_2.

Отже, для того щоб задати на КП плоску фігуру F, досить задати лише одну її проекцію, наприклад F_2 і площину $\Sigma = (ABC)$, якій фігура належить. Ці дані визначають горизонтальну проекцію $F - F_1$, а отже, і оригінал – саму фігуру F.

6. ПКП-4 площини і гіперплощини. ПКП-4 площини дістаємо за аналогією до ПКП-4 прямої, бо, як відомо, площина визначається трьома точками. На рис. 4.38, б вона визначена точками A, B і C. Гіперплощина – тривимірне узагальнення звичайної площини на чотиривимірний простір (E^4). Вона визначається заданням чотирьох точок. На рис. 4.38, в на ПКП-4 гіперплощину (Σ^3) зазнали спрощення зада-

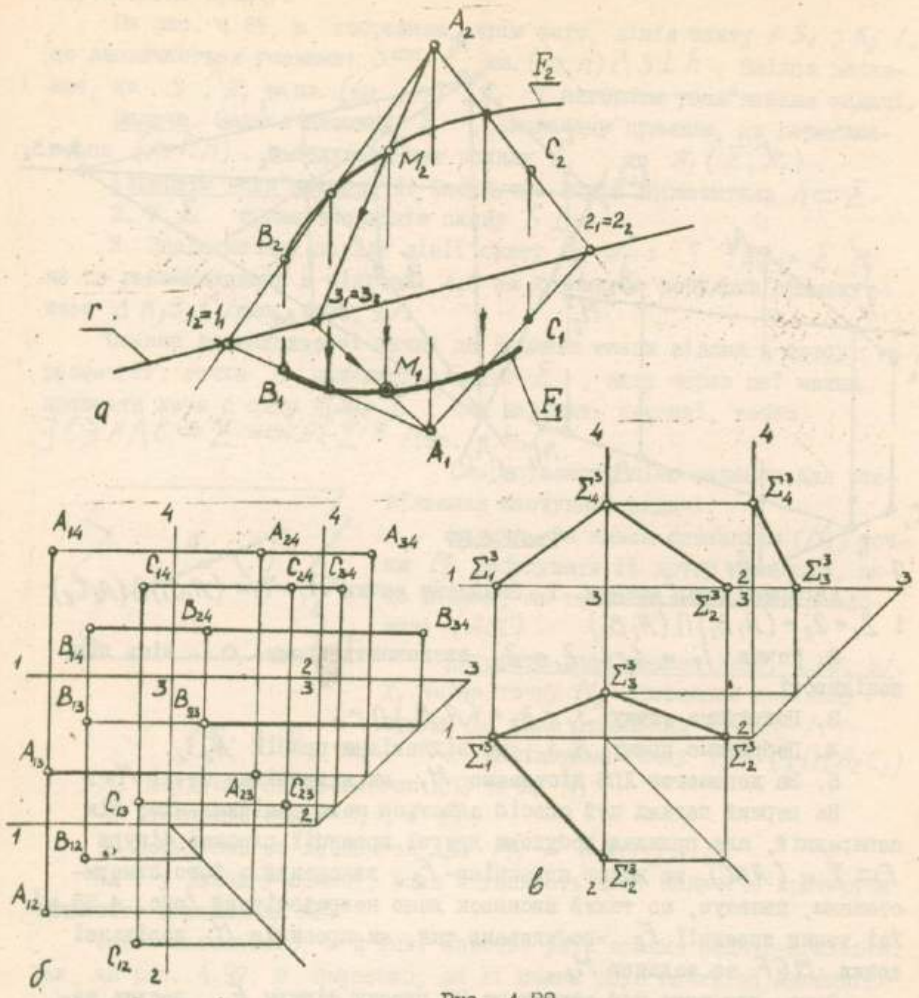


Рис. 4.38

но слідами на відповідних двовимірних площинах проекцій Π_{ij}. де $i, j = I, 2, 3, 4$, але $i \neq j$.

4.5. Аналітичне зображення прямої і площини

Як і у випадку КП точки /див. підрозд. 4.2/, осі проекцій розглядаємо як осі координат. Починаємо з аналітичного зображення площин, оскільки прямі далі будемо визначати як перетин площин КП трикартинний.

I. Аналітичні зображення площин.

А. Площини рівня /рис. 4.39/:

а/ горизонтальну площину / $\alpha \parallel \pi_1$ / подають рівнянням $z = h$ /як множину точок, віддалених від площини проекцій π_1 на відстань h і таких, що проеціюють на пряму в площині проекцій π_2 і π_3: $\alpha_2 = \alpha_3$. де $-\infty < x, y < \infty$;

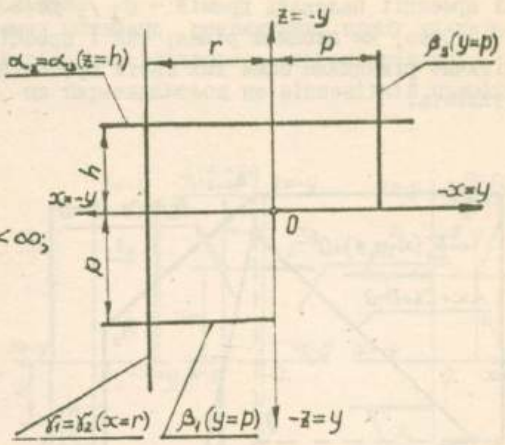


Рис. 4.39

б/ фронтальну площину / $\beta \parallel \pi_2$ / подають рівнянням $y = p$ /як множину точок, віддалених від площини π_2 на віддаль p і таких, що проеціюють на пряму в площині π_1 і π_3: відповідно на β_1 і β_3), де $-\infty < x, z < \infty$;

в/ профільну площину / $\gamma \parallel \pi_3$ / за аналогією подають рівнянням $x = r$, де $-\infty < y, z < \infty$.

Б. Проеціюючі площини /рис. 4.40/:

а/ горизонтально-проеціюючу площину / $\alpha \perp \pi_1$; рис. 4.40, а/ зображають рівнянням $Ax + By + C = 0$ /як множину точок, горизонтальні проекції яких належать прямій $-\alpha_1$/; де $-\infty < x, y, z < \infty$;

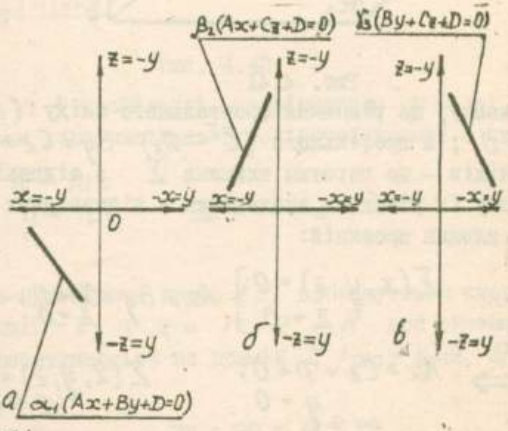


Рис. 4.40

б/ фронтально-проеціюючу площину / $\beta \perp \pi_2$; рис. 4.40, б/ подають рівнянням $Ax + Bz + C = 0$ /як множину точок, фронтальні проекції яких належать прямій $-\beta_2$/, де $-\infty < x, y, z < \infty$;

в/ профільно-проеціюючу площину / $\gamma \perp \pi_3$; рис. 4.40, в/ подають рівнянням $Ay + Bz + C = 0$ /як множину точок, яких профільні проекції належать прямій – γ_3 /, де $-\infty < x, y, z < \infty$.

Отже, як площини рівня, так і проеціюючі площини подають аналітично рівнянням саме тих своїх проекцій, що мають збиральну властивість.

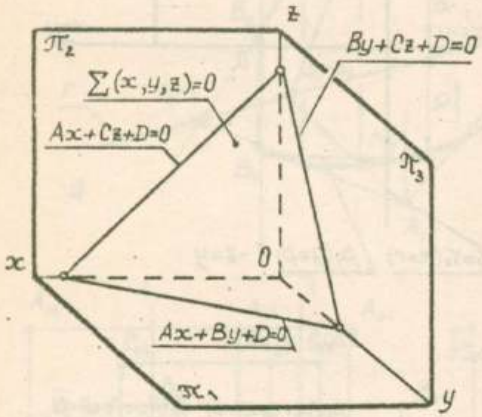


Рис. 4.41

В. Площина загального положення /рис. 4.41/. Нехай рівняння площини загального положення $\sum(x, y, z) = 0$. Враховуючи, що рівняння площин проекцій мають вигляд: $\pi_1 - z = 0$, $\pi_2 - y = 0$ і $\pi_3 - x = 0$, дістанемо рівняння слідів площини $\sum$ /див. підрозд. 4.4/. Оскільки горизонтальний слід площини – це пряма $m^z \subset \pi_1$, то її рівняння $Ax + By + D = 0$; $z = 0$.

Аналогічно доходимо висновку, що рівняння фронтального сліду $(n^z \subset \pi_2)$ – $Ax + Cz + D = 0$; а профільного $(l^z \subset \pi_3)$ – $By + Cz + D = 0$. . Але кожний із слідів – це перетин площини $\sum$ з відповідною площиною проекцій, а тому їх рівняння випливають з відповідних систем рівнянь площини $\sum$ і площин проекцій:

$$\left.\begin{matrix}\sum(x,y,z)=0;\\ z=0\end{matrix}\right\} Ax+By+D=0;\quad z=0 \qquad \left.\begin{matrix}\sum(x,y,z)=0;\\ y=0\end{matrix}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Ax+Cz+D=0;\quad y=0. \qquad \left.\begin{matrix}\sum(x,y,z)=0;\\ x=0\end{matrix}\right\} By+Cz+D=0;\quad x=0.$$

Отже, ясно, що рівняння площини загального положення $\sum(x, y, z) = 0$ має такий вигляд:

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad -\infty < x, y, z < 0,$$

що, як відомо з аналітичної геометрії [26], цілком відповідає висновкам, до яких приводять й інші міркування.

2. Аналітичні подання прямих.

Аналітичні подання прямих матимемо, розглядаючи пряму як перетин двох площин, а отже, її рівняння випливає з системи рівнянь, складеної з рівнянь площин, що перетинаються по відповідній прямій.

А. Проеціюючі прямі /рис. 4.42/. Вони подані рівняннями своїх проекцій, що мають збиральні властивості. Справді, у випадку горизонтально-проеціюючої прямої l ; рис. 4.42, а/ збиральну властивість має її горизонтальна проекція - точка l_1, з координатами $x = m$; $y = n$ - це і є аналітичне подання самої горизонтально-проеціюючої прямої. Але ж, з другого боку, горизонтально-проеціюча пряма є перетин двох площин рівня: фронтальної - з рівнянням $y = n$ і профільної - з рівнянням $x = m$, а отже, аналітичним поданням горизонтально-проеціючої прямої є система цих рівнянь:

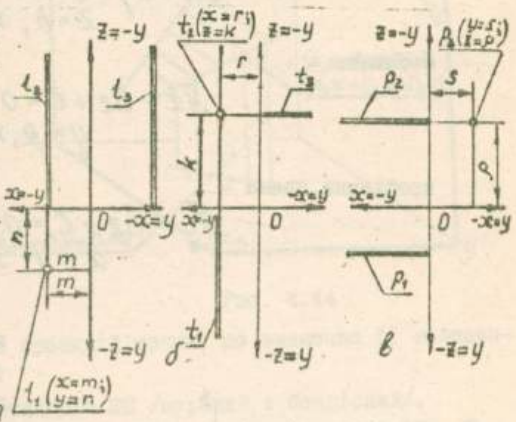


Рис. 4.42

$$x = m;$$
$$y = n, \qquad \text{де } -\infty < z < \infty.$$

Аналогічно фронтально-проеціююча пряма (t) зображується координатами фронтальної проекції - t_2 : $x = r$, $z = k$ або системою рівнянь площин рівня, що перетинаються по прямій t /рис. 4.42, б/:

$$x = r;$$
$$z = k, \qquad \text{де } -\infty < y < \infty$$

Профільно-проеціююча пряма (ρ) зображується координатами своєї профільної проекції ρ_3 - точки: $y = s$, $z = \rho$ або системою

$$y = s;$$
$$z = \rho, \quad \text{де } -\infty < x < \infty.$$

Б. Пряма рівня. Як і проеціюючі прямі, кожну пряму рівня теж тут розглядаємо як перетин двох площин, одна з яких - проеціююча, а друга - площина рівня. Отож, кожну пряму рівня можна аналітично подавати у вигляді системи двох рівнянь, одне з яких - рівняння площини рівня, а друге - проеціюючої площини. Наприклад, горизонталь зображають системою /рис. 4.43/

$$Ax + By + C = 0;$$
$$z = h, \text{ де } -\infty < x, y < \infty;$$

фронталь -

$$\bar{A}x + \bar{B}z + \bar{C} = 0$$
$$y = p, \text{ де } -\infty < x, z < \infty;$$

профільна пряма -

$$\bar{\bar{A}}y + \bar{\bar{B}}z + \bar{\bar{C}} = 0$$
$$x = r, \text{ де } -\infty < y, z < \infty.$$

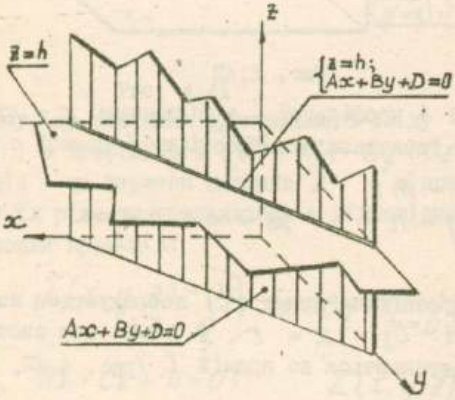


Рис. 4.43

Можна також говорити, що кожна пряма рівня аналітично зображена системою рівнянь двох своїх проекцій.

В. Пряма загального розміщення. Пряму загального розміщення теж будемо розглядати як перетин двох проеціюючих площин, наприклад, горизонтально-проеціюючої і фронтально-проеціюючої, кожна з яких, як зазначалося раніше, зображається рівнянням своєї проекції, що має збиральну властивість, а система двох таких рівнянь і є аналітичне зображення прямої загального розміщення /рис. 4.44/.

Справді, нехай задано пряму $\ell \,/\, \ell_1, \ell_2/$, в якої рівняння ℓ_1 - $A_1x + B_1y + D_1 = 0$; а ℓ_2 - $A_2x + C_2z + D_2 = 0$; Тоді сама ℓ подається як система

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0;$$
$$A_2x + C_2z + D_2 = 0, \text{ де } -\infty < x, y, z < \infty,$$

тобто пряма загального розміщення аналітично подається системою рівнянь двох своїх проекцій.

Запитання для самоперевірки

1. Чи можна реконструювати оригінал за монопроекційним зображенням?

2. Як пояснити оборотність біпроекційного зображення?

3. Як визначається комплекс проекцій?

4. Як називаються площини проекцій?

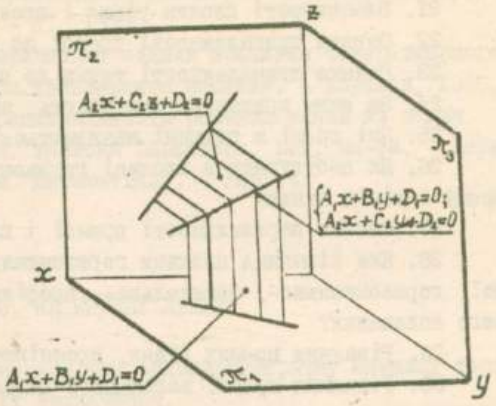


Рис. 4.44

5. Яке найменше число проекцій точки, що визначає її положення в просторі?

6. Властивості двокартинного КП /осьовий і безвісний/.

7. Як називаються відстані точки від площин проекцій π_1, π_2 і π_3 на КП?

8. Властивості трикартинного КП /осьового і безвісного/.

9. Якими координатами на КП визначається положення проекції точки: горизонтальної, фронтальної, профільної?

10. Яка послідовність запису координат точки? Позначте проекції точок на КП за їх наочним зображенням.

11. За яким критерієм визначають, чи задано зображення прямої на КП?

12. Яке визначення прямої загального призначення?

13. Як побудувати натуральну фігуру відрізка загального положення й кути нахилу прямої до площин проекцій?

14. Які прямі називаються прямими рівня і проеціюючими?

15. Властивості прямих рівня.

16. Властивості проеціюючих прямих.

17. Як на КП поділити відрізок прямої в даному відношенні?

18. Як може бути задано площину в просторі та її зображення на КП?

19. Яке положення може займати площина відносно площин проекцій?

20. Означення площини загального положення.

21. Властивості площин рівня і проеціюючих.

22. Ознака приналежності прямої до площини.

23. Ознака приналежності точки до площини.

24. За яким критерієм визначають, чи задано площину на КП?

25. Які прямі в площині називаються головними лініями?

26. Як побудувати в площині горизонталь, фронталь, профільну пряму і лінію ската?

27. Ознака паралельності прямої і площини.

28. Яке рівняння площини горизонтальної, фронтальної, профільної, горизонтально-, фронтально-, профільно-проеціюючої та загального положення?

29. Рівняння прямих рівня, проеціюючих прямих.

30. Рівняння прямої загального положення.

Література

[1-6; 8; 9].

26. Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. – М., 1968.

27. Вальков К.И. Введение в теорию моделирования. – Л., 1974.

28. Глаголев Н.А. Начертательная геометрия. – М.-Л., 1946.

29. Джапаридзе И.С. Построение конструктивных моделей пространств, их систематизация и связь с методами изображений, применяемых в технике: Автореф. дис. ... д-ра техн. наук. – Тбилиси, 1965.

30. Котов И.И. Комбинированные изображения. – М., 1951.

31. Мышкис А.Д. Лекции по высшей математике. – М., 1973.

32. Наумович Н.В. Об одном методе начертательной геометрии четырехмерного евклидова пространства // Тр. Московск. сем. по начертат. геом. и инж. практ. – М., 1958.

33. Первикова В.Н. Основы обратимых отображений линейного пространства в применении к чертежам многомерных фигур // Вопросы прикладной геометрии. – М., 1966.

34. Радищев В.П. О применении геометрии четырех измерений к построению равновесных физико-химических диаграмм // Изв. АН СССР. – 1947. – Вып. 15.

35. Федоров Е.С. Новая начертательная геометрия // Изд-во Российской АН, 1917. - Т. XI.

36. Филиппов П.В. Начертательная геометрия многомерного пространства и ее приложения. - Л., 1979.

37. Чернецкий Н.М. Графические модели объектов четырехмерного пространства на полнопольном комплексном чертеже. - Харьков, 1986.

38. Чернецкий Н.М. О рациональности решения одной из задач проекционного черчения // Уч. записки Харьковск. пед. ин-та. - Харьков, 1961. - Т. 39. - Серия "Математика". - Вып. 4.

5. КП КРИВИХ ЛІНІЙ

Лінію розглядаємо як неперервну однопараметричну множину точок простору з єдиним законом їх визначення.

Як крива, так і пряма є різновиди ліній.

Закон визначення окремих точок кривої може набирати найрізноманітніші форми. Його можна задати аналітично /у вигляді формули, системи рівнянь тощо/ або геометрично /у вигляді перетину двох поверхонь/, або кінематично. Остання форма для інженера особливо прийнятна. Отож, будемо користуватися означенням кривої, як неперервної однопараметричної множини окремих положень точки, що переміщується в просторі. Отже, криву можна ототожнювати з траєкторією точки, що переміщується.

Розрізняють плоскі й просторові криві.

5.1. КП плоских кривих

Якщо всі точки кривої належать одній площині /компланарні/, то така крива (k) є плоскою /рис. 5.1/. Плоскі криві: коло, еліпс, гіпербола, парабола та ін.

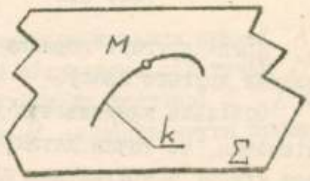


Рис. 5.1

1. Властивості плоских кривих. Виконання КП плоскої кривої залежить від правильного використання її властивостей, особливо тих, що інваріантні /незмінні/ відносно паралельного проеціювання.

Спираючись на властивості паралельного проеціювання, легко переконатися, що при паралельному проеціюванні зберігаються деякі властивості плоских кривих: порядок, клас, зв"язність, регулярність і жанр. Кривина змінюється.

1/ Порядок плоскої кривої. Він визначається максимальним числом точок-перетинів її та компланарної з нею прямої.

Коло, еліпс, гіпербола і парабола - криві другого порядку, пряма - крива першого порядку і т.д. Оскільки інцидентність /взаємоналежність/ є інваріантна властивість відносно паралельного проеціювання, то проекції зазначених кривих і однойменні проекції прямої на КП також можуть мати не більше двох або однієї точок-перетинів, тобто порядок кривої-проекції такий самий, що і кривої-оригіналу /рис. 5.2/.

2. Клас. Класом плоскої кривої називають максимальне число дотичних, які можна провести до кривої з точки, що не належить кривій, але компланарної з нею /рис. 5.3/.

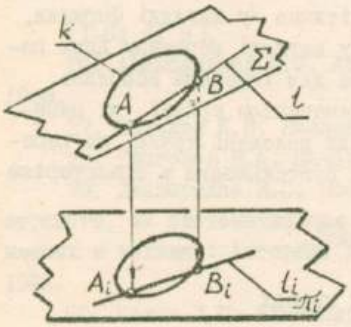


Рис. 5.2

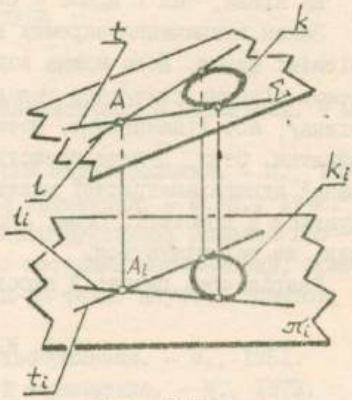


Рис. 5.3

Криві другого порядку /коло, еліпс та ін./ є водночас також кривими другого класу.

Оскільки властивість інцидентності інваріантна відносно проеціювання, то точка дотику проеціюється в точку дотику, а отже, клас кривої зберігається при проеціюванні.

3/ Зв"язність. Відомо, що гіпербола складається з двох віток і має дві нескінченно віддалені точки. При паралельному проеціюванні нескінченно віддалена точка не може спроеціюватись на кінцеву.

Відтак паралельною проекцією гіперболи не може бути однозв"язна крива другого порядку /коло, еліпс, парабола/, тобто зв"язність при паралельному проеціюванні зберігається /при центральному - ні/. Через це парабола /або гіпербола/ зображується на КП лише параболою /чи, відповідно, гіперболою/ або вироджується в пряму.

4. Кривина. Напрям кривої в будь-якій її точці M визначається напрямом дотичної в цій точці. Дотичну (t) в точці (M) на кривій (k), якщо в останньої немає аналітичного зображення, можна побудувати так, як показано на рис. 5.4, а, де p - довільна пряма. При переміщенні точки M вздовж кривої змінюється і напрям дотичної до неї в точці M.

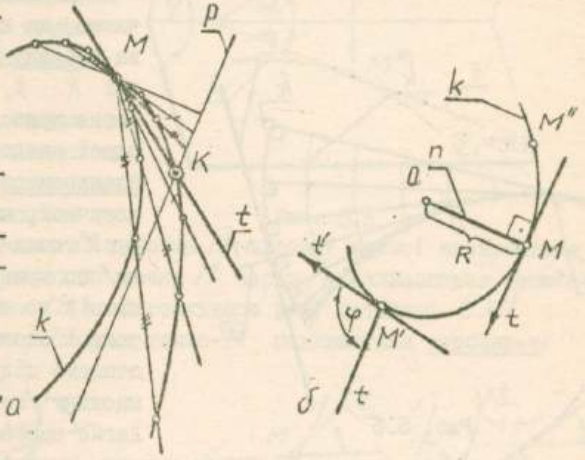


Рис. 5.4

Нехай точка M перемістилася по кривій K у положення M', а напрям дотичної змінився при цьому на кут $\Delta\varphi$ /рис. 5.4, б/. Якщо довжину дуги кривої (MM') позначимо ΔS, а то величина $\mathcal{K}_c = \Delta\varphi/\Delta S$ називається середньою кривиною дуги MM'.

Якщо точка M з положення M' повертається в початкове, тобто при $M' \to M$, то $\Delta S \to 0$ і кут $\varphi \to 0$.

Границя $\mathcal{K} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} \Delta\varphi/\Delta S$ - кривина кривої K в точці M.

Величина $R = 1/\mathcal{K}$ називається радіусом кривини кривої k у точці M. Відрізок $|OM| = R$, який відкладено від точки M вздовж нормалі n /тобто по перпендикуляру до дотичної t / до кривої k в точці M *, визначає точку O - центр круга кривини

* у напрямі вігнутості k.

кривої K у точці M. Легко помітити, що кут кривини – граничне положення кола, що визначається точками M, M', $M''\in K$ при $M'\to M$ і $M''\to M$. Точку O називають ще центром кривини кривої K у точці M.

Очевидно, кожній точці M кривої відповідає свій круг кривини, а отже, і свій центр кривини – точка O. Оскільки K – безперервна однопараметрична множина точок типу $M(\{M\})$, то й точок – центрів кривини – теж безперервна однопараметрична множина $\{O\}$ – крива $\bar{K}$, яку називають <u>еволютою</u> кривої K /рис. 5.5/.

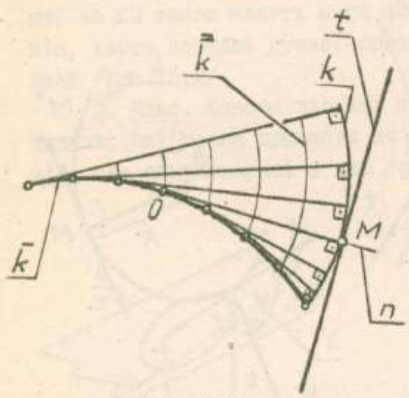


Рис. 5.5

Аналізуючи рис. 5.5, помічаємо, що криву K можна взяти за <u>обвідну</u> * нормалей до кривої $\bar{K}$ і, отже, крива K відносно кривої $\bar{K}$ /тобто до своєї еволюти/ виявляється <u>евольвентою</u> – траєкторією точки дотичної, яка обертається при русі точки дотику /без ковзання/ по кривій $\bar{K}$. Але на дотичній до K багато точок, а тому і евольвент кривої $\bar{K}$ дістанемо цілу однопараметричну множину /серед яких і сама K/. Легко переконатися, що сама крива K супроводжується, так би мовити, множиною евольвент.

Еволютою кривої можна скористатися як класифікатором <u>стічних</u> кривих, тобто кривих, що мають спільну дотичну. Вони можуть мати як зовнішнє, так і внутрішнє стикання. В першому випадку вони розміщені по різні боки від спільної дотичної, в другому – по один. Якщо еволюти /$\bar{K}$ і $\bar{K}'$/ стічних кривих K і K' не мають спільних точок, криві K і K' мають <u>стикання</u> першого порядку, а якщо $\bar{K}$ і $\bar{K}'$ перетинаються, – то другого порядку. Якщо еволюти $\bar{K}$ і $\bar{K}'$, в свою чергу, є стічними першого порядку стикання, то K і K' – стічні третього порядку стикання.

---

* Обвідна – геометричне місце граничних положень точок перетину (A) елементів /у даному випадку прямих/ безперервної однопараметричної множини елементів, параметр якої прямує до нуля.

Оскільки при паралельному проеціюванні ΔS і $\Delta\varphi$ в загальному випадку спотворюються, то й значення $\mathcal{K}_c$, $\mathcal{K}$ і R змінюються. Зміна кривини, зокрема при ортогональному проеціюванні, визначається так:

$$\mathcal{K}' = (\cos^3\alpha/\cos\varphi)\,\mathcal{K},$$

де $\alpha = t\hat{\ }t'$ /рис. 5.6, а/, $\varphi = \Sigma\hat{\ }\Sigma'$, а $\mathcal{K}$ – кривина кривої-оригіналу і $\mathcal{K}'$ – кривина кривої – ортогональної проекції відповідно в точках $M \in k$ і $M' \in k'$ з дотичними $t \ni M$ і $t' \ni M'$ *.

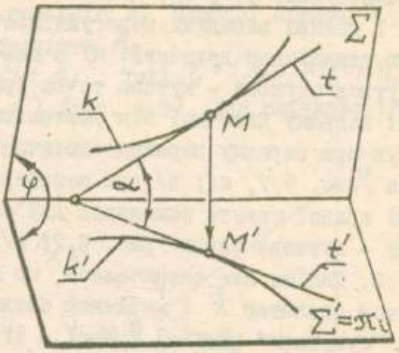


Рис. 5.6

5/ Регулярність. Можна встановити напрям як поступального руху точки M вздовж кривої k, так і обертального руху дотичної навколо точки M. Точка $\bar{M}$ плоскої кривої називається регулярною, якщо при переході точки M через $\bar{M}$ залишаються незмінними напрями руху точки M і обертального руху дотичної $t \ni M$ /рис. 5.7, а/. В інших випадках точка $\bar{M}$ називається особливою:

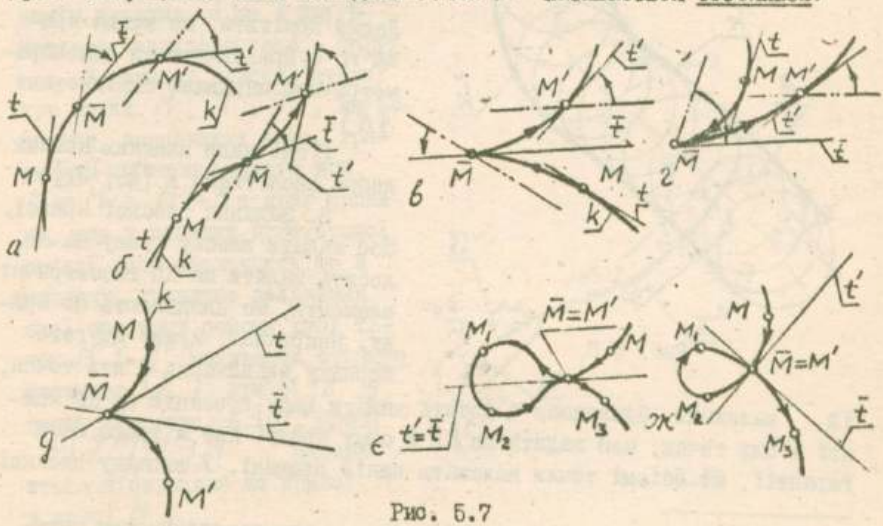


Рис. 5.7

* Детальніше див. [7, с. 100, 101].

точкою перегину, якщо змінюється напрям руху дотичної /рис. 5.7,б/; звороту першого роду, якщо змінюється напрям руху точки (рис.5.7,в); звороту другого роду, якщо змінюються напрями руху як точки, так і дотичної /рис. 5.7, г/.

У деяких випадках нерегулярність точок кривої пов"язана з особливою поведінкою дотичної: а/ в монотонній зміні її напряму може відбутися стрибок - кутова точка /рис. 5.7, д/; б/ при неперервній зміні напряму дотичної він раптом повторюється, збігаючись з тим, що був при першому переході дотичної через точку стикання - кратна точка /рис. 5.7, є/; в/ при неперервній зміні напряму дотичної в точці кривої можуть опинитися дві або кілька дотичних різного напряму - вузлова точка /рис. 5.7, ж/.

2. Раніше вже зазначалося, що кожна плоска крива k супроводжується еволютою $\tilde{k}$ і множиною евольвент $\{k\}$. Слід пам"ятати ще один "супутник" плоскої кривої - її так звану еквідистанту *, яка широко використовується в техніці, зокрема в металообробці.

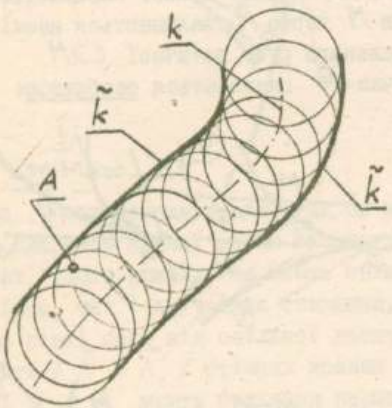


Рис. 5.8

Еквідистанту кривої $(\tilde{k})$ дістаємо як обвідну безперервної множини кіл одного радіуса, геометричним місцем центрів яких і є дана крива /рис. 5.8/. Легко помітити, що кожна крива k супроводжується однопараметричною множиною еквідистант - $\{\tilde{k}\}$.

Різні види плоских кривих добре висвітлено в [40; 41].

3. Задання плоскої кривої. Щоб задати плоску криву на КП, досить задати на КП геометричні елементи, що визначають цю криву. Наприклад, криву другого порядку визначають п"ять точок, їй належних. Здавалося б, досить задати пару проекцій на КП кожної з цих точок, щоб задати на КП і саму криву. Але ж треба мати гарантії, що всі ці точки належать одній площині. У випадку плоскої

* Умовний термін, що не збігається із загальноприйнятим математичним.

кривої (k) слід керуватися правилом, згідно з яким для задання на КП плоскої кривої треба задати на КП одну її проекцію і три точки, що належать кривій – оригіналу. Очевидно, названі три точки і визначають площину, якій належить плоска крива.

Задача. Нехай на КП задано проекцію K_1 плоскої кривої K, а також точки $A, B, C \in K$. Побудувати K_2.

Розв"язання. Зафіксуємо $\forall M_1 \in K_1$. Тоді $1_1 = (A_1B_1) \cap (C_1M_1)$ і відповідно $1_2 \in (A_2B_2)$, $M_2(C_2 1_2)$ /рис. 5.9/. Для побудови інших точок кривої процес побудови повторюємо. Можна використати і точкову відповідність так, як показано на рис. 4.38, а.

Коли напрям проеціювання паралельний площині кривої, то проекція плоскої кривої вироджується в пряму.

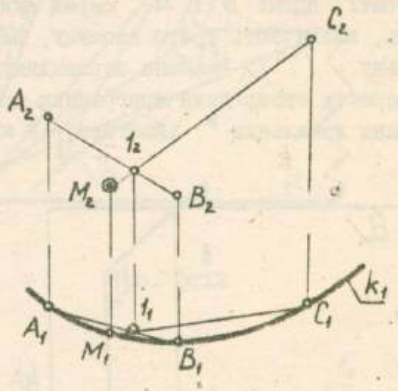


Рис. 5.9

5.2. КП просторових кривих

I. У просторової кривої, окрім кривини, є ще й друга числова характеристика – скрут.

У випадку плоскої кривої три точки M, M', M'', як показано, визначають коло, граничним положенням якого при $M' \to M$ і $M'' \to M$ є круг кривини, але у випадку просторової кривої вони визначають ще й площину, граничне положення якої при тому самому русі точок M' і M'' називають стічною площиною (Σ^M) кривої K у точці M /рис. 5.10/. Пряма $b \perp \Sigma^M \wedge b \ni M$ називається бінормаллю до кривої K в точці M.

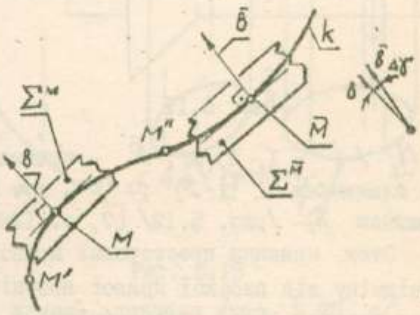


Рис. 5.10

Нехай $M \to \bar{M}$. Тоді $\Sigma^M \to \Sigma^{\bar{M}}$, а $b \to b'$. Якщо $b \hat{,} b' = \Delta\gamma$ і довжина дуги $M\bar{M}$ дорівнює ΔS, то одержимо середній скрут кривої на дузі $M\bar{M}$: $\bar{\mathcal{K}}_c = \Delta\delta/\Delta S$.

Якщо $\bar{M} \to M$, то запишемо $\bar{\mathcal{K}} = \lim\limits_{\Delta S \to 0} (\Delta\delta/\Delta S)$ - скрут кривої k у точці M.

2. Січна MM' /або MM''/ при $M' \to M$ /або $M'' \to M$/ має граничне положення - дотичну t і, отже, $t \subset \Sigma^M$. Перетинаючись, прямі t і b визначають площину, що називається спрямною - θ^M. Нарешті, прямі b і n, серед яких n виступає вже як головна нормаль, визначають третю площину, перпендикулярну до перших двох, нормальну - Γ^M. Взаємно перпендикулярні площини Σ^M, θ^M і Γ^M утворюють своєрідний тригранник Френе, що має велике значення для вивчення локальних * властивостей кривої, які є предметом диференціальної геометрії /рис. 5.II/.

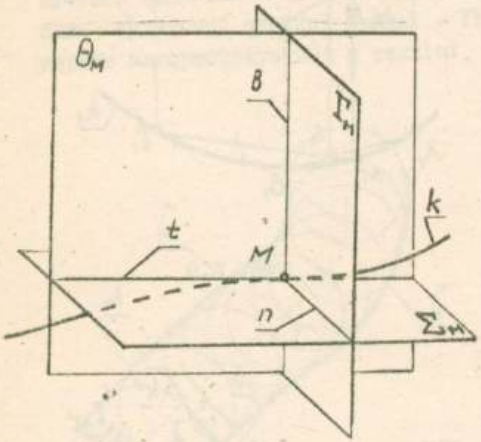


Рис. 5.II

3. Скористаємось тригранником Френе для ознайомлення з деякими проекційними властивостями просторової кривої.

За аналогією з випадком плоскої кривої /див. підрозд. 5.I/ розглянемо зв"язок між кривиною просторової кривої і кривиною її проекції. Виявляється, що він зумовлюється формулою $\bar{\mathcal{K}}_i = (\cos^3\varphi/\cos\varepsilon)\,\bar{\mathcal{K}}$, де $\bar{\mathcal{K}}_i$ - кривина кривої-проекції на площині проекцій π_i в точці M_i / i = I, 2, 3/; $\bar{\mathcal{K}}$ - кривина просторової кривої; ε - кут між площинами Σ^M і π_i; φ - кут між дотичною t в точці M і площиною π_i /рис. 5.I2/ [7, с. I29, I30].

Отож, кривина просторової кривої при проеціюванні змінюється. На відміну від плоскої кривої проеціювання просторової кривої зберігає порядок, клас, регулярність і особливості її лише в окремих випадках. Отже, детальне ознайомлення з класифікацією особливостей

* Тобто властивостей, що їх має крива в як завгодно малому околі кожної зі своїх точок.

просторової кривої, що дозволяється застосуванням тригранника Френе, - недоцільне. Обмежимося лише фіксацією того факту, що у випадку регулярності просторова крива розміщена по один бік від спрямної площини θ^M і дотична до неї та по різні боки від площин - стічної (Σ^M) і нормальної (Γ^M) - крива їх перетинає /рис. 5.I3/ [3, с. I72-I75; 7, с. I35-I37; 42, с. 96-I04].

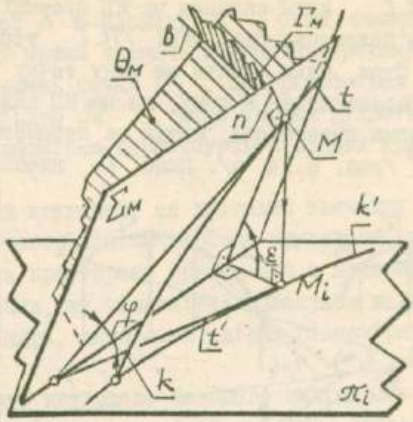


Рис. 5.I2

Крім того, слід пам"ятати, що коли центр проеціювання - звичайна точка кривої, то порядок кривої-проекції на одиницю нижчий, а якщо центр проеціювання - k-кратна точка кривої, то порядок кривої-проекції на k одиниць нижчий.

4. Для задання просторової кривої на КП замало задання однієї з її проекцій. Необхідно задати дві проекції. Але в деяких випадках і цього недостатньо. Так, на рис. 5.I3,а дугу l просторової кривої цілком задано двома проекціями $/l_1, l_2/$. Справді, за заданою проекцією (A_2) точки $A \in l$ побудова A_1 за допомогою ЛПЗ очевидна. Складніше, якщо

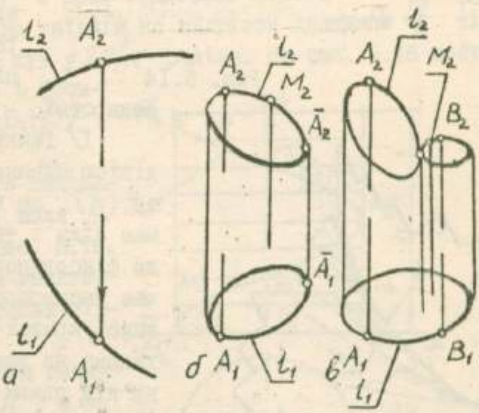


Рис. 5.I3

хоч би одна з проекцій просторової кривої замкнена /рис. 5.I3, б/. Легко помітити, що в цьому випадку побудова другої проекції (M_1) довільної точки $M \in l$ за заданою проекцією M_2 можлива тільки після попереднього задання хоча б однієї точки $A \in l$, але A не

повинна належати граничній прямій смуги проекційного зв"язку $(\bar{A}_1\bar{A}_2)$. На рис. 5.I3, в наведено приклад, коли попереднє задання однієї точки $A \in l$, крім задання на КП проекцій самої l, не дозволяє визначити положення будь-якої $M \in l$, тобто побудувати M_1 за заданою M_2. Отож, слід задати ще одну точку $B \in l$.

5. Переконатися в тому, що на КП задано саме просторову криву своїми двома проекціями, можна за допомогою чотирьох точок – A, B, $C, D \in l$ /рис. 5.I4, а/. Якщо l плоска, то точка перетину діагоналей $K = (AC) \cap (BD)$ існує, а отже, й існує ЛПЗ (K_1K_2), де $K_1 = (A_1C_1) \cap (B_1D_1)$ і $K_2 = (A_2C_2) \cap (B_2D_2)$. Якщо ж l – просторова, то (K_1K_2) як ЛПЗ не існує. Перевірити l на просторовість можна і за допомогою точкової відповідності /див. підрозд. 4.4/ так, як показано на рис. 5.I4, б.

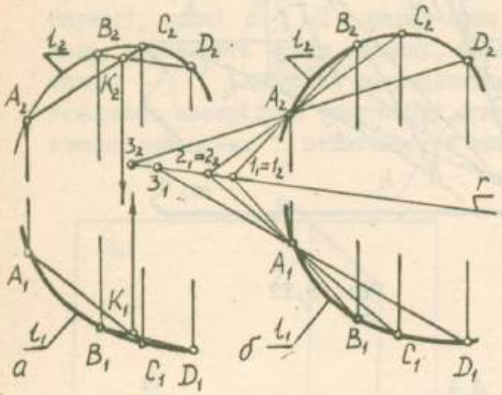


Рис. 5.I4

6. Приклад просторових кривих, що знаходять широке застосування як в техніці, так і в народному господарстві, – <u>гвинтові</u> лінії.

I/ Гвинтовою загального виду, або лінією однакового нахилу, називають криву (k), що в кожній своїй точці (M) має один і той самий кут (α) нахилу до фіксованої площини (Δ). Це означає насамперед те, що дотична (t) до такої кривої в кожній її точці (M) нахилена до зазначеної фіксованої площини під одним кутом (α) /рис. 5.I5/.

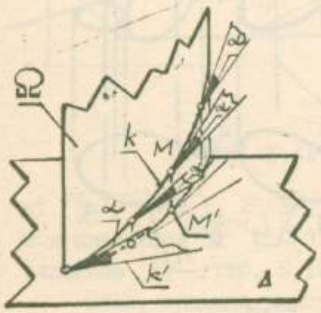


Рис. 5.I5

Якщо через кожну точку такої кривої провести пряму (b) таку, що $b \perp \Delta$, то прямі b складуть неперервну однопараметричну множину $(\{b\})$ твірних прямої циліндричної поверхні Ω, яку будемо називати <u>базовою циліндричною</u> поверхнею гвинтової загального виду / $k \subset \Omega$ /. Очевидно, крива k перетинає кожну

з твірних базової циліндричної поверхні під одним і тим самим кутом: $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Кожна твірна фіксує точку $M' = \mathcal{B} \cap \Delta$, що належить кривій $k' \ni M'$ – проекції кривої K в площину Δ. Отож, гвинтову загального виду або лінію укосу можна визначити і як неперервну множину $\{M\}$ частинних положень точки M, яка рівномірно рухається вздовж твірної $\mathcal{B}$ циліндра Ω, якщо твірна рухається так, що точка M' водночас рівномірно переміщується вздовж кривої k'.

Якщо циліндр Ω – прямий круговий, то дістаємо звичайну гвинтову лінію. За означенням гвинтовою лінією прямого кругового циліндра з постійним кроком називають просторову криву, яка є неперервною множиною частинних положень точки, що рівномірно рухається вздовж твірної прямого кругового циліндра, якщо сама твірна рівномірно обертається навколо осі циліндра.

Нехай радіус основи прямого кругового базового циліндра – R, а висота його відсіку – H. Тоді горизонтальна проекція базового циліндра – коло радіуса R, фронтальна проекція – прямокутник зі сторонами довжиною $2R$ і H. Якщо переміщенню точки M по твірній на відстань H відповідає повний оберт /на кут у 2π радіан/, то довжина відрізка $|M_2' \bar{M}_2| = H$ є крок гвинтової лінії.

Переміщенню точки M по твірній на відрізок довжиною $\frac{H}{n}$ відповідає обертання твірної на кут у $2\pi/n$ радіан. На рис. 5.I6 зображено побудову горизонтальної і фронтальної проекцій гвинтової лінії у припущенні, що $n = 8$.

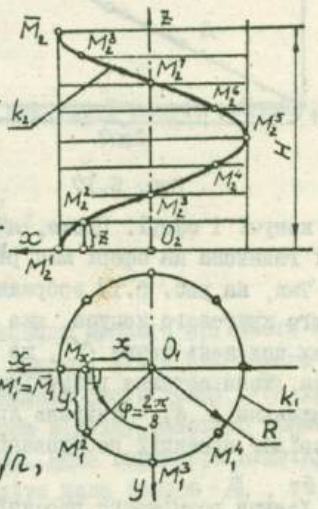


Рис. 5.I6

Розмістимо вісь базового циліндра на осі Z, а проекційні поля π_1 і π_2 так, як показано на рис. 5.I6.

Тоді аналітичне подання гвинтової лінії (k) здобудемо з таких міркувань:

а/ горизонтальна проекція гвинтової лінії – коло радіуса R, а отже, аналітичне подання k_1 –

$$x^2 + y^2 = R^2;$$

б/ з $\Delta M_x O_1 M_1^2$, якщо $\varphi = 2\pi/n$, маємо

$$x = R\cos(2\pi/n);$$

в/ рівномірне переміщення точки M по твірній, а твірної – навколо осі базового циліндра дає

$2\pi/(2\pi/n)$, отже, $n = H/z$;

г/ отож, фронтальна проекція гвинтової (k_2) має таке аналітичне подання /косинусоїда/

$$x = R\cos\left(\frac{2\pi}{H} z\right),$$

а аналітичне подання самої k – виду системи

$$x = R\cos\left(\frac{2\pi}{H} z\right), \qquad /5.1/$$
$$x^2 + y^2 = R^2,$$

де $-R \le x,\ y \le R,\ 0 \le z \le H$.

На рис. 5.16 показано гвинтову з правим ходом.

Оскільки кут нахилу гвинтової до кожної твірної базового циліндра однаковий, то легко побачити, що на розгортці базового циліндра /рис. 5.17/ гвинтова лінія виявляється розгорнутою в діагональ $M\tilde{M}$. Тому гвинтову лінію називають лінією найкоротшої відстані /геодезичною/ між точками на поверхні базового циліндра, наприклад, точками A і B .

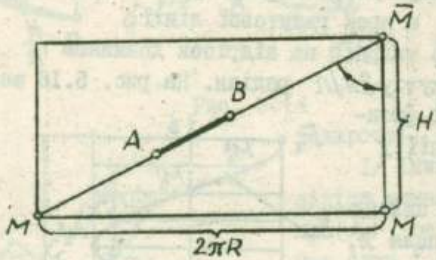


Рис. 5.17

Гвинтову лінію інколи називають <u>гелісою</u>.

2/ Важливі технічні застосування мають також гвинтові лінії на прямому круговому конусі і сфері. Проте, як гвинтова на прямому круговому конусі, так і гвинтова на сфері має різновиди.

Так, на рис. 5.18 зображено КП гвинтової лінії (K) на відсіку прямого кругового конуса, яка визначена як безперервна множина частинних положень точки M , що рівномірно рухається вздовж твірної конуса, коли остання рівномірно обертається навколо осі конуса. Горизонтальна / k_1 – спіраль Архімеда/ і фронтальна / k_2 – затухаюча синусоїда/ проекції побудовані тут з припущенням, що кут $\varphi = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{8}$.

Узявши розміщення проекційних полів і системи координат таке, як на рис. 5.18, домовимося, що відсік базового конуса має пара-

метри: R - радіус кола основи, H - висота /вона і крок гвинтової/.

Тоді $R/H = ctg\alpha$ /де α - кут нахилу твірної MS до площини π_1 або до площини основи конуса/.

За означенням гвинтової $2\pi/\varphi = H/z$. Якщо після обороту твірної на кут φ точка M займає положення $\bar{M}$ /x, y, z/, то, як випливає з $\Delta K\bar{M}\bar{M}_1$, $|K\bar{M}_1| = z\,ctg\alpha$, а оскільки $|\bar{M}_1O_1| = R - z\,ctg\alpha$, то з $\Delta \bar{M}_x\bar{M}_1O_1$ запишемо рівняння фронтальної проекції гвинтової конуса: $x = (R - z\,ctg\alpha)\cos\varphi$ - рівняння затухаючої синусоїди.

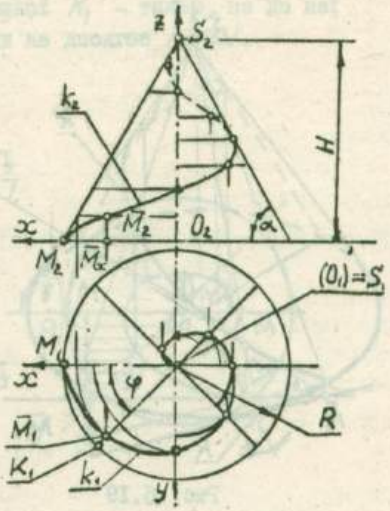


Рис. 5.18

Рівняння горизонтальної проекції гвинтової конуса дістанемо, використовуючи знову $\Delta \bar{M}_x\bar{M}_1O$:

$$x^2 + y^2 = (R - z\,ctg\alpha)^2 = (R^2/H^2)(H - z)^2$$

або, нарешті,

$$x^2 + y^2 = R^2\left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right)^2.$$

Отож, аналітичне подання самої гвинтової конуса матимемо як систему рівнянь:

$$\begin{cases} x = (R - z\,ctg\alpha)\cos\varphi; \\ x^2 + y^2 = R^2\left(1 - \frac{\varphi}{2\pi}\right)^2 \end{cases} \qquad /5.2/$$

в параметричній формі.

Інакше будується на відсіку базового прямого кругового конуса конічна лінія однакового укосу, або конічна лінія однакового укосу. За означенням, ця лінія (k) має в кожній своїй точці $(\bar{M})$ дотичну (t), що нахилена до площини основи відсіку базового прямого кругового конуса під одним кутом (β). Якщо параметри відсіку конуса такі, що висота його - H, а радіус кола основи - R, то кут нахилу твірної до площини основи (α) відсіку легко знайти з рів-

ності $tg\alpha = H/R$ за $\Delta K'O'S'$. У цьому неважко переконатися, розглядаючи аксонометричне зображення на рис. 5.19, де для відсіку конуса і системи координат $xyzO$ обрано таке саме взаємне розміщення, як і на рис. 5.18.

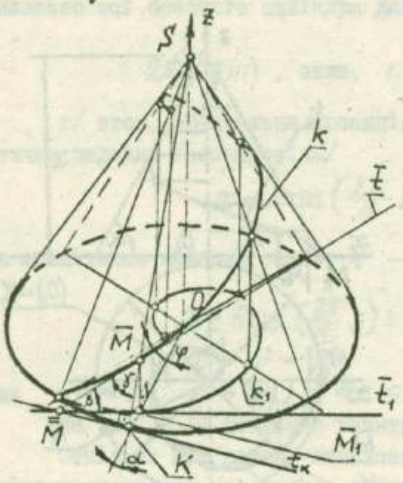


Рис. 5.19

Нехай точка $\bar{M} \in k$ – будь-яка точка на конічній лінії однакового укосу. Пряма $\bar{t}$ – дотична в цій точці до k. Точка $\bar{M}_1$, крива k_1 і пряма $\bar{t}_1$ – проекції в площину основи гідсіку базового конуса відповідно $\bar{M}$, k і $\bar{t}$.

З $\Delta K\bar{M}\bar{M}_1$ маємо $|\bar{M}\bar{M}_1| = |\bar{M}K|\sin\alpha$, з $\Delta K\bar{M}\bar{M}$ – $|\bar{M}K| = |\bar{M}\bar{M}|\cos\gamma$ /де $\gamma = \bar{t} \hat{\ } (KS)$ – кут між твірною конуса і дотичною в $\bar{M}$ до k /, а з $\Delta\bar{M}\bar{M}\bar{M}_1$ – $|\bar{M}\bar{M}| = |\bar{M}\bar{M}_1|/\sin\beta$. Але тоді $|\bar{M}\bar{M}_1| = |\bar{M}K|\sin\alpha \Rightarrow |\bar{M}\bar{M}_1| = |\bar{M}\bar{M}|\cos\gamma\cdot\sin\alpha \Rightarrow$

$$\Rightarrow |\bar{M}\bar{M}_1| = (|\bar{M}\bar{M}_1|/\sin\beta)\cos\gamma\cdot\sin\alpha \Rightarrow \cos\gamma = \sin\beta/\sin\alpha,$$

а отже, кут $\gamma = const$, тобто дотична до k у кожній її точці перетинає твірну базового конуса під постійним кутом.

Далі зазначимо, що кут γ належить площині $(t_k, (KS))$, дотичній до конуса по твірній KS, а тому нахиленій до площини основи конуса під кутом α. Отож, проекція кута γ в площину основи конуса $\gamma_1 = \gamma\cos\alpha$. Звідси випливає, що і кут $\gamma_1 = const$. Оскільки $\gamma_1 = \bar{t}_1 \hat{\ } (KO)$, де $\bar{t}_1$ – дотична до k_1 в точці $\bar{M}_1$, а $(O\bar{M}_1)$ – радіус-вектор k_1, то виявляється, що крива k_1 перетинає свої радіуси-вектори під постійним кутом γ_1. Таку властивість має логарифмічна спіраль і, отже, k_1 – логарифмічна спіраль.

Як відомо [43], рівняння логарифмічної спіралі /в полярних координатах/ має вигляд $\rho = ae^{k\varphi}$. Оскільки в даному випадку $a = R$, $k = ctg\gamma_1$ [44] і $e^{k\varphi} < 1$, то і рівняння k_1, а отже, і горизонтальної проекції k, набирає вигляду $\rho = R\cdot e^{ctg\gamma_1\varphi}$, або в декартових координатах

$$x^2 + y^2 = R^2 e^{2ctg\gamma_1\varphi}.$$

Легко помітити, що точка $O_1 = O$ – початок системи координат – виявляється асимптотичною точкою кривої K_1 – такою, що до неї як завгодно наближається, але ніколи не досягає /5.20/.

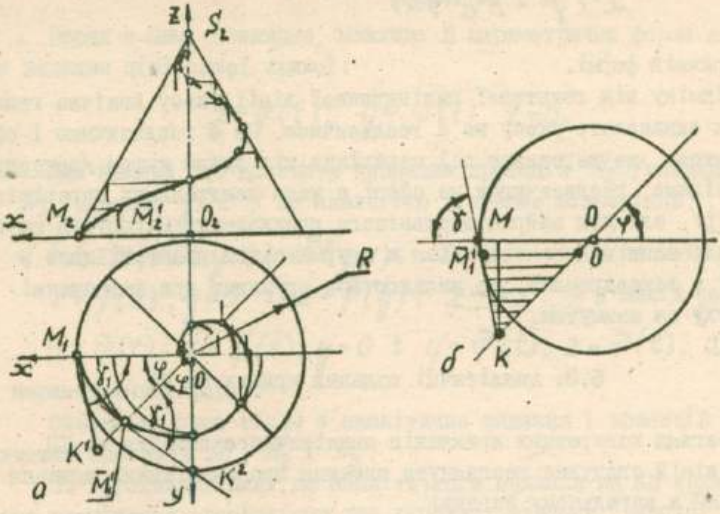


Рис. 5.20

Горизонтальну проекцію (k_1) конічної лінії укосу будуємо, виходячи з того, що трикутники $K^{(i+1)}\bar{M}_1'O$ /де $i = 0, 1, 2, \ldots, n$; у випадку, що розглядається на рис. 5.20,а, $n = 8$/ подібні. Діставши трикутник зі стороною $M_1^{n-1}O$, повторимо процедуру, але вже в $\Delta K\bar{M}_1^{n-1}O$. Очевидно, ця процедура асимптотична.

Аналітичне зображення фронтальної проекції (k_2) конічної лінії однакового укосу матимемо за допомогою $\Delta \bar{M}_x\bar{M}_1'O_1$:

$$|\bar{M}_x'O_1| = |\bar{M}_1'O|\cos\varphi,$$

а оскільки $|\bar{M}_1'O| = Re^{ctg\gamma_1\varphi}$, то $|M_x'O_1| = x = Re^{ctg\gamma_1\varphi}\cos\varphi$.

Нарешті, з $\Delta K\bar{M}\bar{M}_1$ /див. рис. 5.19/ дістанемо $|\bar{M}\bar{M}_1| = z = |K\bar{M}_1|\,tg\alpha$, а оскільки $|K\bar{M}_1| = R - Re^{ctg\gamma_1\varphi} = R(1 - e^{ctg\gamma_1\varphi})$,

$$z = R(1 - e^{ctg\gamma_1\varphi})\,tg\alpha.$$

Звідси видно, що k_2 теж має асимптотичну точку S_2. Аналітичне подання оригіналу конічної лінії однакового нахилу матимемо, таким чином, у вигляді системи рівнянь

$$x = Re^{ctg\gamma_1 \cdot \varphi} \cos\varphi;$$
$$z = R(1 - e^{ctg\gamma_1 \cdot \varphi}) tg\alpha; \qquad /5.3/$$
$$x^2 + y^2 = R^2 e^{2ctg\gamma_1 \cdot \varphi}$$

у параметричній формі.

На відміну від гвинтової циліндричної лінії укосу конічна гвинтова лінія однакового укосу не є геодезичною. Не є геодезичною і сферична гвинтова, що перетинає всі меридіани під одним кутом /локсодромія/. Як відомо, геодезичними на сфері є кола центральних перерізів /ортодромії/, але для найраціональнішого прокладення маршрутів на поверхні Землі вони використовуються в штурманській практиці лише в комбінації з локсодромами, що виявляються зручними при визначенні напряму руху за азимутом.

5.3. Аналітичні подання кривих на КП

1. Розгляд конкретних прикладів аналітичного подання на КП гвинтових ліній спонукає розглянути питання про аналітичні подання кривих на КП в загальному вигляді.

Йтиметься про криві, аналітичне подання яких безпосередньо можливе.

Як відомо з курсу математики, аналітичне подання таких кривих можна здобути в різних формах. Якщо криву можна зобразити аналітичним виразом, що містить лише алгебраїчні операції над параметрами й координатами, які до нього входять, то така крива називається алгебраїчною. Якщо аналітичним поданням кривої є трансцендентна функція, то й крива відповідно трансцендентна. Прикладом алгебраїчних кривих можуть бути криві другого порядку: коло, еліпс, гіпербола, парабола, прикладом трансцендентних - синусоїда, тангенсоїда, графік логарифмічної функції та ін.

2. Як показано в попередніх розділах, прямокутна система координат натурально пов"язана з КП. Отож, форми аналітичного подання кривих, що їх задано на КП, відповідають звичайним формам задання кривих у просторовій прямокутній системі координат. Наприклад, якщо крива належить до однієї з площин проекцій, нехай до π_1 /площини $x0y$ /, то її аналітичним поданням може бути як система виду

$$F(x, y) = 0$$
$$z = 0 \quad \text{/неявна форма/},$$

так і система

$$\begin{matrix} y = f(x); \\ z = 0 \end{matrix} \quad \text{/явна форма/.}$$

Поряд з цим, очевидно, можлива й параметрична форма аналітичного подання цієї самої кривої:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = 0.$$

Для кривих, що належать площинам проекцій π_2 /площина $x0z$ / і π_3 /площина $y0z$ / за аналогією дістаємо відповідно

$F(x,z) = 0; \; y = 0$ і $\bar{F}(y,z); \; x = 0$ – у неявній формі;

$z = f(x); \; y = 0$ і $z = \bar{f}(y); \; x = 0$ – в явній формі;

$x = \bar{\varphi}(t); \; z = \bar{\psi}(t); \; y = 0$ і $y = \bar{\varphi}(t), \; z = \bar{\psi}(t); \; x = 0$ –

у параметричній формі.

Очевидно, саме таким є аналітичне подання і проекцій кривих в площини проекцій π_1, π_2 і π_3.

3. Переходячи далі до аналітичного подання на КП кривих довільного розміщення, розглянемо два основних випадки: плоскої і просторової кривої. В обох випадках крива розглядається як перетин двох поверхонь, до яких вона належить.

Випадок І. Крива плоска. Тут достатньо задати рівняння однієї з проекцій кривої та рівняння площини, в якій крива розміщена. Справді, якщо горизонтальну проекцію деякої плоскої кривої зображено рівнянням $f_1(x,y) = 0; \; z = 0$, а площину кривої – рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, то плоску криву можна розглядати як перетин горизонтально-проекціюючого циліндра $f_1(x,y) = 0$ і площини $Ax + By + Cz + D = 0$ /рис. 5.21/. Отже, аналітичним поданням плоскої кривої загального випадку розміщення є система

$$\begin{matrix} f_1(x,y) = 0; \\ Ax + By + Cz + D = 0, \end{matrix} \qquad /5.4/$$

або /якщо задано фронтальну проекцію – $f_2(x,z) = 0; \; y = 0$ кривої/

$$\begin{matrix} f_2(x,z) = 0; \\ Ax + By + Cz + D = 0, \end{matrix} \qquad /5.5/$$

або /якщо $f_3(y,z)=0$; $x=0$ – профільна проекція кривої/

$$f_3(y,z)=0;$$
$$Ax+By+Cz+D=0. \quad /5.6/$$

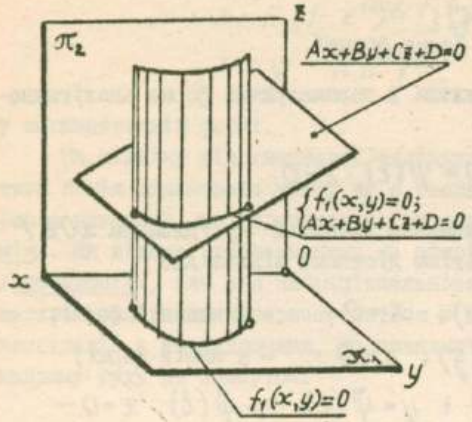


Рис. 5.21

Якщо площину кривої задано трьома точками, наприклад, $M(x_M, y_M, z_M)$, $N(x_N, y_N, z_N)$ і $L(x_L, y_L, z_L)$, то, використовуючи відому з аналітичної геометрії умову компланарності чотирьох точок, матимемо ще одну форму рівняння площини кривої

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_M & y_M & z_M & 1 \\ x_N & y_N & z_N & 1 \\ x_L & y_L & z_L & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

а отже, і аналітичного подання плоскої кривої – системи /5.4/

$$f_1(x,y)=0;$$
$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_M & y_M & z_M & 1 \\ x_N & y_N & z_N & 1 \\ x_L & y_L & z_L & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Випадок 2. Крива просторова. Така крива задається на КП, як можна було переконатися /див. підрозд. 5.2/, за допомогою двох своїх проекцій, кожна з яких визначає проеціюючий циліндр відносно відповідної площини проекцій. Перетин цих циліндрів і є розглядуваною просторовою кривою /рис. 5.22/. Наприклад, просторову криву задано горизонтальною проекцією – $f_1(x,y)_{z=0}=0$; фронтальною проекцією – $f_2(x,z)_{y=0}=0$. Тоді як аналітичне подання просторової кривої-оригіналу запишемо систему

$$f_1(x,y)=0;$$
$$f_2(x,z)=0. \quad /5.7/$$

Отож, гвинтова на циліндрі є перетин базового циліндра /його горизонтальна проекція тотожня з горизонтальною проекцією самої гвинтової/ і фронтально-проеціюючого циліндра, що його визначає фронтальна проекція гвинтової - косинусоїда.

Проте безпосереднє аналітичне подання кривих забезпечене далеко не завжди.

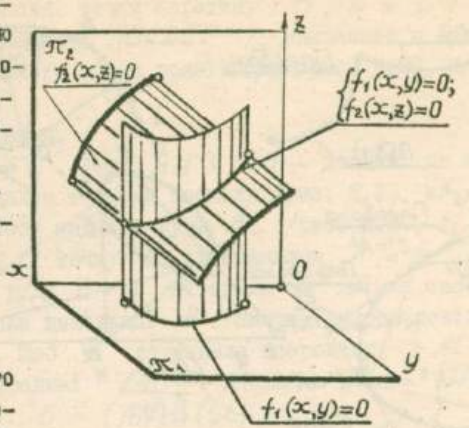


Рис. 5.22

5.4. Обводи

І. У практиці технічного проектування дуже часто доводиться мати справу з кривими, безпосереднє аналітичне подання яких не можливе. У даному випадку апроксимаційні прийоми з використанням многочленів, розроблені ще Ньютоном і Лагранжем, виявляються недостатніми, бо одержувані і криві надто осцилюючі *.

Отож, використовують так звані обводи, криві /плоскі або просторові/, що складені з окремих дуг різнорідних кривих /рис.5.23,а/. Кінці дуг - точки стику. Якщо в точках стику / B і C / сусідні дуги мають спільні дотичні, то такий обвід називається обводом першого порядку гладкості /або просто гладким, або коробовою кривою/.

Інколи технічні умови вимагають застосування обводу, в якого в точках стику сусідні дуги мають не тільки спільні дотичні, а й однакові кривини. Такі обводи називають обводами другого порядку гладкості [46].

Коробова крива, складена з дуг кіл, називається циссоїдою.

Розглянемо приклад побудови плоского гладкого обвода AE, що заданий умовами:

1/ B, C, $D \in AE$ - точки стику;

2/ $\smile AB$, BC і CD, а також $\smile CD$ і $\smile DE$ в точках стику мають спільні дотичні;

3/ AB, BC і CD - дуги кіл, а DE - дуга еліпса;

4/ задано дотичну ℓ в точці E /рис. 5.23, б/;

5/ D і E - кінці спряжених діаметрів еліпса.

---

* Тобто мають велику кількість точок перегину.

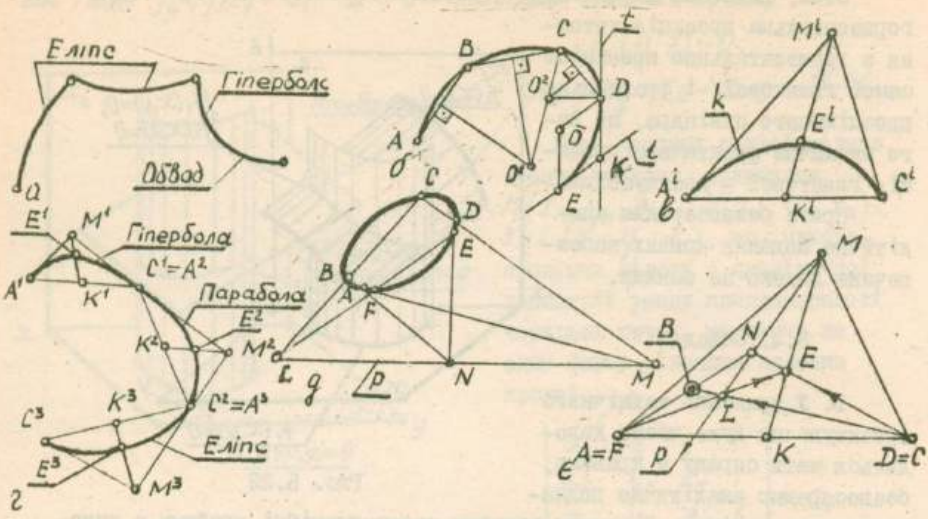


Рис. 5.23

Побудова. Оскільки AB і BC, за умовою, – дуги кола, то, скориставшись тим, що три точки A, B і C визначають коло, побудуємо центр O' цього кола. Точка C – точка стику зі спільною дотичною і, отже, центр (O^2) дуги CD має бути на $(O'C)$. Будуємо центр O^2. Форму еліптичної дуги DE повністю визначено дотичними в точках D і E. Дотичну ℓ в точці E задано. Дотичну t в точці D будуємо за умовою $t \perp (DO^2)$. Проведемо через D пряму $D\bar{O} \parallel \ell$ і через точку E – пряму $E\bar{O} \parallel t$. Дістаємо паралелограм $E\bar{O}DK$ /де $K = \ell \cap t$/, за допомогою якого можна побудувати еліптичну дугу DE /рис. 5.23, б/.

2. У конструкторській практиці /зокрема, в літакобудуванні/ до останнього часу широко використовувались плоскі обводи, складені з дуг кривих другого порядку /конік/. У цьому випадку маємо справу з так званим обводом першого порядку фіксації [46], коли обвід задано початковою і кінцевою точками стику і дотичними в них, а кожну з дуг /кривих другого порядку/ – так званим інженерним способом – за допомогою інженерного дискримінанта f /рис. 5.23, в/.

Якщо до дуги A^iC^i кривої другого порядку k в точках A^i і C^i побудовані дотичні A^iM^i і C^iM^i /рис. 5.23, г/, то вид кривої k визначено відношенням $f = \frac{|E^iK^i|}{|K^iM^i|}$, де K^i – середина $[A^iC^i]$, а $E^i \in k$. Ясно, що значення f визначає положення точки E^i. Для побудови будь-якої іншої точки дуги кривої другого

порядку будь-якого виду можна застосовувати проективний спосіб, що грунтується на теоремі Паскаля: точки перетину / M, N і L / протилежних сторін шестивершинника / $ABCDEF$ /, вписаного в криву другого порядку (K), належать одній прямій (p) /рис. 5.23, д/ [10, с. 157-163; 11].

Пряма p – пряма Паскаля.

Нехай $A = F$ і $D = C$. Тоді AM і CM – дотичні до кривої K. Маємо окремий випадок теореми Паскаля /рис. 5.23, є/, який є основою інженерного способу задання дуги AC /рис. 5.23, г/ і дозволяє побудувати будь-яку її точку B за заданими $A = F$, $D = C$, E і M. Під час руху B по K пряма p змінює своє положення, а тому для побудови довільної B скористаємося довільною прямою p /рис. 5.23, є/. Щоб B потрапила всередину ΔACM, проводимо пряму $p \ni M$ всередині * $\angle AMC$. Дістаємо $N = (DE) \cap p$ і $L = (EF) \cap p$. Тоді $B = (AN) \cap (CL)$.

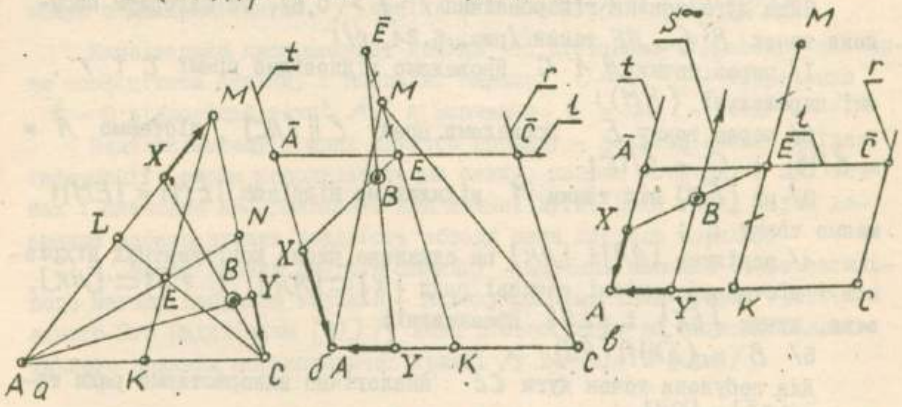


Рис. 5.24

Дуги коніки, визначені за допомогою дискримінанта, можуть бути побудовані й іншими синтетичними способами, що грунтуються, наприклад, на визначенні коніки як множини точок-перетинів відповідних прямих двох проективних пучків. Проективність пучків забезпечується при цьому проективністю прямолінійних точкових рядів, що породжують пучки. При побудові, звичайно, враховуються афінні особливості дуг конік, що будуються.

* Тобто в тій самій області, в якій розміщується хорда AC.

Скористаємося лемою: подібні прямолінійні точкові ряди проективні. Найпростіший прийом, що його використовують при конструюванні подібних точкових рядів, - відкладання конгруентних відрізків. Отже, якщо дуга коніки еліптична / $f < 0{,}5$/, то алгоритм побудови точки коніки такий /рис. 5.24, а/:

1/ проведемо прямі AE і CE, маємо $L = (AM) \cap (CE)$ і $N = (AE) \cap (CM)$;

2/ поділимо $[LM]$ і $[CN]$ на однакове число конгруентних відрізків так, щоб відповідні точки поділу / X і Y / утворювали подібні, а отже, і проективні точкові ряди ($\{X\} \subset [LM]$ і $\{Y\} \subset [CN]$), що породжують проективні пучки ($\{AY\} \leftrightarrow \{CX\}$);

3/ довільна точка дуги коніки $B = (AY) \cap (CY)$.

Очевидно, $B \in \smile CE$. Щоб дістати $B \in \smile AE$, аналогічно наносимо проективні точкові ряди на $[AL]$ і $[MN]$.

Якщо дуга коніки гіперболічна / $f > 0{,}5$/, то алгоритм побудови точок $B' \in \smile AE$ такий /рис. 5.24, б/:

1/ через точки A і C проведемо відповідно прямі t і r, які паралельні (KM);

2/ через точку E проведемо пряму $\ell \parallel (AC)$, дістаємо $\bar{A} = \ell \cap t$ і $\bar{C} = \ell \cap r$;

3/ на (EM) від точки M відкладемо відрізок $|\bar{E}M| = |EM|$ і маємо точку $\bar{E}$;

4/ поділимо $[A\bar{A}]$ і $[AK]$ на однакове число конгруентних відрізків і дістанемо подібні точкові ряди $\{X\} \subset [A\bar{A}]$ і $\{Y\} \subset [AK]$, отже, пучки $\{EX\}$ і $\{\bar{E}Y\}$ проективні;

5/ $B = (EX) \cap (\bar{E}Y)$.

Для побудови точок дуги CE аналогічно використаємо ряди точок на $[C\bar{C}]$ і $[CK]$.

Гарантія для одержання точок параболічної / $f = 0{,}5$/ дуги коніки - нескінченна віддаленість вершини /носія/ одного з проективних пучків прямих. Тому алгоритм побудови точки B в цьому випадку такий /рис. 5.24, в/:

1/ через точку E проведемо пряму $\ell \parallel (AC)$;

2/ через точку A проведемо пряму $t \parallel (EM)$, а через точку C - пряму $r \parallel (EM)$; дістанемо точки $\bar{A} = t \cap \ell$ і $\bar{C} = r \cap \ell$;

3/ поділимо $[A\bar{A}]$ і $[AK]$ на однакове число конгруентних відрізків, матимемо подібні точкові ряди $\{X\} \subset [A\bar{A}]$ і $\{Y\} \subset [AK]$;

4/ пучки $\{EX\}$ і $\{S^{\infty}Y\}$ проективні, тут $S^{\infty} \in (EM)$ - нескінченно віддалена /невластива/ вершина /носій/ пучка прямих;

5/ $B = (EX) \cap (S^{\infty}Y)$, де $(S^{\infty}Y) \parallel (EM)$

Аналогічно побудуємо і точки $\smile CE$, використовуючи точкові ряди на $[CC']$ і $[CK]$ [46].

3. Аналітичне подання алгоритму побудови точки B /рис.5,24,в/ у зручній параметричній формі, запропонованій В.О.Надолінним [47], таке.

Нехай кінці дуги коніки $A(x^A; y^A)$ і $C(x^C; y^C)$, а проміжна точка /цієї самої дуги/, яку слід побудувати, - $B(x^B; y^B)$. Тоді

$$x^B = \frac{x^C \gamma t^2 + x^M t + x^A}{\gamma t^2 + t + 1}; \qquad y^B = \frac{y^C \gamma t^2 + y^M t + y^A}{\gamma t^2 + t + 1}, \qquad /5.8/$$

де x^M, y^M - координати точки перетину дотичних до дуги коніки в точках A і C / $M = (AM) \cap (CM)$ /; γ - коефіцієнт коніки, пов"язаний з дискримінантом f коніки рівнянням $\gamma = ((1-f)/2f)^2$.

Якщо задано дискримінант коніки, то дістанемо відповідне значення коефіцієнта коніки, і навпаки. Нарешті, $0 \leq t \leq \infty$ /значення $t = 0$ відповідає точці A, а значення $t = \infty$ - точці C /.

Недолік методу кривих другого порядку - великий обсяг вихідної інформації: окрім координат точок отику, напрям дотичних в цих точках і значення дискримінанта для кожної дуги. Крім того, метод дозволяє забезпечувати гладкість обводу лише першого порядку.

4. Метод кривих другого порядку - окремий випадок більш загального методу побудови обводів - методу раціональних кривих /розробленого В.О.Надолінним [47] /, який дістав назву за виглядом аналітичного подання апроксимуючої кривої /у векторній формі/

$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=0}^{n} a_i \vec{r}_i t_i}{\sum_{i=0}^{n} a_i t^i} = \frac{a_0 \vec{r}_0 + a_1 \vec{r}_1 t + \ldots + a_n \vec{r}_n t^n}{a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n}, \qquad /5.9/$$

де a_i - коефіцієнти; $\vec{r}_i$ - вектори точок, що утворюють точковий базис кривої; t - параметр; n - порядок кривої; i - індекс при a і $\vec{r}$, а при t - показник степеня / $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ /.

В окремому випадку, якщо $n = 2$, з /5.9/ маємо

$$\vec{r} = \frac{\sum_{i=0}^{2} a_i \vec{r}_i t^i}{\sum_{i=0}^{2} a_i t^i} = \frac{a_0\vec{r}_0 + a_1\vec{r}_1 t + a_2\vec{r}_2 t^2}{a_0 + a_1 t + }\,,$$

а в координатах /у параметричній формі/

$$x = \frac{\sum_{i=0}^{2} a_i x_i t^i}{\sum_{i=0}^{2} a_i t^i}, \quad y = \frac{\sum_{i=0}^{2} a_i y_i t^i}{\sum_{i=0}^{2} a_i t^i}, \quad z = \frac{\sum_{i=0}^{2} a_i z_i t^i}{\sum_{i=0}^{2} a_i t^i} \qquad /5.10/$$

Домовимося, що вершини супроводжуючого трикутника $A(x^A, y^A, z^A)$, $C(x^C, y^C, z^C)$ і $M(x^M, y^M, z^M)$, а довільна внутрішня точка дуги кривої – $B(x^B, y^B, z^B)$. Положення проміжних точок дуги AC визначається координатами трьох базових точок: A /для якої $t = \infty$/, $C(t=0)$ і $E(t=1)$. За точку E можна взяти ту, положення якої задається значенням дискримінанта f'. Якщо зважити, що можна взяти $\delta = a_0 a_2 / a_1^2$, дістанемо з /5.8/ формули /5.10/ для визначення координат довільної точки B.

Основний недолік методу раціональних кривих, характерний і для многочленних методів – це можливість того, що на шуканій кривій /при $i \leq 3$/ з"являться точки перегину та інші особливості. Позбавлення від них вимагає спеціальної обчислювальної процедури.

5. Ще одним з синтетично-аналітичних методів побудови обводів є так званий <u>метод естафети</u>, назва якого пов"язана з "естафетною" передачею супроводжуючого трикутника від дуги до дуги. Ідея належить І.І.Котову. Одна з сучасних модифікацій методу частково висвітлена в [49; 50], а попередній і менш вдалий варіант – у [48].

У найновішій модифікації алгоритм побудови обводу за методом естафети такий.

I/ Вважаємо, що задано точковий базис плоского обводу $\{M_i\}$, де $i = 1, 2, \ldots, n$ /рис. 5.25, а/. Будуємо прямі хорд обводу $M_i M_{i+1}$. Дістанемо точки $P^{i+1} = (M_i M_{i+1}) \cap (M_{i+2} M_{i+3})$. Якщо обвод незамкнений, то в кінцевих точках обводу /M_1 і M_n/ будуємо замикаючі прямі довільного напряму p^1 і p^n. Фіксуємо точки $P^1 = p^1 \cap (M_2 M_3)$ і $P^{n-1} = p^n \cap (M_{n-1} M_{n-2})$. Знаходимо центр ва-

ги O^{4T} точок $\{M_i\}$. Координати центра ваги, як відомо з [44], знаходимо так:

$$x^{4T} = \sum_{i=1}^{n} x^{M_i}/n \; ;$$

$$y^{4T} = \sum_{i=1}^{n} y^{M_i}/n,$$

де $O^{4T}(x^{4T}, y^{4T})$ і $M_i(x^{4T}, y^{4T})$, а $i = 1, 2, \ldots, n$.

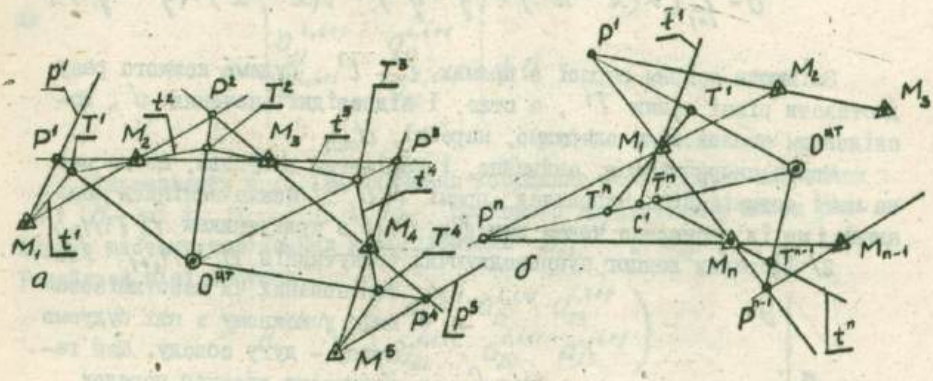


Рис. 5.25

Проводимо прямі $P'O^{4T}$, а через точку M_1 – довільну пряму t'. Маємо точку $T' = t' \cap (P'O^{4T})$. Точки T' і M_2 визначають пряму t^2, за допомогою якої дістанемо точку $T^2 = t^2 \cap (P^2O^{4T})$. Потім за допомогою прямої $t^3 = (T^2M_3)$ маємо точку T^3 і т.д. Так будуємо ламану $M_1T'T^2 \ldots T^{n-1}M_n$ і ланцюг супроводжуючих трикутників $M_1T'M_2$, $M_2T^2M_3, \ldots, M_{n-1}T^{n-1}M^n$.

Якщо обвод замкнений, то ламана $M_1T'T^2 \ldots T^{n-1}M_n$ перетворюється на замкнену ламану $T'T^2 \ldots T^nT'$. Така ламана – єдина з можливих за побудовою, а отже, її замкненість – критерій її оптимальності.

Оскільки першу пряму t' проводимо в довільному напрямку, то замкненість ламаної $M_1T'T^2 \ldots T^{n-1}M_n$ не гарантується. Зазначимо, що у випадку замкненого обводу маємо $P' = P^n = (M_1M_n)$, а пряма t^n – замикаюча пряма ламаної $T'T^2 \ldots T^nT'$.

Нехай $t^n \cap (P^nO^{4T}) = T^n$ /рис. 5.25, б/. Тоді побудову закінчено, бо ламану замкнено. Якщо $t^n \cap (P^nO^{4T}) = \bar{T}^n \neq T^n$, то

знаходимо точку C' – середину відрізка $T^{n}\overline{T}^{n}$, проводимо $\bar{t}^{1} \supset C^{1}$ і повторюємо процес до одержання точки $\bar{T}$ і т.д.

Якщо обвод незамкнений, критерієм оптимальності ламаної $M_1T^1M_2 \ldots T^{n-1}M_n$ може бути мінімальність периметра ламаної, оскільки саме в ламану мінімальної довжини вписується шукана крива – обвод мінімальної довжини. Домовившись позначити периметр ламаної буквою d, запишемо його вираз:

$$d = \sum_{i=1}^{i=n-1} \left[\sqrt{(x^{T^i} - x^{M_i})^2 + (y^{T^i} - y^{M_i})^2} + \sqrt{(x^{M_{i+1}} - x^{T_i})^2 + (y^{M_{i+1}} - y^{T^i})^2} \right].$$

Змінюючи напрям першої з прямих $t^i - t^1$, будемо кожного разу діставати різні точки T^i, а отже, і відповідні значення d. Послідовним наближенням одержимо, нарешті, d_{min}.

Можна скористатися, звичайно, і варіантом побудови, що не має на меті оптимізацію. Наприклад, прямі $\rho^i O^{4T}$ можна замінити медіанами, що їх проведено через вершини ρ^i і в трикутниках $M_iT^iM_{i+1}$

2/ Діставши ланцюг супроводжуючих трикутників $M_iT^iM_{i+1}$ /оптимізованих чи неоптимізованих/ у кожному з них будуємо криву – дугу обводу. Щоб гарантувати високий порядок гладкості обводу, скористаємося кривими Ламе [40, с. 179-181], які мають аналітичне зображення

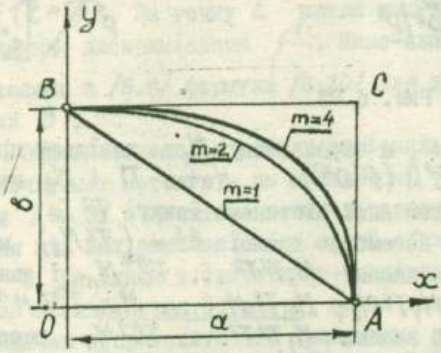


Рис. 5.26

$$(x/a)^m + (y/b)^m = 1, \quad /5.11/$$

де $m = (p/q) > 1$, $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ /рис. 5.26/.

Очевидно, що криві /5.11/ можуть бути задані і в параметричній формі, наприклад

$$x^m = \frac{b^m}{(b^m/a^m) + t^m}; \qquad y^m = \frac{b^m t^m}{(b^m/a^m) + t^m}$$

Тут $0 \le t < \infty$, а $t = tg\alpha$ і, отже, $0 \le \alpha \le \pi/2$

Трикутник ABC разом з відповідною до нього якоюсь з кривих Ламе, афінно перетворимо на супроводжуючий $\Delta M_i T^i M_{i+1}$ і відповідну дугу обводу $M_i M_{i+1}$. При цьому координати довільної точки $N(\bar{x},\bar{y}) \in \smile M_i M_{i+1}$, що відповідає $N(x,y) \in \smile AB$, дістанемо за системою

$$\bar{x} = a_{11}^{i,i+1} x + a_{12}^{i,i+1} y + a_{13}^{i,i+1};$$
$$\bar{y} = a_{21}^{i,i+1} x + a_{22}^{i,i+1} y + a_{23}^{i,i+1}, \qquad /5.12/$$

де

$$\begin{vmatrix} a_{11}^{i,i+1} & a_{12}^{i,i+1} \\ a_{21}^{i,i+1} & a_{22}^{i,i+1} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Підотавляючи в /5.12/ значення координат відповідних пар точок A і M_i, B і M_{i+1}, C і T^i, приходимо до системи з шести рівнянь з шістьма невідомими коефіцієнтами $a_{11}^{i,i+1}$, $a_{12}^{i,i+1}$, ...і т.д. Розв"язок цієї системи

$$A^{i,i+1} = \begin{pmatrix} a_{11}^{i,i+1} & a_{12}^{i,i+1} & a_{13}^{i,i+1} \\ a_{21}^{i,i+1} & a_{22}^{i,i+1} & a_{23}^{i,i+1} \end{pmatrix} -$$

<u>оператор</u> афінного перетворення дуги AB кривої Ламе на дугу $M_i M_{i+1}$ обводу.

За параметрами m, a і b обираємо найбільш доцільний вид кривої Ламе для кожної дуги обводу. При цьому може бути здобуто обвід будь-якого порядку гладкості.

У методі естафети, окрім кривих Ламе і конік, як прообрази, можна використати й інші криві: Бартіні $/ y = [k(x^2 - x^b)]^b /$, Байкалової [45, с. 109-118], спецконтура [45], спецфункції [51] та ін.

Позитивними властивостями методу естафети є:

1/ регулярність дуг обводу і можливість гарантування гладкості <u>будь-якого</u> порядку на стиках;

2/ можливість вибору потрібного напрямку кривої в кінцевих точках обводу /вибір напряму/ прямих p', p'' і t' /;

3/ мінімальність вихідної інформації /достатньо задати точки стика обводу/;

4/ можливість локального керування формою окремих дуг обводу.

6. Поряд з синтетично-аналітичними розробляються й аналітичні методи побудови обводів [52; 53]. При цьому найбільш поширені сплайнові методи, пов"язані з параметричними кубічними кривими [54-56].

7. Щодо зображення обводів на КП, то, по-перше, гладкість плоского обводу при проеціюванні зберігається, а циркулярність - ні, і, по-друге, як і будь-яку просторову криву, просторовий обвод на КП можна задати за допомогою двох проекцій-обводів.

Запитання для самоперевірки

1. Визначення кривої лінії.
2. Визначення плоскої кривої.
3. Властивості плоских кривих.
4. Як можна задати на КП плоску криву?
5. Чи змінюється в точці перегину, по-перше, напрям руху точки дотику по кривій, по-друге, напрям обертання самої дотичної?
6. Чим відрізняються точки звороту першого й другого роду: характером руху точки по дотичній або напрямом обертання самої дотичної?
7. Чи має місце неперервна зміна дотичної у вузловій точці кривої?
8. Скільки дотичних має крива в кутовій точці?
9. Які проекційні властивості плоскої кривої?
10. Визначення плоского гладкого обводу.
11. Способи побудови обводів.
12. Яку лінію описує точка, що рівномірно рухається по твірній циліндра обертання, яка, в свою чергу, рівномірно обертається навколо осі циліндра?
13. Який вигляд матиме на розгортці циліндра гвинтова лінія постійного кроку?
14. Проекційні властивості просторової кривої.
15. Як можна задати на КП просторову криву?

Література

[1-5; 8; 9].

39. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. - М.: Наука, 1986.

40. Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия. – М.-Л., 1949.

41. Ивницкий Т.Г., Чернецкий Н.М. К методике построения эллипса, гиперболы и параболы // Ученые записки ХГПИФ, 1961. – Т.XXXIX.– Вып. 4.

42. Ковнацкий А.Е., Чернецкий Н.М. Построение гладкого обвода из дуг коник методом эстафеты // Теория автоматизированного проектирования. – Харьков, 1982. – Вып. 4.

43. Ковнацкий А.Е., Чернецкий Н.М. Эстафетный метод построения обвода из дуг Ламе // Математические методы анализа динамических систем. – Харьков, 1983. – Вып. 7.

44. Ковнацкий А.Е., Чернецкий Н.М. Область существования вершины сопровождающего треугольника // Теория автоматизированного проектирования. – Харьков, 1984. – Вып. 8.

45. Надолинный В.А. Аналитические методы в конструировании поверхностей. – К.: КПИ, 1981.

46. Осипов В.А. Машинные методы проектирования непрерывно-каркасных поверхностей. – М.: Машгиз, 1979.

47. Роджерс Д., Адамс Д. Математические основы машинной графики. – М.: Мир, 1980.

48. Савелов А.А. Плоские кривые. – М.: Наука, 1960.

49. Смогоржевский А.С., Столова Е.С. Справочник по теории плоских кривых третьего порядка. – М., 1961.

50. Стародетко Е.А. Математическое моделирование лекальных поверхностей. – Минск: Наука и техника, 1984.

51. Стародетко Е.А. Элементы вычислительной геометрии. – Минск: Наука и техника, 1986.

52. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М.; Л.: ГИТТЛ, 1951. – Т. I.

53. Фоли Д., А. вен Дем. Основы интерактивной машинной графики. – М.: Мир, 1985. – Т. I, 2.

54. Чернецкий Н.М. Графическое и аналитическое моделирование геометрических объектов /линий и поверхностей/. – Харьков: ХАИ, 1982. – С. 81.

55. Якунин В.И. Геометрические основы систем автоматизированного проектирования технических поверхностей. – М.: МАИ, 1980.

6. КП ПОВЕРХОНЬ

Для складання КП непростих геометричних об"єктів важливо вміти виконувати і читати КП їх поверхонь.

Поверхнею геометричного об"єкта називаємо неперервну множину граничних точок цього об"єкта.

Нехай задано тривимірний геометричний об"єкт Ω . Тоді множина точок простору поділяється на дві області: зовнішню і внутрішню /яка складається з точок, що належать об"єкту Ω /. Граничною точкою тривимірного об"єкта Ω домовимося називати точку M /внутрішньої області/ з властивістю: яким би не був малий радіус ε , околу, що обмежений сферою радіуса ε з центром в точці M , завжди належать точки як внутрішньої, так і зовнішньої областей /рис. 6.1/.

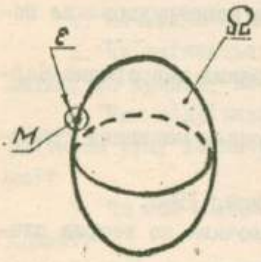


Рис. 6.1

Ясно, що будь-які двовимірний /поверхня чи площина/ та одновимірний об"єкти /лінію чи пряму/ можна розглядати як підмножину неперервної множини граничних точок тривимірного об"єкта. Отже, поверхня може бути визначена як множина відсіків площин або ліній, що належать цій поверхні. Оскільки лінія - однопараметрична множина точок, то поверхня - двопараметрична множина точок.

6.1. КП многогранних поверхонь

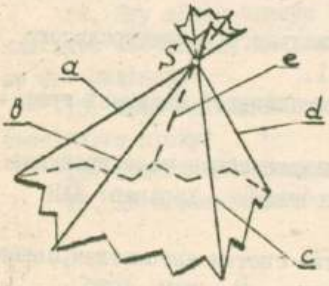


Рис. 6.2

Многогранною /гранною/ поверхнею називається поверхня, що складається з відсіків площин - граней. Перетини граней - ребра. Перетини ребер - вершини. Сукупність ребер і вершин - сітка. Для задання многогранної поверхні на КП достатньо задати проекції її сітки [8].

6.1.1. КП многогранного кута

І. Частинним випадком простої многогранної поверхні є многогранний кут /рис. 6.2/.

Многогранний кут - це проста многогранна поверхня, в якої перетин ребер - одна вершина.

Інколи многранний кут називають пірамідальною поверхнею. Бічні поверхні пірамід, які вивчають у шкільному курсі стереометрії, – це відсіки пірамідальної поверхні.

2. Кількість граней і метричні властивості не мають істотного значення для виявлення загальних умов задання пірамідальної поверхні на КП. Тому обмежимось розглядання найпростішого випадку: заданням на КП проекцій відсіку тригранної пірамідальної поверхні, якщо відсікаючими площинами виявляються π_1 /тобто площина $ABC = \pi_1$/ і площина, що паралельна площині π_1 і проходить через вершину S КП відсіку $ABCS$ показано на рис. 6.3.

3. Як критерієм задання пірамідальної поверхні на КП знову скористаємося розв"язуваністю такої задачі: побудувати проекцію M_1, якщо задано проекцію M_2 і відомо, що точка-оригінал $M \in \Omega$, де Ω у даному випадку – пірамідальна поверхня $ABCS$

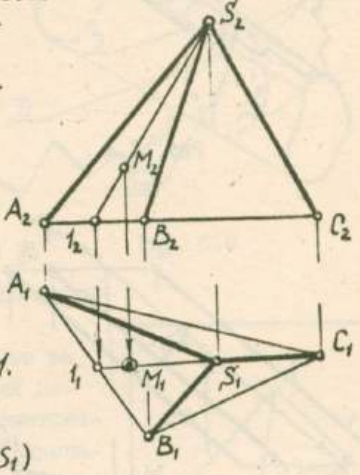


Рис. 6.3

Розв"язання. Вважаємо, що $M \in (ABS)$. Тоді на грані ABS знайдеться така пряма /наприклад (MS)/, яка проходить через точку M. Проведемо (M_2S_2), дістанемо $1_2 = (M_2S_2) \cap (A_2B_2)$. За ЛПЗ знайдемо точку 1_1. Проведемо (1_1S_1). На (1_1S_1) за допомогою ЛПЗ матимемо, нарешті, шукану проекцію точки M – M_1. Якщо точка $M \in (ACS)$, тобто грані, проекцію якої на фронтальному полі проекцій зображено як невидиму, то фронтальна проекція M позначалася б (M_2)

6.I.2. КП призматичної поверхні

Окремим випадком пірамідальної поверхні є призматична. Якщо вершина (S) пірамідальної поверхні – нескінченно віддалена точка (S^∞), то ребра, що в ній сходяться, виявляться паралельними, а пірамідальна поверхня – призматичною /рис. 6.4/. Відсіки призматичної поверхні, що їх виконано за допомогою двох паралельних січних площин, є бічними поверхнями призм. Тут кількість граней не впливає

на умови задання призматичної поверхні на КП. Отож, достатньо обмежитись розглядом КП відсіку найпростішої призматичної тригранної поверхні. На рис. 6.5 цей відсік обмежений двома площинами: площиною Π_1 і однією з горизонтальних площин (ABC). Тут же показано і розв"язання задачі на побудову проекції M_1 за даною M_2 за допомогою прямої MS, якщо $M \in (ABS^{\infty})$, як підтвердження заданої призматичної поверхні на КП.

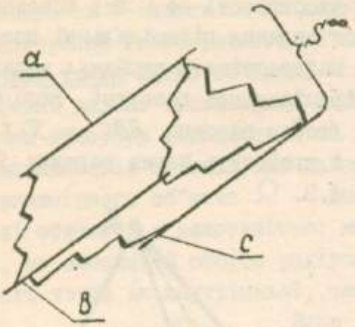


Рис. 6.4

6.2. КП криволінійних поверхонь

6.2.1. Обрис. Визначник

1. Поверхні, що не є многогранними, - криволінійні. Вони знаходять широке застосування в техніці, бо обмежують найрізноманітніші вироби.

Часто геометрія поверхні деталі виявляється вирішальним фактором при виборі технології її виготовлення.

2. Перш ніж перейти до розгляду КП найпростіших конкретних поверхонь, ознайомимося з деякими поняттями, використання яких дозволяє забезпечити наочність зображень криволінійних поверхонь і раціональність задання цього виду поверхонь на КП.

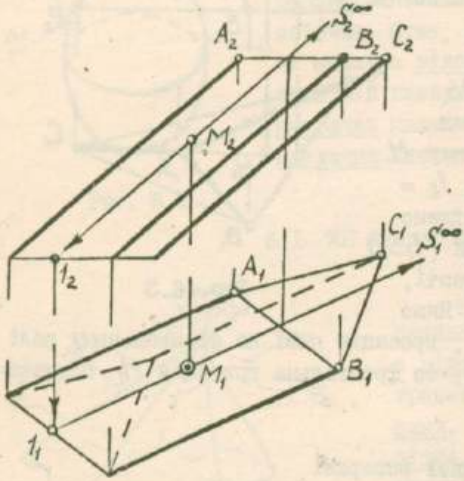


Рис. 6.5

Якщо геометричний об"єкт Ω проеціюється з нескінченно віддаленого центра паралельно напряму ℓ в площину проекцій π, то неперервна множина проеціючих $(\{l_i\}$, /де i - дійсні числа/, що дотичні до Ω / T_i - точка дотику/, називається проеціючим циліндром.

Неперервна множина точок дотику $\{T_i\}$ називається лінією видимого контура, або видимим контуром об"єкта /рис. 6.6/.

Перетин $\omega = \{\ell_i\} \cap \pi$ називається обрисом, або контуром проекції (Ω') об"єкта Ω в π. Домовимося розрізняти обрис горизонтальної проекції $\Omega_1\ (\omega_1 = \{\ell_i^1\} \cap \pi_1$, де $\ell_i^1 \perp \pi_1)$ і обрис фронтальної проекції $\Omega_2\ / \omega_2 = \{\ell_i^2\} \cap \pi_2$, де $\ell_i^2 \perp \pi_2$.

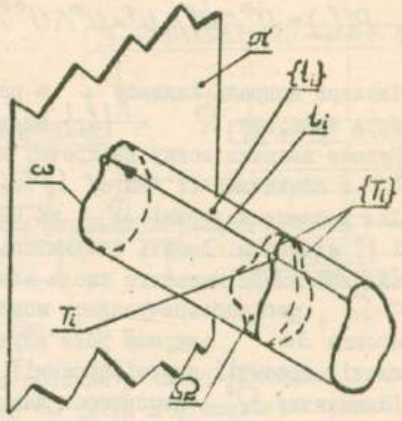


Рис. 6.6

Якщо Ω – многогранна поверхня, то обриси проекцій Ω_1 і Ω_2 – це частини однойменних проекцій сітки, а отже, в цьому випадку немає потреби у додатковій побудові обрисів /рис. 6.7/.

Задання обрису унаочнює проекцію-зображення.

3. Раніше вже зверталася увага на те, що кожну поверхню можна розглядати як неперервну множину ліній або інших геометричних елементів, які до неї належать /однопараметрична множина, якщо елемент – лінія, двопараметрична – якщо елемент точка/, а взаємне розміщення цих елементів регламентується деякими умовами.

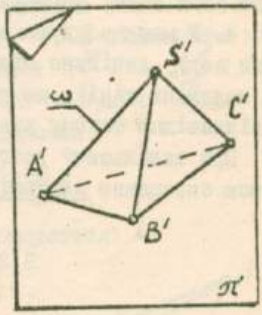


Рис. 6.7

Якщо Ω – поверхня, а ℓ_i – будь-який елемент Ω, то Ω можна розглядати як неперервну множину: $\Omega = \{\ell_i : P(\ell_i)\}$, де $P(\ell_i)$ – сукупність умов, яким мають задовольняти елементи ℓ_i.

Серед сукупності умов $P(\ell_i)$ розрізняють умови: геометричні елементи (U^{φ}) /вони складають визначальну фігуру і твірний елемент/ і відношення $(U^{в})$. Між останніми є умови, що виявляють відношення між елементами визначальної фігури $(U^{в\varphi})$, між елементами визначальної фігури і твірним елементом $(U^{в\varphi(\ell_i)})$ і умови, що керують $(U^{к})$: формою визначальної фігури $(U^{к\varphi})$ і твірного елемента

(U^{KL_i}) рухом визначальної фігури (U^{KP_Φ}) і твірного елемента $(U^{KP_{L_i}})$.

Отож, структура сукупності умов, що їх мають задовольняти елементи l_i, така:

$$P(l_i) = U^{\Phi} \wedge U^{\beta} \wedge U^{\gamma} = U^{\Phi} \wedge U^{\beta\Phi} \wedge U^{\beta\Phi}(l_i) \wedge U^{K\Phi} \wedge U^{KL_i} \wedge U^{KP_\Phi} \wedge U^{KP_{L_i}}.$$

Числова природа індексу i в позначенні множини $\Omega = \{l_i\}$ може бути така, що $\Omega = \{l_i\}$ виявиться не неперервною, а дискретною. Будемо вважати вояку дискретну підмножину Ω каркасом поверхні Ω і позначимо її /його/ Ω^K, отже, $\Omega^K \subset \Omega$.

Для задання поверхні Ω на КП немає необхідності задавати на КП усі її елементи. Досить обмежитись заданням такої мінімальної /тобто складеної з мінімального числа елементів Ω / підмножини $\Omega^\circ \subset \Omega$, щоб забезпечувалась можливість побудови будь-якого іншого елемента Ω, зокрема розв"язуваність задачі на побудову по одній заданій проекції другої проекції точки $M \in \Omega$.

Підмножину Ω° домовимося називати визначником поверхні Ω^*.

Розгляд конкретних прикладів криволінійних поверхонь показує, що кожна з поверхонь може мати безліч визначників. Як переконаємося далі, задання на КП визначальної фігури визначника поверхні забезпечує задання на КП і всієї поверхні.

4. У машинобудуванні, як з конструктивної, так і з технологічної точки зору, доцільно більшість поверхонь розглядати як множини окремих положень лінії, що рухається, тобто твірної. Будь-яка поверхня, що відповідає такому визначенню, - кінематична.

При подальшому розгляді КП криволінійних поверхонь будемо керуватися спрощеною класифікацією криволінійних поверхонь /рис. 6.8/.

6.2.2. КП кінематичних поверхонь з твірною постійної форми

КП лінійчатих поверхонь

Кінематичні поверхні, що є неперервними множинами окремих положень прямих-твірних, називаються лінійчатими поверхнями.

I. КП конічної поверхні. Конічною називається така лінійчата поверхня, яка являє собою неперервну множину $\{l_i\}$ окремих положень

---

* Іноді визначником поверхні називають саме $P(l_i)$ [47, с. 53-56], або сукупність умов, що однозначно визначає поверхню [1-3; 5; 8; 9].

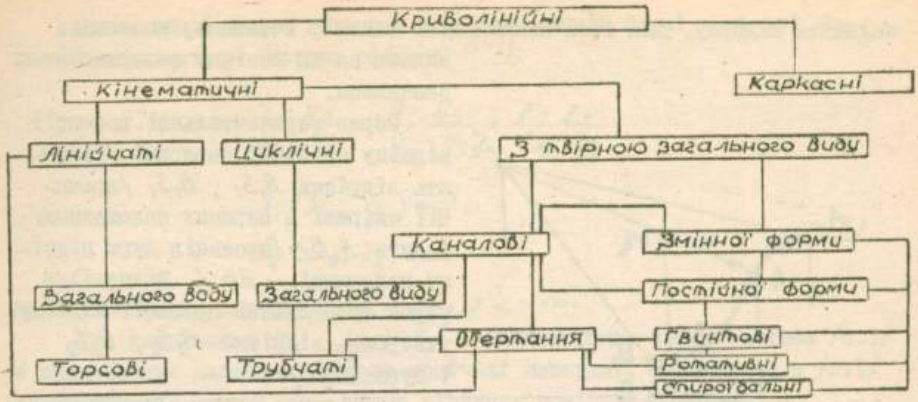


Рис. 6.8

рухливої прямої-твірної l, що проходить через фіксовану точку S - вершину і має перетин - точку $K_i = l_i \cap n$ з фіксованою кривою n - напрямною.

Тут визначальну фігуру утворюють вершина (S) і напрямна (n), а твірний елемент - твірна (l). Отже, $U^{\Phi} = \{S, n, l\}$. Відношення між елементами визначальної фігури і твірним елементом характеризуються умовами $U^{B\Phi}(l_i) = S \in l_i \wedge l_i \cap n$, а відношення між елементами самої визначальної фігури - умовами $U^{B\Phi} = S \in n \wedge S \in \sigma^n$, якщо σ^n - площина кривої n. Отже, конічна поверхня $\Omega = \{l_i : \forall l_i\} S \wedge l_i \cap n \wedge S \in n \wedge S \in \sigma\}$ має визначник

$$\Omega^{\circ} = \{l : l)S \wedge l \cap n \wedge S \in n \wedge S \in \sigma^n\}.$$

Якщо n - просторова крива, то Ω° спрощується:

$$\Omega^{\circ} = \{l : l)S \wedge l \cap n \wedge S \in n\}$$

На рис. 6.9 показано відсік конічної поверхні, що обмежена дугою $AB \subset n$ - напрямної і відрізками AS і BS - крайніми положеннями твірної l.

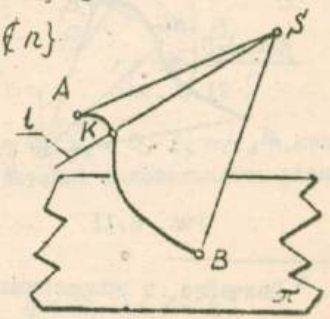


Рис. 6.9

На рис. 6.10 зображено КП відсіку конічної поверхні і розв"язання задачі на побудову M_1 за даною M_2 /за допомогою твірної/, якщо M

належить відсіку. Для розв"язання цієї задачі, очевидно, достатньо задати на КП конічну поверхню визначником.

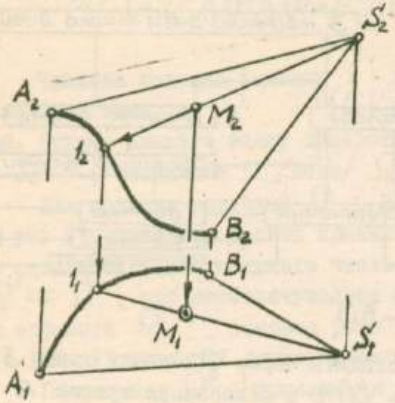


Рис. 6.10

Обрис горизонтальної проекції відсіку конічної поверхні утворюють відрізки A_1S_1 , B_1S_1 /проекції твірної в окремих положеннях/ і дуга A_1B_1 /проекція дуги відсіку напрямної - AB /. Відповідно обрис фронтальної проекції відсіку утворюють відрізки A_2S_2, B_2S_2 і дуга A_2B_2.

Аналітичне подання конічної поверхні /в прямокутних декартових координатах/ дістанемо із таких міркувань:

1/ вершину S задано координатами: x_S , y_S , z_S ;

2/ довільна твірна, що визначається точками K_i і S , має рівняння

$$\frac{x-x_S}{x_K-x_S} = \frac{y-y_S}{y_K-y_S} = \frac{z-z_S}{z_K-z_S},$$

де x_K , y_K і z_K - координати точки K_i ;

3/ напрямна, що її задано проекціями дуги /відсіку/ AB /рис. 6.11/, зображується системою *

$$f_1(x,y) = 0;$$
$$f_2(x,z) = 0,$$

яка задовольняється координатами точки $K_i \in AB$

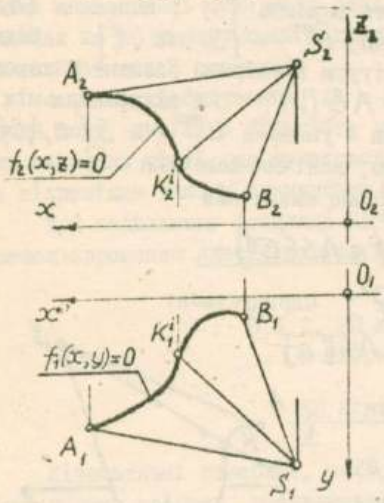


Рис. 6.11

* Звичайно, з обмеженнями, відповідними визначенню відсіку-дуги.

Отже, аналітичним поданням у параметричній формі конічної поверхні виявляється система рівнянь

$$\frac{x-x_S}{x_K-x_S}=\frac{y-y_S}{y_K-y_S}=\frac{z-z_S}{z_K-z_S};$$

$$f_1(x_K,\ y_K)=0;$$
$$f_2(x_K,\ z_K)=0, \qquad /6.1/$$

де в загальному випадку $-\infty<x,y,z<+\infty$.

Тут координати x_K, y_K і z_K є параметрами, тобто система /6.1/ є аналітичним поданням каркаса конічної поверхні. Виключаючи з /6.1/ параметри x_K, y_K і z_K, маємо рівняння конічної поверхні.

Приклад 6.1. Нехай відсік конічної поверхні /прямий круговий конус/ задано визначником – твірною KS, де S – вершина, а $K\in\smile AB$ – чверті кола, що належить площині проекцій π_1, має центр в точці O і радіус – R /рис. 6.12/.

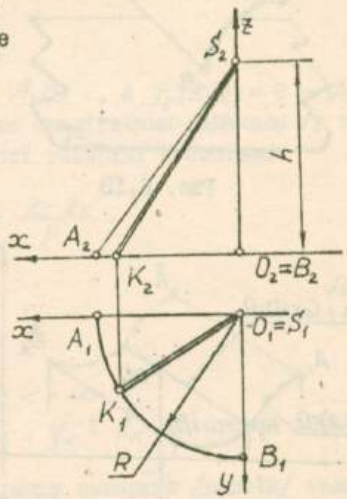


Рис. 6.12

Аналітичне подання напрямної $\smile AB$ – система

$$x^2+y^2=R^2$$
$$z=0, \text{ де } 0\le x,\ y\le R;$$

аналітичне подання твірної KS

$$\frac{x-x_S}{x_K-x_S}=\frac{y-y_S}{y_K-y_S}=\frac{z-z_S}{z_K-z_S}$$
$$(0\le x,\ y\le R,\ 0\le z\le h)$$

Оскільки координати вершин S : $x_S=0$, $y_S=0$, $z_S=h$, а координати точки K : x_K, y_K, а $z_K=0$ і останні задовольняють рівняння дуги AB, запишемо систему

$$\frac{x}{x_K}=\frac{y}{y_K}=\frac{z-h}{-h},$$
$$x_K^2+y_K^2=R^2\ (0\le x,\ y\le R,\ 0\le z\le h).$$

яка є аналітичним поданням каркаса відсіку прямого кругового конуса. Виключаючи з неї параметри x_K , y_K , дістанемо рівняння відсіку прямого кругового конуса:

$$x^2+y^2=(R^2/h^2)(z-h)^2 \qquad (0\le x, y\le R,\ 0\le z\le h).$$

2. КП циліндричної поверхні. Циліндричною називається така конічна поверхня, яку матимемо при $S\to S^\infty$. У цьому випадку всі окремі положення твірної – паралельні прямі /рис. 6.13/.

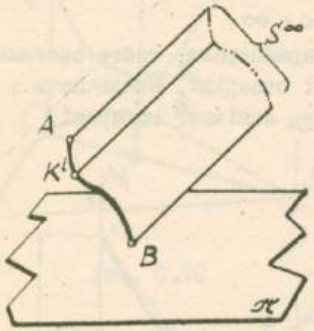


Рис. 6.13

На рис. 6.14 показано КП відсіку циліндричної поверхні і побудову проекції M_1 за заданою M_2 точки M , що належить поверхні. Для побудови, як виявилося, тут теж достатньо задати на КП лише визначник циліндричної поверхні – твірну A або B . Обрис горизонтальної проекції відсіку циліндричної поверхні утворюють проекції крайніх положень твірної $A_1\bar{A}_1$ і $B_1\bar{B}_1$, проекція дуги напрямної – A_1B_1 та одержана паралельним переносом останньої дуга $\bar{A}_1\bar{B}_1$. Аналогічно обрис фронтальної проекції утворюють $A_2\bar{A}_2$ і $B_2\bar{B}_2$, $\smile A_2B_2$ та $\smile \bar{A}_2\bar{B}_2$.

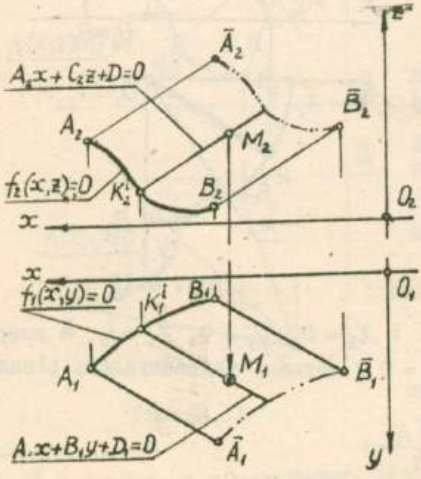


Рис. 6.14

Аналітичне подання циліндричної поверхні матимемо так:

I/ проекції довільної твірної ℓ^i зображаються рівняннями:

$$\ell_1^i:\ A_1x+B_1y+D_1=0;$$
$$\ell_2^i:\ A_2x+C_2z+D_2=0;$$

а отже, подання твірної ℓ^i – система

$$A_1x + B_1y + D_1 = 0;$$
$$A_2x + C_2z + D_2 = 0;$$

оскільки $K_i = \ell^i \cap n$, то $K_i \in \ell^i$ і тому запишемо рівняння прямої (ℓ^i), що проходить через точку $K_i(x_K, y_K, z_K)$ у вигляді

$$\frac{x - x_K}{B_1C_2} = \frac{y - y_K}{A_1C_2} = \frac{z - z_K}{B_1A_2},$$

або у більш звичній формі

$$\frac{x - x^K}{m} = \frac{y - y^K}{n} = \frac{z - z^K}{p};$$

2/ оскільки напрямну AB можна представити системою

$$f_1(x,y) = 0;$$
$$f_2(x,z) = 0,$$

де $f_1(x,y) = 0$ - рівняння проекції A_1B_1, а $f_2(x,z) = 0$ - рівняння проекції A_2B_2 і $K \in \smile AB$, то аналітичним поданням /у параметричній формі/ каркаса циліндричної поверхні є система

$$\frac{x - x_K}{m} = \frac{y - y_K}{n} = \frac{z - z_K}{p};$$

$$f_1(x_K, y_K) = 0; \qquad /6.2/$$
$$f_2(x_K, z_K) = 0,$$

де в загальному випадку $-\infty < x, y, z < +\infty$.

Виключаючи з /6.2/ параметри x_K, y_K і z_K, дістаємо рівняння циліндричної поверхні.

Приклад 6.2. Нехай на КП циліндричну поверхню /відсік/ задано визначником - твірною ℓ і визначальною фігурою: дугою (AB) напрямної n - кола радіуса R з центром в початку координат O /рис. 6.15/. Відсік поверхні обмежено паралельними площинами π_1, $z = h$

Аналітичне подання відсіку в декартових прямокутних координатах матимемо так:

1/представлення дуги AB напрямної - система

$$x^2 + y^2 = R^2;$$
$$z = 0.$$

де $0 \le x$, $y \le R$;

2/ оскільки аналітичним поданням крайньої твірної $A\bar{A}$ є система

$$x/R + z/h = 1;$$
$$y = 0,$$

а координати точки $K = \ell \cap \smile AB : x_K, y_K, 0$. то завдяки рівності коефіцієнтів у паралельних твірних $\ell \parallel (A\bar{A})$. для ℓ дістанемо аналітичне подання у вигляді системи

$$z = -(h/R)(x - x_K);$$
$$y = y_K,$$

де $-R \le x \le R$, $0 \le y \le R$, $0 \le z \le h$;

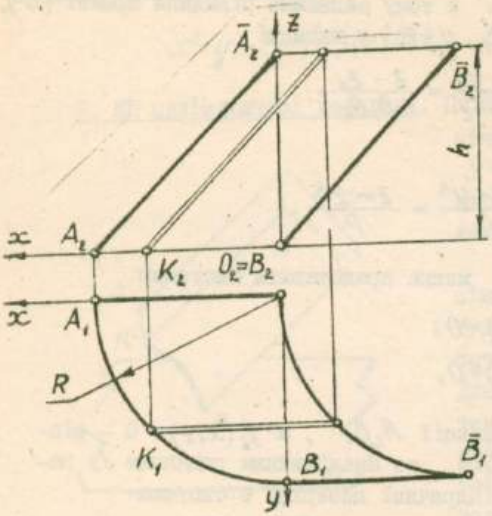


Рис. 6.15

3/ аналітичне подання каркаса відсіку циліндричної поверхні в даному разі має вигляд

$$z = -(h/R)(x - x_K);$$
$$x_K^2 + y_K^2 = R^2; \qquad /6.3/$$
$$y = y_K, \quad \text{де} -R \le x \le R,\ 0 \le y \le R,\ 0 \le z \le h,$$

а виключивши з /6.3/ параметри x_K і y_K . запишемо рівняння відсіку циліндричної поверхні

$$\left(x + \frac{R}{h} z\right)^2 + y^2 = R^2,$$

де $-R \le x \le R$, $0 \le y \le R$, $0 \le z \le h$

3. КП торсової поверхні. Конічна поверхня є окремим випадком торсової поверхні.

Кінематична поверхня, що являє собою неперервну множину окремих положень прямої, яка рухається і дотична до деякої лінії – ребра звороту, називається торсовою /рис. 6.16/.

У даному випадку визначник набуде вигляду

$$\Omega^{\circ}=\{\ell:(AT)\to \ell\wedge A, T\in k\wedge A\to T\},$$

де k – ребро звороту [*], ℓ – твірна, що є дотичною /граничним положенням січної AT / до k в точці $T=\ell\cap k$.

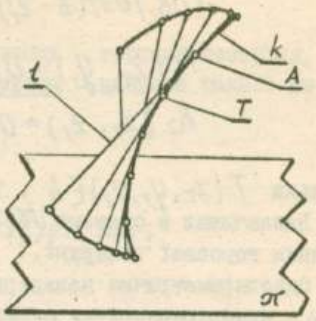


Рис. 6.16

Якщо ребро звороту вироджується в точку, одержуємо конічну поверхню, тобто торсова поверхня вироджується в конічну.

Аналітичне подання торсової поверхні дістаємо так:

1/ рівняння проекції k в π_1 має вигляд $k_1(x,y)=0$, а проекції в π_2 – $k_2(x,z)=0$ /рис. 6.17/;

2/ оскільки рівняння дотичної до k_1 в точці $T_1(x_T, y_T)$ має вигляд

$$(\partial k_1/\partial y)(y-y_T)+(\partial k_1/\partial x)(x-x_T)=0,$$

а рівняння дотичної до k_2 в точці $T_2(x_T, z_T)$ –

$$(\partial k_2/\partial z)(z-z_T)+(\partial k_2/\partial x)(x-x_T)=0,$$

то аналітичне подання дотичної до k в довільній точці $T\in k$ матимемо у вигляді системи

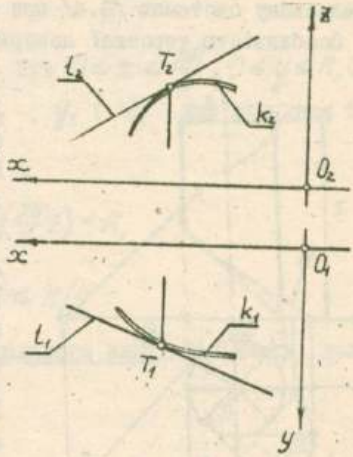


Рис. 6.17

$$(\partial k_1/\partial y)(y-y_T)+(\partial k_1/\partial x)(x-x_T)=0;$$

$$(\partial k_2/\partial z)(z-z_T)+(\partial k_2/\partial x)(x-x_T)=0,$$

а аналітичне подання /в параметричній формі/ каркаса торсової поверхні – у вигляді

---

[*] k – просторова крива.

$$(\partial k_1/\partial y)(y-y_T)+(\partial k_1/\partial x)(x-x_T)=0;$$
$$(\partial k_2/\partial z)(z-z_T)+(\partial k_2/\partial x)(x-x_T)=0;$$
$$K_1(x_T, y_T)=0;$$
$$K_2(x_T, z_T)=0. \qquad /6.4/$$

оскільки $T(x_T, y_T, z_T) \in k$. Тут $-\infty < x, y, z < +\infty$.

Виключивши з системи /6.4/ параметри x_T , y_T і z_T , запишемо рівняння торсової поверхні.

Однопараметрична неперервна множина точок дотику $\{T^i\}$ /їх ∞^1 – однопараметрична множина/ визначає однопараметричну неперервну множину окремих положень дотичної – $\{\ell^i\}$ – торсову поверхню, змодельовану системою /6.4/ при зміні значень x_T , y_T і z_T .

Особливістю торсової поверхні є її розгортуваність.

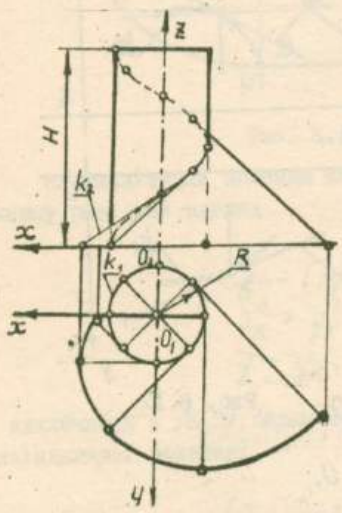


Рис. 6.18

Приклад 6.8. Розглянемо окремий приклад торсової поверхні, яка породжувана циліндричною гвинтовою лінією. Отже, нехай у циліндричної гвинтової лінії (k) базисний циліндр має висоту H і радіус кола-основи – R /рис. 6.18/. Горизонтальна проекція (k_1) такої гвинтової описується рівняннями $x^2+y^2=R^2$; $z=0$, а фронтальна (k_2) – рівняннями $x = R\cos(\frac{2\pi}{H}z)$; ; $y=0$. Отож, дотична (ℓ_1) до k_1 в точці $T(x_T, y_T, z_T)$ має вигляд

$$xx_T + yy_T = R^2;\ z=0,$$

а дотична (ℓ_2) до k_2 в тій самій точці –

$$z-z_1=-(H/2\pi\sqrt{R^2-x_T^2})(x-x_T);\ y=0$$

Звідси дотична ℓ до k в точці T має аналітичне подання у вигляді системи

$$x x_T + y y_T = R^2;$$
$$z - z_T = -\left(H/2\pi\sqrt{R^2 - x_T^2}\right)(x - x_T),$$

а каркас неперервної множини таких дотичних – торсова поверхня, що звичайно називається <u>торсовим гелікоїдом</u> – набуває такого вигляду

$$x x_T + y y_T = R^2;$$
$$z - z_T = -\left(H/2\pi\sqrt{R^2 - x_T^2}\right)(x - x_T);$$
$$x_T^2 + y_T^2 = R^2;$$
$$x_T = R\cos\left(\frac{2\pi}{H} z_T\right), \qquad /6.5/$$

Оскільки точка $T(x_T, y_T, z_T) \in k$. Тут $0 \le x \le \frac{\pi R}{2}, 0 \le y \le R, 0 \le z \le \frac{H}{4}$

Вилучення з /6.5/ параметрів x_T . y_T і z_T дає рівняння торсового гелікоїда /відсіку/:

$$x\cos\left(\frac{2\pi}{H} z\right) \pm y\sin\left(\frac{2\pi}{H} z\right) = R,$$

де $0 \le x \le \frac{\pi R}{2}$, $0 \le y \le R$, $0 \le z \le H/4$

4. <u>КП лінійчатих поверхонь загального виду</u>. Лінійчату поверхню загального виду можна сконструювати таким чином. Візьмемо три просторові /у загальному випадку/ криві-напрямні n^1, n^2 і n^3 /рис. 6.19/. Існує пряма-твірна ℓ така, що перетинає всі три напрямні $(\ell \cap n^1 \wedge \ell \cap n^2 \wedge \wedge \ell \cap n^3)$. Справді, довільна точка $A \in n^1$ разом з напрямною n^3 визначає конічну поверхню, яка має точку-перетин (M) з напрямною n^2. Але тоді (AM) як твірна цієї конічної поверхні має перетин /точку N/ з напрямною n^3 конуса (A, n^3).

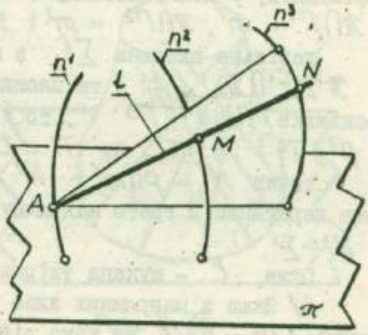


Рис. 6.19

Отже, (AM) перетинає всі

три напрямні: n^1, n^2 і n^3, а тому $(AM)=\ell$ – шукана пряма. Оскільки довільні точки A^i складають однопараметричну неперервну множину $\{A^i\}$, то і прямих ℓ^i – неперервна однопараметрична множина, а отже, $\{\ell^i\}=\Omega$ – лінійчата поверхня загального виду.

Видозміни n^1, n^2 і n^3 зумовлюють класифікацію лінійчатих поверхонь загального виду.

I/ Поверхні з трьома напрямними:

а/ якщо n^1, n^2 – криві, а n^3 – пряма, то одержуємо двічі косий циліндроїд /рис. 6.20, а/. Його визначник має вигляд

$$\Omega^0=\{\ell:\ell\cap n^1\wedge\ell\cap n^2\wedge\ell\cap n^3\},$$

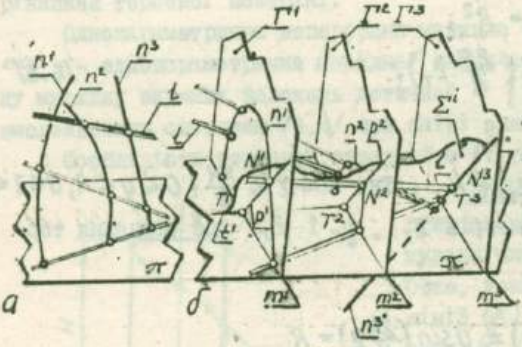


Рис. 6.20

б/ окремим випадком двічі косого циліндроїда є поверхня косого клина /рис. 6.20, б/, яку дістаємо, якщо всі три напрямні розміщені в паралельних площинах. Криві $n^1\subset\Gamma^1$, $n^2\subset\Gamma^2$, а пряма $n^3\subset\Gamma^3$. Отже, його визначник такий:

$$\Omega^0=\{\ell:\ell\cap n^1\wedge\ell\cap n^2\wedge\ell\cap n^3\wedge n^1\subset\Gamma^1\wedge n^2\subset\Gamma^2\wedge n^3\subset\Gamma^3\wedge\Gamma^1\parallel\Gamma^2\parallel\Gamma^3\}.$$

Довільну твірну ℓ будуємо так:

розглядаємо пряму n^3 як носія $\{\Sigma^i\}$ площин, що через неї проходять, і деяку площину π, яка перетинає всі три напрямні: $\pi\cap\Gamma^1=m^1$, $\pi\cap\Gamma^2=m^2$ і $\pi\cap\Gamma^3=m^3$;

довільна площина Σ^i з множини $\{\Sigma^i\}$ перетинає площину π / $\Sigma^i\cap\pi=t^i$ / та площини Γ^1 / $\Sigma^i\cap\Gamma^1=\rho^1$ / і $\Gamma^2(\Sigma^i\cap\Gamma^2=\rho^2)$; оскільки $\Gamma^1\parallel\Gamma^2\parallel\Gamma^3$, то і $\rho^1\parallel\rho^2\parallel\rho^3$. Крім того, $\rho^1\ni T^1$, $\rho^2\ni T^2$ і $n^3\ni T^3$, де $T^1=t^i\cap m^1$, $T^2=t^i\cap m^2$ і $T^3=n^3\cap m^3$;

точки $N^1=\rho^1\cap n^1$ і $N^2=\rho^2\cap n^2$ визначають пряму $N^1N^2=\ell$, яка перетинає й третю напрямну в точці $N^3=\ell\cap n^3$, адже N^1, N^2, $N^3\in\Sigma^i$.

Отже, ℓ – шукана твірна поверхні косого клина;

в/ Якщо з напрямних лише одна – крива /наприклад n^1/, а дві – прямі / n^2, n^3 /, то така лінійчата поверхня називається двічі косим коноїдом /рис. 6.21/.

Визначник її має такий вигляд:

$$\Omega^0=\{\ell:\ell\cap n^1\wedge\ell\cap n^2\wedge\ell\cap n^3\wedge n^2\div n^3\};$$

г/ усі три напрямні / n^1, n^2 і n^3/ - прямі. В цьому випадку маємо лінійчату поверхню загального виду, що називається <u>однополим гіперболоїдом загального виду</u>.

Побудувати твірну прямої ℓ, що перетинає три напрямні прямі n^1, n^2, n^3, не важко. Її виконують /рис. 6.22/ за алгоритмом, аналогічним алгоритму побудови твірної лінійчатої поверхні загального виду.

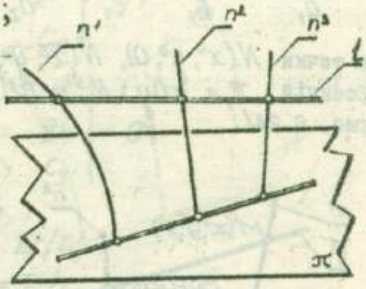


Рис. 6.21

Особливістю конструкції поверхні в даному випадку виявляється та обставина, що за розглянутим алгоритмом будуть побудовані тільки три твірні - ℓ^1, ℓ^2 і ℓ^3 /рис.6.23/, їх рівноправність з напрямними n^1, n^2 і n^3 стане очевидною. Отож, однополий гіперболоїд є носієм двох сімей прямих. Через кожну точку такої поверхні проходять дві твірні різних сімей прямих. Прямі однієї сім"ї - мимобіжні.

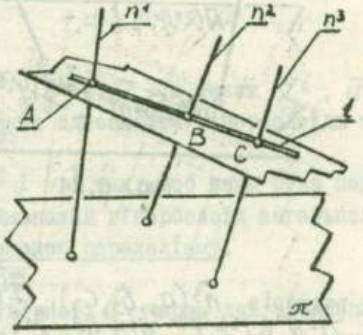


Рис. 6.22

Однополий гіперболоїд загального виду є узагальненням однополого гіперболоїда обертання, що також є носієм двох сімей прямих-твірних.

Визначник поверхні в даному випадку такий:

$$\Omega^0=\{\ell:\ell\cap n^1\wedge\ell\cap n^2\wedge\ell\cap n^3\wedge n^1\div$$
$$\div n^2\wedge n^1\div n^3\wedge n^2\div n^3\}.$$

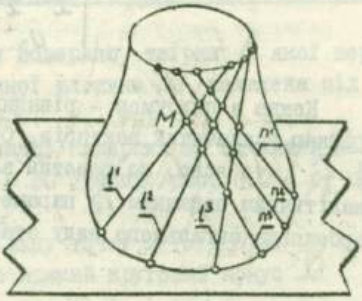


Рис. 6.23

Аналітичне зображення однополого гіперболоїда загального виду дістаємо так.

Нехай напрямні n^1, n^2 і n^3 задано рівняннями

$$\frac{x-x^0}{a_1}=\frac{y-y^0}{b_1}=\frac{z}{c_1},\quad \frac{x-\bar{x}^0}{a_2}=\frac{y-\bar{y}^0}{b_2}=\frac{z}{c_2}\ \text{і}\ \frac{x-\bar{\bar{x}}^0}{a_3}=\frac{y-\bar{\bar{y}}^0}{b_3}=\frac{z}{c_3},$$

де точки $N(x^0,y^0,0)$, $\bar{N}(\bar{x}^0,\bar{y}^0,0)$ і $\bar{\bar{N}}(\bar{\bar{x}}^0,\bar{\bar{y}}^0,0)$ належать площині проекцій $\pi_1=xOy$: $N=n^1\cap\pi_1$, $\bar{N}=n^2\cap\pi_1$ і $\bar{\bar{N}}=n^3\cap\pi_1$ /рис. 6.24/.

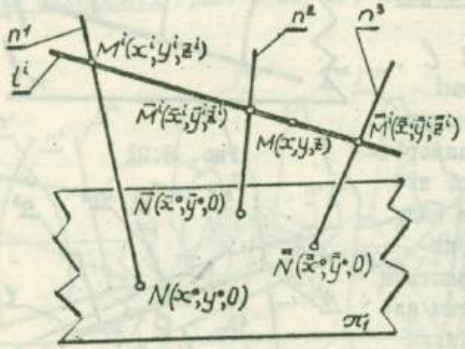


Рис. 6.24

Якщо l^i – довільна твірна однополого гіперболоїда загального виду, то

$M^i=l^i\cap n^1$, $\bar{M}^i=l^i\cap n^2$ і $\bar{\bar{M}}^i=l^i\cap n^3$.

Вважаючи, що $M(x,y,z)\in l^i$ – довільна точка, маємо умову компланарності трьох векторів $\vec{n}^1(a_1,b_1,c_1)$, $\overrightarrow{MM^i}(x-x^i,\ y-y^i,\ z-z^i)$ і $\overrightarrow{\bar{M}^i\bar{N}}(\bar{x}^i-x^0,\ \bar{y}^i-y^0,\ \bar{z}^i)$

$$\begin{vmatrix} x-x^i & y-y^i & z-z^i \\ \bar{x}^i-x^0 & \bar{y}^i-y^0 & \bar{z}^i \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}=0,$$

а векторів $\vec{n}^3(a_3,b_3,c_3)$, $\overrightarrow{\bar{\bar{M}}^i\bar{\bar{M}}}(x-\bar{\bar{x}}^i,\ y-\bar{\bar{y}}^i,\ z-\bar{\bar{z}}^i)$ і $\overrightarrow{\bar{\bar{M}}^i\bar{\bar{N}}}(\bar{\bar{x}}^i-\bar{\bar{x}}^0,\ \bar{\bar{y}}^i-\bar{\bar{y}}^0,\ \bar{\bar{z}}^i)$:

$$\begin{vmatrix} x-\bar{\bar{x}}^i & y-\bar{\bar{y}}^i & z-\bar{\bar{z}}^i \\ \bar{\bar{x}}^i-\bar{\bar{x}}^0 & \bar{\bar{y}}^i-\bar{\bar{y}}^0 & \bar{\bar{z}}^i \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=0.$$

Кожна з цих умов – рівняння площини, що визначається відповідною трійкою зазначених векторів. Оскільки вектори $\overrightarrow{MM^i}$ і $\overrightarrow{\bar{M}\bar{\bar{M}}^i}$ колінійні l^i, то ясно, що перетин зазначених площин і є твірна l^i. Отже, аналітичним поданням /у параметричній формі/ каркаса однополого гіперболоїда загального виду стає система

$$\begin{vmatrix} x-x^i & y-y^i & z-z^i \\ \bar{x}^i-x^o & \bar{y}^i-y^o & \bar{z}^i \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{vmatrix} x-\bar{x}^i & y-\bar{y}^i & z-\bar{z}^i \\ \bar{x}^i-\bar{x}^o & \bar{y}^i-\bar{y}^o & \bar{z}^i \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$\begin{aligned} (x^i-x^o)/a_1 &= (y^i-y^o)/b_1 = z^i/c_1 ; \\ (\bar{x}^i-\bar{x}^o)/a_2 &= (\bar{y}^i-\bar{y}^o)/b_2 = \bar{z}^i/c_2 ; \\ (\bar{\bar{x}}^i-\bar{\bar{x}}^o)/a_3 &= (\bar{\bar{y}}^i-\bar{\bar{y}}^o)/b_3 = \bar{\bar{z}}^i/c_3, \end{aligned} \qquad /6.6/$$

де $-\infty < x, y, z < +\infty$.

Виключаючи з /6.6/ параметри x^i, y^i, z^i, а також $\bar{x}^i$, $\bar{y}^i$, $\bar{z}^i$ і $\bar{\bar{x}}^i$, $\bar{\bar{y}}^i$, $\bar{\bar{z}}^i$, дістаємо рівняння однополого гіперболоїда загального виду.

Добираючи напрямні прямі n^1, n^2 і n^3 так, щоб вони були паралельні деякій площині, перетворимо однополий гіперболоїд загального виду на гіперболічний параболоїд з площиною паралелізму.

2/ Поверхні з напрямною площиною:

обмежимося умовами проходження твірної ℓ через дві точки-перетини з напрямними n^1 і n^2, а третю умову - про перетин ℓ з напрямною n^3 - замінимо умовою нахилу ℓ до деякої площини π під кутом α. Одержимо лінійчату поверхню загального виду з двома напрямними і напрямною площиною.

На рис. 6.25, а зображено таку поверхню, твірна ℓ якої перетинає напрямні n^1 і n^2, а до напрямної площини π нахилена під кутом α. У даному випадку $\pi = \pi_1$.

Алгоритм побудови твірної ℓ такої поверхні за заданими на КП напрямними n^1 і n^2 і кутом $\ell \wedge \pi = \alpha$ такий /рис. 6.25, б; прийнято, що $\pi = \pi_1$ /:

на напрямній n^1 обираємо довільну точку $A(A_1, A_2)$;

з вершиною в точці A будуємо прямий круговий конус Ω, у якого твірні нахилені під кутом α до π_1;

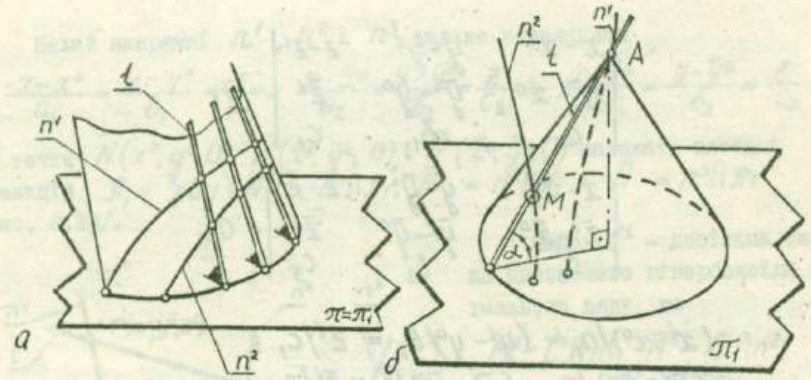


Рис. 6.25

знаходимо точку перетину конуса Ω з напрямною n^2 : $M = \Omega \cap n^2$;

точки A і M визначають шукану ℓ .

Рухаючись по n' , точка A породжує нові ℓ -твірні поверхні.

Визначник лінійчатої поверхні загального виду з двома напрямними і напрямною площиною має вигляд

$$\Omega^0 = \{\ell : \ell \cap n' \wedge \ell \cap n^2 \wedge \ell, \hat{} \pi = \alpha \wedge n' \div n^2\}$$

Серед лінійчатих поверхонь загального виду з двома напрямними і напрямною площиною розрізняють:

<u>косий циліндроїд</u>, якщо n' і n^2 криві;

<u>косий коноїд</u>, якщо одна з двох напрямних пряма;

<u>двічі косу площину</u>, якщо обидві напрямні прямі;

<u>поверхні Каталана</u>. Припустимо, що в лінійчатої поверхні загального виду з двома напрямними і напрямною площиною кут нахилу твірних до напрямної площини $\alpha = 0$. Тоді всі твірні виявляються паралельними до напрямної площини π , яка в цьому разі отримує назву <u>площини параделізму</u>. Одержані таким чином поверхні називаються <u>поверхнями Каталана</u> *. Слід зазначити, що поверхні Каталана можна також розглядати і як окремий випадок лінійчатої поверхні загального виду

---

* Каталан Е.Ш. /1814-1894/ – бельгійський математик, що перший вивчав ці поверхні.

з трьома напрямними, якщо одна з них /наприклад n^3/ є нескінченно віддаленою прямою /$n^3 \to \rho^\infty$/ площини паралелізму π, оскільки в такому випадку кожна твірна, перетинаючись з ρ^∞ у своїй нескінченно віддаленій точці, – паралельна до площини π.

Поверхні Каталана широко використовуються в техніці. Розглянемо їх детальніше.

Циліндроїд. Поверхня Каталана називається циліндроїдом, якщо n^1 і n^2 – криві /рис.6.26/.

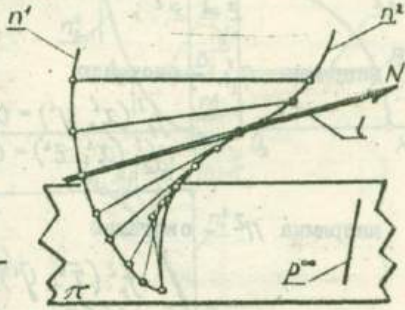


Рис. 6.26

На рис. 6.27 зображено КП відсіку циліндроїда, для якого $\pi = \pi_1$. Відсік обмежено напрямними n^1 і n^2 і твірною l у двох крайніх положеннях – найнижчому /$l^0 \subset \pi_1$/ і найвищому /l^t/. Обрис фронтальної проекції утворюють дуги n_2^1 і n_2^2 і відрізок прямої l_2^t, обмежений напрямними. Обрис горизонтальної проекції – дуги n_1^1 і n_1^2, відрізки прямих l_1^0 і l_1^t і обвідна сім"ї $\{l_1^i\}$.

Визначник циліндроїда має вигляд

$$\Omega^\circ = \{l : l \cap n^1 \wedge l \cap n^2 \wedge l \parallel \pi \wedge n^1, n^2 \not\subset \pi\}$$

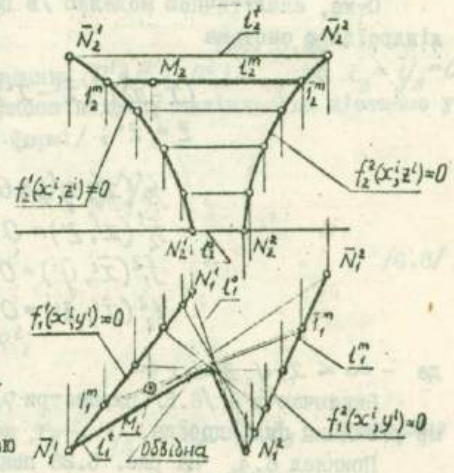


Рис. 6.27

На рис. 6.27 показано також розв"язування задачі на побудову точки M за даною M_2 /перший варіант/ і M_2 за даною M_1 /другий варіант/, якщо M належить циліндроїду. В першому варіанті через M_2 проводимо фронтальну проекцію відповідної твірної. За одержаними точками 1_2^m і $\bar{1}_2^m$ будуємо відповідно 1_1^m і $\bar{1}_1^m$, які визначають $l_1^m \ni M_1$. У другому варіанті будуємо 1_1^m як дотичну до обрису, що проходить через M_1. Діставши точки 1_1^m і $\bar{1}_1^m$, будуємо 1_2^m і $\bar{1}_2^m$, визначаючи $l_2^m \ni M_2$.

Аналітичне подання циліндроїда можна здобути так:
твірна ℓ^i, що проходить через точки $A^i(x^i, y^i, z^i) \in n^1$ і $B^i(\bar{x}^i, \bar{y}^i, \bar{z}^i) \in n^2$, описується системою

$$(x-x^i)/(\bar{x}^i-x^i) = (y-y^i)/(\bar{y}^i-y^i);$$
$$z = z^i;$$

напрямна n^1 – системою

$$f_1^1(x^i, y^i) = 0;$$
$$f_2^1(x^i, z^i) = 0;$$

напрямна n^2 – системою

$$f_1^2(\bar{x}^i, \bar{y}^i) = 0;$$
$$f_2^2(\bar{x}^i, z^i) = 0.$$

Отже, аналітичною моделлю /в параметричній формі/ каркаса циліндроїда є система

$$(x-x^i)/(\bar{x}^i-x^i) = (y-y^i)/(\bar{y}^i-y^i);$$
$$z = z^i;$$
$$f_1^1(x^i, y^i) = 0; \qquad /6.7/$$
$$f_2^1(x^i, z^i) = 0;$$
$$f_1^2(\bar{x}^i, \bar{y}^i) = 0;$$
$$f_2^2(\bar{x}^i, z^i) = 0,$$

де $-\infty < x, y, z < +\infty$.

Виключаючи з /6.5/ параметри x^i, y^i, z^i, $\bar{x}^i$, $\bar{y}^i$, дістанемо рівняння циліндроїда.

Приклад 6.4. На рис. 6.28 показано КП відсіку циліндроїда, де однією з напрямних є парабола n^1, що належить площині π_2, а друга напрямна – коло n_2, що міститься в площині π_3, центр його – початок координат. Площина паралелізму $\pi = \pi_3$.

Обрис фронтальної проекції відсіку циліндроїда в даному разі складають відрізки L_2N_2, L_2O_2 і дуга параболи N_2O_2, профільної –

відрізки L_3O_3. K_3O_3 і дуга кола K_3L_3, горизонтальної – відрізки N_1O_1, K_1L_1 і дуга обвідної K_1N_1.

Отож, маємо аналітичні подання дуг напрямних

$$n^1: x^2 = 2pz;$$
$$y = 0,$$

де $0 \le x \le x_N$, $0 \le z \le R$;

$$n^2: y^2 + z^2 = R^2$$

де $0 \le y \le R$, $0 \le z \le R$;

і відрізка AB твірної ℓ :

$$(x - x_A)/(x_B - x_A) = (y - y_A)/(y_B - y_A);$$
$$z = z_A = z_B,$$

де $0 \le x \le \sqrt{2pR}$, $0 \le y, z \le R$.

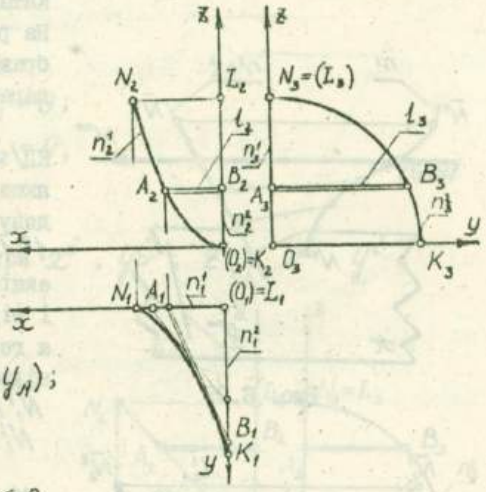


Рис. 6.28

Оскільки довільні точки A і B належать відповідно напрямним $n^1) A$ і $n^2) B$, то $x_B = y_A = 0$.

Отже, аналітичне подання каркаса відсіку циліндроїда дістаємо у вигляді системи /в параметричній формі/

$$(x - x_A)/(x_B - x_A) = y/y_B;$$
$$z = z_A = z_B; \qquad /6.8/$$
$$x_A^2 = 2pz_A;$$
$$y_B^2 + z_B^2 = R^2,$$

де $0 \le x \le \sqrt{2pR}$, $0 \le y, z \le R$.

Виключаючи з /6.8/ параметри x_A, y_B, z_A і z_B, приходимо до рівняння відсіку циліндроїда:

$$x/\sqrt{2pz} + y/\sqrt{R^2 - z^2} = 1 \qquad \text{де } 0 \le x \le \sqrt{2pR}$$

і $0 \le y, z \le R$.

Коноїд. Його отримуємо, якщо одна з двох напрямних поверхні Каталана пряма /нехай $n^2 = t$ /. На рис. 6.29 показано наочне зображення коноїда, в якого площина паралелізму $\pi = \pi_1$.

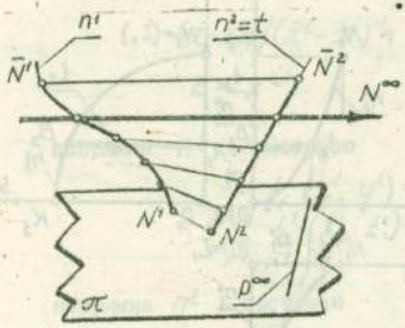


Рис. 6.29

На рис. 6.30 зображено /на КП/ побудову M_1 за даною M_2, якщо M належить коноїду. Побудову виконано за допомогою твірної $1^m1^m \ni M$. Обрис фронтальної проекції відсіку утворюють дуга $N_2^1N_2^1$ і відрізки $N_2^1N_2^2$, $N_2^2N_2^2$ і $N_2^1N_2^2$, а горизонтальної - дуга $N_1^1N_1^1$ відрізок $N_1^2N_1^2$, частини відрізків $N_1^1N_1^2$ і $N_1^2N_1^1$, а також обвідна $N_1^1N_1^2$.

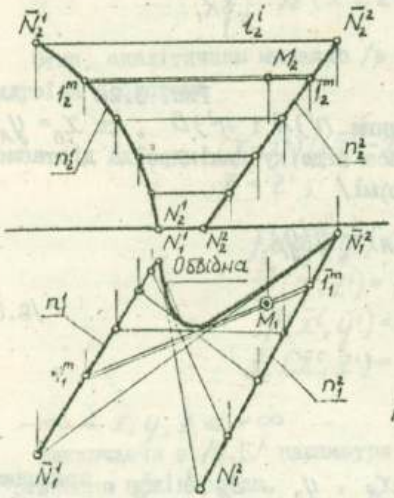


Рис. 6.30

Легко помітити, що побудова M_2 за даною M_1 виконується за допомогою тієї самої твірної, але використовується обставина, що $(1_1^m1_1^m)$ є дотична до обвідної-обрису.

Аналітичне подання коноїда відрізняється від аналітичного подання циліндроїда лише тим, що за визначенням коноїда одна з його напрямних (n^2) - пряма. Отож, її аналітичне подання

$$n^2: f_1^2(\bar{x}^i, \bar{y}^i) = A_1\bar{x}^i + B_1\bar{y}^i + C_1$$

і $f_2^2(\bar{x}^i, z^i) = A_2\bar{x}^i + B_2z^i + C_2$,

а аналітична модель каркаса коноїда /в параметричній формі/ має вигляд

$$(x-x^i)/(\bar{x}^i-x^i)=(y-y^i)/(\bar{y}^i-y^i);$$
$$z=z^i;$$
$$f_1^1(x^i,y^i)=0;$$
$$f_2^1(x^i,z^i)=0;$$
$$A_1\bar{x}^i+B_1\bar{y}^i+C_1=0;$$
$$A_2\bar{x}^i+B_2z^i+C_2=0, \qquad /6.9/$$

де $-\infty<x,y,z<+\infty$.

Виключаючи з /6.9/ параметри x^i . y^i . z^i . $\bar{x}^i$. $\bar{y}^i$. дістаємо рівняння коноїда.

Приклад 6.5. На рис.6.3I зображено КП відсіку коноїда, одна з напрямних якого – бісектриса координатного кута xOz , а друга напрямна – коло в площині yOz з центром у початку координат. Площина паралелізму $\pi=\pi_1$.

Обрис фронтальної проекції відсіку коноїда утворюють відрізки N_2O_2 . N_2L_2 і L_2O_2 , профільної – відрізки K_3O_3 . N_3O_3 і дуга кола K_3L_3 . горизонтальної – відрізки N_1O_1 . K_1L_1 і обвідна K_1N_1.

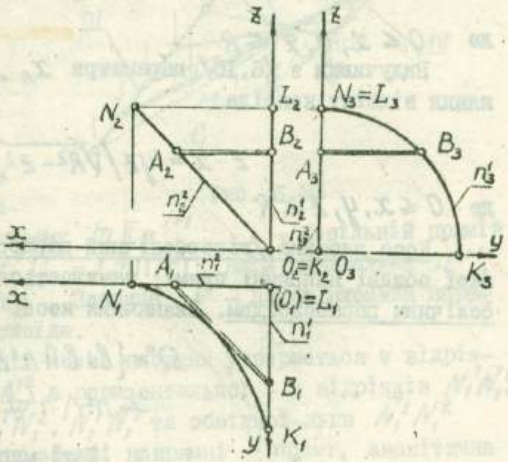


Рис. 6.3I

Отже, аналітичне подання напрямної-кола n^1: $y^2+z^2=R^2$, де $0\le y\le R$. $0\le z\le R$, а напрямної-прямої n^2 : $z=x$, де $0\le x\le R$.

Аналітичне подання довільної твірної $(AB)=\ell$, де $A\in n^2$, $B\in n^1$:

$$(x-x_A)/(x_B-x_A)=(y-y_A)/(y_B-y_A),\quad z=z_A=z_B,$$

а з урахуванням того, що $x_B = y_A = 0$,

$$(x - x_A)/-x_A = y/y_B$$

Отже, аналітичним поданням каркаса відсіку коноїда є система

$$\begin{aligned} &(x_A - x)/x_A = y/y_B; \\ &z = z_A = z_B; \\ &y_B^2 + z_B^2 = R^2; \\ &z_A = x_A, \end{aligned} \qquad /6.10/$$

де $0 \le x, y, z \le R$.

Вилучивши з /6.10/ параметри x_A, y_B, z_B, запишемо рівняння відсіку коноїда

$$z - x = yz/\sqrt{R^2 - z^2},$$

де $0 \le x, y, z \le R$.

Коса площина /гіперболічний параболоїд/. Поверхня Каталана, в якої обидві напрямні прямі, називається косою площиною, або гіперболічним параболоїдом. Визначник косої площини має вигляд

$$\Omega^0 = \{\ell : \ell \cap n' \wedge \ell \cap n^2 \wedge \ell \parallel \pi \wedge n' \div$$
$$\div n^2 \wedge n' \not\subset \pi \wedge n^2 \not\subset \pi\}.$$

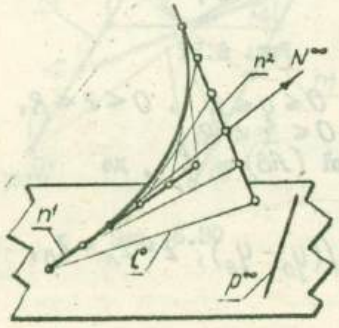


Рис. 6.32

Далі мається на увазі, що площина паралелізму $\pi = \pi_1$ /рис. 6.32/.

На КП відсіку косої площини /рис. 6.33/ показано побудову M_1 за даною M_2 /і навпаки/, якщо M належить до косої площини. Як і у випадках циліндроїда і коноїда, тут при побудові M_2 за даною M_1 горизонтальна проекція твірної $1_1^m \bar{1}_1^m \ni M_1$ є дотичною до обвідної-обрису.

Гіперболічний параболоїд можна розглядати як окремий випадок однополого гіперболоїда загального виду, в якого одна напрямна, наприклад $n^3 = p^\infty$, - нескінченно відда-

лена пряма. Оскільки гіперболоїд загального виду несе на собі дві рівноправні сім"ї мимобіжних твірних-напрямних, то ця властивість зберігається і в гіперболічного параболоїда. Враховуючи, що твірні гіперболічного параболоїда паралельні до площини паралелізму, неважко уявити, що в гіперболічного параболоїда є й друга площина паралелізму. Побудова другої площини паралелізму не викликає труднощів.

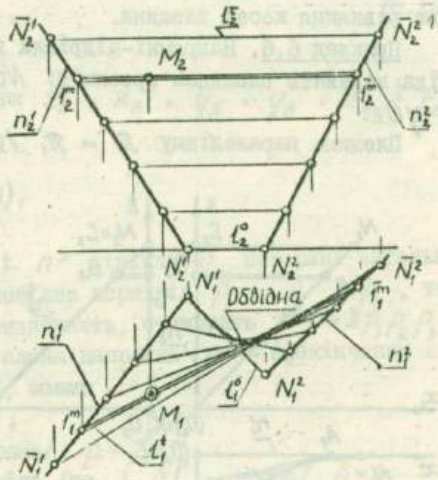


Рис. 6.33

Справді, нехай сім"ї твірних-і прямних відповідно $\{l^i\}$ і $\{n^i\}$. Прямі сім"ї $\{l^i\}$ паралельні площині Σ - площині паралелізму. Візьмемо на довільній n^i довільну точку A, через яку проведемо пряму $m \parallel n^{i+1}$ - довільній прямій сім"ї $\{n^i\}$. Дістали площину $\Gamma = (m \cap n^i)$, якій паралельна n^{i+1}, а отже, і всі прямі сім"ї $\{n^i\}$. Площина Γ - друга площина паралелізму гіперболічного параболоїда.

Обрис фронтальної проекції косої площини утворюється з відрізків $N_2^1\bar{N}_2^1$, $\bar{N}_2^1\bar{N}_2^2$, $\bar{N}_2^2N_2^2$, $N_2^1N_2^2$, а горизонтальної - з відрізків $N_1^1\bar{N}_1^1$, $N_1^2\bar{N}_1^2$, частин відрізків $N_1^1N_1^2$, $\bar{N}_1^1\bar{N}_1^2$ та обвідної-дуги $N_1^1N_1^2$.

Оскільки в даному випадку обидві напрямні - прямі, аналітична модель каркаса косої площини /в параметричній формі/ має вигляд

$$
\begin{aligned}
&(x-x^i)/(\bar{x}^i-x^i)=(y-y^i)/(\bar{y}^i-y^i);\\
&z=z^i;\\
&A_1^1x^i+B_1^1y^i+C_1^1=0;\\
&A_2^1x^i+B_2^1z^i+C_2^1=0;\\
&A_1^2\bar{x}^i+B_1^2\bar{y}^i+C_1^2=0;\\
&A_2^2\bar{x}^i+B_2^2z^i+C_2^2=0,
\end{aligned}
\qquad /6.11/
$$

де $-\infty < x, y, z < +\infty$.

Виключаючи з /6.II/ параметри $x^i, y^i, z^i, \bar{x}^i, \bar{y}^i$, дістанемо рівняння косої площини.

Приклад 6.6. Напрямні-відрізки відсіку гіперболічного параболоїда належать площинам проекцій: $NO \subset n^1 \subset \pi_2 = xOz$, $KL \subset n^2 \subset \pi_3 = yOz$.

Площина паралелізму $\pi = \pi_1$ /рис. 6.34/.

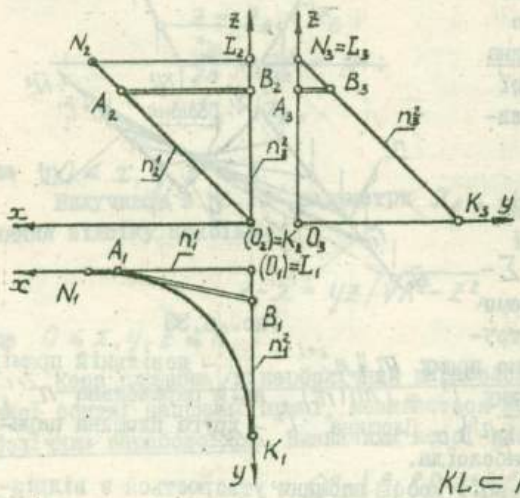


Рис. 6.34

Обриси проекцій відсіку утворюють:

фронтальної – відрізки N_2O_2, L_2O_2 і L_2N_2;

профільної – відрізки N_3O_3, K_3N_3 і K_3O_3;

горизонтальної – відрізки N_1O_1, K_1O_1 і обвідна – дуга K_1N_1.

Аналітичне зображення відрізка-напрямної $NO \subset n^1$:

$$z = x;\ y = 0,$$

де $0 \le x, z \le a$,

а відрізка-напрямної

$$KL \subset n^2 \ /\ (y/a) + (z/a) = 1;\ x = 0,$$

де $0 \le y, z \le a$.

Нехай довільна твірна – відрізок AB така, що $A \in [NO]$, а $B \in [KL]$. Легко уявити, що координати цих точок відповідають умовам: $x_B = y_A = 0$ і $z = z_A = z_B = x_A$.

Оскільки аналітичне подання твірної (AB) – це система

$$(x - x_A)/(x_B - x_A) = (y - y_A)/(y_B - y_A);$$

$$z = z_A = z_B,$$

то аналітичне подання /в параметричній формі/ відсіку гіперболічного параболоїда в даному випадку – система

$$(x-x_A)/(x_B-x_A) = (y-y_A)/(y_B-y_A);$$

$$z = z_A = z_B = x_A, \qquad /6.12/$$

де $0 \le x, y, z \le a$

Виключаючи з /6.12/ параметри x_A . x_B . y_A . y_B . z_A і z_B. запишемо рівняння відсіку

$$x - z = yz/(z-a),$$

де $0 \le x, y, z \le a$.

3/ Якщо напрямні n^1 , n^2 і n^3 лінійчатої поверхні загального виду є алгебраїчні криві відповідно порядків p_1 , p_2 і p_3 , то порядок поверхні, яку напрямні визначають, становить $p = 2p_1p_2p_3$. Оскільки у випадку поверхонь Каталана напрямна n^3 – нескінченно віддалена пряма, а отже, $p_3 = 1$, маємо

для циліндроїда $p = 2p_1p_2$;

для коноїда /де n^2 теж пряма/ $p = 2p_1$;

для гіперболічного параболоїда /де і n^1 – пряма/ $p = 2$.

4/ Лінійчаті поверхні можна конструювати й вивченням їх з конгруенцій прямих, тобто з двопараметричних множин прямих.

Розглянемо множину прямих $\{l^{ij}\}$, кожна з яких перетинає дві фіксовані криві n^1 і n^2 – фокальні фігури конгруенції /рис. 6.35/.

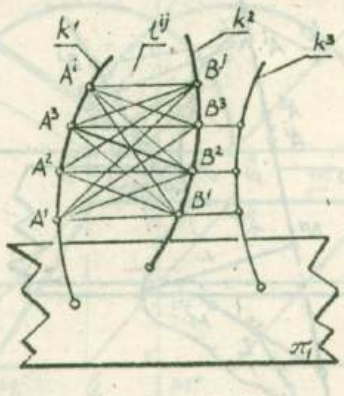


Рис. 6.35

Ясно, що n^1 можна розглядати як однопараметричну множину точок $\{A^i\}$, а n^2 – як однопараметричну множину точок $\{B^j\}$.

Якщо $A^i = n^1 \cap l^{ij}$, а $B^j = n^2 \cap l^{ij}$, то прямих, що визначаються парами A^i і B^j , виявляється $\infty^1 \cdot \infty^1 = \infty^2$. Справді, кожна B^j разом з $\{A^i\}$ визначає ∞^1 прямих, а самих B^j також ∞^1.

Тіло одержаної у такий спосіб конгруенції в загальному випадку не заповнює простір повністю, тобто через кожну точку простору

не обов"язково проходить пряма /прямі/ конгруенції /в тілі конгруенції виявляються карости /порожнечі//.

Зануривши в тіло конгруенції /не в карот/ третю криву n^3, помічаємо, що множина прямих конгруенції, які перетинають n^1, n^2 і n^3 виявляється однопараметричною, а отже, лінійчатою поверхнею загального виду.

Варіюючи фокальні фігури, їх розміщення, а також вид зануреної фігури, можна сконструювати потрібну поверхню *.

Конгруенції позначаються символом $K_2\ /n, m/$, де n позначено її порядок, а m - клас.

Порядок вказує на кількість прямих конгруенції, що проходять через довільну точку її тіла, а клас - кількість прямих конгруенції, що належать довільній площині, яка перетинає тіло конгруенції.

Якщо через будь-яку точку, пряму чи площину тіла конгруенції проходить /або вони несуть на собі/ інше число прямих конгруенції, то така точка, пряма або площина називається сингулярним /особливим/ елементом даної конгруенції.

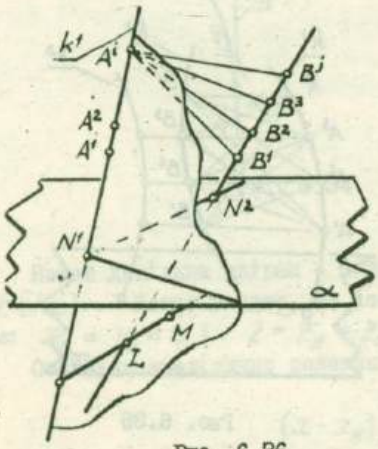


Рис. 6.36

Наприклад, у найпростішої $K_2\ /1, 1/$, фокальними фігурами якої є дві мимобіжні прямі, n^1 і n^2, сингулярними виявляються точки прямих n^1 і n^2, а також пучки площин з носіями n^1 і n^2. Справді, якщо довільна площина α /рис. 6.36/ перетинає пару прямих n^1 і n^2 у двох точках N^1 і N^2, то, отже, $\alpha \supset (N^1N^2)$, тобто єдину пряму конгруенції $K_2\ /1, 1/$, а довільній точці належить єдина пряма $ML \subset K_2\ /1, 1/$, бо точка $L = \text{пл.}(M, n^1) \cap n^2$ - єдина. Довільна ж точка напрямної $A^1 \in n^1$ /або $A^1 \in n^2$/ є носієм цілого пучка прямих, які належать конгруенції $(\{l^1\} \subset K_2\ (1,1)$, як і довільна площина, що проходить через напрямну $\beta^1 \supset n^1$ /або $\beta^1 \supset n^2$/, несе на собі пучок прямих $\{t^1\} \subset K_2\ (1,1)$ з носієм - точкою $B^1 = \beta^1 \cap n^2$. Отже, A^1 і $\{\beta^1\}$ - сингулярні.

* Цей напрям досліджень дістав розвиток в [67; 83].

5/ Технічні приклади лінійчатих поверхонь. Приклади застосування в техніці таких поверхонь, як конічна, або циліндрична, настільки загальновідомі, що немає потреби розглядати їх тут. Отож, розглянемо приклади технічних застосувань деяких інших видів лінійчастих поверхонь.

а/ Поверхня косого переходу /або просто косий перехід/ - окремий випадок двічі косого циліндроїда. Її дістаємо, якщо дві напрямні / n' і n^2 / - кола одного радіуса /рис. 6.37/, а n^3 - пряма, що проходить через середину /O/ відрізка, обмеженого центрами кіл n' і n^2, і перпендикулярна до їх площин.

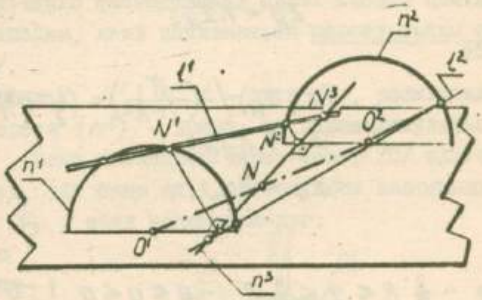


Рис. 6.37

Аналітичну модель цієї поверхні одержуємо так. Нехай центр початку координат суміщено з точкою O, відстань між площинами кіл n', n^2 /які паралельні площині проекцій π_2 / становить $2a$, радіус їх дорівнює R, а відстань центрів від площини проекцій π_3 - $\frac{A}{2}$/рис.6.38; двокартинний КП/.

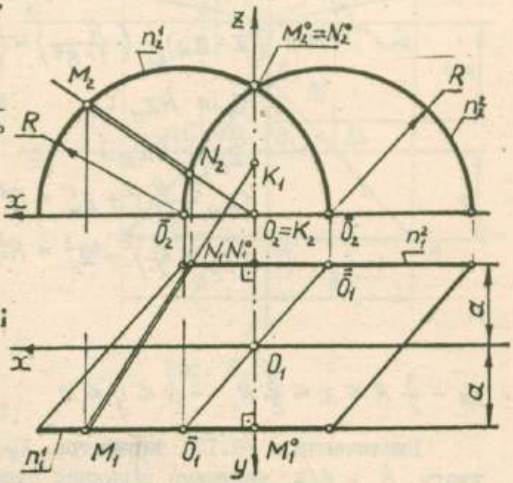


Рис. 6.38

Отож, аналітичні моделі напрямних n': $(x-\frac{R}{2})^2 + z^2 = R^2$; $y = a$, а n^2: $(x+\frac{R}{2})^2 + z^2 = R^2$; $y = -a$, де $-\frac{3}{2}R \le x \le \frac{3}{2}R$, $0 \le z \le R$.

Довільні точки $M \in n'$ і $N \in n^2$, що визначають довільну твірну поверхні MN, що перетинає вісь Oy /третю напрямну n^3 / у точці K, дістаємо як точки перетину осьової фронтально-проеціюючої площини Σ з напрямними: $M = n' \cap \Sigma$, $N = n^2 \cap \Sigma$.

Отже, якщо $M(x_M, y_M, z_M)$ і $N(x_N, y_N, z_N)$, де $y_M = a$, $y_N = -a$ і рівняння площини Σ: $z = kx$, де $k = z_M/x_M = z_N/x_N$;

аналітична модель твірної $\ell = (MN)$ – система

$$(x-x_M)/(x_N-x_M)=(y-y_M)/(y_N-y_M);$$
$$z_M = kx_M;$$
$$z_N = kx_N,$$

або

$$(x-x_M)/-\left(\frac{R}{1+k^2}\right)=(y-a)/-2a;$$
$$z_M = kx_M;$$
$$z_N = kx_N,$$

де $-\frac{3}{2}R \le x \le \frac{3}{2}R$, $-a \le y \le a$ і $0 \le z \le R$.

Беручи до уваги рівняння напрямних, матимемо аналітичну модель каркаса відсіку поверхні косого переходу

$$(x-x_M)/-\left(\frac{R}{1+k^2}\right)=(y-a)/-2a;$$
$$z_M = kx_M;$$
$$z_N = kx_N;$$
$$\left(x_M-\frac{R}{2}\right)^2+z_M^2=R^2;$$
$$\left(x_N+\frac{R}{2}\right)^2+z_N^2=R^2,$$

/6.13/

де $-\frac{3}{2}R \le x \le \frac{3}{2}R$, $-a \le y \le a$ і $0 \le z \le R$.

Виключаючи з /6.13/ параметри x_M, x_N, z_M, z_N і беручи до уваги $k = z/x$, запишемо рівняння поверхні відсіку косого переходу:

$$2\left(1+\frac{z^2}{x^2}\right)x - R\left(1 \pm \sqrt{4+3\frac{z^2}{x^2}}\right) = R(y-a)/a,$$

де $-\frac{3}{2}R \le x \le \frac{3}{2}R$, $-a \le y \le a$ і $0 \le z \le R$.

Цікаво зазначити, що одна з твірних (M^0N^0) перпендикулярна до площини проекцій π_2, довжина M^0N^0 – найменша, а аналітична модель: $z = (\sqrt{3}/2)R$, $x = 0$, де $-a \le y \le a$.

Технічне застосування очевидне: різні види переходів і перехідників.

б/ Другий приклад технічного застосування двічі косого циліндроїда – такий її окремий випадок, який називається марсельським склепінням /косим циліндроїдом/.

Тут дві напрямні /наприклад, n^1 і n^2 / – дуги кіл, розміщених у паралельних площинах, а третя (n^3) – пряма, що перпендикулярна до площин напрямних n^1 і n^2. Вона проходить через центр /O/ однієї з напрямних (n^2) і міститься, так само як і центри обох напрямних, у площині симетрії / $\Sigma^0 = \pi_3$ / обох напрямних-дуг.

На рис. 6.39 зображено двокартинний КП такої поверхні. У дуги n^1 радіус R, у дуги n^2 – r. Центр /$\bar{O}$/ дуги $AB \subset n^1$ віддалений від π_1 на $R/2$, а від π_2 – на a. Кінці дуги /точки A і B / віддалені від площини π_3 на b. Твірні (MN) належать осьовим площинам $\Sigma \supset (Oy)$.

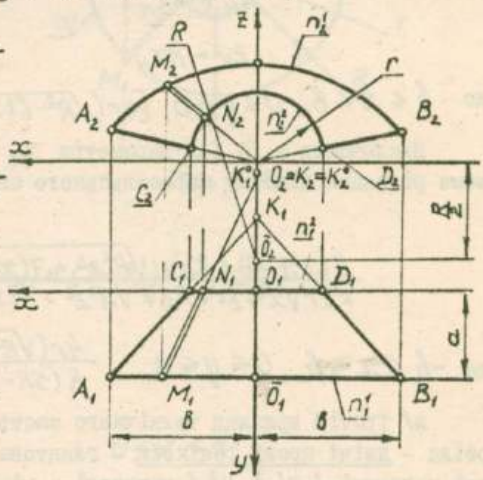


Рис. 6.39

Аналітичну модель марсельського склепіння одержуємо аналогічно поверхні косого переходу.

Аналітичні подання напрямних:

$n^1: x^2 + \left(z + \frac{R}{2}\right)^2 = ; \quad y = a,$

де $-b \le x \le b, \quad 0 \le z \le R/2;$

$n^2: x^2 + z^2 = r^2.$

Аналітичне подання твірної MN:

$$(x - x_M)/(x_N - x_M) = (y - y_M)/(y_N - y_M):$$

$z_M = kx_M; \quad z_N = kx_N$ /оскільки рівняння $\Sigma: z = kx$/,

де $-b \le x \le b, \quad 0 \le y \le a, \quad [4r(\sqrt{R^2 - b^2} - \frac{R}{2})]/R(5R - \sqrt{R^2 - b^2}) \le z \le R/2.$

Беручи до уваги $y_M = a$ і $y_N = 0$, дістаємо

$$(x-x_M)/(x_N-x_M) = (y-a)/-a,$$

де $-b \le x \le b$, $0 \le y \le a$, а отже, аналітична модель каркаса відсіку марсельського склепіння має вигляд системи

$$\begin{aligned} &x_M^2 + (z_M + \frac{R}{2})^2 = R^2; \\ &x_N^2 + z_N^2 = r^2; \\ &(x-x_M)/(x_N-x_M) = (y-a)/-a; \\ &z_M = kx_M; \\ &z_N = kx_N, \end{aligned} \qquad /6.14/$$

де $-b \le x \le b$, $0 \le y \le a$, $[4r(\sqrt{R^2-b^2} - \frac{R}{2})/R(5R-\sqrt{R^2-b^2})] \le z \le R/2$.

Виключаючи з /6.14/ параметри x_M, x_N, z_M, z_N і k, запишемо рівняння відсіку марсельського склепіння

$$\frac{2(x^2+z^2) + Rz \mp \sqrt{R^2z^2 + 3(x^2+z^2)}}{\pm 2r\sqrt{x^2+z^2} + Rz \mp \sqrt{R^2z^2 + 3(x^2+z^2)}} = (y-a)/-a,$$

де $-b \le x \le b$, $0 \le y \le a$, $\frac{4r(\sqrt{R^2-b^2} - \frac{R}{2})}{R(5R-\sqrt{R^2-b^2})} \le z \le R/2$.

в/ Третій приклад технічного застосування двічі косого циліндроїда – <u>двічі косий гелікоїд</u> – гвинтова лінійчата поверхня, в якої дві напрямні / n^1 і n^2 / гвинтові з різними співвісними базовими циліндрами /різних радіусів і висот/, а отже, і з різним кроком, то напрямна – пряма (n^3) – спільна вісь базових циліндрів.

На рис. 6.40 показано КП відсіку такої поверхні. Тут у напрямної n^1 базовий циліндр з радіусом основи R і висотою H, а у напрямної n^2 – з радіусом основи r і висотою h. Вісь аплікат координатної системи суміщено з напрямною n^3.

Складемо аналітичну модель двічі косого гелікоїда.

Аналітична модель напрямної n^1 – система

$$x = R\cos\left(\frac{2\pi}{H} z\right);$$
$$x^2 + y^2 = R^2;$$

де $-R \le x \le R$, $0 \le y \le R$ і $0 \le z \le H$.

Напрямна n^2 має аналітичне подання, аналогічне:

$$x = r\cos\left(\frac{2\pi}{h} z\right);$$
$$x^2 + y^2 = r^2;$$

де $-r \le x \le r$, $0 \le y \le r$ і $0 \le z \le h$

Твірна $l = (MN)$, де $M \in n^1$ і $N \in n^2$, моделюється системою

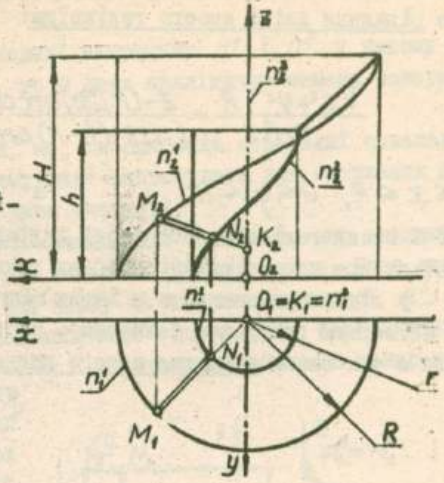


Рис. 6.40

$$(x - x_N)/(x_N - x_M) = (z - z_N)/(z_N - z_M);$$
$$y_M = k x_M;$$
$$y_N = k x_N,$$

де $-R \le x \le R$, $0 \le y \le R$ і $0 \le z \le H$.

Отже, каркас двічі косого гелікоїда моделюється системою /в параметричній формі/

$$(x - x_N)/(x_N - x_M) = (z - z_N)/(z_N - z_M);$$
$$y_M = k x_M;$$
$$y_N = k x_N;$$
$$x_M = R\cos\left(\frac{2\pi}{H} z_M\right);$$
$$x_N = r\cos\left(\frac{2\pi}{h} z_N\right);$$
$$x_M^2 + y_M^2 = R^2; \quad x_N^2 + y_N^2 = r^2; \qquad /6.15/$$

де $-R \le x \le R$, $0 \le y \le R$, $0 \le z \le H$.

Виключаючи з /6.15/ параметри x_N. x_N. y_N. y_N. z_N. z_N і k. дістаємо рівняння двічі косого гелікоїда:

$$\frac{\sqrt{x^2+y^2}-R}{r-R} = \frac{z-(H/2\pi)\arccos(x/\sqrt{x^2+y^2})}{(1/2\pi)(h-H)\arccos(x/\sqrt{x^2+y^2})},$$

де $-R \le x \le R$, $0 \le y \le R$ і $0 \le z \le H$.

Двічі косий гелікоїд /або косий циліндр з трьома напрямними/ застосовується при конструюванні гребних гвинтів у суднобудуванні, пропелерів – у літакобудуванні та в інших галузях машинобудування.

г/ Четвертим прикладом технічного застосування двічі косого циліндроїда є так звана поверхня косого клина. Її матимемо, якщо всі три напрямні /одна з яких – пряма/ розміщені в паралельних площинах. У літакобудуванні вона використовується при конструюванні елементів крила, закрилків і т.п. У розглядуваному випадку /рис. 6.41/ її задано за методом пропорційного поділу хорд /запропонованим С.Б.Рабинським, Київ, КБ О.К.Антонова/. Косий клин тут визначено кривими напрямними n^1 і n^2 і прямою напрямною n^3. Усі площини напрямних перпендикулярні до площини π_1, а n^3 і сама перпендикулярна до π_1.

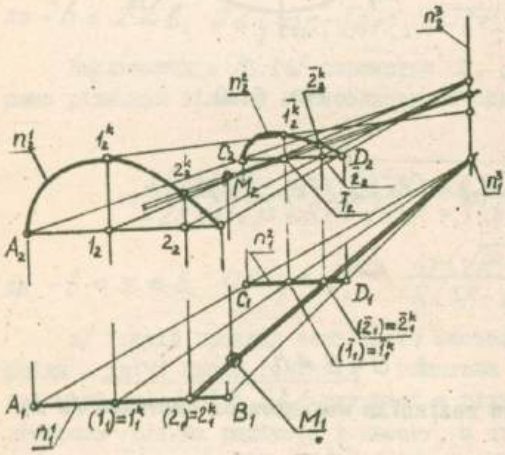


Рис. 6.41

Крім того, площини напрямних n^1 і n^2 паралельні π_2. Пропорційно поділяються хорди $AB \subset n^1$ і $CD \subset n^2$. При цьому домовимося, що з $1 \in [AB]$ випливає $|A1|/|1B| = |C\bar{1}|/|\bar{1}D|$, і, крім того, $|11^k| \ge |\bar{1}\bar{1}^k|$, а криві n^1 і n^2 мають однаковий характер регулярності на дугах AB і CD.

На рис. 6.41 показано побудову M_2 за заданою M_1, якщо M належить косому клину.

Оскільки аналітичні моделі напрямних n^1 і n^2 у даному конкретному випадку не визначені, то й дати аналітичну модель поверхні немає можливості.

Слід зазначити, однак, що, як показали попередні приклади, прийоми, які необхідно в даному разі застосувати для одержання аналітичної моделі поверхні, цілком очевидні.

д/ Прикладом ще однієї клиновидної поверхні, яка знаходить широке застосування в техніці, є поверхня прямого клина. Вона являє собою окремий випадок коноїда, при якому як площина напрямної n^1 /в даному разі - кола/, так і сама напрямна - пряма n^2 перпендикулярні до площини паралелізму $\Sigma = \pi_3$. Домовимося також, що центр кола - напрямної n^1 - точка $O \in \pi_3$.

Отож, на рис. 6.42 маємо КП відсіку прямого клина, що його n^1 - коло радіуса R, n^2 - віддалена від π_1 на H і вісь аплікат $O_2 \equiv O$.

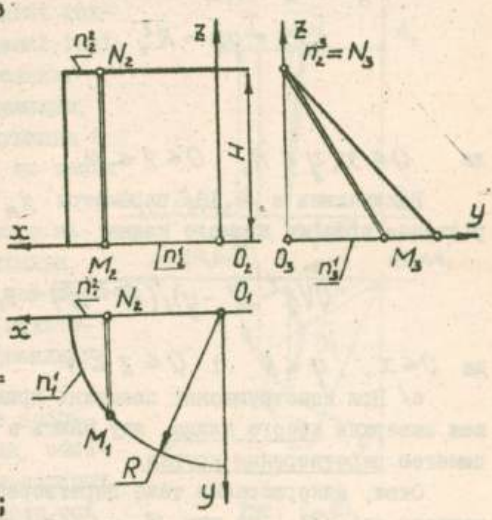


Рис. 6.42

Аналітичну модель відсіку прямого клина дістаємо на основі таких міркувань.

Аналітична модель напрямної n^1: $x^2 + y^2 = R^2$; $z = 0$, де $0 \le x, y \le R$.

Аналітична модель напрямної n^2: $z = H$; $y = 0$ /за умови, що $0 \le x \le R$ /.

Поклавши, що $M \in n^1$ і $N \in n^2$, маємо аналітичну модель твірної MN:

$$(y - y_M)/(y_N - y_N) = (z - z_M)/(z_N - z_M);$$
$$x = x_M = x_N.$$

чи $(y-y_N)/-y_N = z/H$,

$x = x_M = x_N$,

оскільки $y_N = z_M = 0$, $z_N = H$ /крім того, слід зауважити, що для твірної $0 \le x$, $y \le R$ і $0 \le z \le H$/.

Отже, аналітична модель каркаса відсіку поверхні має вигляд

$$(y-y_N)/-y_N = z/H;$$
$$x = x_M = x_N,$$
$$z_N = H;$$
$$x_M^2 + y_M^2 = R^2,$$

/6.16/

де $0 \le x, y \le R$, $0 \le z \le H$

Виключивши з /6.16/ параметри x_M, x_N, y_N, z_N, запишемо рівняння відсіку прямого клина:

$$(\sqrt{R^2-x^2}-y)/(\sqrt{R^2-x^2}) = z/H, \qquad /6.17/$$

де $0 \le x$, $y \le R$ і $0 \le z \le H$.

е/ При конструюванні поверхні крила літака використовується також поверхня косого клина, яку мають з поверхні прямого клина за допомогою перетворення крутки.

Отож, використаємо таке перетворення, яке забезпечує обертання навколо осі Oz на кут $\varphi = (\pi/2H)z$. Неважко уявити, що при цьому точки площини π_1 і осі обертання (Oz) залишаються непорушні, а із збільшенням значень z кут φ зростає.

На рис. 6.43 показано КП відсіку косого клина, який дістали через застосування до відсіку прямого клина перетворення крутки /де $[AA'] \to [\bar{A}A']$ обертається на кут φ /.

Перетворення крутки аналітично записується як окремий випадок лінійного перетворення [26, с. 304-309]:

$$\bar{x} = \cos\left(\frac{2\pi}{H} z\right) x - \sin\left(\frac{2\pi}{H} z\right) y;$$
$$\bar{y} = \sin\left(\frac{2\pi}{H} z\right) x + \cos\left(\frac{2\pi}{H} z\right) y; \quad \bar{z} = z.$$

Застосовуючи його до рівняння /6.17/, запишемо рівняння відсіку косого клина:

$$\frac{\sqrt{R^2 - \left[\cos\left(\frac{2\pi}{H} z\right) x - \sin\left(\frac{2\pi}{H} z\right) y\right]^2} - \sin\left(\frac{2\pi}{H} z\right) x - \cos\left(\frac{2\pi}{H} z\right) y}{\sqrt{R^2 - \left[\cos\left(\frac{2\pi}{H} z\right) x - \sin\left(\frac{2\pi}{H} z\right) y\right]^2}} = z/H,$$

де $0 \le x, y \le R, \quad 0 \le z \le H$

ж/ Крім розглянутої поверхні прямого клина, найрізноманітніші технічні застосування мають і деякі інші окремі випадки поверхонь Каталана. Широко використовується, наприклад, у багатьох галузях машинобудування й будівництва прямий гелікоїд, що також є окремим випадком коноїда.

У прямого гелікоїда одна з напрямних (n^1) - гвинтова циліндра, а друга (n^2) - пряма, що за неї править вісь базового циліндра гвинтової. Площина паралелізму перпендикулярна до цієї осі.

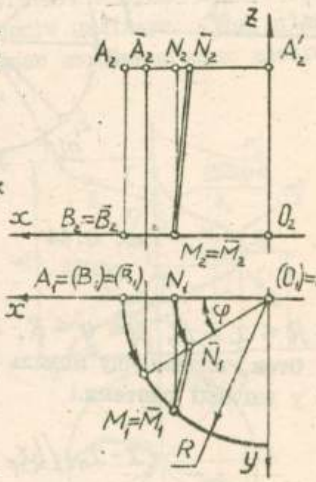


Рис. 6.43

На рис. 6.44,а наочно зображено відсік прямого гелікоїда, обмеженого базовим циліндром при повному оберті твірної-відрізка навколо осі на кут 2π радіан. На рис. 6.44, б показано КП відсіку прямого гелікоїда, обмеженого базовим циліндром радіуса R з висотою H. За вісь базового циліндра править вісь аплікат - Oz, за площину паралелізму - площина проекцій π_1. Відсік одержано при обертанні твірної відрізка MN на кут π радіан.

Показано, як за заданою проекцією A_2 побудувати A_1, якщо точка $A \in \Omega$.

Аналітичну модель поверхні дістаємо так. Напрямна-гвинтова, як відомо, моделюється системою

$$n^1:\ x = R\cos\left(\frac{2\pi}{H} z\right);$$

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

де $-R \le x \le R$, $0 \le y \le R$ і $0 \le z \le H$.

Напрямна-пряма (n^1) – системою $x = 0$; $y = 0$.

Нарешті, твірна-відрізок MN /де $M \in n^1$ і $N \in n^2$ / моделюється системою

$$(x - x_M)/(x_N - x_M) = (y - y_M)/(y_N - y_M);$$

$$z = z_M = z_N,$$

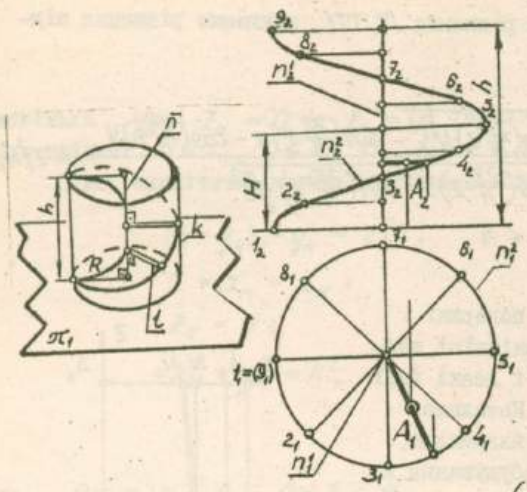


Рис. 6.44

де $-R \le x \le R$, $0 \le y \le R$, $0 \le z \le H$.

Отож, аналітичну модель каркаса відсіку прямого гелікоїда матимемо у вигляді системи

$$(x - x_M)/(x_N - x_M) = (y - y_M)/(y_N - y_M);$$

$$z = z_M = z_N;$$

$$x_M^2 + y_M^2 = R^2;$$

$$x_N = R\cos\left(\frac{2\pi}{H} z_N\right);$$

$$x_N = y_N = 0,$$

/6.18/

де $-R \le x \le R$, $0 \le y \le R$, $0 \le z \le H$.

Виключаємо параметри x_M . x_N . y_M . y_N . z_M . z_N з /6.18/ і записуємо рівняння прямого гелікоїда

$$y = tg\left(\frac{2\pi}{H} z\right) x,$$

де $-R \le x \le R$, $0 \le y \le R$, $0 \le z \le H$.

Оскільки напрямною була права гвинтова, то й матимемо правий прямий гелікоїд.

Поверхні гвинтових драбин, в"їзди до багатоповерхових гаражів-пандуси, елементи поверхонь різьбових деталей – лише короткий перелік застосувань прямого гелікоїда.

з/ Ще один приклад технічного застосування лінійчатої поверхні з напрямною площиною – косий гелікоїд, в якого кривою напрямною (n^1) є гвинтова циліндра, а напрямною прямою (n^2) – вісь базового циліндра. Оскільки напрямна площина в даному разі перпендикулярна до осі базового циліндра, то твірна косого гелікоїда в кожному своєму положенні є паралельною твірній прямого кругового конуса, вісь і основа якого збігаються з віссю і основою базового циліндра. Отож, цілком слушно вважати, що в даному разі напрямною поверхнею щодо косого гелікоїда виступає прямий круговий конус.

На рис. 6.45 зображено КП відсіку косого гелікоїда, обмеженого базовим циліндром з висотою H і радіусом кола основи R. Кут нахилу твірних напрямного конуса до основи становить α.

Нехай висота напрямного конуса $h = |O_2 N_2^0|$. Кожна твірна $(M^i N^i)$ косого гелікоїда /інколи його називають похилим гелікоїдом/ паралельна відповідній твірній $(N^0 T^i)$ напрямного конуса.

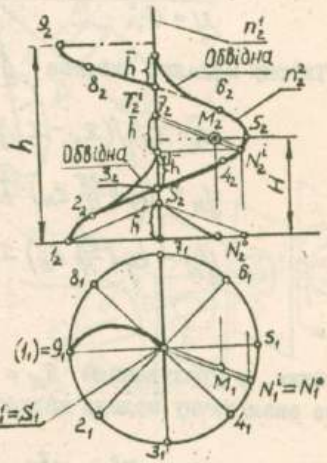


Рис. 6.45

У горизонтальної проекції відсіку – обрис-коло. Фронтальна проекція має складний обрис, що утворюють дуги косинусоїди, – фронтальної проекції гвинтової напрямної, відрізки фронтальної проекції прямої напрямної-осі та дуги обвідної сімей фронтальних проекцій відрізків твірних. Слід зауважити при цьому, що

$$|M_2^{3/2\pi} N_2^{3/2\pi}| = |M_2^{\pi/2} N_2^{\pi/2}| = |N_2^0 O_2| = h.$$

На рис. 6.45 показано побудову M_2 за заданою M_1, якщо $M \in \Omega$. Побудову M_1 за заданою M_2 доцільно виконувати за допомогою горизонтального перерізу каркаса відсіку поверхні, який виконують із застосуванням площини $\Sigma \| \pi_1 \wedge \Sigma \ni M$.

Поверхня косого гелікоїда є елементом поверхні різних різьб, шнеків і т.п.

Аналітичну модель відсіку косого гелікоїда одержуємо за вже неодноразового випробуваною схемою.

Маємо аналітичну модель напрямної-гвинтової:

$$\Pi^1: x^2 + y^2 = R^2;$$

$$x = R\cos\left(\frac{2\pi}{H} z\right), \qquad \text{де } -R \le x, y \le R \text{ і } 0 \le z \le H.$$

Напрямна-пряма моделюється системою

$$\Pi^2: x = 0;$$

$$y = 0, \qquad \text{де } 0 \le z \le H + Rtg\alpha.$$

Твірну моделює система $\ell = (MN)$:

$$(x - x_N)/(x_N - x_M) = (z - z_M)/(z_N - z_M);$$

$$y_M = tg\left(\frac{2\pi}{H} z_N\right) x_M;$$

$$y_N = tg\left(\frac{2\pi}{H} z_N\right) x_N.$$

Отже, з урахуванням $x_N = y_N = 0$ і $z_M - z_N = -Rtg\alpha$, матимемо аналітичну модель каркаса відсіку косого гелікоїда (Ω^K):

$$x_M^2 + y_M^2 = R^2;$$

$$x_M = R\cos\left(\frac{2\pi}{H} z_M\right);$$

$$y_M = tg\left(\frac{2\pi}{H} z_M\right) x_M; \qquad /6.19/$$

$$(x - x_M)/x_M = (z - z_M)/Rtg\alpha,$$

де $-R \le x, y \le R$ і $0 \le z \le H + Rtg\alpha$.

Виключаємо з /6.19/ параметри x_M, y_M і дістаємо рівняння відсіку косого гелікоїда:

$$\frac{R\cos\left(\frac{2\pi}{H}\right)-x}{\cos\left(\frac{2\pi}{H}z\right)} = \frac{z-\frac{H}{2\pi}\operatorname{arctg}(y/x)}{tg\alpha},$$

де $-R \le x, y \le R$ і $0 \le z \le H+Rtg\alpha$.

Б. КП циклічних поверхонь

I. Циклічні поверхні загального виду. Кінематична поверхня, що являє собою неперервну множину окремих положень кола, яке рухається і має постійний або змінний радіус, називається циклічною. Звідси випливає, що будь-яка поверхня, яка несе на собі однопараметричну неперервну множину кіл постійного або змінного радіуса, є циклічною.

Способи конструювання циклічних поверхонь можуть бути найрізноманітнішими.

Нехай, наприклад /рис. 6.46, а/ три лінії k, $\bar{k}$ і $\bar{\bar{k}}$ /кожна з них, зокрема, може бути і прямою/ мають перетини з кожною з площин пучка $\{\alpha^i\}$ носієм якого є пряма $t \subset \alpha^i$.

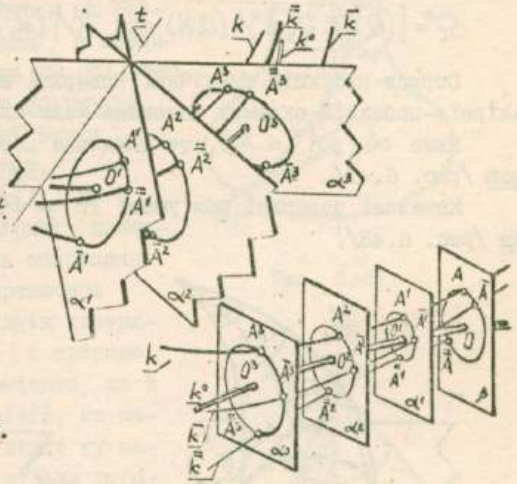


Рис. 6.46

Будь-який з цих перетинів являє собою три точки / A^i, $\bar{A}^i$, $\bar{\bar{A}}^i$ /, що визначають коло радіуса R^i. Множина $\{R^i\}$, яка сконструйована таким чином, - циклічна поверхня.

Циклічну поверхню маємо і тоді, коли t^∞, тобто, коли площини α^i паралельні між собою /рис. 6.46, б/. Напрям площин у цьому останньому випадку визначений заданням допоміжної площини β - площини паралелізму.

Якщо k, $\bar{k}$ і $\bar{\bar{k}}$ - незакономірні криві, то природно, що і лінія центрів k^o, яку визначає множина $\{O^i\}$ центрів кіл-твірних, - також незакономірна. Крім того, можлива незакономірна зміна

при цьому й кута між площиною кола-твірної і лінією центрів: $\angle(A^i\bar{A}^i\bar{A}^i), k^o$.

Визначник циклічної поверхні при такому способі її задання має такий вигляд:

$$\Omega^o = \{(O,R):(O,R) \supset A,\bar{A},\bar{\bar{A}} \wedge (O,R) \subset \alpha \wedge \alpha \supset$$
$$\supset t \wedge A = \alpha \cap k \wedge \bar{A} = \alpha \cap \bar{k} \wedge \bar{\bar{A}} = \alpha \cap \bar{\bar{k}} \wedge k, \bar{k}, \bar{\bar{k}} \neq \alpha\}.$$

Для машинобудівельної практики більш зручним вважається інший спосіб задання циклічної поверхні.

Нехай k^o - лінія центрів /закономірна чи незакономірна/, $\angle\alpha, k^o$ - кут між площиною кола-твірної /з центром O/ і лінією центрів, а $R = R(k^o)$- закон зміни радіуса кола-твірної.

Циклічна поверхня, яку задано в такий спосіб, має вже інший визначник:

$$\Omega^o = \{(O,R): O \in k^o \wedge (O,R) \subset \alpha \wedge (\alpha, \hat{k}^o) = const \wedge R(k^o)\}.$$

Обриси проекцій циклічної поверхні складаються з обвідних сім"ї еліпсів-проекцій окремих положень кола-твірної.

Якщо $\alpha \perp k^o = \pi/2$, то циклічна поверхня називається <u>каналовою</u> /рис. 6.47/.

Каналові поверхні при умові $R = const$ називаються <u>трубчастими</u> /рис. 6.48/.

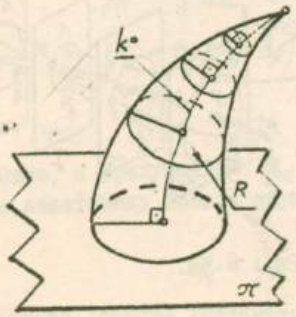


Рис. 6.47

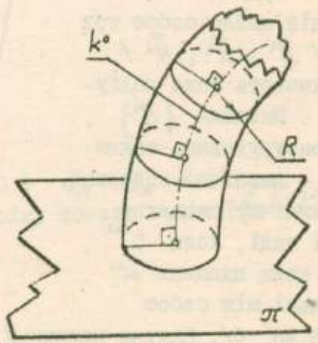


Рис. 6.48

Особливо широко поширені в машинобудуванні каналові поверхні з k^0-прямою. Легко помітити, що їх можна тлумачити як поверхні обертання. Справді, якщо k^0 - пряма, то окреме положення твірної /кола-твірної з центром O^i / можна розглядати як траєкторію обертання точки M^i цього кола навколо осі $(JJ) = k^0$.

Візьмемо на кожному колі-твірній окремого положення точку (M^i). Тоді точки $\{M^i\}$ визначають лінію (ℓ), яку можна розглядати як твірну даної циклічної поверхні, оскільки можна припустити, що кожна точка такої лінії описує коло, обертаючись навколо $(JJ) = k^0$ /рис. 6.49/.

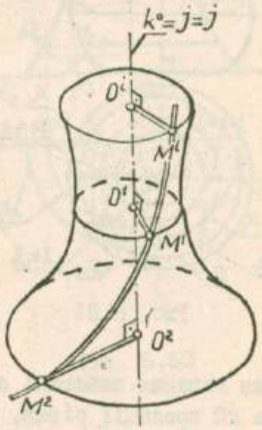


Рис. 6.49

Розглянемо КП таких циклічних поверхонь.

2. <u>КП поверхонь обертання загального виду</u>. б/ Кінематична поверхня, в якої твірна рухається так, що кожна її точка описує траєкторію-коло з центром на фіксованій прямій /вісь обертання/, а площина цього кола перпендикулярна до осі обертання, називається <u>поверхнею обертання</u>.

Траєкторії /кола/ кожної точки твірної називаються <u>паралелями</u>.

Нехай вісь обертання $(JJ) \perp \pi_1$. Дуга-відсік $AB \subset \ell$ - твірної, площина якої проходить через вісь обертання (JJ) - <u>осьова площина</u>, обертаючись навколо (JJ), утворює відсік поверхні обертання з віссю (JJ) і твірною AB /рис. 6.50/. Легко помітити, що й будь-яка дуга (CD) іншої лінії, що належить поверхні обертання, опише ту саму поверхню обертання, аби тільки перетинала всі її паралелі.

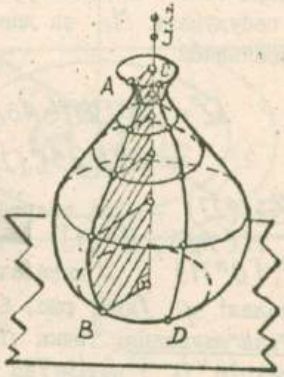


Рис. 6.50

Твірні, які належать осьовим площинам, називаються <u>меридіанами</u>. Меридіан, що належить фронтальній площині, називається <u>фронтальним</u> /<u>головним</u>/.

Будь-який меридіан - геодезична лінія поверхні обертання /тобто лінія найкоротшої відстані між точками на поверхні/.

Фронтальна проекція m_2^f фронтального меридіана (m^f) виявляється <u>обрисом фронтальної проекції</u> /рис. 6.5І/ поверхні обертання, а горизонтальні проекції / ε_1 і g_1 / екватора / ε – паралелі найбільшого радіуса/ і <u>горла</u> / g – паралелі найменшого радіуса/ – <u>обрисом горизонтальної проекції</u> поверхні обертання /з горизонтально проеціюючою віссю обертання/.

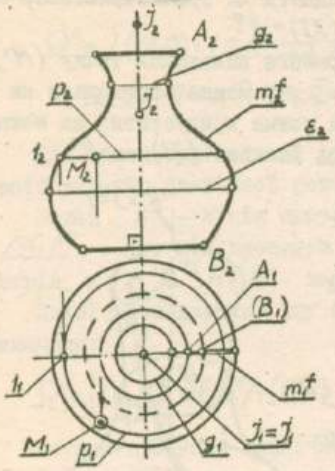


Рис. 6.5І

Слід зазначити, що так буде тільки в тому випадку, коли AB не перетинає (JJ), тобто у випадку <u>відкритої</u> поверхні обертання. У разі <u>закритої</u> поверхні обертання горла і його проекції не існує.

Сукупність меридіанів і паралелей – сітка ліній на поверхні обертання. Особливість цієї сітки – <u>ортогональність</u>, оскільки меридіани і паралелі взаємно перпендикулярні.

Для задання поверхні обертання на КП зовсім не обов"язково задавати на КП проекції сітки. Достатньо обмежитись заданням на КП визначника поверхні обертання.

Переконаємося в цьому, перевіривши розв"язність вже відомої задачі: побудувати M_1 за даною M_2, якщо $M \in \Omega$, а поверхню задано визначником

$$\Omega^o = \{AB : \forall M \in AB \wedge M \in (O^M, [O^M M]) \wedge (O^M, [O^M M]) \subset$$
$$\subset \alpha^M \wedge \alpha^M \perp (JJ) \wedge O^M \in (JJ)\}$$

Тут (JJ) – вісь обертання, AB – твірна, O^M – центр обертання точки $M \in AB$, $[O^M M]$ – радіус обертання точки M, $p = (O^M, [O^M M])$ – паралель, що її описує точка M, α^M – площина паралелі p /див. рис. 6.5І/.

<u>Розв"язування</u>. Точка $M \in p$, а точка $1 = p \cap AB$. Знаходимо проекцію 1_2, потім /за лінією проекційного зв"язку/ – 1_1 і далі будуємо горизонтальну проекцію паралелі (p_1), радіус якої – $1_1 = J_1$, а центр – $J_1 = J_1$. На p_1 матимемо точку M_1.

б/ Аналітичне подання поверхні обертання загального виду. Нехай точка $M \in \Omega$ - відсіку поверхні обертання загального виду. Її координати в прямокутній системі $Oxyz$, де $xOy = \pi_1$, а $z \perp \pi_1$ /рис.6.52/ позначимо x, y і z. Якщо фронтальний меридіан $AB\,(mf)$ відсіку Ω має аналітичну модель $\bar{x} = f(z)$; $y = 0$, де $0 \le x \le R^{\varepsilon}$, $0 \le z \le h$, а R - змінний радіус змінної паралелі (p) довільної точки $M \in \Omega$, то ясно, що в аналітичній моделі меридіана $\bar{x} = R$, а отже, $R = f(z)$ і тому координати кожної точки відсіку /і, звичайно, M / задовольняють /за ΔCM_1O / рівняння

$$x^2 + y^2 = [f(z)]^2, \qquad /6.20/$$

де $-R^{\varepsilon} \le x, y \le R^{\varepsilon}$, $0 \le z \le h$ і

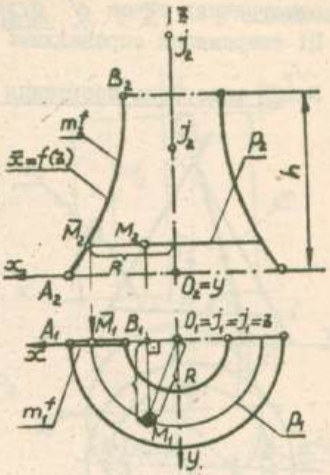


Рис. 6.52

Коли меридіан-твірна $x = f(z)$ - алгебраїчна крива n-го порядку, її обертання навколо довільної осі дозволяє дістати поверхню обертання з порядком $2n$ Справді, твірна ℓ n-го порядку перетинає площину $\Gamma \perp (JJ)$ в n точках N /рис. 6.53/. Кожна з таких точок в площині Γ описує коло, яких усього n. Отже, довільна пряма перетинає ці кола в $2n$ точках T /а тому й одержану поверхню обертання - в $2n$ точках/, тобто є поверхнею $2n$ порядку.

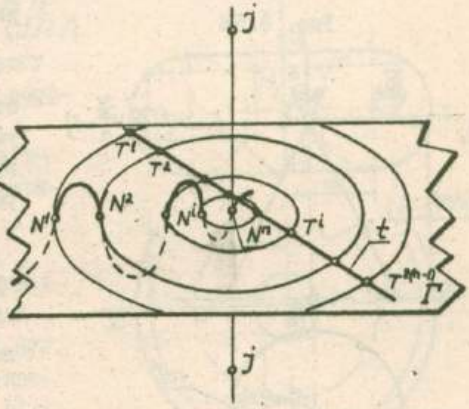


Рис. 6.53

Легко зрозуміти, що коли вісь обертання $(JJ) \subset \Sigma$ - площині симетрії твірної ℓ, то порядок одержаної поверхні обертання залишиться таким, як і порядок твірної, оскільки в цьому випадку кожна пара симетричних точок N буде описувати одне коло.

Ці твердження справедливі і у випадку просторової твірної.

3. КП поверхонь обертання окремого виду. а/ Твірна-пряма.

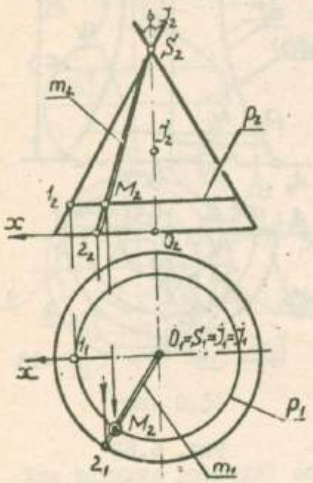


Рис. 6.54

Випадок I. Нехай твірна-пряма перетинає вісь обертання $\ell \cap (JJ) = S$. Здобута поверхня обертання (Ω) при цьому - прямий круговий конус з вершиною в точці S.

На відстані h від площини π_1 проведемо горизонтальну площину $\Sigma \ni S$. Якщо площина проекцій π_1 перетинає прямий круговий конус по колу радіуса R, то відсік Ω між площинами π_1 і Σ має КП, який показано на рис. 6.54.

Тут дано також розв"язок задачі про побудову проекції M_1 за даною M_2, якщо $M \in \Omega$ двома способами: за допомогою паралелі (ρ) і твірної-меридіана $/\ \ell = m\ /$.

Взявши, що $(JJ) = (Oz)$ і $\pi_1 = (xOy)$, матимемо в системі координат $Oxyz$ /її поля умовно зміщено; рис. 6.55/ аналітичну модель фронтального меридіана-твірної $/\ \ell = m^f\ /$ у вигляді системи

$$\bar{x}/R + z/h = 1 \quad /\text{пряма у відрізках/}$$

або $f(z) = \bar{x} = R - (R/h)z$.

Отже, рівняння поверхні обертання у випадку прямого кругового конуса набуває вигляду

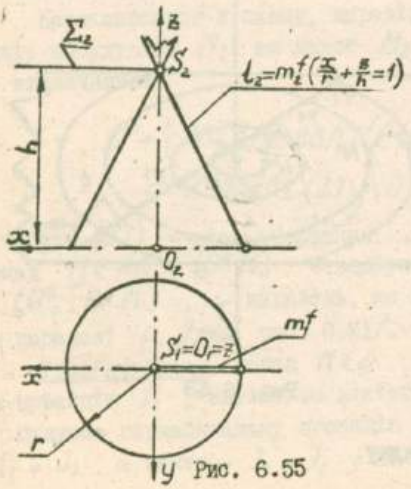


Рис. 6.55

$$x^2+y^2=(R^2/h^2)(z-h)^2.$$

де $-\infty \le x, y, z \le +\infty$,
а відсіку, одержаного за допомогою площин π_1 і Σ - з обмеженнями, де $-R \le x, y \le R$ і $0 \le z \le h$.

Випадок 2. Коли $\ell \parallel (JJ)$, дістаємо прямий круговий циліндр /рис. 6.56/.

Якщо відстань між ℓ і (JJ) дорівнює R, а $z = (JJ)$ і $xOy = \pi_1$, рівняння прямого кругового циліндра запишемо так:

$$x^2+y^2=R^2.$$

де $-R \le x, y \le R$ і $-\infty < z < +\infty$, а рівняння відсіку, яке можна дістати за допомогою площин π_1 і $\Sigma (\Sigma \parallel \pi_1)$ /де у Σ відстань від π_1 дорівнює h /-

$$x^2+y^2=R^2,$$

де $-R \le x, y \le R$ і $0 \le z \le h$.

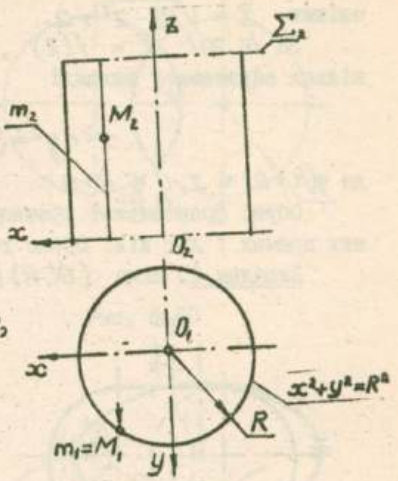


Рис. 6.56

Випадок 3. Твірна $\ell \doteq (JJ) \wedge \wedge \ell \not\perp (JJ)$. При цьому маємо однополий гіперболоїд обертання.

б/ Твірна-коло. Якщо твірна - коло, то одержувані поверхні обертання - торові.

Випадок I. Твірна-коло $(O',R) \perp (JJ)$. У цьому випадку центр кола O' віддалений від (JJ) на $a > R$ /рис.6.57/. Здобута торова поверхня називається відкритим тором, або кільцем. На рис. 6.57 показано побудову M_1 за даною M_2, якщо $M \in \Omega$ (Ω - кільце).

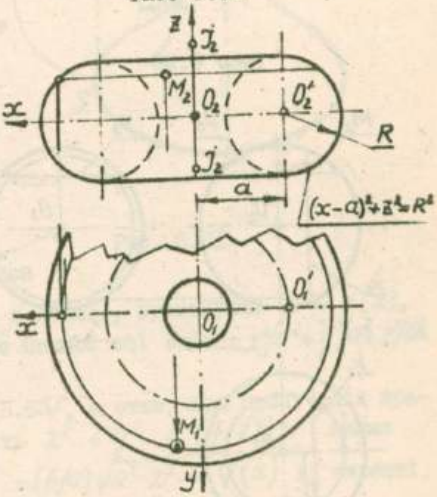


Рис. 6.57

Аналітичну модель кільця матимемо з таких міркувань. Аналітична модель кола-твірної $(O', R) \subset xOz$:

$$(\bar{x}-a)^2+z^2=R^2;$$
$$y=0,$$

звідки $\bar{x}=\sqrt{R^2-z^2}+a$.

За /6.20/ $\bar{x}=f(z)$, а отже, рівняння торової поверхні-кільця запишемо у вигляді

$$x^2+y^2=(\sqrt{R^2-z^2}+a)^2, \qquad /6.21/$$

де $-(R+a) \le x, y \le R+a$ і $-R \le z \le R$

Обрис фронтальної проекції складається з відрізків горизонтальних прямих і дуг кіл. Обрис горизонтальної – два концентричних кола.

Випадок 2. Якщо $(O', R) \cap (JJ)$, а $0<a\le R$. У цьому випадку торова поверхня має назву закритого тора, або бочки /рис. 6.58 – дано тільки фронтальну проекцію/.

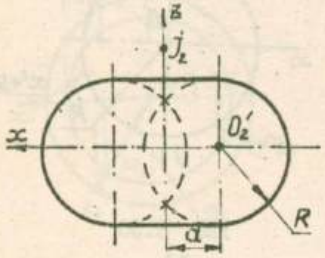


Рис. 6.58

Випадок 3. Нехай знов-таки $(O', R) \cap (JJ)$, а $a=0$. Тоді рівняння /6.21/ набуде вигляду

$$x^2+y^2+z^2=R^2,$$

тобто одержуємо звичайну сферу /рис. 6.59/. Там же показано побудову M_1 і M_3 за даною M_2, коли $M \in \Omega$ – сфері /в одному випадку проекцію M_3 побудовано за допомогою паралелі (p), а в другому – за допомогою кола (k) на сфері, що його площина профільна/.

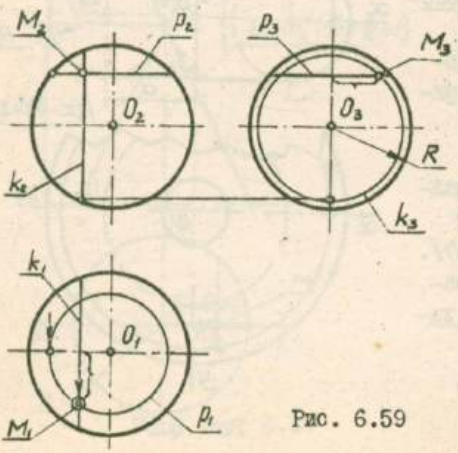


Рис. 6.59

Випадок 4. Нарешті, якщо $-R<a<0$, то дістаємо торову поверхню, що має назву веретено /на рис. 6.60 дано лише фронтальну проекцію/.

Діаметр твірної-кола відкритого тора-кільця, що паралельний осі обертання, пере-

тинає це коло в полюсах: північному (N) і південному (S). Паралелі точок N і S – полярні.

Частина поверхні кільця, обмежена полярними паралелями, і якій належить горло /не екватор/, називається глобоїдом /рис. 6.61/.

До глобоїдів відносять також горловиді поверхні обертання, що площини їх твірних /дуг кіл/ не проходять через вісь обертання. Глобоїди застосовуються в глобоїдних зубчастих передачах.

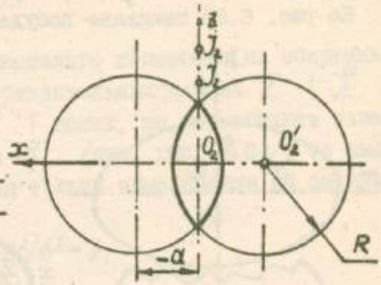


Рис. 6.60

в/ Твірна-крива другого порядку /коніка/. Як і поверхні обертання будь-якого іншого виду, поверхні обертання з твірною-кривою другого порядку широко застосовуються в техніці.

Згідно із загальною властивістю поверхонь обертання з твірною – алгебраїчною кривою, обертання конік дає поверхні-квадрики.

Розглянемо поверхні обертання з твірними – еліпсом, гіперболою й параболою.

Еліпсоїд обертання дістаємо, якщо еліпс $\bar{x}^2/a^2+z^2/b^2=1$; $y=0$ /розміщений в площині π_2 / обертається:

навколо осі $JJ = Oz$ /рис. 6.62/, причому з рівняння еліпса випливає, що $\bar{x} = (a/b)\sqrt{b^2-z^2}$, а з /6.21/, враховуючи $\bar{x} = f(x)$, рівняння еліпсоїда обертання навколо меншої осі еліпса $x^2/a^2+y^2/a^2+z^2/b^2 = 1$, де $-a \le x, y, -b \le z \le b$;

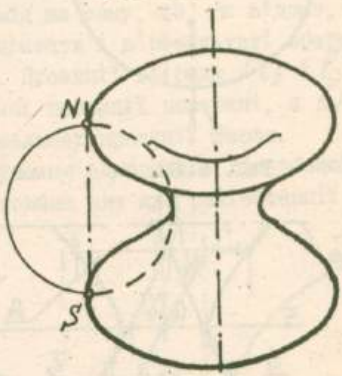


Рис. 6.61

навколо осі $JJ = Ox$ /рис. 6.63/, а отже, при цьому слід враховувати вже $\bar{z} = \varphi(x)$ і, замість $x^2 + y^2 = [f(z)]^2$ маємо вже $y^2+z^2 = [\varphi(x)]^2$. Отже, $\bar{z} = (b/a)\sqrt{a^2-x^2} = \varphi(x)$ і, нарешті, маємо рівняння еліпсоїда обертання навколо більшої осі еліпса

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/b^2 = 1,$$

де $-a \le x \le a$, $-b \le y, z \le b$

На рис. 6.63 показано побудову M_3 за даною M_2.

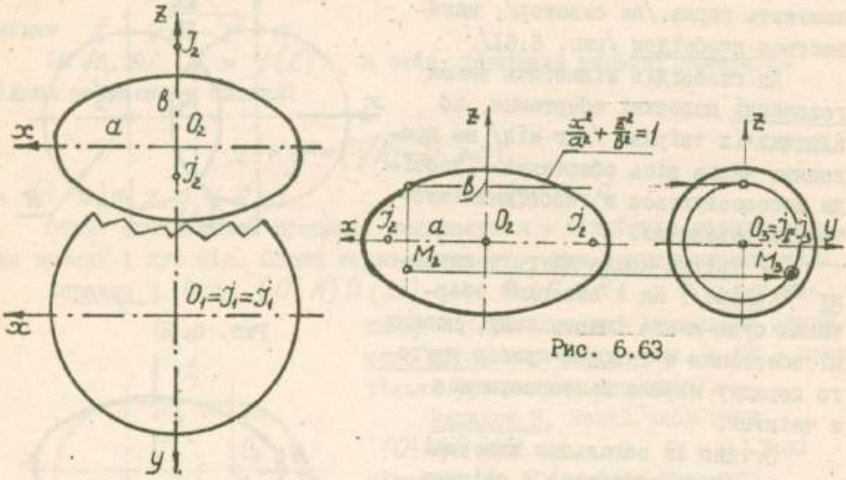


Рис. 6.63

Рис. 6.62

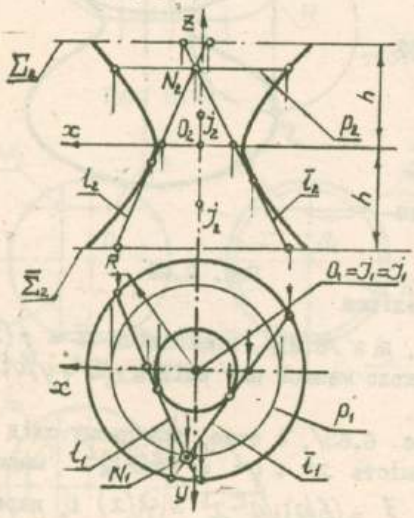


Рис. 6.64

Гіперболоїд обертання однополий дістаємо, якщо вісь обертання (JJ) суміщена з уявною віссю гіперболи-твірної /рис. 6.64/. Нехай аналітична модель гіперболи-твірної /яка належить фронтальній площині проекцій/

$$\bar{x}^2/a^2 - z^2/b^2 = 1;$$
$$y = 0$$

й $(JJ) = (Oz)$. Тоді

$$f(z) = \bar{x} = (a/b)\sqrt{b^2+z^2}$$

і, отже, згідно з /6.21/

виражає аналітичне зображення однополого гіперболоїда обертання:

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/b^2 = 1,$$

де $-\infty < x, y, z < +\infty$.

Якщо розглядається відсік однополого гіперболоїда обертання, який одержуємо за допомогою двох горизонтальних площин Σ і $\bar{\Sigma}$, віддалених від π_1 на відстань в h і таких, що перетинають поверхню кожна відповідно по колу радіуса R /див. рис. 6.64/, то аналітична модель відсіку відрізняється тільки обмеженнями на змінні:

$$x^2/a^2 + y^2/a^2 - z^2/b^2 = 1,$$

де $-R \leq x, y \leq R$, $-h \leq z \leq h$.

На рис. 6.64 показано і побудову проекції N_1 за даною N_2. Вона виконана двома способами: за допомогою паралелі (ρ) і прямолінійної твірної (ℓ). Останній грунтується на тому, що, як відомо, однополий гіперболоїд обертання можна дістати і в результаті обертання прямолінійної твірної $\ell (\ell \perp (JJ))$. Проекції твірних $/\ell_2$ і $\bar{\ell}_2/$ - дотичні до обрису-гіперболи фронтальної проекції поверхні, а ℓ_1 і $\bar{\ell}_1$ - дотичні до обрису-кола горизонтальної проекції горла.

Широко відомим прикладом застосування однополого гіперболоїда обертання є башта В.Г.Шухова, спроектована ним для радіостанції "Комінтерн". Ця економічна, міцна і жорстка конструкція використовується як опалубка з різного виду залізобетонних башт.

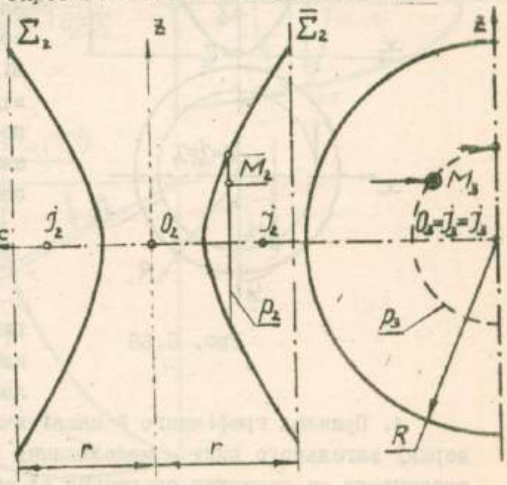


Рис. 6.65

Гіперболоїд обертання двополий. Цю поверхню отримаємо, якщо вісь обертання JJ суміщена з дійсною віссю гіперболи-твірної /рис. 6.65; показано фронтальну і профільну проекції/.

Нехай $(x^2/a^2) - (z^2/b^2) = 1$; $y = 0$ - аналітична модель твірної $\ell \subset xOz$ й $(JJ) = (Ox)$. Тоді маємо

$\bar{z} = (b/a)\sqrt{x^2-a^2} = \varphi(x)$, а отже, згідно з /6.21/, $y^2 + z^2 = (b^2/a^2) \times (x^2-a^2)$, або $y^2/b^2 + z^2/b^2 - x^2/a^2 = -1$, де $-\infty < x \le -a$, $a \le x < \infty$, $-\infty < y, z < \infty$.

Для відсіку двополого гіперболоїда обертання, який одержано за допомогою двох профільних площин Σ і $\bar{\Sigma}$, які віддалені від координатної площини yOz на однакову відстань r і перетинають Σ і $\bar{\Sigma}$ по колах радіуса R, дістаємо вже інші обмеження змінних:

$$-r \le x \le -a, \quad a \le x \le r \quad \text{і} \quad -R \le y, z \le R$$

На рис. 6.65 показано побудову M_3 за даною проекцією M_2 /якщо $M \in \Omega$ / з використанням паралелі p.

Параболоїд обертання. Поверхню одержуємо, обертаючи параболу-твірну навколо її осі. Отож, нехай $\bar{x}^2 = 2pz$; $y = 0$ – аналітична модель твірної ℓ, а $(JJ) = (Oz)$ /рис. 6.66/.

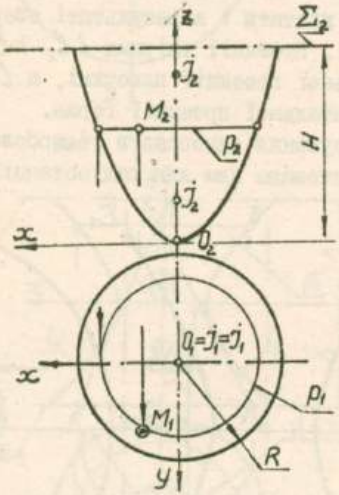


Рис. 6.66

Тоді $\bar{x} = \sqrt{2pz} = f(z)$ і, враховуючи /6.21/, запишемо рівняння параболоїда обертання $x^2 + y^2 = 2pz$, де $-\infty < x, y < \infty$ і $0 \le z < \infty$.

Відсік параболоїда обертання, здобутий за допомогою горизонтальної площини Σ, яка віддалена від площини xOy на відстань H і перетинає поверхню по колу радіуса R, має таку саму аналітичну модель, але з іншими обмеженнями:

$$-R \le x, y \le R, \quad 0 \le z \le H$$

Параболоїд обертання широко використовується в різних технічних конструкціях, зокрема в радіолокаційних і світлотехнічних.

4. Приклад графічного й аналітичного моделювання циклічної поверхні загального виду – моделювання роговидої поверхні, яку можна трактувати як поверхню обертання зі змінною твірною.

Уявимо, що коло $(x-a)^2 + z^2 = R^2(\varphi)$; $y = 0$ є твірною ℓ поверхні обертання з віссю обертання $JJ = Oz$. Траєкторія центра кола твірної (O') – коло $x^2 + y^2 = a^2$; $z = 0$ /рис. 6.67/. Нехай за оберт на кут $\varphi = \pi/2$ зміна радіуса кола-твірної відповідає умові $0 \le R(\varphi) \le R$, тобто $R(\varphi) \to 0$, як тільки $O' \to \bar{O}^0$. Тоді слушно вважати, що функція $R(\varphi)$ має вигляд $R(\varphi) = R\cos\varphi$. Оскільки в даному випадку $\bar{x} = f(z) = \sqrt{R^2\cos^2\varphi - z^2} + a$, то з урахуванням параметра φ аналітична модель каркаса циліндричної поверхні обертання набуває вигляду системи

$$x^2 + y^2 = (\sqrt{R^2\cos^2\varphi - z^2} + a)^2; \qquad /6.22/$$
$$y = tg\,\varphi\, x,$$

де $0 \le x \le a + R$, $0 \le y \le a + R\cos\varphi$ і $-R \le z \le R$, а друге рівняння – рівняння осьової площини твірної $/\Sigma \supset \ell$ – твірна змінного радіуса/.

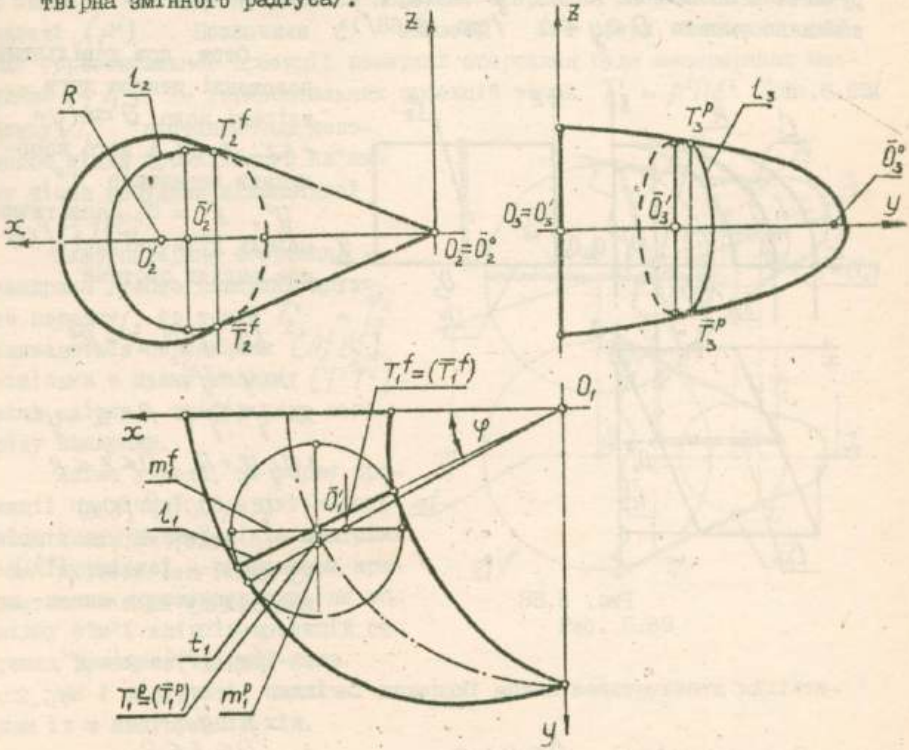


Рис. 6.67

Виключаючи з /6.22/ параметр φ, записуємо рівняння роговидної циклічної поверхні:

$$x^2+y^2=\left(\sqrt{R^2\cos^2(\operatorname{arctg} y/x)-z^2}+a\right)^2,$$

де $0\le x\le a+R$, $0\le y\le a+R\cos(\operatorname{arctg} y/x)$ і $-R\le z\le R$.

Слід зазначити, що як фронтальна, так і профільна проекції роговидої поверхні мають обриси, що будуються за даними рекомендаціями. При цьому використовуються фронтальний і профільний меридіани /m^f і m^p/ дотичних сфер, вписаних у роговидну поверхню.

Ще одним прикладом графічного /на КП/ і аналітичного моделювання циклічної поверхні загального виду може бути моделювання відсіку циклічної поверхні, який дістаємо при переміщенні чверті кола твірної (l^i), площина якого фронтальна, радіус дорівнює R, центр O' рухається по прямій (k^o): $y=kx$; $z=0$. Домовимося, що рух O' обмежено умовою $0\le y\le a$ /рис. 6.68/.

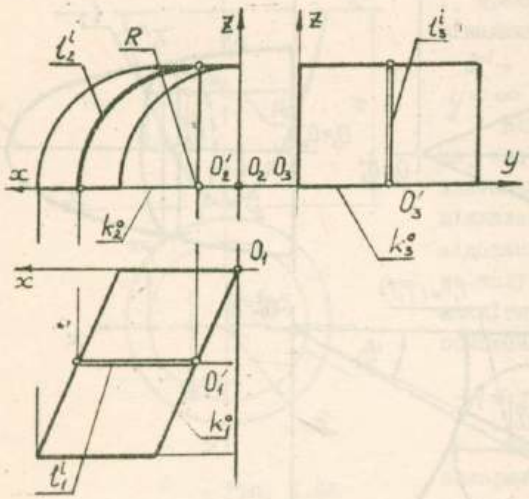


Рис. 6.68

Отож, при довільному положенні центра дуги - твірної кола $O'\subset(y=kx;\ z=0)$, а його координати позначено x^o, y^o, $z^o=0$, аналітична модель дуги-твірної (l^i) має вигляд системи

$$(x-x^o)^2+z^2=R^2,$$
$$y=y^o,$$

де $y^o\operatorname{ctg}\varphi-R\le x\le y^o\operatorname{ctg}\varphi+R$, $0\le z\le R$ і $\varphi=(00')\hat{}(0x)$.

Отже, каркас відсіку циклічної поверхні має аналітичну модель-систему

$$(x-x^o)^2+z^2=R^2,$$
$$y=y^o, \qquad /6.23/$$

де $0\le x\le a\operatorname{ctg}\varphi$, $0\le y\le a$ і $0\le z\le R$.

Виключаючи з /6.23/ параметри x^0 і y^0, запишемо рівняння відсіку циклічної поверхні

$$(x - ctg\varphi \cdot y)^2 + z^2 = R^2,$$

де $0 \le x \le a\,ctg\varphi$, $0 \le y \le a$, $0 \le z \le R$ і $tg\varphi = y_0/x_0 = k$.

5. Побудова обрису проекції поверхні обертання. Побудова обрису проекцій поверхні обертання не викликає труднощів, якщо вісь обертання є проеціюючою. Розглянемо випадок, коли вісь обертання - пряма рівня. Нехай $(\Pi) \parallel \pi_2$, тобто вісь обертання - фронталь. Тоді обрисом фронтальної проекції поверхні обертання є фронтальна проекція (m_2^f) фронтального меридіана (m^f).

Для побудови обрису горизонтальної проекції побудуємо кілька сфер $\{O^i, R^i\}$ так, що їх центри будуть розміщені на осі обертання і кожна з них буде дотикатися поверхні обертання по відповідній паралелі (ρ^i). Позначимо $\mathcal{E}^i$ екватор i-ї сфери. Очевидно, обрис горизонтальної проекції поверхні обертання буде неперервною множиною $\{T_1^i\}$ - горизонтальних проекцій точок $T^i = \rho^i \cap \mathcal{E}^i$ /рис.6.69/. Кожну T_1^i дістанемо за допомогою ліній проекційного зв"язку після побудови відповідної $T_2^i = \rho_2^i \cap \mathcal{E}_2^i$.

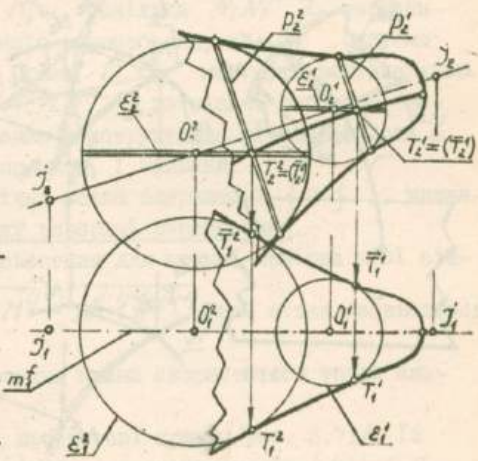


Рис. 6.69

Якщо поверхня обертання - квадрика /тобто поверхня другого порядку/, то точки $T_2^i = \overline{T}_2^i$ виявляються серединами $[A_2^i B_2^i]$, оскільки в цьому випадку $[T^i \overline{T}^i]$ - вісь еліпса - профільного перерізу квадрики.

Легко уявити, що обрис проекції циклічної поверхні загального виду, в якої лінія центрів (k^0) твірної - просторова крива, можна одержувати лише як обвідну сім"ї еліпсів-проекцій окремих положень твірної-кола.

Як і лінійчаті, циклічні поверхні можна конструювати виділенням їх з конгруенцій кіл.

В. КП поверхонь з твірною загального виду

Раніше розглядалися КП кінематичних поверхонь - лінійчатих і циклічних. У першому випадку твірною була пряма, в другому - коло. Але виявилося, що вже у випадку циклічних поверхонь їх частинний випадок - поверхні обертання - можна трактувати як кінематичні поверхні з твірною загального виду. Наприклад, було розглянуто поверхні з твірними: еліпсом, гіперболою і параболою. До поверхонь з твірною загального виду можна віднести кінематичні поверхні, форма твірної в яких залишається постійною або змінюється.

I. КП кінематичних поверхонь з твірною загального виду постійної форми. Почнемо з найпростішої з таких поверхонь - поверхні перенесення.

а/ Поверхнею перенесення називається неперервна множина окремих положень твірної, рух кожної точки якої визначається одним і тим самим вектором - вектором перенесення. Один кінець його - фіксована точка перетину твірної з напрямною, а другий - кожне окреме положення цієї точки при переміщенні її по напрямній.

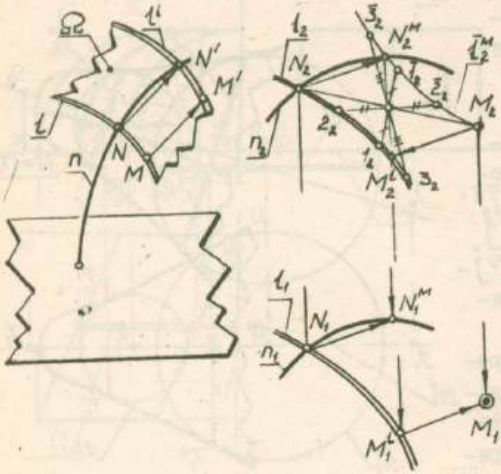


Рис. 6.70

Щоб задати на КП поверхню перенесення, досить задати на КП твірну (ℓ) і напрямну (n), які перетинаються в точці N. Отже, визначник поверхні перенесення /рис. 6.70, а/ має вигляд

$$\Omega^{\circ} = \{\ell : \forall M \in \ell \wedge N = \ell \cap n \wedge N^i = \ell^i \cap n \wedge M^i \in \ell^i \wedge \overrightarrow{MM^i} = \overrightarrow{NN^i}\},$$

де ℓ^i - окреме положення ℓ, а $\overrightarrow{NN^i}$ - вектор перенесення.

Нехай на КП задано твірну $\ell(\ell_1, \ell_2)$ і напрямну $n(n_1, n_2)$ /рис. 6.70, б/ так, що $N = n \cap \ell$. Тоді поверхні перенесення

Перевіримо, чи задано в такому разі на КП поверхню перенесення (Ω). Для цього досить, як завжди, переконатися в тому, що розв"я-

зується така задача: побудувати проекцію M_1 за заданою M_2 точки $M \in \Omega$.

Розв"язання. Очевидно, точка M – вершина паралелограма $MM^{\ell}N^{\Pi}N$, який одержано в результаті паралельного перенесення твірної ℓ в окреме положення $\ell^{\Pi} \ni M$. При цьому вершина $N^{\Pi} = \ell^{\Pi} \cap \Pi$ – результат паралельного перенесення точки N, а M^{ℓ} – прообраз точки M на ℓ. Помічаємо, що вершини N і M, N^{Π} і M^{ℓ} – центрально-симетричні відносно O – точки перетину діагоналей паралелограма $MM^{\ell}NN^{\Pi}$. Оскільки при паралельному проеціюванні властивості центральної симетричності зберігаються, то і O_2 /середина $[M_2N_2]$/ – центр симетрії для точок M_2 і N_2, M_2^{ℓ} і N_2^{Π}. Щоб побудувати N_2^{Π} як симетричну до M_2^{ℓ} відповідно O_2, побудуємо криву ℓ_2^{Π} як центрально-симетричну до кривої ℓ_2 відносно O_2 *. Для цього спочатку одержуємо точки 1_2, $\bar{2}_2$ і $\bar{3}_2$ як центрально-симетричні довільним точкам 1_2, 2_2, $3_2 \in \ell_2$ відносно O_2. Точка $N_2^{\Pi} = \ell_2^{\Pi} \cap n_2$. Точки N_2 і N_2^{Π} визначають фронтальну проекцію вектора перенесення $(\overrightarrow{N_2N_2^{\Pi}})$ кривої $\ell \to \ell^{\Pi}$. Отже, фронтальну проекцію точки прообразу M^{ℓ} /точку M_2^{ℓ}/ дістаємо за допомогою $(M_2M_2^{\ell}) \parallel \overrightarrow{N_2N_2^{\Pi}} : M_2^{\ell} = (M_2M_2^{\ell}) \cap \ell_2$. Використовуючи лінії проекційного зв"язку, знаходимо точки N_1^{Π} і M_1^{ℓ}. Оскільки $\overrightarrow{N_1N_1^{\Pi}}$ – горизонтальна проекція вектора паралельного перенесення, то M_1 будуємо за допомогою $\overrightarrow{M_1^{\ell}M_1} = \overrightarrow{N_1N_1^{\Pi}}$. Пряма M_1M_2 має бути вертикальною.

Розглядаючи паралелограм $MM^{\ell}NN^{\Pi}$ з виконаної побудови, неважко дійти висновку, що існує повна конструктивна рівноправність ℓ і Π, тобто твірна може бути напрямною, і навпаки.

Отож, крім $\{\ell^i\}$, аналогічно можна одержати і $\{\Pi^j\}$. Множини $\{\ell^i\}$ і $\{\Pi^j\}$ утворюють сітку поверхні перенесення.

За визначенням поверхні перенесення для кожної комірки цієї сітки $\overrightarrow{N^{i-1,j-1}N^{ij-1}} = \overrightarrow{M^{i-1,j}M^{ij}}$ і $\overrightarrow{N^{ij-1}M^{ij}} = \overrightarrow{N^{i-1,j-1}M^{i-1,j}}$. Така сітка називається граничною чебишевською **.

Для задання поверхні перенесення можна скористатися такою конструктивною схемою.

Нехай Π і $\bar{\Pi}$ – довільні просторові криві /рис. 6.71/. Їх можна розглядати як носіїв криволінійних точкових рядів $\{N^i\} \subset \Pi$

---

* Звичайно, $\ell_2^{\Pi} \subset \pi_2$ і не належить самій поверхні перенесення.

** П.Л.Чебишев /1821-1894/ – видатний російський математик.

і $\{\bar{N}^i\} \subset \bar{n}$, що визначають конгруенцію прямих $\{N^i\bar{N}^i\}$. Зафіксуємо кілька точок на $n(N^1, N^2, \ldots, N^i)$ і таку саму кількість точок на $\bar{n}(\bar{N}^1, \bar{N}^2, \ldots, \bar{N}^i)$. Поділимо кожен з відрізків $N^i\bar{N}^i$ точками M^i у відношенні $\lambda = m/n$. Тоді ряд $\{M^i\}$ визначає криву сітки $-\bar{n}'$. Далі поділимо кожний з відрізків $\bar{N}^iN^i$ в такому ж відношенні λ точками K^i . Однопараметричний точковий ряд $\{K^i\}$, визначає криву сітки $-n$.

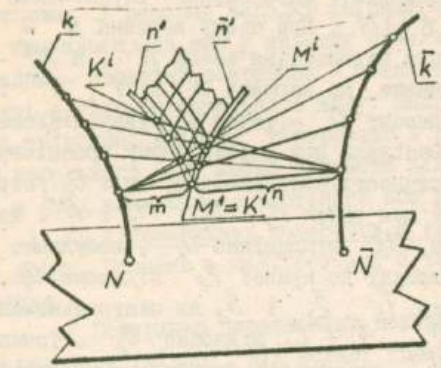


Рис. 6.7I

Одержана таким чином поверхня перенесення виявляється не поодинокою. Справді, оскільки існує два варіанти поділу точками M^i і K^i відрізків $N^i\bar{N}^i$ і $\bar{N}^iN^i$, то очевидно, що дістанемо <u>дві</u> поверхні перенесення. Вони називаються <u>спряженими</u>.

Використання цієї самої конструктивної схеми у випадку $m = n$ приводить до побудови <u>поверхні Лі</u>, де спряженої поверхні вже немає *.

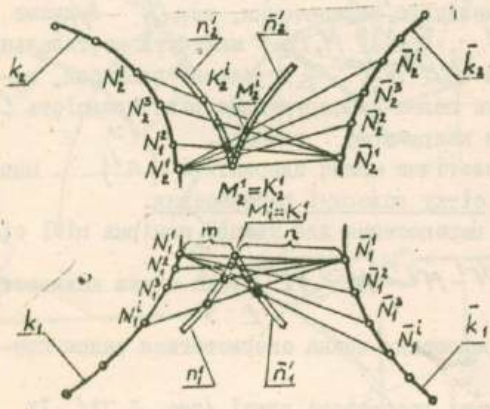


Рис. 6.72

Розглянута конструктивна схема використовується і для задання КІ поверхні перенесення /рис. 6.72/ [1, с. 176-178].

---

* Софус Лі /1842-1899/ - видатний норвезький математик.

Нехай $n(n_1, n_2)$ – напрямна, $l(l_1, l_2)$ – твірна, а $l^i(l_1^i, l_2^i)$ – окреме положення твірної, тобто результат паралельного перенесення $l \to l^i$, що визначається вектором NN^i /де $N = l \cap n$ і $N^i = l^i \cap n$ /.

У системі координат $Oxyz$ з проекційними полями Oxy і Oxz, що їх розсунуто /рис.6.73/, лінію n описано системою

$$y = n_1(x);$$
$$z = n_2(x),$$

а лінію l – системою

$$y = l_1(x);$$
$$z = l_2(x).$$

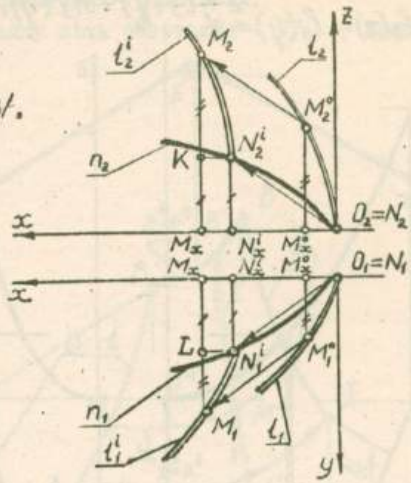


Рис. 6.73

При цьому заради спрощення зроблено припущення, що точка $N = l \cap n = O$.

Розглянувши поле Π_2, помічаємо, що $|M_2K| = |M_2^oM_x^o|$, оскільки $(N_2N_2^i) \parallel (M_2^oM_2)$ і $|M_xK| = |N_2^iN_x^i|$. Отже, апліката довільної точки поверхні перенесення $M(M_1, M_2)$ має бути виражена рівністю $z = n_2(x) + l_2(x) = z^n + z^l$, де $z^l = l_2(x) = |M_x^oM_2^o|$ і $z^n = n_2(x) = |N_x^iN_2^i|$

Розглядаючи поле Π_1, помічаємо, що $|M_xL| = |N_x^iN_1^i|$ і $|LM_1| = |M_x^oM_1^o|$.

Оскільки $|N_x^iN_1^i| = n_1(x) = y^n$ і $|M_x^oM_1^o| = l_1(x) = y^l$, то ордината точки M становить $y = l_1(x) + n_1(x) = y^l + y^n$

Нарешті, розглядаючи поле Π_3, за аналогією запишемо ще одне вираження аплікати:

$$z = l_3(y) + n_3(y) = z^l + z^n$$

Отож, аналітична модель поверхні паралельного перенесення /у координатах її довільної точки/ є системою будь-яких двох рівнянь з наведених трьох:

$$z = l_2(x) + n_2(x),$$
$$y = l_1(x) + n_1(x), \qquad /6.24/$$
$$z = l_3(y) + n_3(y),$$

де $l_2(x) = l_3(y) = z^l$, $n_2(x) = n_3(y) = z^n$.

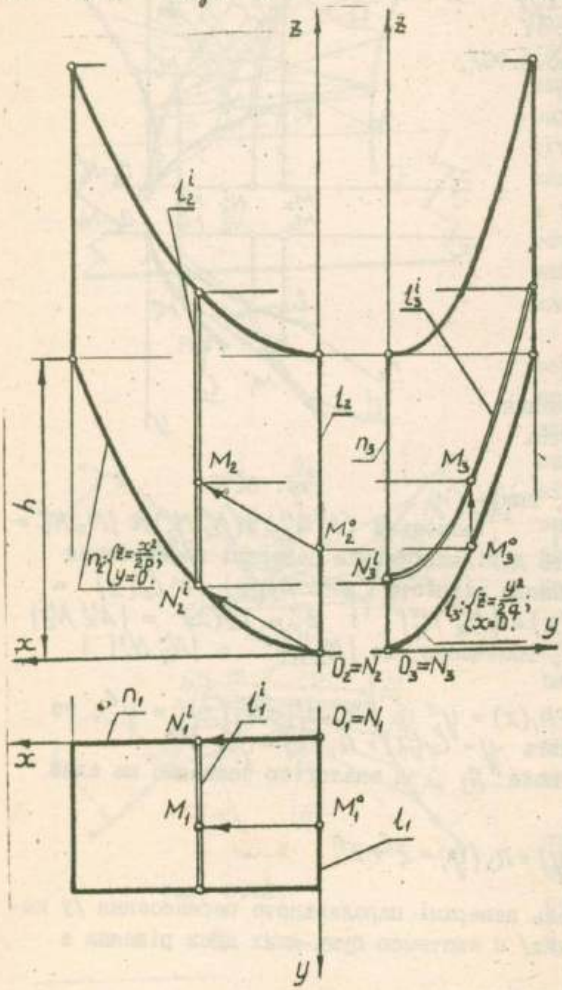


Рис. 6.74

Приклад. Нехай відсік поверхні перенесення задано напрямною /дугою параболи в π_2 /, що її аналітична модель $x^2 = 2pz$; $y = 0$, де $0 \le x \le \sqrt{2ph}$ і $0 \le z \le h$, і твірною l /дугою параболи в π_3 /, в якої аналітична модель - система $y^2 = 2qz$; $x = 0$ /рис. 6.74/, де $0 \le y \le \sqrt{2qh}$ і $0 \le z \le h$.

Отож, у даному випадку маємо $z^n = n_2(x) = x^2/2p$; $z^l = l_3(y) = y^2/2q$, а з урахуванням /6.24/ рівнянням відсіку поверхні перенесення дістанемо у вигляді $z = x^2/2p + y^2/2q$, де $0 \le x \le \sqrt{2ph}$ і $0 \le y \le \sqrt{2qh}$, $0 \le z \le 2h$.

б/ Гвинтові поверхні. Безпосереднім узагальненням поверхонь обертання загального виду є гвинтові поверхні.

Гвинтовою поверхнею називається така кінематична поверхня, твірна якої виконує гвинтовий рух.

Саме в результаті такого руху точка, як було вже з"ясовано, описує гвинтову лінію циліндра.

Отож, і в даному випадку кожна точка твірної (ℓ) має траєкторією гвинтову зі своїм базовим циліндром. Спільними для всіх точок твірної є вісь обертання і крок гвинтових-траєкторій.

Домовимося, що в даному випадку вісь обертання - JJ , крок гвинтових-траєкторій - H , а рівняння твірної $AB = \ell \subset \pi_2 : z = f(\bar{x});\ y = 0,$ де $-R^{\ell} \le \bar{x} \le R^{\ell}$ /рис. 6.75/, R - радіус відповідного базового циліндра довільної гвинтової-траєкторії *. Оскільки горизонтальна проекція цього базового циліндра має рівняння

$$x^2 + y^2 = R^2;$$
$$z = 0,$$

де $0 \le x, y \le R$,
а кут обертання площини ℓ навколо (JJ) дорівнює φ , то аналітична модель каркаса відсіку гвинтової поверхні, що його виконано за допомогою двох площин π_1 і $\Sigma \parallel \pi_1$ /за умови, що $f(\bar{x}) \le H$ /, має вигляд

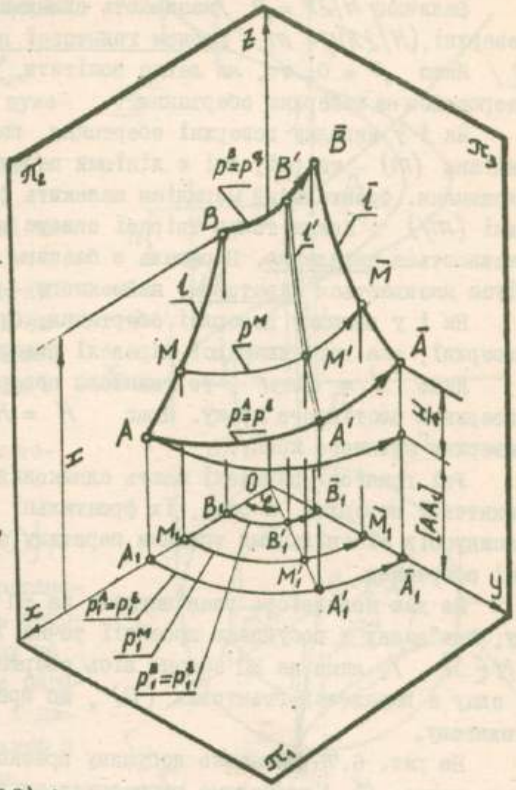


Рис. 6.75

$$z = f(\sqrt{x^2 + y^2}) + (H/2\pi)\varphi;$$
$$y = tg\varphi x, \qquad /6.25/$$

де $0 \le x$, $y \le R^{\ell}$, $z \le \frac{5}{4} H$, а $y = tg\varphi x$ - рівняння площини твірної ℓ /при повороті на кут φ / і R^{ℓ} - радіус відповідного екватора.

* R^{ℓ} - радіус базового циліндра екватора.

Виключаємо з /6.25/ параметр φ і записуємо рівняння гвинтової поверхні /відсіку/:

$$z = f(\sqrt{x^2+y^2}) + (H/2\pi)\operatorname{arctg}(y/x), \qquad /6.26/$$

де $0 \le x, y \le R^{\epsilon}$, $z \le (5/4)H$

Величину $H/2\pi = P$ називають одиничним параметром гвинтової поверхні. $(H/2\pi)\varphi = m$ – кроком гвинтової поверхні.

Якщо $P = 0$, то, як легко помітити, гвинтова поверхня перетворюється на поверхню обертання.

Як і у випадку поверхні обертання, гвинтова поверхня має меридіани (m) – твірні, які є лініями перетину поверхні з осьовими площинами. Фронтальний меридіан належить фронтальній осьовій площині (m_f). Кожна точка твірної описує траєкторію-гвинтову, яка називається паралеллю. Паралель з базовим циліндром найбільшого радіуса називається екватором, найменшого – горлом.

Як і у випадку поверхні обертання, будь-яка лінія на гвинтовій поверхні, яка перетинає всі паралелі поверхні, є її твірною.

Якщо $H = const$, то гвинтова поверхня називається гвинтовою поверхнею постійного кроку. Якщо $H = H(\varphi)$, то маємо гвинтову поверхню змінного кроку.

Усі гвинтові-паралелі мають однаковий крок, такий самий як і у гвинтової поверхні, а отже, їх фронтальні проекції утворюють сім"ю косинусоїд зі спільними точками перетину з фронтальною проекцією осі обертання.

Це дає можливість розв"язувати на КП основну конструктивну задачу, пов"язану з побудовою проекції точки M_2 за заданою M_1 /де $M \in \Omega$ /, якщо на КП задано вісь обертання $JJ \perp \pi_1$ твірну (l) і одну з паралелей-гвинтових (ρ), що править за своєрідну базову гвинтову.

На рис. 6.76 показано побудову проекції M_2:

через M_1 проведемо горизонтальну проекцію-коло (ρ_1^M) паралелі, породжуваної рухом точки M;

знайдемо горизонтальну проекцію точки перетину цієї паралелі з твірною – $\bar{M}_1 = \rho_1^M \cap l_1$;

за допомогою осьової площини $\bar{\Sigma}$ знаходимо точку $\bar{1}$ меридіана $\bar{m}^M \subset \bar{\Sigma}$ /йому належить і точка $\bar{M}$, в якої паралель $-\rho(\bar{1}_1 = (O,\bar{M}_1) \cap \rho_1)$;

на паралелі ρ_1 знаходимо точку 1_1, що належить меридіану (m^M), який проходить через точку M і належить осьовій площині $\Sigma(1_1 = (O,M_1) \cap \rho_1)$;

за проекціями 1_1 і $\bar{1}_1$ знаходимо проекції 1_2 і $\bar{1}_2$;

за точками 1_2 і $\bar{1}_2$ визначаємо осьове зміщення h точки 1, а отже, і точки M, яке відповідає кутовому зміщенню точок $1 \to \bar{1}$ і $M \to \bar{M}$ як приналежним спільному меридіану $m^M \to m^{\bar{M}}$;

побудувавши $\bar{M}_2 \subset \ell_2$, будуємо за допомогою h шукану M_2.

На рис. 6.76 показано також паралель $P_2^M \ni M_2$, хоч вона в побудові участі не бере.

Отже, для задання на КП гвинтової поверхні досить задати на ньому вісь обертання, базову гвинтову - паралель і твірну.

Тобто, визначник гвинтової поверхні має вигляд

$$\Omega^0 = \{\ell : \ell \cap p = K \Lambda_p^\ell\}(JJ)\},$$

де ℓ і p повинні перетинатися і мати спільну вісь обертання. За базову гвинтову не обов"язково обирати саме паралель, можна використати і довільну гвинтову зі спільною з поверхнею віссю і кроком.

Очевидно, розглядувані гелікоїди - це окремі випадки гвинтових поверхонь, а саме ті, в яких твірна - пряма.

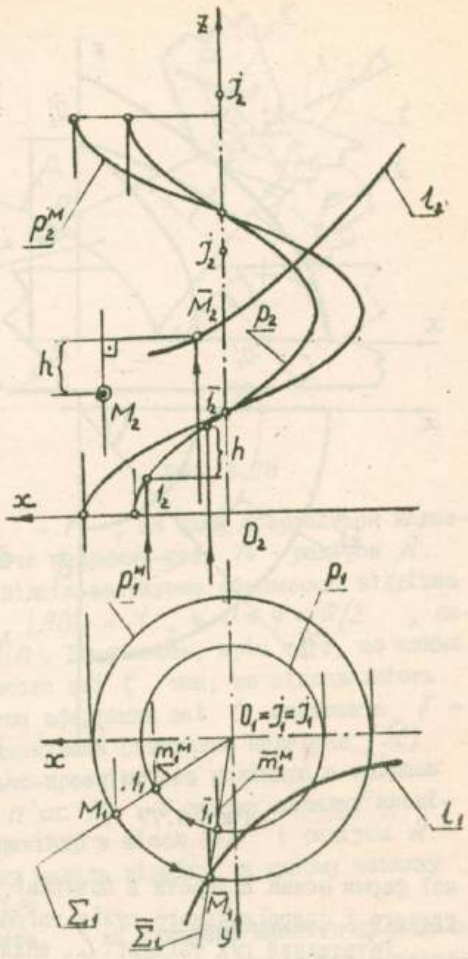


Рис. 6.76

Розглянемо приклад графічного та аналітичного моделювання конкретної гвинтової поверхні /в даному випадку циклічної/.

Приклад. Отож, нехай відсік гвинтової циклічної поверхні, що обмежений площинами π_2 і π_3, має твірну-півколо /рис. 6.77/

$$\ell \subset \pi: \quad (x-R)^2+z^2=r^2;$$

де $0 \le x \le R+r$, $0 \le z \le r$, з лінією центрів - гвинтовою /тут у неї роль базової гвинтової/ k^0:

$$x = R\cos\left(\frac{2\pi}{H}z\right);$$
$$x^2+y^2=R^2,$$

де $0 \le x, y \le R$, $0 \le z \le H/4$.

Оскільки в даному випадку $z = f(\bar{x}) = \sqrt{r^2-(\bar{x}-R)^2}$, де абсциса $\bar{x} = R = \sqrt{x^2+y^2}$, то формулу /6.26/ гвинтової поверхні перепишемо у вигляді

$$z = \sqrt{r^2-(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2}+\frac{H}{2\pi}\,arctg(y/x),$$

де $0 \le x, y \le R+r$, $0 \le z \le \frac{H}{4}+r$.

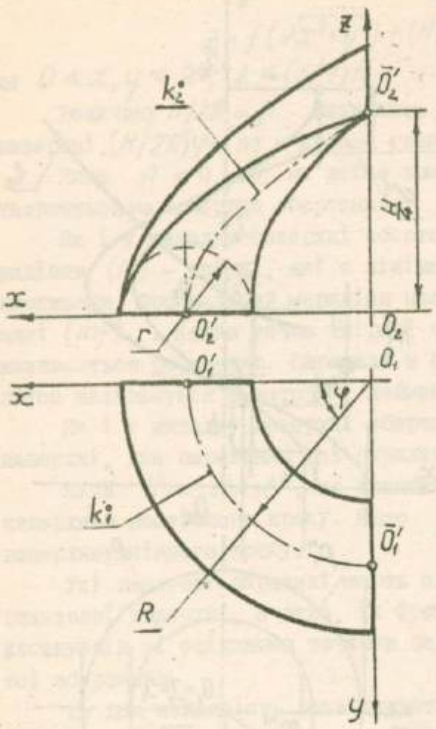


Рис. 6.77

Прикладами широкого поширення гвинтових поверхонь, зокрема циклічних, є поверхні пружин, змієвидних трубопроводів і т.п.

в/ До кінематичних поверхонь з твірною загального виду постійної форми можна віднести й поверхні, які одержуємо в результаті ротативного і спироїдального рухів твірних.

Ротативний рух твірної ℓ полягає в тому, що кожна точка M твірної $\ell (M \in \ell)$ обертається навколо деякої осі, а сама вісь обертання точки M рухається так, що рухаючись, сама себе перетинає.

Нехай, наприклад, точка $M \in \ell$ - твірної обертається навколо осі t і за поворот її (M) на кут φ пряма t, що перетинає деяку напрямну n в точці N', одночасно сама рухається так, що точка $N = t \cap n$ долає дугу $N\bar{N} \subset n$, а t проходить через фіксовану точку S /рис. 6.78/.

Легко помітити, що в даному випадку твірна ℓ внаслідок ротативного руху створює ротативну поверхню (Ω), а вісь t – конічну поверхню з вершиною S і напрямною n. Така поверхня, що супроводжує ротативну поверхню і породжувана віссю обертання, називається аксоїдом (Ω^A).

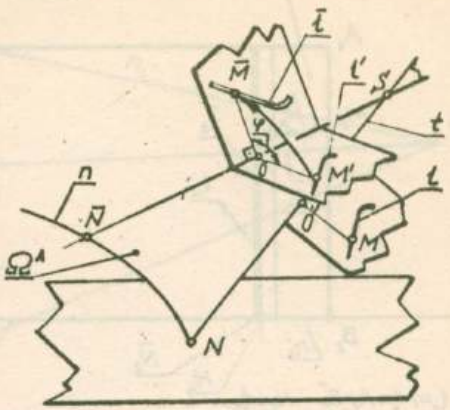


Рис. 6.78

Аксоїдом може бути і циліндрична поверхня, а в загальному випадку – торсова.

Приклад. На рис. 6.79 показано КП відсіку ротативної поверхні, в якої твірна – пряма $\ell \perp \pi_1$ обертається навколо осі обертання – прямої $t \perp \pi_1$ відстань між ℓ і t – r, що сама обертається навколо осі проекцій Oz, перетинаючи напрямну-коло n радіуса R з центром O в площині π_1. Відсік одержуємо обертанням відрізка $[AB] \subset \ell$, де $B = \ell \cap \pi_1$, $|AB| = H$, а $0 \le \varphi \le \pi/2$, якщо $\varphi = (Ox)\hat{}(ON)$ і $N = t \cap n$. Домовимося, крім того, що кожна точка $M \in [AB]$ обертається навколо осі t так, що відповідність між її кутом обертання δ і кутом обертання осі t становить $\gamma = 8\varphi$. Отже, $0 \le \gamma \le 4\pi$. Одержувана ротативна поверхня (Ω) виявляється відсіком горизонтально-проеціюючого циліндра з твірною $[AB]$ і хвилевидною напрямною $n' \subset \pi_1$. У даному випадку аксоїдом (Ω^A) є прямий круговий циліндр з віссю Oz і радіуса R.

Отож, щоб дістати аналітичну модель відсіку, в даному випадку досить змоделювати напрямну $n' \ni \bar{M}$.

Рис. 6.80 дозволяє простежити, як складено аналітичну модель /у параметричній формі/ напрямної $n'(n_1', n_2')$. Йдеться про траєкторію точки $\bar{M}_1 \in n_1'$. Отже, зазначимо, що координатами точки $\bar{M}_1$ є $x = |LO_1|$ і $y = |\bar{M}_1 L|$. Але з ΔLOP маємо $|LO_1| = x = |LP| \operatorname{ctg}\varphi$, а $|\bar{M}_1 L| = y = |LP| + |\bar{M}_1 P|$. Оскільки $|LP| = (R + |\bar{N}_1 P|)\sin\varphi$ /з ΔLOP /, а $|\bar{N}_1 P| = |\bar{L}\bar{N}_1| - |\bar{L}P|$ і $|\bar{L}\bar{N}_1| = r\cos\gamma$ /з $\Delta \bar{L}\bar{M}_1\bar{N}_1$ /, $|\bar{L}P| = |\bar{M}_1\bar{L}| \operatorname{tg}\varphi$ /з $\Delta \bar{M}_1 LP$ /, $|\bar{M}_1 L| = r\sin\gamma$ /з $\Delta \bar{L}\bar{M}_1\bar{N}_1$ /, то

$$x = [R + r(\cos\gamma - \sin\gamma \cdot \operatorname{tg}\varphi]\cos\varphi$$

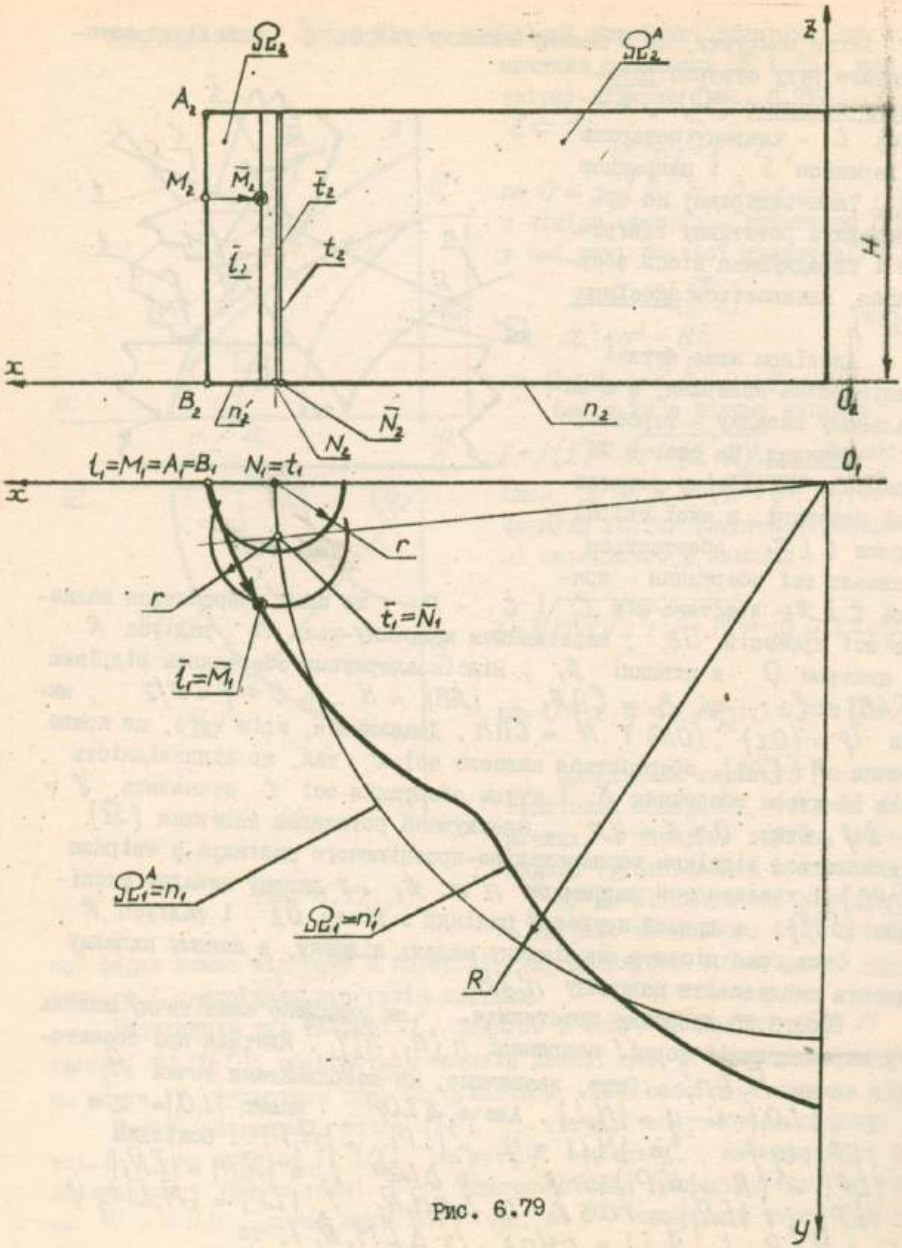

Ω_2
Ω_2^A
z
A_2
M_2
$\bar{M}_2$
$\bar{t}_2$
t_2
$\bar{t}_2$
H
x
B_2
n_2'
$\bar{N}_2$
N_2
n_2
O_2
$t_1=M_1=A_1=B_1$
$N_1=t_1$
O_1
x
r
r
$\bar{t}_1=\bar{N}_1$
$\bar{t}_1=\bar{M}_1$
$\Omega_1^A=n_1$
$\Omega_1=n_1'$
R
y

Рис. 6.79

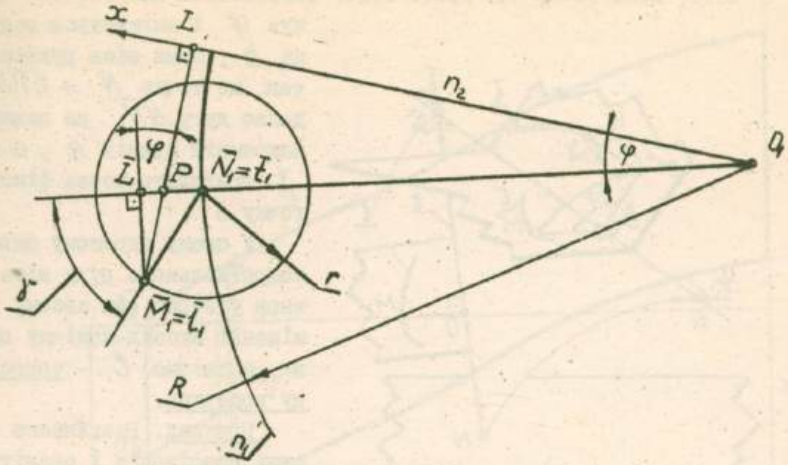


Рис. 6.80

Далі з $\Delta \bar{M},\bar{L}P$ матимемо $|\bar{M},P| = r\sin\gamma/\cos\varphi$, а

$$y=|LP|+|\bar{M},P|=[R+r(\cos\gamma-\sin\gamma\,tg\,\varphi)]\sin\varphi+(r\sin\gamma/\cos\varphi)$$

Отже, нарешті, модель напрямної n' /домовимося називати її ротатоїдою/ дістаємо у вигляді системи

$$x=[R+r(\cos\gamma-\sin\gamma\,tg\,\varphi)]\cos\varphi;$$

$$y=[R+r(\cos\gamma-\sin\gamma\cdot tg\,\varphi)]\sin\varphi+(r\sin\gamma/\cos\varphi);$$

$$z=0,$$

де $0\le x,y\le R+r,\quad 0\le\varphi\le\pi/2,\quad 0\le\gamma\le 4\pi.$

а каркас відсіку ротативної циліндричної поверхні – у вигляді

$$x=[R+r(\cos\gamma-\sin\gamma\cdot tg\,\varphi)]\cos\varphi;$$

$$y=[R+r(\cos\gamma-\sin\gamma\cdot tg\,\varphi)]\sin\varphi+(r\sin\gamma/\cos\varphi),$$

де $0\le x,y\le R+r,\quad 0\le z\le H,\quad 0\le\varphi\le\pi/2,\quad 0\le\gamma\le 4\pi.$

Спироїдальний рух твірної полягає в тому, що при ньому кожна точка M твірної загального виду постійної форми $\ell\supset M$ міститься у гвинтовому русі відносно деякої осі t, яка, в свою чергу, рухається так, що сама себе перетинає.

Отже, доки точка M /рис. 6.81/ обертається навколо осі t на кут φ і зміщується вздовж t на h, сама вісь рухається так, що точка $N = t \cap n$ долає дугу $N\bar{N}$ по деякій напрямній кривій n, а вісь t проходить через фіксовану точку S.

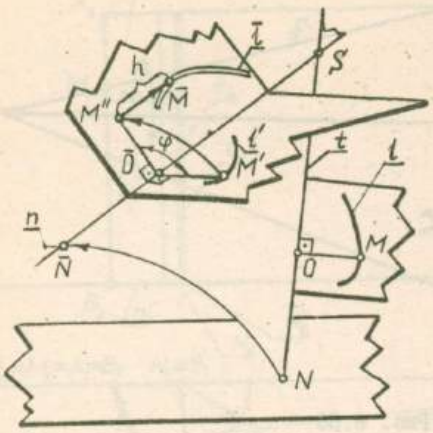


Рис. 6.81

У цьому окремому випадку спироїдального руху вісь t знов утворює при своєму переміщенні аксоїд-конічну поверхню, а твірна l - спироїдальну поверхню.

Приклад. Розглянемо приклад графічного і аналітичного моделювання відсіку спироїдальної поверхні /рис. 6.82/, що утворюється як наслідок гвинтового руху твірної - $[AB] \subset l \perp \pi_1$, де l - пряма, що міститься в гвинтовому русі відносно осі $t \perp \pi_1$ з кроком H /$|AB| = h$/. Сама ж вісь t, віддалена від осі проекцій Oz на R, обертається навколо останньої. Отож, як і в прикладі з відсіком ротативної поверхні, аксоїдом знов є прямий круговий циліндр з віссю Oz і радіуса R (Ω^A). Проте, якщо у випадку ротативної поверхні кожна довільна точка ($M \in l$) твірної мала траєкторією -паралеллю плоску криву - ротатоїду, то у випадку спироїдальної поверхні траєкторією довільної точки твірної є вже гвинтова спироїдальної поверхні. Назвемо її спироїдою (ρ). Легко переконатися, що саме таку спироїду (n') описують точки A і B /де $B = l \cap \pi_1$/, які відповідають вихідному положенню твірної $AB \subset l$. Оскільки одержувана спироїдальна поверхня проеціюється, то горизонтальні проекції всіх паралелей збігаються, зокрема $n_1' = \rho_1$. Фронтальні проекції паралелей, породжуваних точками A і B /зокрема n_2'/, входять до обрису фронтальної проекції відсіку. Тепер вже $\Omega_2^A \neq \Omega_2$.

Аналітичну модель спироїдальної поверхні дістанемо виходячи з того міркування, що за оберт осі t навколо Oz на кут φ довільна точка $M \in l$ обертається на кут $\delta = 8\varphi$ /за умовою/ навколо t і поступально переміщується вздовж t на $(H/2\pi)\varphi$.

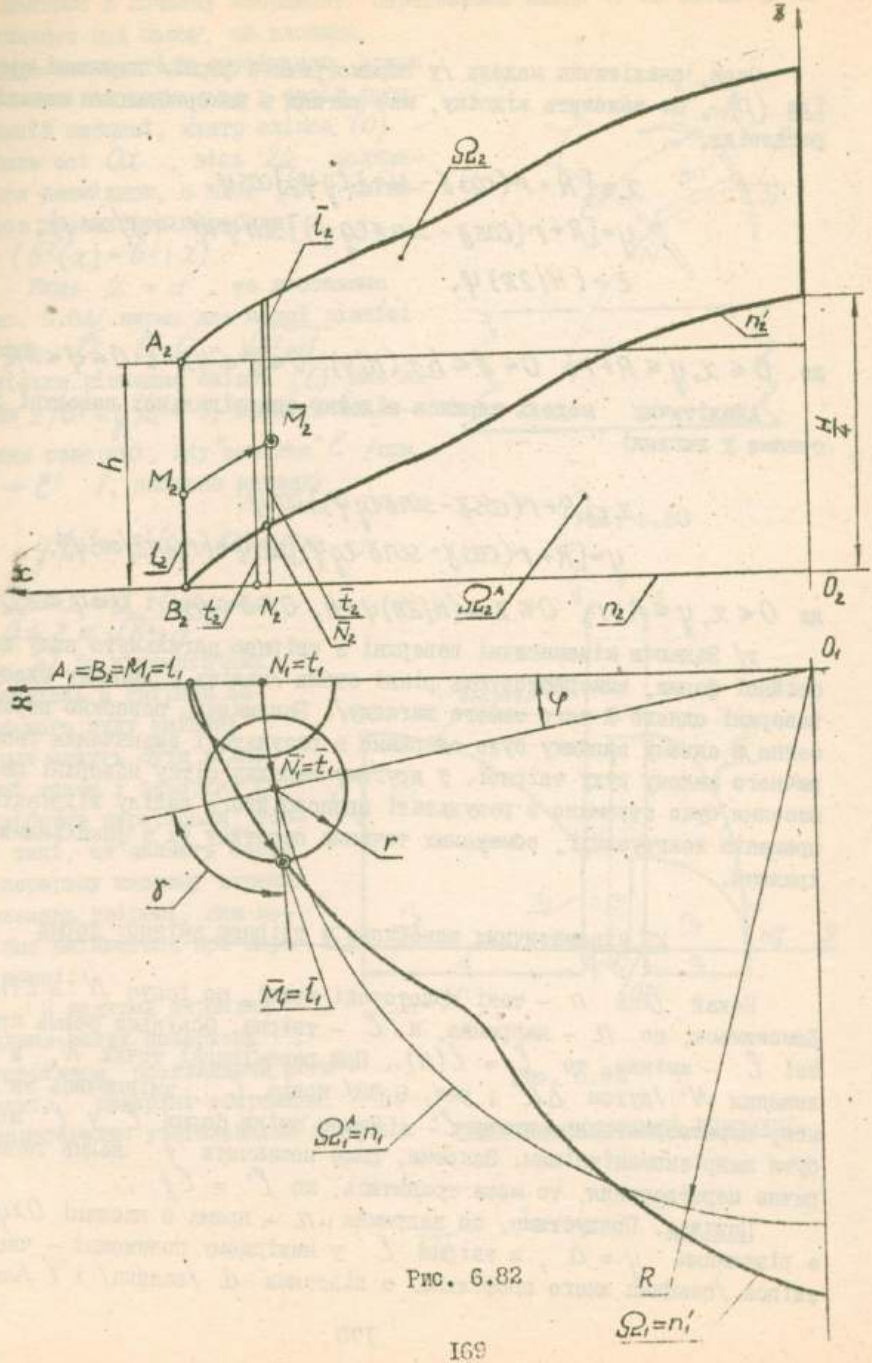

y
Ω_2
$\bar{l}_2$
A_2
n_2'
$\bar{M}_2$
M_2
h
H
l_2
x
B_2
t_2
N_2
$\bar{t}_2$
$\bar{N}_2$
Ω_2^A
n_2
O_2
$A_1=B_2=M_1=l_1$
$N_1=t_1$
O_1
x
φ
$\bar{N}_1=\bar{t}_1$
r
γ
$\bar{M}_1=\bar{l}_1$
$\Omega_1^A=n_1$
R
$\Omega_1=n_1'$

Рис. 6.82

Отож, аналітична модель /у параметричній формі/ паралелі-спироїди (ρ), що належить відсіку, має вигляд з використанням моделі ротатоїди,

$$x=[R+r(\cos\gamma-\sin\gamma tg\varphi)]\cos\varphi;$$
$$y=[R+r(\cos\gamma-\sin\gamma tg\varphi)]\sin\varphi+(r\sin\gamma/\cos\varphi);$$
$$z=(H/2\pi)\varphi,$$

де $0\le x,y\le R+r$, $0\le z\le h+(H/4)$, $0\le\gamma\le 4\pi$ і $0\le\varphi\le\pi/2$.

Аналітичну модель каркаса відсіку спироїдальної поверхні дістаємо у вигляді

$$x=[R+r(\cos\gamma-\sin\gamma tg\varphi)]\cos\varphi;$$
$$y=[R+r(\cos\gamma-\sin\gamma\cdot tg\varphi)]\sin\varphi+(r\sin\gamma/\cos\varphi),$$

де $0\le x,y\le R+r$, $0\le z\le(H/2\pi)\varphi+h$, $0\le\gamma\le 4\pi$ і $0\le\varphi\le\pi/2$.

г/ Задаючи кінематичні поверхні з твірною загального виду постійної форми, використовують різні схеми /навіть у випадку здобуття поверхні одного й того самого вигляду/. Наприклад, поверхню перенесення в одному випадку було одержано в результаті визначення геометричного закону руху твірної. У другому випадку сітку поверхні перенесення було отримано в результаті пропорційного поділу відрізків променів конгруенції, обмежених точками перетину їх з фокальними кривими.

КП кінематичних поверхонь з твірною змінної форми

Нехай ℓ і n – такі просторові криві, що існує $N=\ell\cap n$. Домовимося, що n – напрямна, а ℓ – твірна. Оскільки форма кривої ℓ – змінна, то $\ell=\ell(n)$. При переміщенні точки N в положення N^i /дугою Δn^i; рис. 6.83/ крива ℓ, змінюючись за формою, перетворюється на криву ℓ^i. Закон зміни форми ℓ у ℓ^i може бути найрізноманітнішим. Зокрема, якщо позначити f деяке геометричне перетворення, то може трапитись, що $\ell^i=\ell f$.

Приклад. Припустимо, що напрямна n – пряма в площині Oxy з рівнянням $y=a$, а твірна ℓ у вихідному положенні – чверть еліпса /площина якого профільна/ з півосями a /велика/ і b /мала/

та центром в початку координат. Перетворимо еліпс ℓ на еліпс ℓ^i. Покладемо при цьому, що площина еліпса залишається профільною, кожна точка еліпса рухається у своїй фронтальній площині, центр еліпса (O) – вздовж осі Ox, вісь $2a$ залишається незмінною, а вісь $2b$ змінюється за законом параболи

$$(b^2(x) = b^2 + x).$$

Якщо $x = d$, то дістанемо /рис. 6.84/ вираз для малої піввісі еліпса ℓ^i: $b(d) = \sqrt{b^2+d}$. Оскільки рівняння еліпса (ℓ) має вигляд $z^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$, аналітичне подання поверхні, яку "замітає" ℓ /при $\ell \to \ell^i$ /, набирає вигляду

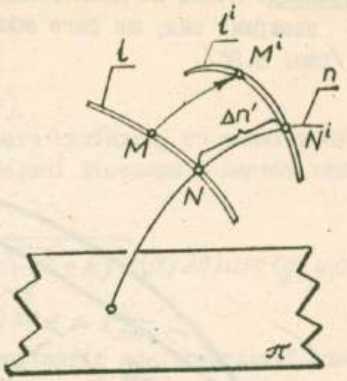


Рис. 6.83

$$y^2/a^2 = z^2/(x+b^2) = 1,$$

де $0 \le x \le d$, $0 \le y \le a$ і $0 \le z \le \sqrt{b^2+d}$.

а/ До кінематичних поверхонь з твірною загального виду змінної форми можуть бути віднесені також і поверхні з подібними перерізами, тобто такі, що являють собою неперервну множину окремих положень твірної, яка подібно змінюється при переміщенні.

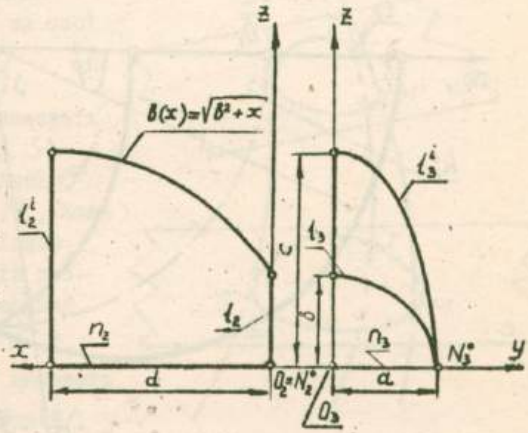


Рис. 6.84

З деякими окремими видами таких поверхонь зустрілися, розглядаючи роговидні поверхні обертання. Безпосереднє узагальнення останніх – <u>гвинтові роговидні поверхні</u>.

Приклад. Нехай на двокартинному КП задано відсік гвинтової роговидної поверхні так, що його обмежено площинами проекцій π_1, π_2 і π_3 /рис. 6.85/.

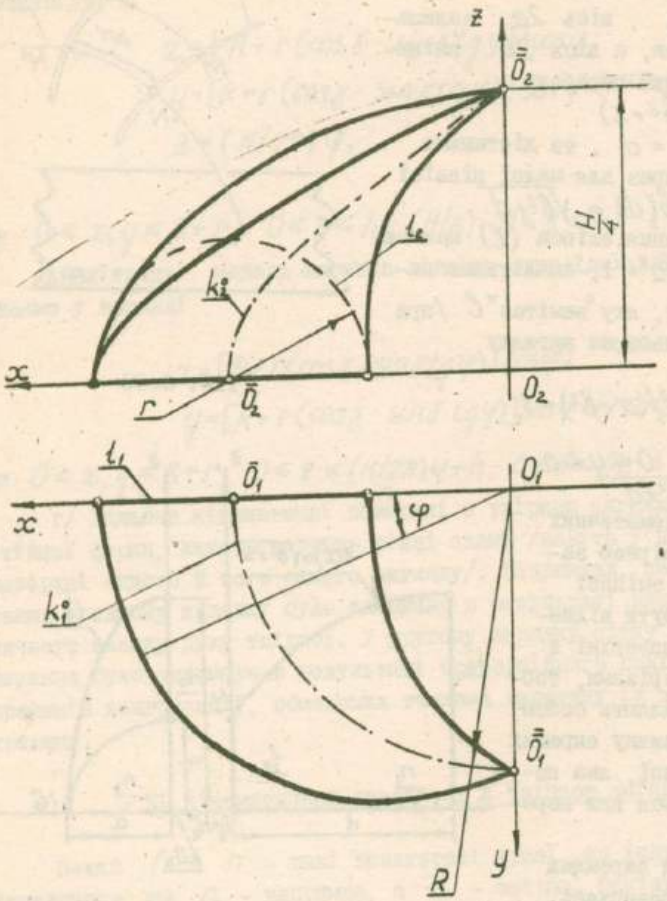


Рис. 6.85

Якщо рівняння твірної-кола (ℓ), центр якого $(\bar{O})$ рухається вздовж напрямної-гвинтової (K°) /і площина якого перпендикуляр до напрямної/ має вигляд

$$(\bar{x}-R)^2+z^2=r^2(\varphi)=r^2\cos^2\varphi,$$

бо $0 \le r(\varphi) \le r$ при $0 \le \varphi \le \pi/2$,

а рівняння напрямної-гвинтової –

$$x^2+y^2=R^2;$$
$$x=R\cos\left(\frac{2\pi}{H}z\right),$$

де H і R – висота і радіус базового циліндра, то аналітичну модель відсіку гвинтової роговидної поверхні дістаємо в даному випадку у вигляді

$$z=\sqrt{r^2\cos^2(\operatorname{arctg}(y/x))-(\sqrt{x^2+y^2}-R)^2}+(H/2\pi)\operatorname{arctg}(y/x),$$

де $0 \le x \le R+r$, $0 \le y \le y_{max}$, $0 \le z \le z_{max}$.

Розглянемо один з синтетичних варіантів конструктивної схеми задання поверхні з подібними перерізами у випадку твірної загального виду. Поверхню одержуємо при цьому в каркасній формі задання.

Отож, нехай задано три лінії /в загальному випадку просторові/: S, m і t /рис. 6.86/. Лінія t – своєрідна напрямна площин σ^i, які несуть на собі подібні перерізи ($t \perp \sigma^i$). Їй належать точки $T^i = \sigma^i \cap t$. Точки ж $S^i = \sigma^i \cap S$ належать лінії S. Кожна з точок S^i – центр подібності відповідної σ^i. Лінія m – носій точок M^i, кожна з яких разом з відповідною точкою S^i у відповідній площині σ^i визначає відповідний коефіцієнт подібності – $k^i = \frac{|S^iM^i|}{|SM|}$, де S і M належать деякій площині σ /вихідній/.

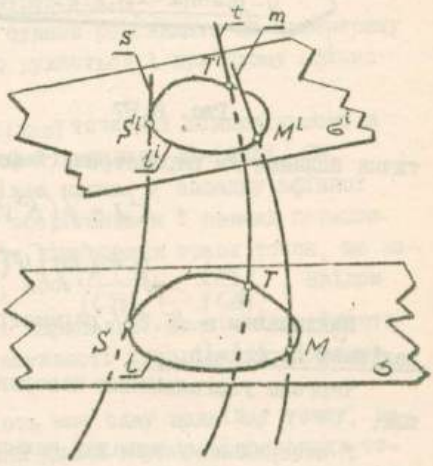


Рис. 6.86

У площині σ^i криву ℓ^i /твірну/ побудуємо як центрально-подібну відносно вихідної твірної ℓ за коефіцієнтом подібності k^i і центром подібності S^i.

Якщо t – пряма, то дістанемо поверхню подібних перерізів з площиною паралелізму.

Аналітичне подання одержуємо так /рис. 6.87/. Нехай в будь-якій з координатних площин, наприклад xOz, взято однопараметричну множину центрально-подібних кривих $\{l^i\}$ з центром подібності в початку координат, тоді їх аналітичним поданням буде рівняння $k^i z = f(k^i x)$, де k^i - коефіцієнт подібності, що прийнято за параметр. Оскільки кожна з кривих l^i - плоска, то легко уявити її як приналежну деякій площині σ^i, в якій $l^i \subset \sigma^i$ виводять з площини π_2. При цьому обертання площини σ^i відбувається навколо осі Oz на кут $t^i = \pi_2 \hat{,} \sigma^i = \varphi(k^i)$. Отже, одержуємо каркас поверхні подібних перерізів і її аналітичне подання /в параметричній формі/ у вигляді системи

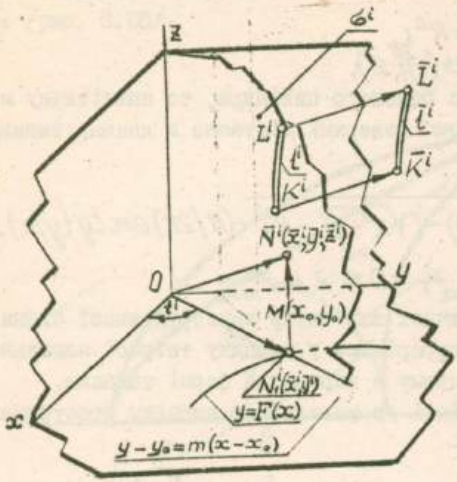


Рис. 6.87

$$k^i z = f(k^i \sqrt{x^2+y^2});$$
$$y = (tg[\varphi(k^i)]x. \qquad /6.27/$$

Виключаючи з /6.27/ параметр k^i, дістанемо рівняння поверхні подібних перерізів.

Чергове узагальнення поверхні подібних перерізів можна одержати так.

У попередньому випадку кожна з твірних l^i мала свою площину σ^i, які разом створювали пучок площин $\{\sigma^i\}$ з носієм - віссю Oz. Якщо кожну з твірних l^i у відповідній площині σ^i перенести у напрямі вектора $\vec{r}^i$, то у випадку неперервності множини $\{l^i\}$ матимемо нову неперервну множину твірних $\{\bar{l}^i\} = \{\bar{l}^i\}$, а отже, і нову поверхню подібних перерізів $\Omega = \{\bar{l}^i\}$

Як і раніше, $l^i \subset \sigma^i$, K^i - коефіцієнт подібності в σ^i, а параметр $t^i = \varphi(k^i)$ і $\smile K^i L^i \subset l^i$

Вектор перенесення визначаємо так. У площині xOy проводимо лінію $y = F(x)$, що перетинає площини σ^i у точках $N_1^i / x^i, y^i, 0 /$. Вважаємо вектор ON_1^i горизонтальною проекцією вектора перенесення $\overrightarrow{ON^i}$, де покладемо $|N^iN_1^i| = \bar{z}^i = \bar{z}^i(k^i)$. Отже, вектор перенесення має вигляд

$$\overrightarrow{ON^i} = \vec{r}^i(\bar{x}^i, \bar{y}^i, \bar{z}^i) = \overrightarrow{K^iK^i} = \overrightarrow{L^iL^i}.$$

Враховуючи перенесення та виходячи з /6.27/, каркас поверхні подібних перерізів одержує таке аналітичне подання

$$k^i(z - \bar{z}^i) = f(k^i\sqrt{(x-\bar{x}^i)^2 + (y-\bar{y}^i)^2};$$
$$y - \bar{y}^i = (tg[\varphi(k^i)])(x - \bar{x}^i) \qquad /6.28/$$

Виключивши параметр k^i з системи /6.28/, знайдемо рівняння поверхні подібних перерізів в загальному вигляді.

б/ До кінематичних поверхонь з твірною загального виду змінної форми відносять і поверхні афінних перерізів.

Поверхню з афінними перерізами будемо розглядати як неперервну множину окремих положень твірної, що рухається і при цьому афінно змінюється.

Ознайомимося з властивостями афінної точкової відповідності в площині. Афінна відповідність є окремим випадком лінійної [26, с. 259-274], при якій прямій відповідає пряма. У випадку афінної відповідності, крім того, на прямій зберігається і певний порядок розміщення точок: зберігається просте відношення трьох точок, що належать прямій, $(A'B'C') = (ABC)$, або $\frac{|A'C'|}{|C'B'|} = \frac{|AC|}{|CB|}$. Звідси випливає, що в афінній відповідності паралельні прямі відповідають паралельним прямим. Отже, афінні властивості інваріантні відносно паралельного проеціювання.

Поклавши, що афінна відповідність має одну подвійну точку, переконаємося, що вона може бути задана двома парами відповідних точок. Справді, нехай ΔABC і $\Delta A'B'C'$ так афінно відповідні, що $A = A'$ /рис. 6.88, а/. Цього досить, щоб за точкою M побудувати їй відповідну M'. Положення M визначене двома простими відношеннями трьох точок (AKM) і (BCK). Оскільки в афінній відповідності $(A'K'M') = (AKM)$ і $(B'C'K') = (BCK)$, то побудова виявляється елементарною. Спочатку будуємо K' за $(B'C'K') = (BCK)$, а потім - M' за $(A'K'M') = (AKM)$. Зокрема, якщо $A' = A$ і $B' =$

= B /рис. 6.88, б/, то дістанемо знайому відповідність з подвійною прямою /віссю відповідності/, що її використовували для побудови зображення плоского оригіналу, – її називають інколи перспективно-афінною /або родинною/.

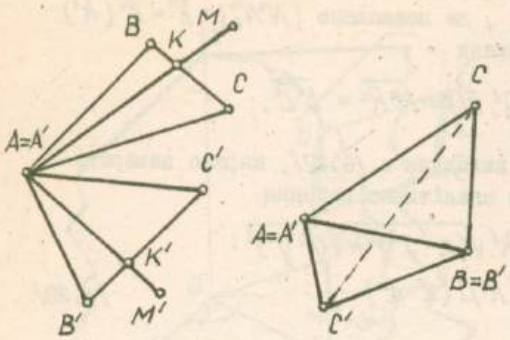


Рис. 6.88

Аналітичне подання. Афінна відповідність у площині, як відомо [12, с. 40], описується системою

$$x' = a_1 x + b_1 y + c_1;$$
$$y' = a_2 x + b_2 y + c_2 \quad /6.29/$$

Наявність у даному конкретному випадку афінної відповідності подвійної точки дозволяє спростити /6.29/, оскільки тепер $c_1 = c_2 = 0$. Отже, дістанемо лінійно-однорідну систему, яка і є аналітичним поданням афінної відповідності в площині

$$x' = a_1 x + b_1 y;$$
$$y' = a_2 x + b_2 y \quad /6.30/$$

Розглядаючи систему /6.30/, ще раз переконаємося, що дану афінну відповідність в площині можна задати двома парами відповідних точок.

Задання поверхні афінних перерізів відбувається за аналогією із заданням розглянутих уже поверхонь подібних перерізів. Як і у випадку поверхонь подібних перерізів, поверхня афінних перерізів являє собою неперервну множину окремих положень твірної, що рухається і афінно відповідна іншим елементам тієї самої множини.

Побудову такої поверхні можна почати, наприклад, із задання в одній площині множини афінних відповідностей, віднесених до вихідного ΔABC. Якщо при цьому до ΔABC віднесено деяку вихідну твірну ℓ, то згадана множина афінних відповідностей дозволяє дістати однопараметричну множину окремих положень твірної – $\{\ell'\}$, кожний елемент якої міститься в афінній відповідності з ℓ. Потім, скориставшись деякою прямою (t) в площині ΔABC, можна кожну

з ℓ^i вивести з площини ΔABC , обертаючи ℓ^i навколо $t = (Oz)$ на відповідний кут $\varphi^i = \varphi^i(k_1^i)$. . Тут k_1^i - один з двох параметрів, що входять в аналітичне зображення афінно-відповідних кривих. Далі кожну з ℓ^i можна перенести в положення $\bar{\ell}^i$. Таким чином, складаємо поверхню афінних перерізів загального виду, як неперервну множину $\{\bar{\ell}^i\}$.

Аналітичне подання. Оскільки конструювання поверхні афінних перерізів виконувалося за схемою, аналогічною схемі конструювання поверхонь подібних перерізів, то їх аналітичні подання схожі. Різниця лише в кількості параметрів. Якщо аналітичне подання поверхні подібних перерізів має лише один параметр k^i - коефіцієнт подібності, а отже, і коефіцієнт спотворення вздовж осей координат, то у випадку поверхні афінних перерізів таких параметрів два. Отож, і коефіцієнти спотворення вздовж координатних осей $/Ox$ і Oz / різні. Аналітичне подання твірної $\ell^i - k_2^i z = f(k_1^i x)$ має два параметри - k_1^i і k_2^i , а системи /6.27/ і /6.28/ набирають вигляду

$$k_2^i z = f(k_1^i \sqrt{x^2+y^2}); \qquad y = tg[\varphi^i(k_1^i)]x \qquad /6.31/$$

та

$$k_2^i(z-\bar{z}^i) = f(k_1^i \sqrt{(x-\bar{x}^i)^2+(y-\bar{y}^i)^2}); \qquad y-\bar{y}^i = tg[\varphi^i(k_1^i)](x-\bar{x}^i), \qquad /6.32/$$

де $k_2^i = k_2^i(k_1^i)$, тобто k_1^i і k_2^i зв"язані функціональною залежністю.

Системи /6.31/ і /6.32/ - аналітичні зображення каркасів поверхонь афінних перерізів. Рівняння відповідних поверхонь одержуємо, як звичайно, виключаючи з цих систем параметри k_1^i та k_2^i .

в/ Поверхні подібних і афінних перерізів дістаємо внаслідок розмножування в множини твірної вихідного виду за допомогою відповідно центрально-подібних, афінних і перспективно-афінних перетворень в площині. Можна скористатися цією самою схемою конструювання поверхонь для отримання поверхонь кремонових перерізів.

Уже сама назва підказує, що в даному випадку при конструюванні поверхні використовується кремонове перетворення, яке в двовимірному варіанті описується системою

$$\bar{x} = f_1(x,y);$$

$$\bar{y} = f_2(x,y), \qquad /6.33/$$

де f_1 і f_2 - дробово-раціональні функції. Такі перетворення дозволяють у загальному випадку пряму перетворити на криву n-го порядку, а площину /в просторовому варіанті перетворення/ - на поверхню n-го порядку.

Отож, досить навчитися конструювати кремонове перетворення в площині [86], щоб потім сконструювати поверхню кремонових перерізів за схемою, що аналогічна схемі конструювання поверхонь подібних і афінних перерізів.

Нехай вихідну твірну (ℓ) і пряму (m) віднесено до площини з системою координат xOy /рис. 6.89/. Центром перетворення, через який проходять прямі-носії відповідних точок, є точка $S = 0$. Кожна така пряма визначає митєвий вектор перенесення $\overline{OM^i}$, який використовується для побудови точки $\bar{A}^i$, відповідної до $A^i \in \ell$ в напрямку (A^iO) при умові, що $|A^i\bar{A}^i| = |\overline{OM^i}|$. Лінію-образ $(\bar{\ell})$ дістаємо як неперервну множину точок-образів - $\{\bar{A}^i\}$.

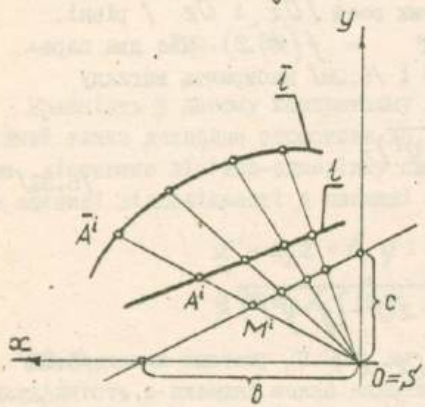


Рис. 6.89

Аналітичне подання. Якщо $A^i(x,y)$, $\bar{A}^i(\bar{x},\bar{y})$ і $M^i(x_{Mi}, y_{Mi})$, то згідно з алгоритмом перетворення маємо $x_{Mi} = \bar{x} - x$ і $y_{Mi} = k_i x$, де $k_i = y/x = \bar{y}/\bar{x} = y_{Mi}/x_{Mi}$ - кутовий коефіцієнт (OM^i).

Покладаючи, що рівняння прямої m має вигляд

$$x/b + y/c = 1.$$

Дістаємо формули /6.33/, які відповідають даному конкретному випадку:

$$\bar{x} = x + x_{Ni} = x + \frac{x_{Ni}}{(x_{Ni}/b) + (y_{Ni}/c)} = x +$$

$$+ \frac{x_{Ni}/y_{Ni}}{(x_{Ni}/by_{Ni}) + (1/c)} = x + \frac{bcx}{cx + by}$$

та за аналогією

$$\bar{y} = y + y_{Ni} = y + \frac{y_{Ni}}{(x_{Ni}/b) + (y_{Ni}/c)} = y +$$

$$+ \frac{y_{Ni}/x_{Ni}}{(1/b) + (y_{Ni}/cx_{Ni})} = y + \frac{y/x}{(1/b) + (y/cx)} = y + \frac{bcy}{cx + by}.$$

Отож,

$$\bar{x} = x + (bcx/(cx + by));$$

$$\bar{y} = y + (bcy/(cx + by)),$$

а формули для оберненого перетворення перепишемо у вигляді

$$x = \bar{x} - (bc\bar{x}/(c\bar{x} + b\bar{y}));$$

$$y = \bar{y} - (bc\bar{y}/(c\bar{x} + b\bar{y})). \qquad /6.34/$$

Якщо ℓ - пряма з рівнянням $Ax + By + C = 0$, то, врахову-ючи /6.34/, дістанемо вираз для $\bar{\ell}$:

$$A(c\bar{x}^2 + b\bar{x}\bar{y} - bc\bar{x}) + B(b\bar{y}^2 + c\bar{x}\bar{y} - bc\bar{y}) + C = 0.$$

Отже, $\bar{\ell}$ - крива другого порядку, а кремонове перетворення в даному випадку квадратичне /відображає пряму в криву другого порядку/.

г/ До кінематичних поверхонь з твірною загального виду належать також квазігвинтові поверхні. Розглянемо конструктивну схему їх утворення.

Нехай в площині xOz /рис. 6.90/ розміщено однопараметричну множину $\{\ell^i\}$ однотипових кривих /еліпсів, гіпербол, парабол, овалів Касіні тощо/, що залежить від параметра ρ^i.

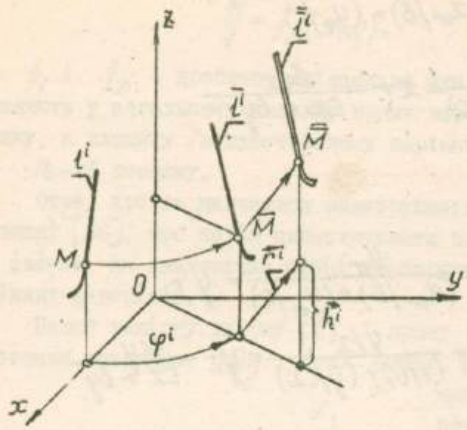


Рис. 6.90

Виводимо кожну з них з площини xOz, обертаючи її площину навколо Oz на кут $\varphi^i(\rho^i)$, залежний від параметра ρ^i. При цьому кожна довільна точка $M \in \ell^i$ перейде в положення $\bar{M} \in \bar{\ell}^i$. Потім у площині кривої $\bar{\ell}^i$ перенесемо твірну $\bar{\ell}^i$ на вектор $\bar{r}^i(\rho^i)$, що також параметрично залежний від ρ^i. Тоді точка $\bar{M}$ займе положення $\bar{\bar{M}}$, а крива $\bar{\ell}^i$ – положення $\bar{\bar{\ell}}^i$. Неперервна множина $\{\bar{\bar{\ell}}^i\}$ і має назву квазігвинтової поверхні.

Аналітичне подання. Якщо твірна ℓ^i має рівняння $z = f(x, \rho^i)$, то відсік каркаса поверхні, що його одержуємо після обертання твірних ℓ^i на відповідні кути $\varphi^i(\rho^i)$, має вигляд

$$z = f(\sqrt{x^2+y^2}, \rho^i);$$
$$y = tg[\varphi^i(\rho^i)]\, x, \qquad /6.35/$$

де $y = tg[\varphi^i(\rho^i)]$ – рівняння площини твірної $\bar{\ell}^i$, а $0 \le x, y, z$.

Після перенесення $\bar{\ell}^i \to \bar{\bar{\ell}}^i$, яке визначається вектором $\bar{r}^i(\rho^i)$ в площині твірної $\bar{\ell}^i$, система /6.35/ набирає вигляду

$$z = f(\sqrt{x^2+y^2}, \rho^i) + |\bar{h}^i|;$$
$$y = tg[\varphi^i(\rho^i)]\, x + |\bar{r}_1^i| \sin[\varphi^i(\rho^i)], \qquad /6.36/$$

де $|\bar{r}_1^i| = \sqrt{|\bar{r}_x^i|^2 + |\bar{r}_y^i|^2}$, $|\bar{h}^i| = \sqrt{|\bar{r}^i|^2 - |\bar{r}_1^i|^2}$, $0 \le x, y, z$.

Виключаючи параметр ρ^i з /6.36/, знайдемо рівняння квазігвинтової поверхні. Очевидно, квазігвинтові поверхні є узагальненням гвинтових, що розглядалися раніше.

д/ Каналова поверхня вже фігурувала як окремий випадок циклічної. Проте з сучасної точки зору каналовою називають будь-яку кінематичну поверхню, твірна якої замкнена крива.

Отже, каналові поверхні займають особливе місце серед технічних поверхонь, і існує багато різноманітних способів їх задання, які застосовують залежно від конкретних умов проектування [46].

Розглядуваний далі спосіб вперше /стосовно до задання каналових поверхонь/ викладено в [74]. Він узагальнює /у випадку поверхні/ відомий спосіб Лаймінга [80, с. 28-30], яким користувалися для задання плоских обводів з дуг конічних перерізів. Перевагою його є можливість використання широкого діапазону аналітичних зображень.

Припустимо, що каналову поверхню задано двома кінцевими перерізами-твірними, які розміщені в одній з площин проекцій, наприклад в $\pi_2 = (xOz)$. Аналітичне зображення однієї з них /рис. 6.9I/

$$f(x,z)=0;$$
$$y=0,$$

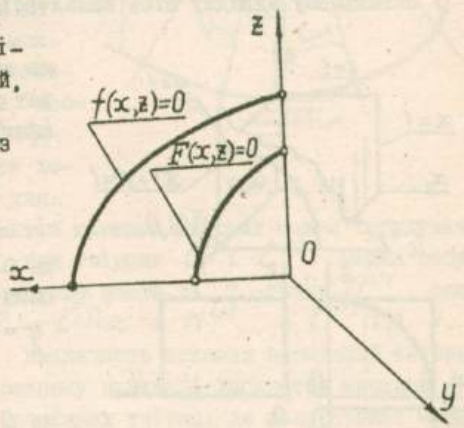


Рис. 6.9I

а другої -

$$F(x,z)=0;$$
$$y=0.$$

Легко помітити, що система

$$(1-\lambda^{\varphi(n)})f(x,z)+\lambda^{\varphi(n)}F(x,z)=0;$$
$$y=0, \qquad /6.37/$$

де $0 \leq \lambda^{\varphi(n)} \leq 1$ визначає двопараметричну сім"ю окремих проміжних твірних, що забезпечують плавний перехід від твірної $f(x,z)=0$ до твірної $F(x,z)$.

Для одержання поверхні тепер достатньо закономірно вивести твірні сім"ї /6.37/ з площини xOz . Якщо таке виведення виконати за допомогою перенесення вздовж осі Oy так, щоб кінцева твірна зайняла положення

$$F(x,z)=0;$$
$$y=1,$$

то рівняння каналової поверхні матиме вигляд

$$\Omega(x,y,z)=(1-y^{\varphi(n)})f(x,z)+y^{\varphi(n)}F(x,z)=0, \qquad /6.38/$$

де $0 \le y \le 1$, n – натуральні числа, $\varphi(n>0$, а $y=\lambda$.

Якщо f і F – центральні криві, то $\Omega(x,y,z)=0$ – осьова поверхня з віссю-прямою, що в даному разі паралельна осі Oy .

У загальному випадку вісь каналової поверхні – просторова крива.

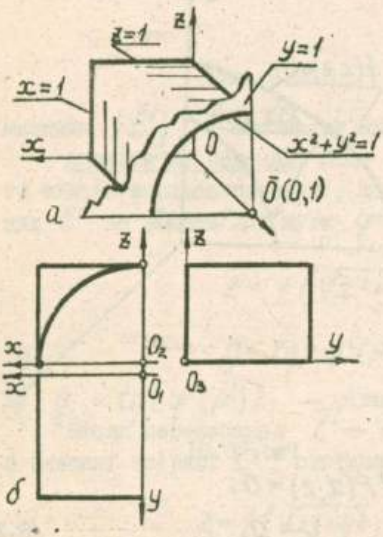


Рис. 6.92

Приклад. Нехай кінцева твірна каналової поверхні f – квадрат у площині $\pi_2 = xOz$. аналітичне зображення якого

$$f(x,z)=(1-x^2)(1-z^2)=0;$$
$$y=0,$$

де $0 \le x, z \le 1$, а друга кінцева твірна – коло в площині $y=1$ з аналітичним зображенням

$$F(x,z)=x^2+z^2-1=0;$$
$$y=1,$$

де $0 \le x, z \le 1$.

Поклавши, що $\varphi(n)=1$ та взявши до уваги /6.38/, запишемо рівняння відсіку каналової поверхні в даному конкретному випадку /рис. 6.92, а/

$$(1-x^2)(1-y^3)(1-z^2)+y(x^2+z^2-1)=0,$$

де $0 \le x, y, z \le 1$

/на рис. 6.92, б зображено КП відсіку поверхні/.

Спосіб, який розглянуто, дозволяє суттєво збільшити можливість автоматизації проектування каналових поверхонь.

6.2.3. Каркасний метод задання поверхонь. КП каркасних поверхонь

I. Досі розглядалися кінематичні поверхні з постійною або змінною твірною і законом її переміщення. Кожна з таких поверхонь є неперервна множина твірних або напрямних, тобто $\Omega = \{l^i : P(l^i)\} = \{n^j : P'(n^j)\}$, де $P(l^i)$ і $P'(n^j)$ – сукупність умов, що їх накладено на елементи-твірні або елементи-напрямні.

Дискретна * підмножина цих множин – каркас поверхні. На рис. 6.93 показано каркас твірних конічної поверхні $\{l^i\} - \Omega^K \subset \Omega$.

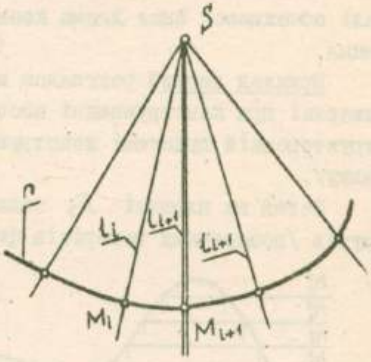


Рис. 6.93

Сама по собі сукупність твірних /напрямних/ не визначає конічної поверхні. Справді, від неї неможливо безпосередньо перейти до поверхні. Такий перехід стає можливим лише після того, як зумовлено розподіл елементів каркаса, тобто накладено умови $P(l^i)(P'(n^j))$. У даному випадку досить задати хоча б одну напрямну n. Тоді для будь-яких двох сусідніх елементів каркаса твірних можна побудувати проміжний елемент. Наприклад, для твірних l^i і l^{i+2} можна побудувати l^{i+1}. Для цього достатньо взяти на n точку M^{i+1} так, щоб $M^{i+1} \in M^i M^{i+2}$ /де $M^i = l^i \cap n$ і $M^{i+2} = l^{i+2} \cap n$ /. Точка M^{i+1} і вершина S визначають шуканий проміжний елемент l^{i+1}. Отже, в даному конкретному прикладі дискретна множина /каркас/ доповнюється побудовою проміжних твірних до неперервної множини-поверхні.

Інколи каркас, для якого можливий зазначений перехід до поверхні, називають неперервним каркасом**, що визначає відповідну поверхню. Він може складатися лише з елементів, кожного з яких визначено за формою.

---

* Тобто така, що між двома будь-якими сусідніми елементами такої підмножини є місце хоча б для єдиного елемента.

** Що не зовсім слушно, бо каркас вже за визначенням є дискретним.

Отож, поряд з методом задання кінематичної поверхні на КП за допомогою визначника існує також метод задання кінематичної поверхні за допомогою неперервного каркаса - каркасний метод задання кінематичної поверхні. Але якщо задання одного з визначників поверхні є необхідною умовою для визначення поверхні, а отже, і для задання її на КП, то задання каркаса є лише достатньою умовою.

Прикладів застосування каркасного методу було наведено доволі. Далі обмежимося лише двома конкретними, що торкаються літакобудування.

Приклад перший розглядає використання каркасного методу задання поверхні при конструюванні носової частини фюзеляжа літака /в конструкторській практиці конструювання відбувається в зворотному порядку/.

Нехай на площині π_5 задано множину профільних проекцій шпангоутів /поперечних перерізів фюзеляжа/: $\{\rho^i\}$ і $\{\bar{\rho}^i\}$ /рис. 6.94/.

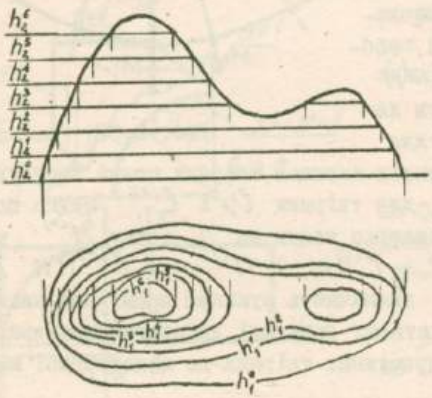


Рис. 6.94

Шпангоут являє собою замкнену коробову криву еліпсів, верхня (ρ^i) й нижня $(\bar{\rho}^i)$ частини якої спряжені в точках (A^i) головної горизонталі (h)*.

Розміщення шпангоутів у просторі визначається заданням верхнього головного полубатокса δ, нижнього головного полубатокса $(\bar{\delta})$ і головної горизонталі. Оскільки δ або h визначають кожний проміжний шпангоут за формою, то можлива побудова будь-якого з них /їх каркас неперервний/. Якщо форма шпангоутів залишилася б невизначеною, то каркас виявився дискретним і не визначив би поверхню.

Якщо аналітична модель верхнього полубатокса /беремо його за параболу/:

$$z^2 = 2q_p(n-x); \quad y=0,$$

де $0 \le x \le m$, $d\sqrt{(n-m)/n} \le z \le d$,

* Інколи її називають ще будівельною горизонталлю.

нижнього полубатокса /теж парабола/:

$$z^2 = 2q_{\bar{p}}(n-x);$$
$$y = 0,$$

де $0 \le x \le m$, $-c \le z \le -c\sqrt{(n-m)/n}$.

шпангоута /верхня частина/:

$$y^2/a^2 + z^2/d^2 = 1;$$
$$x = 0,$$

де $-a \le y \le a$, $0 \le z \le b$,

шпангоута /нижня частина/:

$$y^2/a^2 + z^2/c^2 = 1;$$
$$x = 0,$$

де $-a \le y \le a$, $-c \le z \le 0$,

і, нарешті, головної горизонталі /що теж парабола/:

$$y^2 = 2q_h(n-x);$$
$$z = 0,$$

де $0 \le x \le m$, $a\sqrt{(n-m)/n} \le y \le a$ і $-a \le y \le -a\sqrt{(n-m)/n}$,

то аналітична модель фюзеляжа буде такою:

Ω /верхня частина/ –

$$\frac{y^2}{(a^2/n)(n-x)} + \frac{z^2}{(d^2/n)(n-x)} = 1,$$

де $0 \le x \le m$, $-a \le y \le -a\sqrt{(n-m)/n}$, $a\sqrt{(n-m)/n} \le y \le a$, $d\sqrt{(n-m)/n} \le z \le$

$\bar{\Omega}$ /нижня частина/ –

$$\frac{y^2}{(a^2/n)(n-x)} + \frac{z^2}{(d^2/n)(n-x)} = 1,$$

де $0 \le x \le m$, $-a \le y \le -a\sqrt{(n-m)/n}$, $a\sqrt{(n-m)/n} \le y \le a$, $-c \le z \le -c\sqrt{(n-m)/n}$.

Другий приклад стосується використання каркасного методу для задання поверхні крила.

Припустимо, що в площині проекцій $\pi_2 = xOz$ задано криву $z = f(x)$, а в площині проекцій $\pi_1 = xOy$ – сім"ю /однопараметричну з параметром k / замкнених кривих $y = F(x,k)$. Криву $z = f(x)$ беремо за розподільну криву крилових перерізів в просторі. Для цього через точки $B^1, B^2, \dots, B^i \in y = F(xk)$ /рис. 6.95, а/ проводимо прямі $t^i \parallel t$ – прямій, що $t \subset (xOz) \wedge \wedge t) A \wedge t, \hat{} (Ox) = \varphi$. Одержуємо точки $\bar{B}^i \in y = f(x)$. На хордах $\bar{A}^i\bar{B}^i \parallel (Ox)$ будуємо криві, конгруентні відповідним кривим сім"ї $y = F(x,k)$. Вони і визначають крилову поверхню.

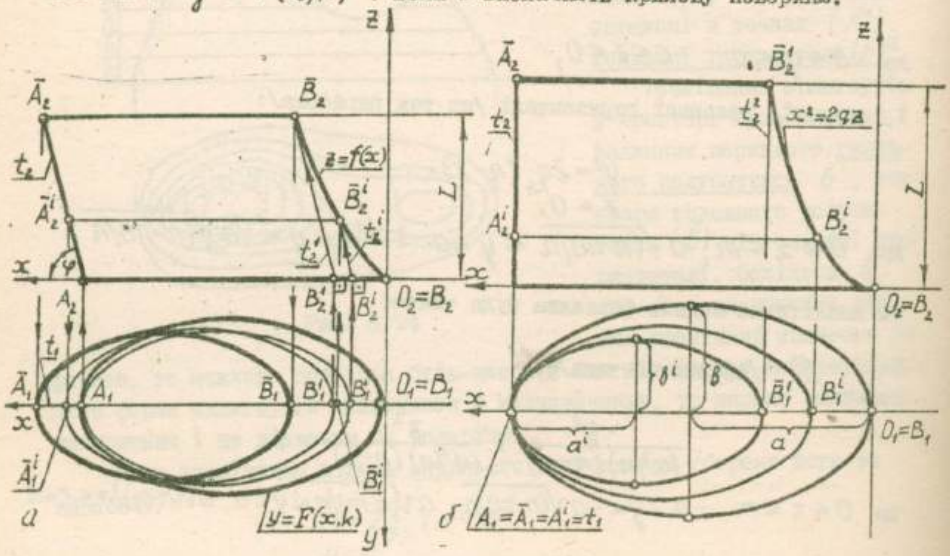


Рис. 6.95

Нехай кут $\varphi = \pi/2$, сім"я $y = F(x, \lambda)$ - сім"я еліпсів $\frac{(x-\bar{O}^i)^2}{(a^i)^2} + \frac{y^2}{(b^i)^2} = 1$ з параметром $b^i/a^i = b/a = k$, а крилова $z = f(x)$ - парабола $x^2 = 2qz$ /рис. 6.95, б/. Тоді точки $\bar{O}_1^i$ - проекції точок $\bar{O}^i$ в π_1 визначаються координатами $\bar{O}_1^i\left(\frac{2a-\sqrt{2qz}}{2}, 0\right)$, де $2a$ - більша вісь найбільшого еліпса, змінна більша вісь еліпса-перерізу - $2a^i = 2a - \sqrt{2qz}$, змінна менша вісь еліпса-перерізу - $2b^i = (b/a)(2a - \sqrt{2qz})$ і, нарешті, рівняння поверхні крила набуває вигляду /якщо його довжина L /

$$\frac{[x-(2a-\sqrt{2qz})/2]^2}{[(2a-\sqrt{2qz})/2]^2} + \frac{y^2}{(b^2/a^2)[(2a-\sqrt{2qz})/2]^2} = 1,$$

де $0 \le x \le 2a$, $-b \le y \le b$, $0 \le z \le L$.

в/ У практиці технічного проектування поверхні нерідко конструюються /не визначаються/ за допомогою такого каркаса, що дозволяє лише наближений перехід до поверхні. Такий каркас інколи називають дискретним *, а відповідну поверхню - каркасною.

Найбільш дохідливим прикладом такої поверхні є так звана топографічна поверхня /рис. 6.96/. Тут каркас складають горизонталі $\{h^i\}$ - незакономірні криві.

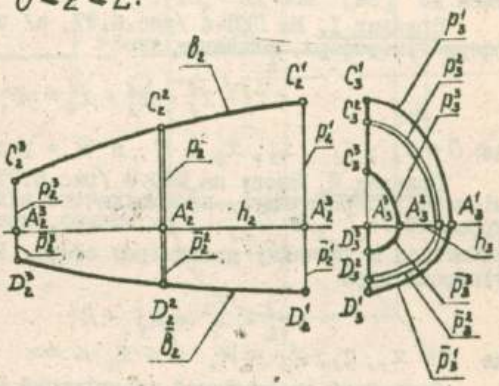


Рис. 6.96

Задання технічної поверхні без використання кінематичного

* Що не зовсім слушно, бо каркас уже за визначенням є дискретним.

закону її утворення виявляється доцільним тоді, коли відповідна технічна поверхня не потребує подальшої інструментальної обробки /наприклад, поверхні фюзеляжа літака, вертольота та інших літаючих апаратів, кузова автомобіля, корпуса корабля, оболонки перекриття будівельної споруди, якщо це не ускладнює технологію їх будівництва із застосуванням опалубки і т.п./.

При цьому використовується каркас обводів, що звичайно належать до горизонтальних, фронтальних чи профільних площин або й до усіх разом. Кожний з обводів в свою чергу заданий своїм точковим каркасом.

Очевидно, що каркасну поверхню може бути задано точковим каркасом поверхні або каркасом чи сіткою ліній /наприклад, паралелей, меридіанів, геодезичних та ін./ поверхні, яку наближено задано точковим каркасом.

Питання геометричного конструювання технічних поверхонь висвітлені в [45, 46, 56, 61, 63, 65, 71, 73, 76, 77, 81, 91].

Різні аспекти геометричного конструювання архітектурних поверхонь розглянуто в [67, 68 тощо].

6.3. КП багатовимірних поверхонь

У тривимірному евклідовому просторі, як можна було переконатися, поверхні двовимірні. В багатовимірному евклідовому просторі номенклатура поверхонь значно розширюється. Так, в n-вимірному просторі існують поверхні від двовимірних до $n-1$ -вимірних.

Обмежимося лише двома прикладами. За подробицями можна звернутися до [34] або до [31].

Приклад 1. На ПКП-4 /рис.6.97, а/ зображено відсік тривимірної сфери-гіперсфери, рівняння якої

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = R^2,$$

де $0 \le x_1, x_2, x_3, x_4 \le R$, а R - радіус гіперсфери.

Приклад 2. Знову на ПКП-4 /рис.6.97,б/ зображено відсік тривимірного гіперциліндра, проекціюючого відносно тривимірного простору проекцій Π_{123}. В Π_{123}, як бачимо, проекціюючий гіперциліндр проеціюється в звичайну двовимірну сферу. Рівняння відсіку проеціюючого гіперциліндра

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2,$$

де $0 \le x_1, x_2, x_3 \le R$, $0 \le x_4 \le \infty$.

Звичайний двовимірний проеціюючий циліндр показано на ПКП-4 в двох випадках: коли він належить тривимірному простору (Π_{123} / /рис.6.97, в/ і чотиривимірному простору (Π_{1234} /рис.6.97,г/.

У першому випадку його рівняння $x_1^2 + x_2^2 = R^2$,
де $0 \le x_1, x_2 \le R$, $0 \le x_3 < \infty$, $x_4 = 0$, у другому – $x_1^2 + x_2^2 = R^2$,
де $0 \le x_1, x_2 \le R$, $0 \le x_3, x_4 < \infty$.

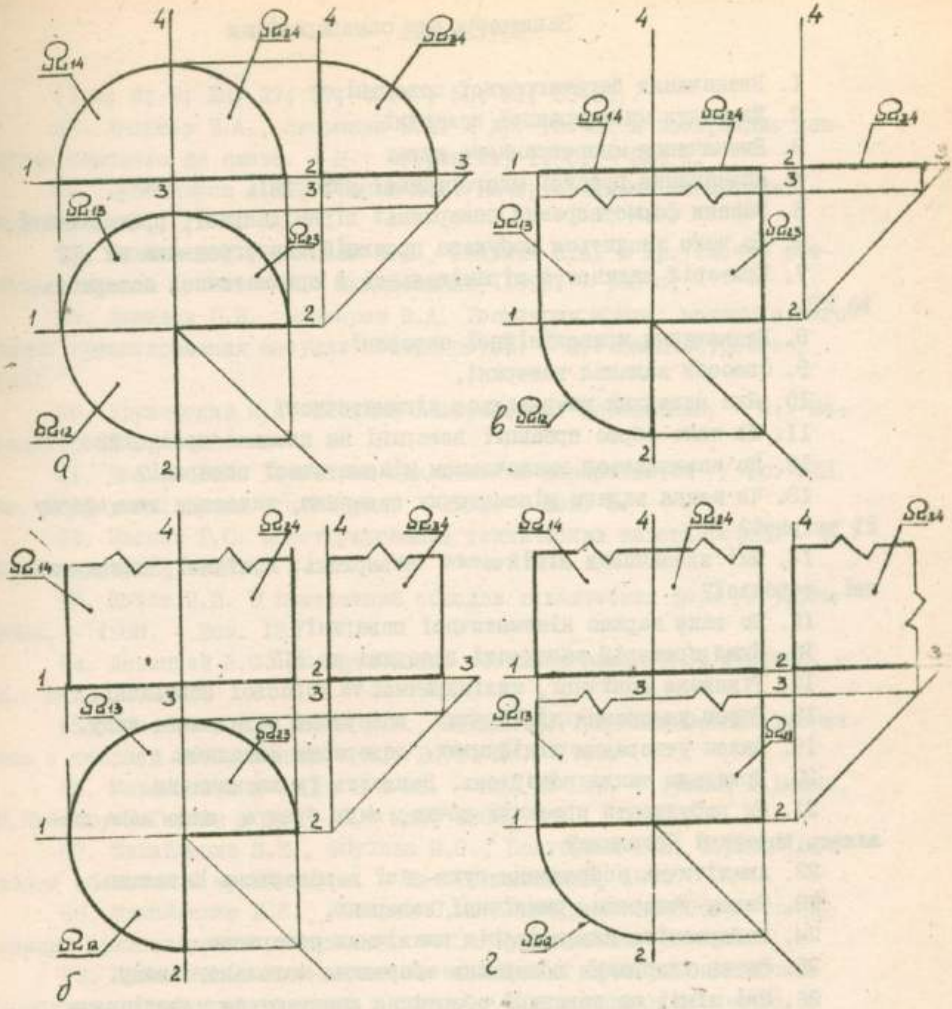


Рис. 6.97

Запитання для самоперевірки

I. Визначення багатогранної поверхні.

2. Елементи многогранної поверхні.

3. Визначення многогранного кута.

4. Визначення простої многогранної поверхні.

5. Закони формотворення поверхонь: пірамідальної, призматичної.

6. До чого зводиться побудова проекцій многогранника на КП?

7. Критерій заданості пірамідальної й призматичної поверхонь на КП.

8. Визначення криволінійної поверхні.

9. Способи задання поверхні.

I0. Яка поверхня називається кінематичною?

II. Що таке обрис проекції поверхні на площині проекцій?

I2. Що називається визначником кінематичної поверхні?

I3. Чи можна задати кінематичну поверхню, вказавши лише форму її твірної?

I4. Які визначники лінійчатих поверхонь: конічної, циліндричної, торсової?

I5. Що таке каркас кінематичної поверхні?

I6. Який критерій заданості поверхні на КП?

I7. Рівняння конічної, циліндричної та торсової поверхонь.

I8. Закон утворення лінійчатих поверхонь загального виду.

I9. Закон утворення лінійчатих поверхонь Каталана.

20. Приклади таких поверхонь. Запишіть їх визначники.

2I. Як побудувати проекції точки, яких бракує, якщо вона належить поверхні Каталана?

22. Аналітичне зображення будь-якої з поверхонь Каталана.

23. Закон утворення циклічної поверхні.

24. Найпростіша класифікація циклічних поверхонь.

25. Закон утворення поверхонь обертання загального виду.

26. Які лінії на поверхні обертання називаються меридіанами й паралелями? екватором? горлом?

27. Як називаються поверхні обертання частинного виду з твірними: прямою, колом, кривою 2-го порядку? Запишіть їх визначники.

28. Аналітичні зображення поверхонь обертання: конуса, циліндра, кільця, еліпсоїда.

29. Кінематична поверхня з твірною загального виду.

30. Які поверхні називають каркасними?

3I. Суть каркасного методу задання поверхні.

[I-5; 8; 9; 26; 27; 37; 45-47; 50; 5I; 53-55].

56. Андреев В.А., Зворыкин В.А. и др. Расчет и построение контуров самолета на плазе. - М.: Оборонгиз, I960. - 324 с.

57. Бубенников А.В., Громов М.Я. Начертательная геометрия. - М.: Высш. шк., I973.

58. Гуляев В.И., Баженов В.А., Гоцуляк Е.А. и др. Расчет оболочек сложной формы. - К.: Будивэльник, I990. - I90 с.

59. Давидов Ю.В., Зингарев В.А. Геометрия крыла: методы и алгоритмы проектирования несущих поверхностей. - М.: Машиностроение, I987.

60. Дружинский И.А. Сложные поверхности. Справочник. - М.: Машиностроение, I985.

6I. Иванов В.Н. Геометрия циклических поверхностей // Тр. УДН им. П.Лумумбы: Прикл. геометрия. - I97I. - Вып. 8.

62. Иванов Г.С. Конструирование технических поверхностей. - М.: Машиностроение, I987.

63. Котов И.И. О построении обводов технических форм // Труды ВЗЭИ. - I958. - Вып. I3.

64. Левицкий В.С. Аналитические методы в инженерной графике. - М.: МАИ, I978.

65. Маневич В.А., Котов И.И., Зенгин А.Р. Аналитическая геометрия с теорией изображений. - М.: Высш. шк., I969.

66. Математика в САПР: В 2 кн. - Кн. I. Пер. с франц. П.Шенен, М.Коснар, И.Гардан и др. - М.: Мир, I982.

67. Михайленко В.Е., Обухова В.С., Подгорный А.Л. Формообразование оболочек в архитектуре. - К.: Будивэльник, I972.

68. Михайленко В.Е., Ковалев С.М. Конструирование форм современных архитектурных сооружений. - К.: Будивэльник, I978.

69. Найдыш В.М. Использование мгновенных преобразований для конструирования поверхностей и обводов // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К.: Будивэльник, I985. - Вып. 39.

70. Павлидис Т. Алгоритмы машинной графики и обработка изображений. Пер. с англ. - М.: Радио и связь, I985. - 400 с.

7I. Павлов А.В. Некоторые задачи аппроксимации незакономерных поверхностей // Начертательная геометрия и инженерная графика. - К., Будивэльник, I966. - Вып. 4.

72. Препарата Ф., Шеймос М. Вычислительная геометрия. Введение. Пер. с англ. – М.: Мир, 1983.

73. Рыжов Н.Н. Аппроксимация сложных поверхностей развертывающимися поверхностями // Тр. ВЗЭИ, 1953. – Вып. 13.

74. Сафиулина К.Р. Конструирование каналовых поверхностей с помощью обобщенного способа Даймонга. – Харьков, 1985. Рукопись деп. в ВИНИТИ, № 3851.

75. Сидоренко С.М. Вычислительная геометрия в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1983.

76. Цвицинский И.В. Алгоритмы одночленных подгрупп групп проективных преобразований и их приложений к техническим задачам. Автореф. дис. ... д-ра техн.наук. – Кишинев, 1975.

77. Цвицинский И.В. Конструирование поверхностей методом выделения инвариантных поверхностей групп Ли преобразований // Прикладные задачи геометр. преобразований. – Кишинев: Штиинца, 1977.

78. Чернецкий Н.М. Графические и аналитические алгоритмы построений графических моделей линий и поверхностей: Учеб. пособие. – Харьков: ХАИ, 1989.

79. Чернецкий Н.М., Мирошниченко А.В. Условия реализации некоторых способов конструирования циклических поверхностей // Прикл. геометрия и инж. графика. – К.: Будивэльник, 1980. – Вып. 29.

80. Фокс А., Пратт М. Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве. Пер. с англ. – М.: Мир, 1982.

7. ПЕРЕТВОРЕННЯ КП

Зміна КП, зумовлена зміною проекцій, які його утворюють, називається перетворенням КП. У найпростіших випадках, що далі розглядаються, перетворення КП зумовлене зміною взаємного розміщення оригіналу та площин проекцій.

На рис. 7.1,а зображено КП деякого об"єкта. За формою геометричний об"єкт – це пряма призма з квадратною основою та вирізом у верхній частині. Але розміщення горизонтального ребра (AB) вирізу таке, що форму вирізу важко прочитати на фронтальній проекції.

Прямокутне проеціювання в площину π_2 визначається вектором $\vec{e}^{\pi_2} \perp \pi_2$, а в площину π_1 – вектором $\vec{e}^{\pi_1} \perp \pi_1$. Оскільки фронтальна проекція об"єкта є невдалою, замінимо її новою, вводячи новий напрям проеціювання $\vec{e}^{A} \parallel [AB]$ і відповідно нову фронтальну

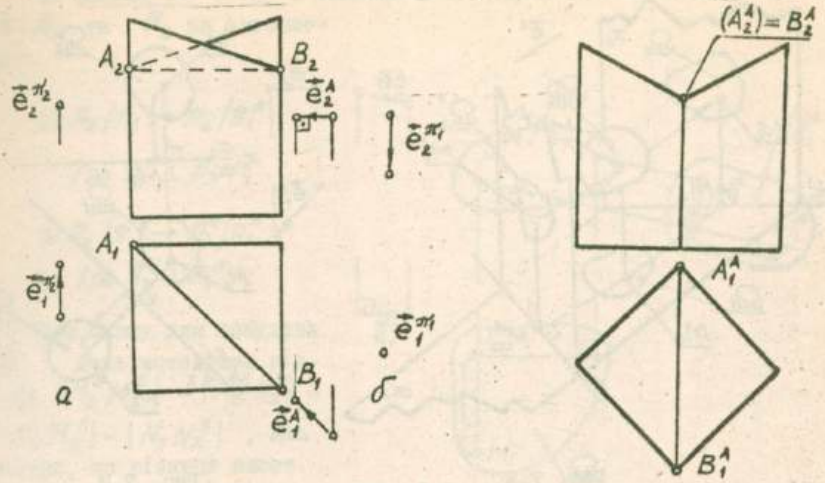


Рис. 7.I

площину проекцій $\pi_2^A \perp \vec{e}^A$ /зумовлюючи $\pi_2^A \perp \pi_1$ /. Внаслідок цього дістанемо новий КП із старою горизонтальною і новою фронтальною проекціями, на якому форма вирізу легко читається /рис. 7.I, б/.

7.I. Заміна площини проекцій

I. У розглянутому прикладі поліпшення фронтальної проекції об"єкта досягнуто за рахунок зміни напряму прямокутного проеціювання, а отже, зміни розміщення площини проекцій (π_2) . При цьому сам об"єкт залишається нерухомим.

Таке перетворення КП називається заміною площини проекцій. Вияв-мо властивості цього перетворення. Нехай об"єкт Ω віднесено до системи площин проекцій π_1/π_1/рис. 7.2/. Тоді Ω_1 - горизонталь-на, а Ω_2 - фронтальна проекція Ω.

2. Заміна π_2 . Замінюємо $\pi_2 \to \pi_2^A \perp \pi_1$. Це означає, що змінюється напрям проеціювання: $\vec{e}^{\pi_2} \to \vec{e}^A \perp \pi_2^A$ /при цьому $\pi_2^A \perp \pi_1$, а отже, $\vec{e}^A \parallel \pi_1$, /. Замість осі $x = \pi_1 \cap \pi_2$ з"являється вісь $x^A = \pi_1 \cap \pi_2^A$, а $\Omega_2 \to \Omega_2^A$.

Якщо точка $M \in \Omega$, то проекція $M_2^A \in \Omega_2^A$. Очевидно, лінія проеційного зв"язку $(M, M_2^A) \perp x^A$ /рис. 7.3/. Оскільки $M_x = (M_1 M_2) \cap x$ і $M_x^A = (M_1 M_2^A) \cap x^A$, а $\vec{e}^A \parallel \pi_1$, то $|M_x^A M_2^A| = |M_x M_2|$, тобто висота точки M не змінилась.

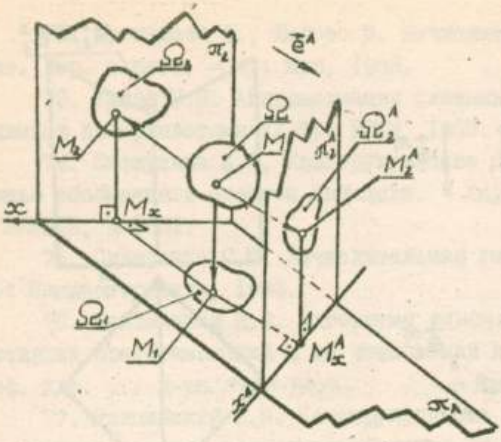


Рис. 7.2

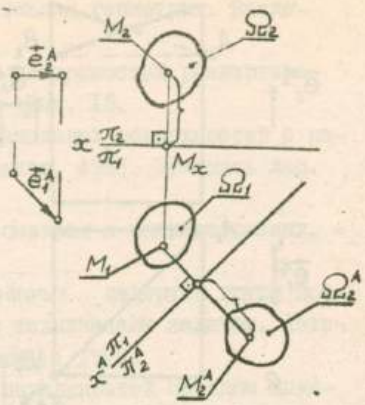


Рис. 7.3

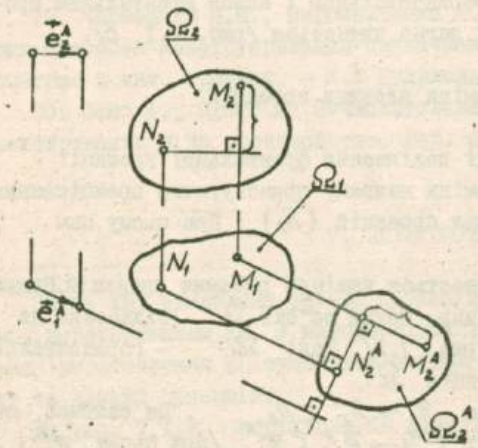


Рис. 7.4

Візьмемо ще одну точку $N \in \Omega$. Оскільки $|N_x^A N_2^A| = |N_x N_2|$, то $|M_x^A M_2^A| - |N_x^A N_2^A| = |M_x M_2| - |N_x N_2|$ і, отже, побудова Ω_2^A можлива й без побудови нової осі проекцій x^A /рис. 7.4/. У цьому випадку положення однієї з точок M_2^A, N_2^A обирається довільно на лінії нового проекційного зв"язку, а одержаний новий КП – безвісний.

3. Заміна π_1. Тут $\pi_1 \to \pi_1^A \perp \pi_2$, що зумовлює зміну напряму проеціювання: $\vec{e}^{\pi_1} \to \vec{e}^A \perp \pi_1^A$ /де $\vec{e}^A \parallel \pi_2$ /. Отже, $x \to x^A$ = $\pi_2 \cap \pi_1^A$, $\Omega_1 \to \Omega_1^A$, а Ω_2 не змінюється. При побудові Ω_1^A враховуємо: 1/ $(M_2 M_1^A) \perp x^A$; 2/ $|M_x^A M_1^A| = |M_x M_1|$, тобто глибина точки M не змінюється. Отож, різниця глибин двох будь-яких точок /$M, N \in \Omega$/ також не змінюється /рис. 7.5/.

4. Заміна Π_1 і Π_2. Можлива й послідовна заміна площин проекцій Π_1 та Π_2 за алгоритмами:

1/ $\Pi_2/\Pi_1 \rightarrow \Pi_2/\Pi_1^A$

/де $\Pi_1^A \perp \Pi_2$ /;

2/ $\Pi_2/\Pi_1^A \rightarrow \Pi_2^B/\Pi_1^A$

/де $\Pi_2^B \perp \Pi_1^A$ /.

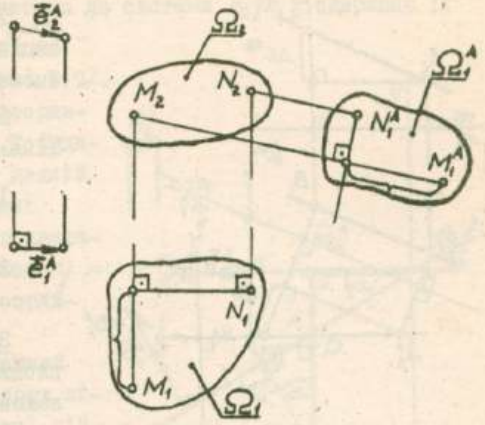


Рис. 7.5

При цьому для побудови Ω_2^B використовуємо рівність $|M_2^B M_x^B| - |N_2^B N_x^B| = |M_2 M_x^A| - |N_2 N_x^A|$, яка показує, що різниці висот /або, аналогічно, глибин/ можна брати з площин проекцій /з проекційного поля/ того самого найменування в попередній системі /в даному випадку в системі Π_2/Π_1^A рис. 7.6/.

Звідси випливає, що й тут, як і у випадку заміни однієї з площин проекцій, нанесення осей не обов"язкове.

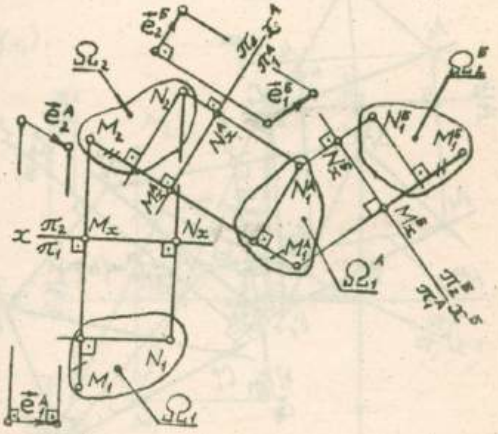


Рис. 7.6

5. У розглянутих випадках заміни площин проекцій новий напрям проеціювання /або нове положення площини проекцій чи осі проекцій на КП/ обирають довільно. Звичайно це залежить від конкретних умов задачі. Отож, задля з"ясування конкретних деталей алгоритму заміни розглянемо розв"язок таких основних задач.

Задача 7.1. У системі π_2/π_1 пряма AB – загального положення: 1/ замінивши одну з площин проекцій, перетворити (AB) в лінію рівня;

2/ заміною двох площин проекцій перетворити (AB) у проеціюючу.

Алгоритм розв"язання задачі 7.1:

1/ $\pi_2/\pi_1 \to \pi_2^A/\pi_1$, де $\pi_2^A \parallel (AB)$ /рис. 7.7/;

2/ $\pi_2^A/\pi_1 \to \pi_2^A/\pi_1^B$, де $\pi_1^B \perp (AB)$ /рис. 7.7/.

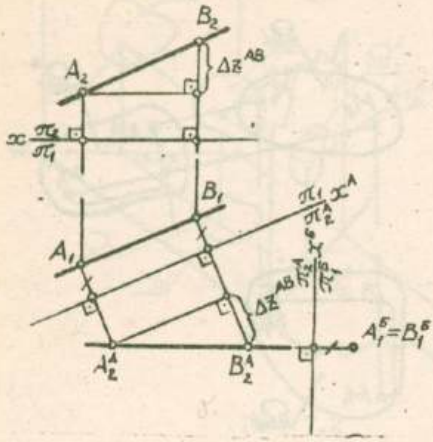


Рис. 7.7

Задача 7.2. У системі π_2/π_1 площина ABC – загального положення:

1/ заміною однієї з площин проекцій перетворити (ABC) в проеціюючу;

2/ заміною двох з площин проекцій перетворити (ABC) в площину рівня.

Алгоритм розв"язання задачі 7.2:

1/ $\pi_2/\pi_1 \to \pi_2^A/\pi_1$, де $\pi_2^A \perp (ABC)$, оскільки $h^{ABC} \perp \pi_2^A$ /рис. 7.8/;

2/ $\pi_2^A/\pi_1 \to \pi_2^A/\pi_1^B$, де $\pi_1^B \parallel (ABC)$ /рис. 7.8/.

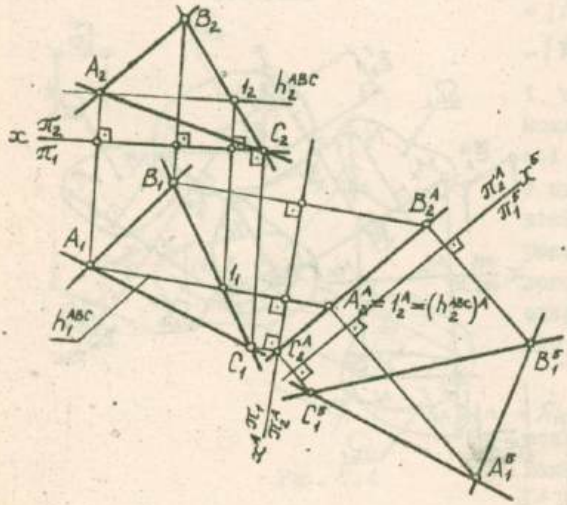


Рис. 7.8

7.2. Аналітичне подання заміни площин проекцій

Нехай точку $M \in \Omega$ віднесено до системи π_2/π_1 і одержано її КП, а потім заміною $\pi_2/\pi_1 \to \pi_2^A/\pi_1$ – КП точки M у системі π_2^A/π_1 /рис.7.9/.

Знайдемо залежність між координатами проекцій M_1 і M_2 та координатами нової проекції M_2^A у деякій прямокутній координатній системі xOy площини КП. Для цього вважаємо, що вісь $x = (Ox)$, а вісь $y = \pi_2 \cap \pi_2^A$, тобто початок координат – точка $O = x \cap x^A$.

Домовимося також, що додатний напрям відліку координат – уздовж лівої півосі x і вздовж верхньої півосі y, а додатний напрям відліку кута $x \hat{} x^A = \alpha$ збігається з рухом годинникової стрілки від додатної півосі x.

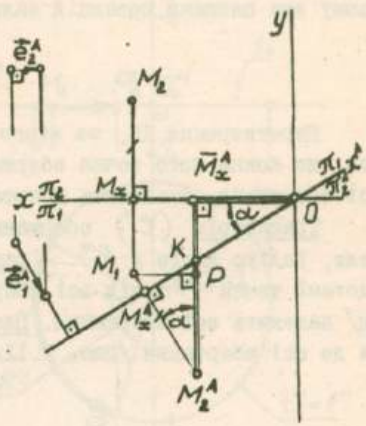


Рис. 7.9

Покладемо, що $M_1(x_M, y_{M_1})$, $M_2(x_M, y_{M_2})$ і $M_2^A(x, y)$. Оскільки $|\bar{M}_x^A M_2^A| = |\bar{M}_x^A K| + |KM_2^A|$, то /з $\Delta \bar{M}_x^A OK$ та $\Delta M_x^A K M_2^A$ / $y = x\operatorname{tg}\alpha + y_{M_2}/\cos\alpha$.

З $\Delta M_1 P M_2^A$ дістаємо $x_M - x = (y - y_{M_1})\operatorname{tg}\alpha$.

Нарешті, з системи

$$y = x\operatorname{tg}\alpha + y_{M_2}/\cos\alpha;$$
$$x_M - x = (y - y_{M_1})\operatorname{tg}\alpha$$

випливає шукана система /для випадку $(-\pi/2) < \alpha < 0$ /

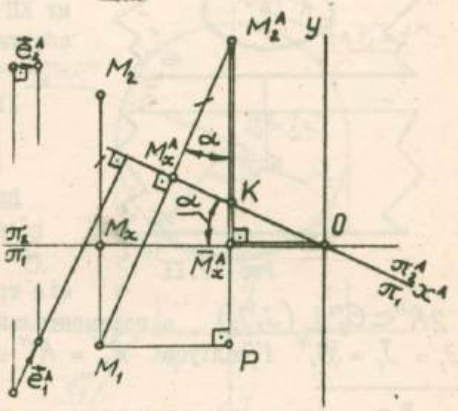


Рис. 7.10

$$x = x_M \cos^2\alpha + y_{M_1} \sin\alpha\cos\alpha - y_{M_2} \sin\alpha; \qquad /7.1/$$
$$y = x_M \sin\alpha\cos\alpha + y_{M_1} \sin^2\alpha + y_{M_2} \cos\alpha.$$

Якщо $0 < \alpha < \pi/2$, то, згідно з рис. 7.10, після аналогічних міркувань запишемо систему

$$x = x_M \cos^2\alpha - y_{M_1} \sin\alpha\cos\alpha - y_{M_2} \sin\alpha;$$
$$y = x_M \sin\alpha\cos\alpha - y_{M_1} \sin^2\alpha + y_{M_2} \cos\alpha. \qquad (7.2)$$

Розглянемо тепер перетворення КП, які поліпшують взаємне розміщення оригіналу та площини проекцій переміщенням * оригіналу /при цьому вже площини проекцій залишаються нерухомими/.

7.3. Обертання

Перетворення КП, за якого оригінал /у просторі/ переміщується так, що кожна його точка обертається навколо фіксованої прямої (JJ) - осі обертання, називають обертанням.

Траєкторія (t^M) обертання кожної точки $(M \in \Omega)$ оригіналу - коло, радіус якого / R^M - радіус обертання/ дорівнює за довжиною відстані точки M від осі обертання, а центр / O^M - центр обертання/ належить осі обертання. Площина траєкторії (σ^M) перпендикулярна до осі обертання /рис. 7.11/.

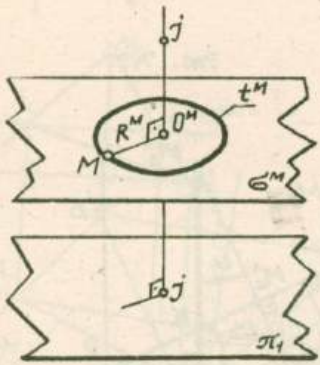


Рис. 7.11

Якщо $M \in (JJ)$, то M нерухома. Отже, вісь обертання - інваріантний /незмінний/ прообраз у даному перетворенні.

Вплив обертання оригіналу на зміну КП залежить від розміщення осі обертання відносно площини проекцій.

I. Обертання навколо проеціюючої осі

Випадок I. $(JJ) \perp \pi_1$. Тут $\forall M \in \Omega$ обертається в площині $\sigma^M \parallel \pi_1$. Отже, фронтальна проекція траєкторії - відрізок: $t_2^M = 2R^M \subset \sigma_2^M \perp (J_2J_2)$, а горизонтальна (t_1^M) - коло з центром в $J_1 = J_1 = O_1^M$ і радіуса $R_1^M = R^M$.

---

* Тут під переміщенням маємо на увазі таке перетворення оригіналу, за якого відстань між двома будь-якими його точками не змінюється.

На рис. 7.12 показано /на КП/ наслідок обертання точки M навколо $(JJ) \perp \pi_1$ на кут φ. Оскільки при такому обертанні відстань $|M_1 N_1|$ між горизонтальними проекціями двох будь-яких точок M, $N \in \Omega$ оригіналу не змінюється /кут нахилу $[MN]$ до π_1 незмінний/, то й горизонтальна проекція Ω_1 теж метрично інваріантна: $\Omega_1 \cong \Omega_1$ /образ і прообраз - конгруентні/.

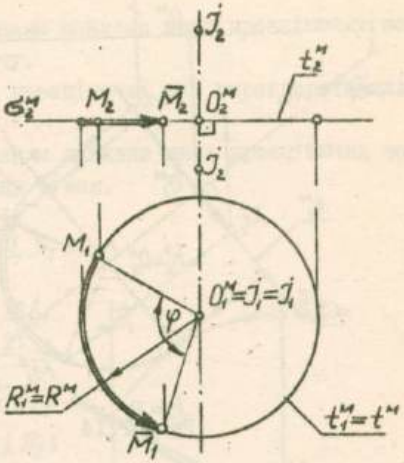


Рис. 7.12

Випадок 2. $(JJ) \perp \pi_2$. Цього разу точка $M \in \Omega$ обертається в площині $\sigma^M \parallel \pi_2$. Отож, горизонтальна проекція траєкторії - відрізок $t_1^M = 2R^M \subset \sigma_1^M \perp (JJ)$, а фронтальна - коло (t_2^M) з центром $J_2 = J_2 = O_2^M$ та радіуса $R_2^M = |M_2 O_2^M| = R^M$ /рис. 7.13/.

У цьому випадку метрично інваріантною виявляється фронтальна проекція оригіналу, тобто $\Omega_2 \cong \Omega_2$ /оскільки кут нахилу довільного відрізка $MN \subset \Omega$ до π_2 при обертанні навколо $(JJ) \perp \pi_2$ не змінюється/.

Точка M_1 переміщається по $(M_1 \bar{M}_1) \perp (J_1 J_1)$.

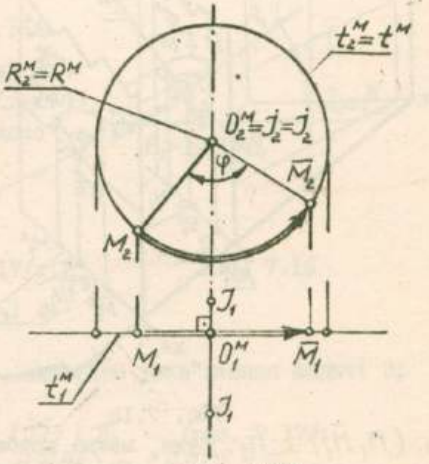


Рис. 7.13

2. Обертання навколо лінії рівня. Обмежимося випадком, коли $(JJ) = h$ - горизонталь /щодо фронталі чи профільної прямої міркування аналогічні/.

Для довільної точки M маємо, що $(JJ) = h \wedge h \perp \sigma^M$ і, отже, $\sigma^M \perp \pi_1$. Звідси $t^M \subset \sigma^M \Rightarrow t_1^M \subset \sigma_1^M \perp h_1$ /рис. 7.14/.

Побудуємо проекції точки $\bar{M}$ – кінцевого положення точки M, що обертається навколо h на кут φ. Труднощі полягають у тому, що траєкторія t^M ні в яку з площин проекцій не проеціюється без спотворення.

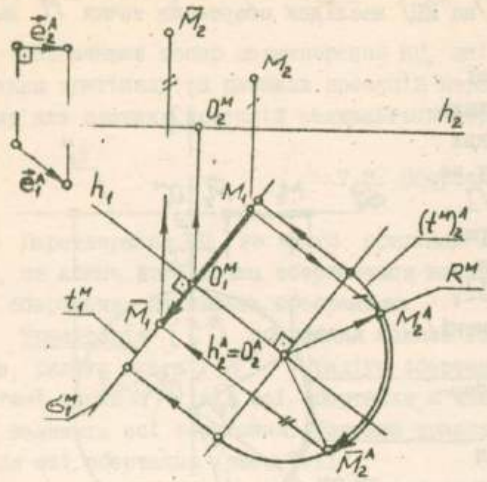


Рис. 7.14

Щоб спроеціювати t^M на натуральну фігуру, скористаємося заміною площин проекцій $/\pi_2 \to \pi_2^A$; рис. 7.15/. Домовимося, що $\pi_2^A \| \sigma^M$, отже, $\bar{e}^A \perp \sigma^M$, тоді $\bar{e}^A \| h$, проекція $h_2^A = (O^M)_2^A$ – точка. Напрям проекційного зв"язку /в новій системі π_2^A / π_1/ $\bar{e}_1^A \perp \sigma_1^M$. Враховуючи незмінність різниці висот точок O^M і M, побудуємо точку M_2^A /див.рис.7.14/. Нова фронтальна проекція траєкторії $(t^M)^A$ – коло з центром в $(O^M)_2^A$ і радіуса $|(O^M)_2^A M_2^A| = R^M$. За центральним кутом φ на проекційному полі π_2^A дістанемо проекцію кінцевого положення точки M – точку $\bar{M}_2^A$. Нарешті, за проекцією $\bar{M}_2^A$ побудуємо спочатку точку $\bar{M}_1$, а потім точку $\bar{M}_2$.

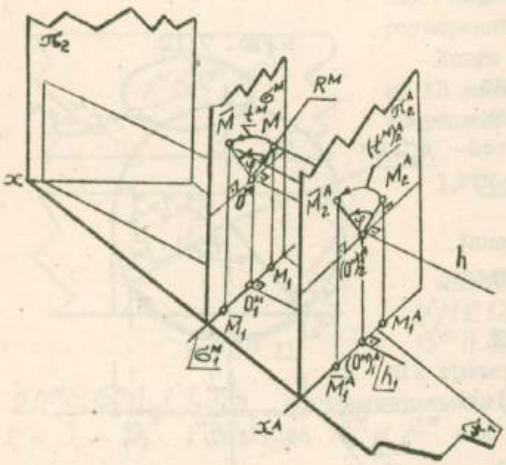


Рис. 7.15

Звернемо увагу на те, що $(M_1 \bar{M}_1) \perp h_1$. Отже, можна зробити загальний висновок: якщо вісь обертання є лінія рівня відносно якої-небудь з площин проекцій, то проекція траєкторії обертання точки, що обертається, на цю ж площину проекцій перпендикулярна до однойменної проекції осі обертання.

3. Вибір осі обертання залежить від конкретних умов задачі. Щоб з"ясувати деякі деталі процесу вибору осі обертання, розглянемо розв"язки таких основних задач:

Задача 1. Обертанням навколо проеціюючої осі перетворити пряму AB на пряму рівня.

Задача 2. Послідовним обертанням навколо двох проеціюючих осей перетворити пряму AB на проеціюючу.

Задача 3. Обертанням навколо проеціюючої осі перетворити площину ABC на проеціюючу.

Задача 4. Послідовним обертанням навколо двох проеціюючих осей перетворити площину ABC на площину рівня.

Алгоритм розв"язання задачі 1:

1/ проведемо $(JJ) \ni B \wedge (JJ) \perp \pi_1$;

2/ навколо (JJ) обернемо $(AB) \to (\bar{A}\bar{B}) \parallel \pi_2$ /рис. 7.16/.

Алгоритм розв"язання задачі 2:

1/, 2/ перші два кроки – алгоритм розв"язання задачі 1;

3/ проведемо $(\bar{J}\bar{J}) \ni \bar{A} \wedge (\bar{J}\bar{J}) \perp \pi_2$;

4/ навколо $(\bar{J}\bar{J})$ обернемо $(\bar{A}\bar{B}) \to (\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}) \perp \pi_1$ /рис. 7.16/.

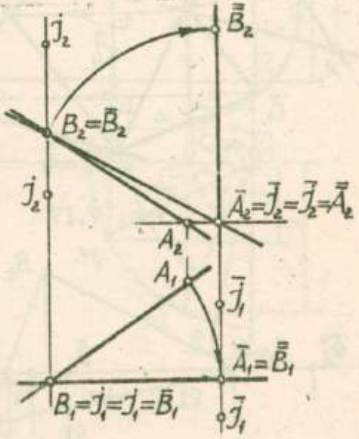


Рис. 7.16

Алгоритм розв"язання задачі 3:

1/ проведемо $(JJ) \ni B \wedge (JJ) \perp \pi_1$;

2/ через точку B проведемо h^{ABC} горизонталь ABC;

3/ навколо (JJ) обернемо $h^{ABC} \to \bar{h}^{ABC} \perp \pi_2$, а отже, і $(ABC) \to (\bar{A}\bar{B}\bar{C}) \perp \pi_2$ /рис. 7.17/.

Алгоритм розв"язання задачі 4:

1/, 2/, 3/ перші три кроки – алгоритм розв"язання задачі 3;

4/ проведемо $(\bar{J}\bar{J}) \ni \bar{A} \wedge (\bar{J}\bar{J}) \perp \pi_2$ /рис. 7.17/;

5/ навколо $(\bar{J}\bar{J})$ обернемо $(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) \to (\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}\bar{\bar{C}}) \parallel \pi_1$.

Особливості обертання навколо лінії рівня з"ясуємо на прикладі розв"язання такої задачі: обертанням навколо горизонталі перетворити площину ABC на горизонтальну.

Розв"язання. У площині загального положення ABC через точку A проведемо горизонталь h /рис. 7.18/. Дістанемо точку $1 = h \cap (BC)$. Тепер для розв"язання задачі достатньо точку B /або C/, обертаючи навколо h, переміщувати до досягнення нею такої самої висоти, що й у горизонталі h. У цей момент радіус обертання (R^B) точки B стане паралельним до π_1, і, отже, $R_1^B = R^B$ /тобто відстань B_1 від h_1/, а $\Delta \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1 \cong \Delta ABC$. Звідси фронтальна проекція площини стане прямою – $\bar{A}_2\bar{B}_2\bar{C}_2 = h_2$. Отож, алгоритм розв"язання задачі такий:

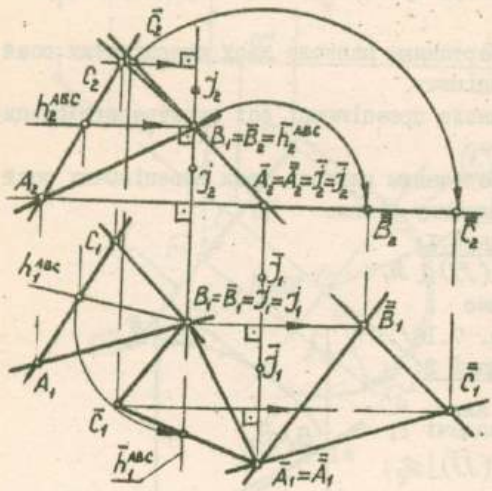


Рис. 7.17

1/ у площині ABC побудуємо пряму $\ell \ni B \perp h$, що за теоремою про проеціювання прямого кута дає $\ell_1 (\ni B_1) \perp h_1$ і, отже, $O_1^B = \ell_1 \cap h_1$;

2/ побудуємо O_2^B /за ЛПЗ/ і дістанемо проекції радіуса обертання R^B: $[O_1^B B_1]$ і $[O_2^B B_2]$;

3/ знайдемо натуральну фігуру R^B, для чого оригінал $[O^B B]$ спроеціюємо в напрямі $\vec{e}^{\,n} \parallel h \perp \pi_2^{\,n}$ і дістанемо $[(O^B)_2^{\,n} B_2^{\,n}]$

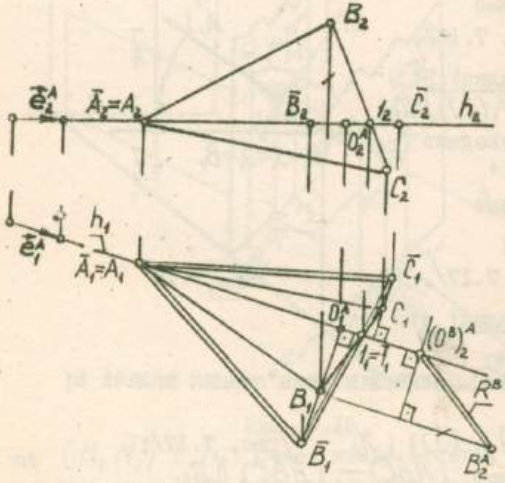


Рис. 7.18

такий, що $|(O^B)_2^{\,n} B_2^{\,n}| = R^B$.

4/ по ℓ_1 від точки O_1^B відкладемо відрізок довжиною R^B і матимемо $\bar{B}_1$;

5/ побудуємо $\bar{B}_2 \in h_2$;

6/ оскільки $\bar{A}_1 = A_1$ і $\bar{1}_1 = 1_1$, то матимемо $(\bar{A}_1\bar{B}_1)$ і $\bar{C}_1 = (\bar{B}_1\bar{1}_1) \cap t \ni C_1$ /де $t \| \ell_1$ /; очевидно, $\bar{A}_2 = A_2$. $\bar{C}_2 \in h_2$ і $\Delta ABC \cong \Delta \bar{A}_1\bar{B}_1\bar{C}_1$.

7.4. Аналітичне подання обертання

У площині КП точки M , що обертається навколо осі $(JJ) = (Oz)$, введемо прямокутну систему координат $Oxyz$ так, щоб $x = (Ox)$, $y = (Oy)$, а початок координат збігся з початком проекцій /рис. 7.19/. Домовимося проекції точки, що обертається, в початковому (M) та кінцевому $(\bar{M})$ положеннях координувати так: $M_1(x, y, 0)$, $M_2(x, 0, z)$, $\bar{M}_1(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ і $\bar{M}_2(\bar{x}, 0, \bar{z})$. Вважаємо також, що додатний напрям відліку кута φ збігається з рухом годинникової стрілки, а радіус траєкторії точки M дорівнює R.

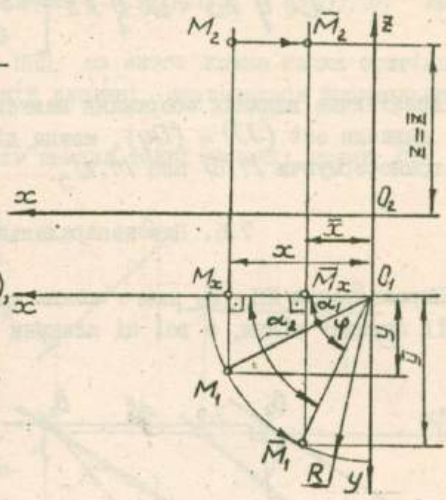


Рис. 7.19

З $\Delta \bar{M}_1\bar{M}_x O_1$ маємо $\bar{x} = R\cos\alpha_2$ і $\bar{y} = R\sin\alpha_2$.

Оскільки $\alpha_2 = \alpha_1 + \varphi$, то

$$\bar{x} = R\cos\alpha_2 = R\cos(\alpha_1 + \varphi) = R\cos\alpha_1\cos\varphi - R\sin\alpha_1\sin\varphi;$$

$$\bar{y} = R\sin\alpha_2 = R\sin(\alpha_1 + \varphi) = R\sin\alpha_1\cos\varphi + R\sin\varphi\cos\alpha_1.$$

Беручи до уваги, що з $\Delta M_1 M_x O_1$ випливає $x = R\cos\alpha_1$, $y = R\sin\alpha_1$ і, отже, $\cos\alpha_1 = x/R$, $\sin\alpha_1 = y/R$. Нарешті, враховуючи незмінність аплікати, дістанемо аналітичне подання обертання навколо осі $(JJ) = (Oz)$:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \cos\varphi\, x - \sin\varphi\, y; \\ \bar{y} &= \sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y; \\ \bar{z} &= z, \end{aligned} \qquad /7.3/$$

де $0 \le \varphi \le 2\pi$,
або в матричній формі

$$[\bar{x}\ \bar{y}\ z] = [x\ y\ z] \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad /7.4/$$

Аналітичне подання обертання навколо осі $(JJ) \perp \pi_2$, наприклад, навколо осі $(JJ) = (Oy)$, можна дістати аналогічно, тепер уже лише трансформуючи /7.3/ або /7.4/.

7.5. Плоскопаралельне переміщення

Перетворення КП, за якого кожна точка оригіналу переміщується у своїй площині рівня, а всі ці площини паралельні між собою, називається плоскопаралельним переміщенням /ППП/.

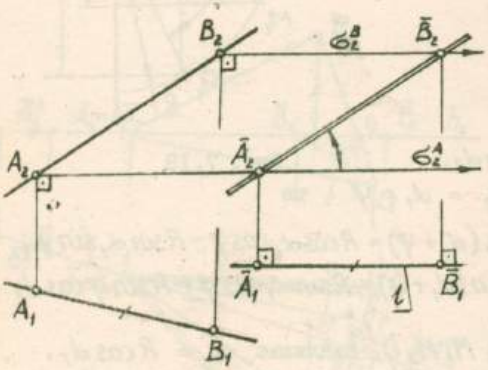


Рис. 7.20

I. Горизонтальне ППП /ГППП/. Горизонтальне ППП – це ППП, за якого кожна точка оригіналу переміщується у своїй горизонтальній площині.

Властивості ГППП зазначимо, розглядаючи розв"язання такої задачі.

Задача 7.2. Задано пряму AB / A_1B_1, A_2B_2 / /рис. 7.20/. За допомогою ГППП перетворити її на фронталь.

Розв"язання. За визначенням ГППП точка $A \in \sigma^A \parallel \pi_1$ і $B \in \sigma^B \parallel \pi_1$, а тому $A_2 \in \sigma_2^A$ і $B_2 \in \sigma_2^B$. Прямі σ_2^A і σ_2^B – горизонтальні прямі, а отже, висоти точок A і B при їх плоскопаралельному горизон-

тальному переміщенні не змінюються. Не змінюється і кут нахилу $[AB]$. π_1. Але тоді $|\bar{A}_1\bar{B}_1| = |A_1B_1|$, а отже, можна говорити, що горизонтальна проекція оригіналу при ГПШ інваріантна, тобто метрично не змінюється.

Якщо AB має стати фронталлю, то це означає, що A_1B_1 має стати горизонтальною. Отож, у довільному місці проведемо горизонтальну пряму ℓ і на ній відкладемо $[\bar{A}_1\bar{B}_1]$ /що, згідно з попереднім, має дорівнювати за довжиною відрізку A_1B_1 /, беручи через це ℓ за $(\bar{A}_1\bar{B}_1)$. Нарешті за допомогою ЛПЗ знайдемо $\bar{A}_2 \in \sigma_2^A$ і $\bar{B}_2 \in \sigma_2^B$. Задачу розв"язано. Мимохідь знайдено $(\bar{A}_2\bar{B}_2).\sigma_2^A = (AB).\pi_1$ та $|AB| = |\bar{A}_2\bar{B}_2|$.

2. Фронтальне ПШП /ФШП/. ПШП, за якого кожна точка оригіналу переміщується у своїй фронтальній площині, називається фронтальним ПШП /ФШП/.

Скористаємося ФШП для розв"язання такої задачі: пряму AB перетворити на горизонталь.

При ФШП точка A переміщується у $\sigma^A \| \pi_2$, а точка B - в $\sigma^B \| \pi_2$. Отже, A_1 переміщується по горизонтальній прямій σ_1^A, B_1 - по σ_1^B /рис. 7.21/.

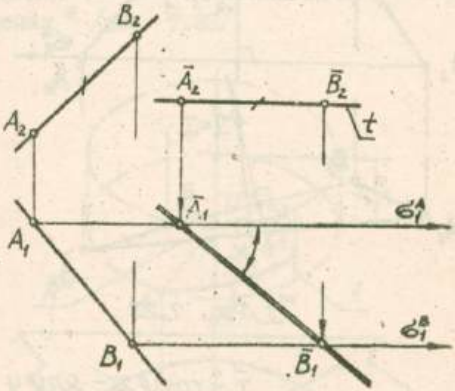


Рис. 7.21

Якщо (AB) стане горизонталлю, то її фронтальна проекція повинна перетворитися на горизонтальну пряму. Отож, проводимо довільну горизонтальну пряму (t) і на ній в довільному місці відкладаємо $[\bar{A}_2\bar{B}_2]$ такий, щоб $|\bar{A}_2\bar{B}_2| = |A_2B_2|$. Справді, при ФШП відстані точок A і B від π_2 не змінюються, а отже, і нахил (AB) до π_2 не змінюється, тобто залишається незмінною і довжина відрізка - фронтальної проекції - $[A_2B_2]$. Потім за ЛПЗ одержуємо $\bar{A}_1$ і $\bar{B}_1$. Задачу розв"язано. Крім того, знайдемо $|AB| = |\bar{A}_1\bar{B}_1|$ і $(\bar{A}_1\bar{B}_1).\sigma_1^A = (AB).\pi_2$.

Очевидно, фронтальна проекція будь-якого об"єкта Ω при ФШП повинна залишатись метрично незмінною $(\Omega_2 \cong \Omega_2)$.

3. Послідовне застосування ГПШП і ФПШП. Для самостійного розв"язання з послідовним застосуванням ГПШП та ФПШП пропонується така задача: перетворити пряму загального положення (AB) на горизонтально-проеціюючу.

Алгоритм розв"язання:

1/ застосовуючи ГПШП, $(AB) \to (\bar{A}\bar{B}) \parallel \pi_2$;

2/ застосовуючи ФПШП, $(\bar{A}\bar{B}) \to (\bar{\bar{A}}\bar{\bar{B}}) \perp \pi_1$.

4. Зв"язок ПШП з обертанням. ПШП можна розглядати як обертання з неявною віссю. Зокрема, ГПШП можна розглядати як обертання навколо неявної горизонтально-проеціюючої осі. Як в цьому випадку знаходиться вісь обертання, показано на рис. 7.22. Тут K_1 і K_1' – середини $[A_1\bar{A}_1]$ і $[B_1\bar{B}_1]$ відповідно, а $(K_1J_1) \perp [A_1\bar{A}_1]$ і $(K_1'J_1) \perp [B_1\bar{B}_1]$

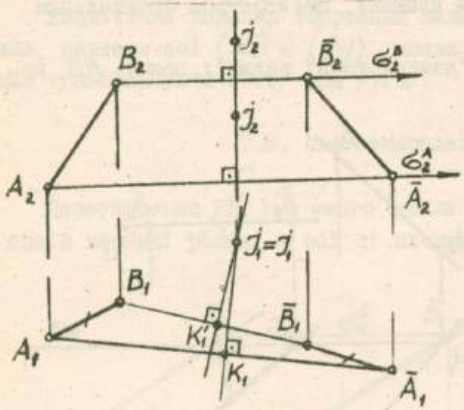


Рис. 7.22

Після того як положення точки $J_1 = J_1'$ визначено, аналітичне подання обертання навколо $(JJ) \perp \pi_1$ може бути використане і як аналітичне зображення ГПШП. При цьому слід мати на увазі, що, крім зображень /7.3/ і /7.4/, можуть бути використані й зображення обертання для випадку, коли $(JJ) \neq (Oz) \wedge (JJ) \perp \pi_1$, тобто

$$\bar{x} = \cos\varphi\, x - \sin\varphi\, y + m;$$
$$\bar{y} = \sin\varphi\, x + \cos\varphi\, y + n;$$
$$\bar{z} = z,$$

де m і n – відповідно абсциса і ординати точки $J_1 = J_1'$, а $0 \le \varphi \le 2\pi$.

7.6. Гвинтове переміщення

Гвинтове переміщення – таке перетворення КП, при якому кожна точка оригіналу виконує гвинтовий рух.

Гвинтовий рух точки M полягає в тому, що вона рухається по траєкторії (t^M) – гвинтовій прямого кругового циліндра, тобто виконує складний рух: поступальний по твірній (l) базового циліндра і разом з твірною обертальний навколо осі (JJ) базового циліндра. В даному разі радіус (R^M) базового циліндра гвинтової траєкторії кожної точки – це відстань $/R^M = |O^M M|$ / точки M від осі (JJ) яка визначає гвинтове переміщення.

Друга важлива визначальна характеристика гвинтового переміщення, як відомо, – одиничний крок кожної гвинтової $/ p = H/2\pi /$. У даному разі всі гвинтові – траєкторії даного гвинтового переміщення повинні мати однаковий одиничний крок. Отож, гвинтове переміщення визначають: вісь гвинтового переміщення (JJ) і одиничний крок $p = H/2\pi$, де H – крок гвинтового переміщення * /рис. 7.23/.

На КП точки M, що після гвинтового переміщення досягла кінцевого положення $\bar{M}$, після обертання навколо (JJ) на кут φ, показано, як дістати аналітичне зображення цього перетворення, якщо $(JJ) = (Oz)$, а одиничний крок задано кроком гвинтового переміщення – H /рис. 7.24/. Горизонтальна проекція траєкторії t^M – коло, а фронтальна – косинусоїда.

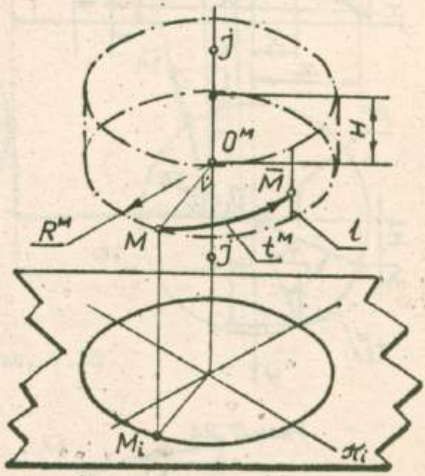


Рис. 7.23

Маючи на увазі те, що гвинтове переміщення – це композиція двох перетворень ** – обертання навколо (JJ) і перенесення вздовж (JJ), спираючись на перетворення /7.3/, маємо таке аналітичне зображення:

---

* Тобто таке поступальне переміщення M, яке відповідає повному оберту її навколо (JJ).

** Тобто є результатом послідовного виконання двох перетворень.

$$\bar{x} = \cos\varphi x - \sin\varphi y;$$
$$\bar{y} = \sin\varphi x + \cos\varphi y; \qquad /7.5/$$
$$\bar{z} = z + (\varphi/2\pi)\,H,$$

де $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

На рис. 7.25 показано КП побудови $\bar{M}$ за заданою M, якщо $(Jl) = (Oz)$, $\varphi = 45^0$ і $H = 60$ мм. Використовується графік, який являє собою розгортку (t^M) гвинтової - траєкторії точки M.

Крім розглянутого тут гвинтового перетворення найпростішого виду, є й більш складні, де траєкторії точок, наприклад, вже гвинтові прямого кругового конуса тощо. Гвинтові перетворення КП мають численні застосування. Важливі застосування гвинтових перетворень знайшли Г.І.Йозеф та А.М.Тевлін [92].

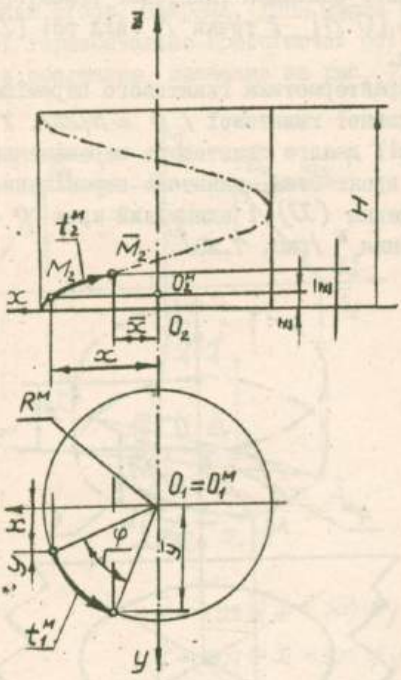


Рис. 7.24

7.7. Зсув

Досі розглядалися перетворення КП, за яких оригінал зберігав форму.

Існує багато перетворень КП, внаслідок яких оригінал деформується. Розглянемо як приклад таке перетворення.

При розв"язанні деяких позиційних задач на КП та в інженерних застосуваннях доцільно використовувати перетворення, що має назву зсуву відносно площини. Перетворення визначається вектором зсуву $(M\bar{M})$, довжина якого зменшується пропорційно відстані до деякої площини (Σ) подвійних точок перетворення, що відносно неї вектор зсуву паралельний $(M\bar{M} \parallel \Sigma)$. Отже, сама площина Σ - інваріантний образ перетворення зсуву /рис. 7.26/.

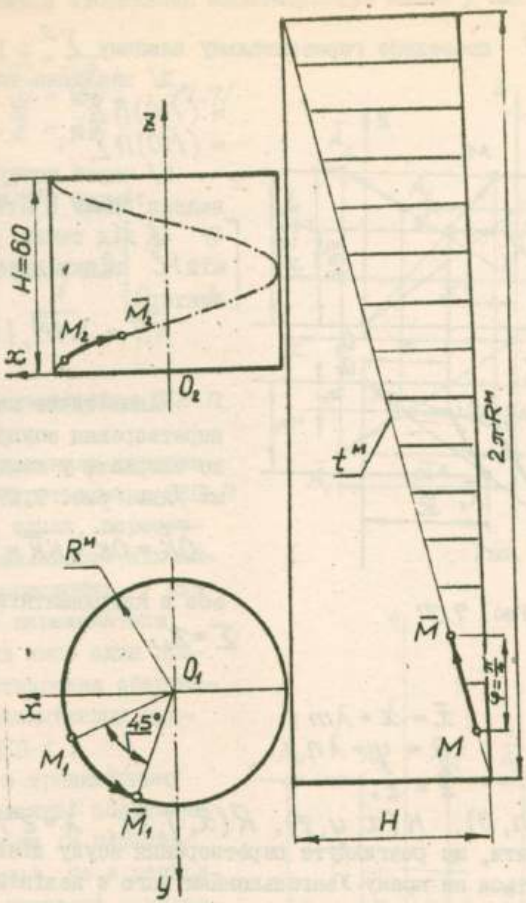


Рис. 7.25

На рис. 7.27 зображено КП, на якому зсув використано для побудови за заданою точкою A точки $\bar{A}$, якщо зсув задано вектором зсуву $M\bar{M}$ і площиною $\Sigma = \pi_1$.

Для знаходження $\bar{A}$ використано такий алгоритм:

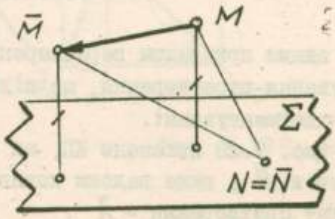


Рис. 7.26

1/ через A проведено горизонтальну площину Σ^A ;

2/ знайдено точки $K = (MO) \cap \Sigma^A$ і $\bar{K} = (\bar{M}O) \cap \Sigma^A$;

3/ через точку A проведено пряму $\ell \parallel M\bar{M}$;

4/ від точки A на прямій ℓ відкладено відрізок-вектор

$$\overrightarrow{K\bar{K}} = \lambda \overrightarrow{M\bar{M}}, \quad |\overrightarrow{K\bar{K}}| = |\overrightarrow{A\bar{A}}|.$$

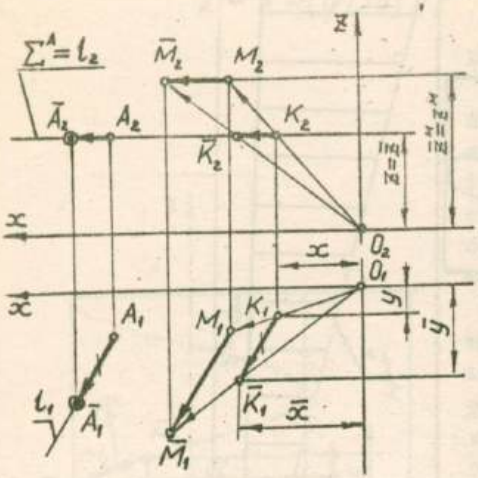


Рис. 7.27

Аналітичне зображення перетворення зсуву найпростіше одержати у векторній формі /див. рис. 7.27/:

$$\overrightarrow{O\bar{K}} = \overrightarrow{OK} + \overrightarrow{K\bar{K}} = \overrightarrow{OK} + \lambda \overrightarrow{M\bar{M}},$$

або в координатній, беручи $\Sigma = \pi_1$,

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \lambda m; \\ \bar{y} &= y + \lambda n; \\ \bar{z} &= z, \end{aligned} \qquad /7.6/$$

де $\overrightarrow{M\bar{M}}(m, n, 0)$, $K(x, y, z)$, $\bar{K}(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$, $\lambda = z^K / z^M$.

Легко помітити, що розглянуте перетворення зсуву лінійне, тобто пряма перетворюється на пряму. Узагальненням його є нелінійний зсув КП [96].

7.8. Масштабування

Ще одним прикладом перетворення КП, деформуючого оригінал, є масштабування-перетворення, що відіграє важливу роль, зокрема в технічному документуванні.

На рис. 7.28 показано КП, на якому масштабуванням точку A перетворено в $\bar{A}$, якщо вздовж кожної з осей лінійні виміри мають один коефіцієнт спотворення - λ .

Аналітичне зображення масштабування маємо у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \lambda x; \\ \bar{y} &= \lambda y; \\ \bar{z} &= \lambda z, \end{aligned} \qquad (7.7)$$

або в матричній формі:

$$[\bar{x}\ \bar{y}\ \bar{z}] = [x\ y\ z] \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \\ 0 & \lambda & \\ & & \lambda \end{bmatrix}.$$

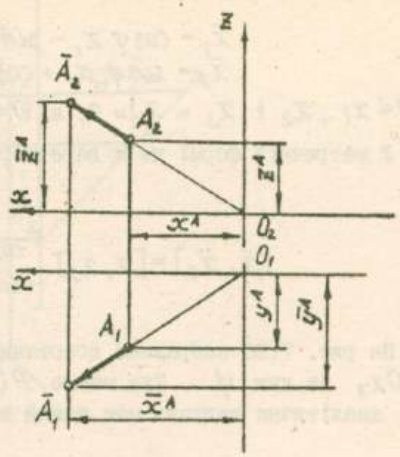


Рис. 7.28

7.9. Перетворення ПКП-n

Узагальненням перетворень КП є перетворення ПКП-n. При цьому, однак, перетворювальні можливості звичайно значно зростають. У цьому неважко переконатися, розглянувши вище один приклад: перетворення обертання в чотиривимірному просторі на ПКП-4.

Якщо в тривимірному просторі можливі обертання навколо точки /в площині/ і навколо осі, то в чотиривимірному просторі – навколо точки, прямої, площини і двох площин.

На рис. 7.29 на ПКП-4 показано обертання точки A на кут φ навколо точки O в площині $x_1 O x_2 = \Pi_{12}$. Очевидно, тут $A(x_1, x_2, 0, 0)$ і $\bar{A}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, 0, 0)$.

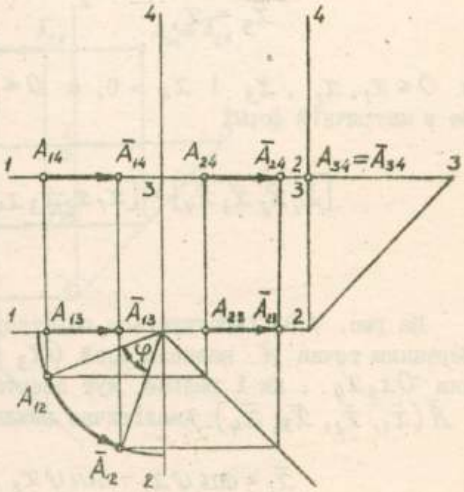


Рис. 7.29

Такому обертанню відповідає аналітичне подання

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \cos\varphi\, x_1 - \sin\varphi\, x_2 ; \\ \bar{x}_2 &= \sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2 , \end{aligned} \qquad /7.8/$$

де $0 \le x_1 , x_2$ і $x_3 = x_4 = 0$, а $0 \le \varphi \le \pi/2$.

У матричній формі це ж перетворення набуває такого вигляду

$$[\bar{x}_1, \bar{x}_2] = [x_1, x_2] \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

На рис. 7.30 зображено обертання /на ПКП-4/ точки A навколо осі Ox_3 на кут φ. Тут маємо $A(x_1, x_2, x_3, 0)$ і $\bar{A}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, 0)$. Отож, аналітичне подання має такий вигляд

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \cos\varphi\, x_1 - \sin\varphi\, x_2 ; \\ \bar{x}_2 &= \sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2 ; \\ \bar{x}_3 &= x , \end{aligned} \qquad /7.9/$$

де $0 \le x_1, x_2, x_3$ і $x_4 = 0$, а $0 \le \varphi \le \pi/2$,
або в матричній формі

$$[\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \bar{x}_4] = [x_1 x_2 x_3 x_4] \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

На рис. 7.31 ілюструється перетворення ПКП-4, яке відповідає обертанню точки A навколо осей Ox_3 і Ox_4, а отже, навколо площини Ox_3x_4. Як і раніше, кут обертання φ і $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$, а $\bar{A}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$. Аналітичне подання дістаємо у вигляді

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \cos\varphi\, x_1 - \sin\varphi\, x_2 ; \\ \bar{x}_2 &= \sin\varphi\, x_1 + \cos\varphi\, x_2 ; \\ \bar{x}_3 &= x_3 ; \\ \bar{x}_4 &= x_4 , \end{aligned} \qquad /7.10/$$

де $0 \le x_1, x_2, x_3, x_4$; $0 \le \varphi \le \pi/2$,

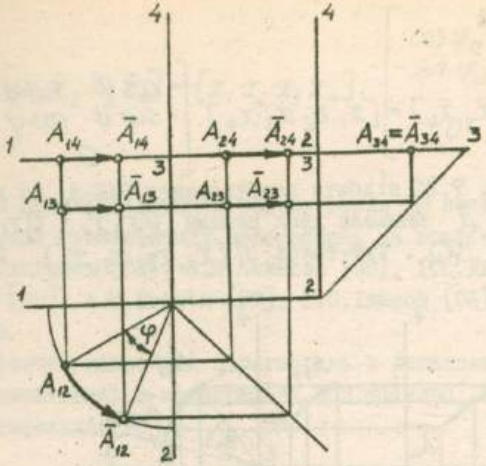


Рис. 7.30

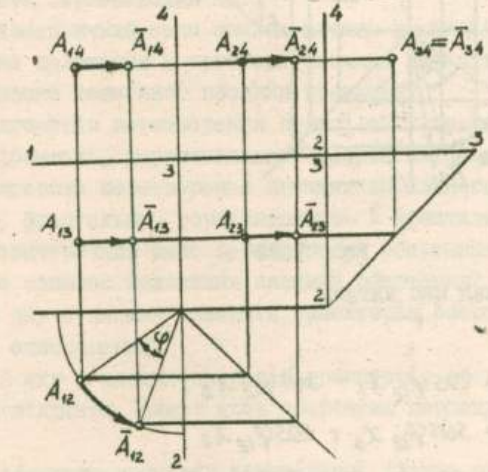


Рис. 7.31

або в матричній формі

$$[\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3\,\bar{x}_4] = [x_1\,x_2\,x_3\,x_4]\begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & & \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

Нарешті, на рис. 7.32 відбито перетворення ПКП-4, що відповідає обертанню точки A навколо двох площин Ox_3x_4 і Ox_1x_2 відповідно на кут φ_{12} і φ_{34}. Тут також $A(x_1, x_2, x_3, x_4)$ і $\bar{A}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3, \bar{x}_4)$.

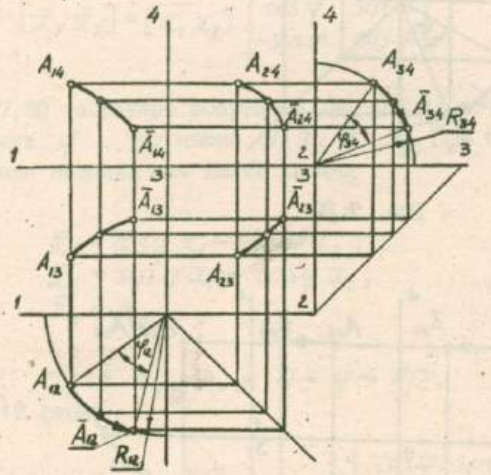


Рис. 7.32

Аналітичне подання має вигляд

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= \cos\varphi_{12}\,x_1 - \sin\varphi_{12}\,x_2; \\ \bar{x}_2 &= \sin\varphi_{12}\,x_1 + \cos\varphi_{12}\,x_2; \\ \bar{x}_3 &= \cos\varphi_{34}\,x_3 - \sin\varphi_{34}\,x_4; \\ \bar{x}_4 &= \sin\varphi_{34}\,x_3 + \cos\varphi_{34}\,x_4, \end{aligned} \qquad /7.11/$$

де $0 \le x_1, x_2, x_3, x_4$ і $0 \le \varphi_{12}, \varphi_{34} \le \pi/2$,

або в матричній формі

$$[\bar{x}_1\,\bar{x}_2\,\bar{x}_3\,\bar{x}_4] = [x_1\,x_2\,x_3\,x_4] \begin{bmatrix} \cos\varphi_{12} & \sin\varphi_{12} & 0 & \\ -\sin\varphi_{12} & \cos\varphi_{12} & & \\ & & \cos\varphi_{34} & \sin\varphi_{34} \\ 0 & & -\sin\varphi_{34} & \cos\varphi_{34} \end{bmatrix}$$

Більш детально питання перетворення КП висвітлені у [101]. Дослідженнями геометричних перетворень на графічних моделях займались Н.О.Глаголєв [88], С.М.Колотов [88], І.С.Джапарідзе [83], І.І.Котов [89], А.М.Тевлін [82], Г.С.Іванов [86], М.А.Зайденварг [85] та ін.

Аналітичні подробиці перетворень в багатовимірному евклідовому просторі висвітлені в монографіях М.В.Єфімова, Е.Р.Розендорна [84] і Б.А.Розенфельда [90].

Запитання для самоперевірки

1. Що таке перетворення КП?
2. Мета перетворення КП.
3. Геометричний сенс заміни площин проекцій.
4. Яке положення в просторі повинна зайняти нова площина проекцій відносно незмінної площини проекцій?
5. Алгоритми перетворення прямої загального положення в горизонталь, фронталь, горизонтально- і фронтально-проеціюючу пряму.
6. Алгоритм перетворення площини загального положення в горизонтальну, фронтальну, горизонтально- і фронтально-проеціюючу.
7. Геометричний сенс перетворення обертання.
8. Що означає положення площини обертання?
9. В яку з площин проекцій траєкторія обертання точки проеціюється без спотворення?
10. В яку з площин проекцій траєкторія обертання точки проеціюється на відрізок, якщо: вісь обертання перпендикулярна до Π_1, Π_2, Π_3?
11. Алгоритм побудови натуральної фігури трикутника при обертанні його навколо горизонталі.
12. Геометричний сенс плоскопаралельного перетворення.

[1-5; 8; 9; 10; 12; 26; 37; 69; 69; 74; 76; 77].

81. Бахмет Г.К., Ковнацкий А.Е., Сафиулина К.Р. и др. Графическое и геометрическое моделирование в системах автоматизированного проектирования. - Харьков: ХАИ, 1990.

82. Глаголев Н.А. Геометрические преобразования в начертательной геометрии // Вопросы современной начертательной геометрии. - М.-Л.: ГИТТЛ, 1947.

83. Джапаридзе И.С. Конструктивные отображения проективных преобразований пространства. - Тбилиси: Груз. политехн. ин-т, 1964.

84. Ефимов Н.В., Розендорн Э.Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. - М.: Наука, 1970.

85. Зайденварг М.А. Решение задач начертательной геометрии с помощью одного нелинейного преобразования. - Харьков: ХАИ, 1972.

86. Иванов Г.С. Кремоновы преобразования плоскости и пространства // Научные труды. - Вып. 39. Кремоновы преобразования и их приложения. - М.: МАИ, 1971.

87. Йозеф Г.И. Применение топологического преобразования для решения вопросов геометрии канатов // Инженерная графика. - Харьков, ХГУ, 1962.

88. Колотов С.М. Вспомогательное проектирование. - К.: Госстройиздат УССР, 1956.

89. Котов И.И. Мгновенные преобразования родства в пространстве // Кибернетика графики и прикладная геометрия поверхностей. - М.: МАИ, 1970.

90. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. - М.: Наука, 1966.

91. Сафиулина К.Р., Чернецкий Н.М. Симметрия относительно кольца // Матем. методы анализа динамич. систем. - Харьков: ХАИ, 1984. - Вып. 8.

92. Тевлин А.М. Методы нелинейных отображений и их технические приложения. - М.: МАИ, 1971.

93. Чернецкий Н.М. Позиционные и метрические задачи на графических моделях. - Харьков: ХАИ, 1980.

94. Чернецкий Н.М. Графические и аналитические конструктивные алгоритмы построений на графических моделях основных геометрических объектов. - Харьков: ХАИ, 1985.

95. Чернецкий Н.М. Сдвиг как преобразование комплексного чертежа // Прикладная геометрия и инженерная графика. - К.: Будивельник, 1973. - Вып. 16.

96. Чернецкий Н.М. Об одном нелинейном преобразовании, применяемом при конструировании поверхностей // Самолетостроение и техника воздушного флота. - Харьков: Изд-во ХГУ, 1973. - Вып. 30.

97. Чернецкий Н.М. Об одном преобразовании-деформации // Республ. конф. по прикл. геометр. и инж. графике /тезисы/. - К.: Наук. думка, 1976.

98. Чернецкий Н.М. Об импульсном преобразовании и его моделировании. - Там же.

99. Чернецкий Н.М. Плоскопараллельный перенос на полнопольном комплексе проекций четырехмерного пространства // Методы матем. физики и их прил. - Харьков: ХАИ, 1988.

100. Чернецкий Н.М. Преобразования в пространственно-временном континууме. - Харьков: ХПИ, ДЕП, ВИНИТИ, № 6948-В88, 9.03.88.

101. Фролов С.А. Методы преобразования ортогональных проекций.- М.: Машиностроение, 1970.

8. ПОЗИЦІЙНІ ЗАДАЧІ НА КП

8.1. Основна задача

Позиційні задачі в нарисній геометрії - це задачі, що відносяться до взаємного розміщення і взаємної належності оригіналів і розв"язуються на зображеннях цих оригіналів.

Основною позиційною задачею на КП вважаємо таку задачу: побудувати зображення перетину двох оригіналів.

Ясно, що задача розв"язувана, якщо існує перетин двох оригіналів. Перетином оригіналів Ω і Ω' називатимемо точкову множину $\Omega \cap \Omega'$, кожна точка якої належить як до Ω, так і до Ω'.

Щодо КП, то аналогічно визначаються як перетин $\Omega_1 \cap \Omega_1'$ проекцій Ω_1 та Ω_1', так і перетин $\Omega_2 \cap \Omega_2$ проекцій Ω_2 і Ω_2'.

Оскільки взаємна належність геометричних елементів при проеціюванні зберігається, то проекції кожної точки перетину оригіналів мають належати однойменним проекціям перетину оригіналів:

$$\forall M \in (\Omega \cap \Omega') \Rightarrow M_1 \in (\Omega \cap \Omega')_1 \wedge M_2 \in (\Omega \cap \Omega')_2$$

Отже, очевидне таке твердження: якщо існує перетин оригіналів, то існує перетин однойменних проекцій оригіналів, тобто

$$(\Omega \cap \Omega') \Rightarrow (\Omega_1 \cap \Omega_1') \wedge (\Omega_2 \cap \Omega_2').$$

Зворотне твердження, однак, несправедливе. Річ у тім, що проекції перетину оригіналів є лише підмножинами існуючих перетинів однойменних проекцій оригіналів /рис. 8.I, а/, тобто $(\Omega \cap \Omega')_1 \subset (\Omega_1 \cap \Omega_1')$ і $(\Omega \cap \Omega')_2 \subset (\Omega_2 \cap \Omega_2')$, а з цього випливає, що принаймні частина точок /а може бути, усі/, які належать перетинам однойменних проекцій оригіналів, не є проекціями точок, належних перетину оригіналів. Проекціями точок, що належать перетину оригіналів, можуть бути лише ті точки перетинів однойменних проекцій оригіналів, які складають пари проекційно-відповідних різнойменних точок-проекцій. Саме завдяки тому справедлива така ознака існування перетину оригіналів /негативна/: якщо перетини однойменних проекцій двох оригіналів не мають жодної пари проекційно-відповідних різнойменних точок-проекцій, то оригінали не мають перетину.

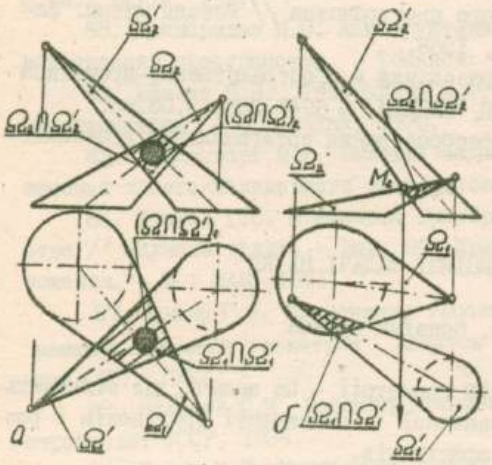


Рис. 8.I

У наведеному на рис. 8.I, б прикладі навіть крайня точка праворуч $M_2 \in (\Omega_2 \cap \Omega_2')$ не має проекційно-відповідної точки в $\Omega_1 \cap \Omega_1'$, а отже /за ознакою/, $\Omega \cap \Omega'$ не існує [II7].

Переходимо до розгляду прикладів розв"язку основної позиційної задачі.

8.2. Приклади розв"язування основної задачі

Приклади розв"язання основної задачі розрізняються передовсім оригіналами.

Приклад 8.1. Перетин двох прямих. Тут обидва оригінали – прямі l і t, рис. 8.2/. Відомо, що перетин прямих – точка. Необхідно побудувати її проекції.

Розв"язання. Випадок I /рис. 8.2, а/. Існують перетини $M_1 = l_1 \cap t_1$ та $M_2 = l_2 \cap t_2$, але $(M_1 M_2)$ не вертикальна. Отже, за негативною ознакою існування перетину $M = l \cap t$ немає, прямі l і t мимобіжні.

Випадок 2 /рис.8.2, б/. Існують перетини $M_1 = l_1 \cap t_1$ та $M_2 = l_2 \cap t_2$. $(M_1 M_2)$ – вертикальна. Отже, є принаймні одна пара проекційно-відповідних різноіменних точок-проекцій, а тому перетин – точка $(M = l \cap t)$ існує.

Випадок 3 /рис. 8.2, в/. Тут $l_1 \parallel t_1$, тобто $l_1 \cap t_1 = M_1^\infty$ і, аналогічно, $l_2 \parallel t_2$ $(l_2 \cap t_2 = M_2^\infty)$. Але M_1^∞ і M_2^∞ можуть бути проекціями лише M^∞. Отже, $l \cap t = M^\infty$, тобто $l \parallel t$.

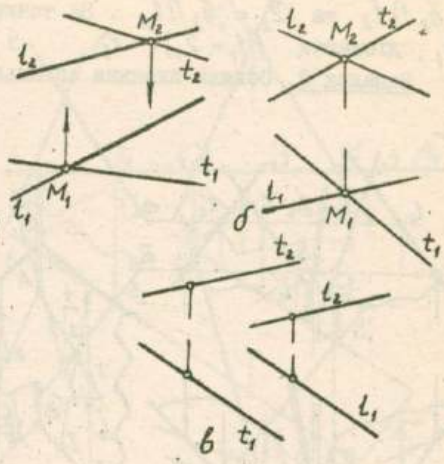


Рис. 8.2

Приклад 8.2. Перетин двох площин – пряма. Розв"язання задачі зводиться до побудови проекцій цієї прямої.

Розв"язання. Випадок I. Одна з площин – проеціюча. Нехай площина (l, t) – загального положення, а площина γ – горизонтальна /адже кожна горизонтальна площина є і фронтально-проеціюючою, рис. 8.3/.

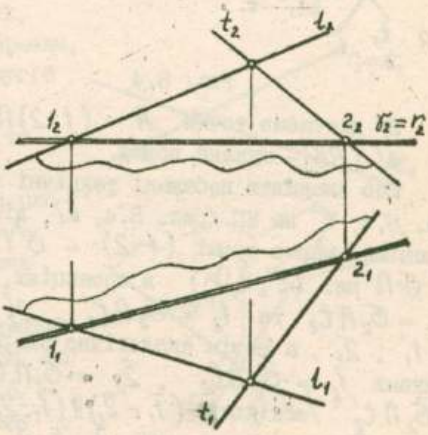


Рис. 8.3

Проекція γ_2 має збиральну властивість. Отож, якщо пряма $r = $ пл.$(\ell, t) \cap \gamma$ – перетин площин, що задані, то $r_2 = \gamma_2$. Оскільки існують $1 = \gamma \cap \ell$ та $2 = \gamma \cap t$, то існують $1_2 = \gamma_2 \cap \ell_2$ та $2_2 = \gamma_2 \cap t_2$. За точками 1_2 та 2_2 будуємо 1_1 та 2_1, дістаючи $(1_1\text{-}2_1) = r_1$.

Випадок 2. Обидві площини загального положення.

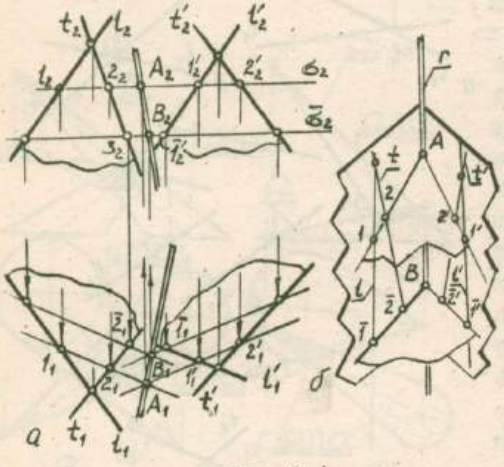


Рис. 8.4

Задано площину (ℓ, t) і (ℓ', t') /рис. 8.4, а/.

Для побудови $r = $ пл. $(\ell, t) \cap$ пл. (ℓ', t') досить знайти хоча б дві точки $A, B \in r$, які можна дістати за допомогою площин-посередників σ та $\bar{\sigma}$ /рис. 8.4, б/. Отже, алгоритм розв"язання в даному разі такий:

1/ будуємо σ і $\bar{\sigma}$;

2/ знаходимо прямі

$(1\text{-}2) = \sigma \cap$ пл. (ℓ, t);

$(1'\text{-}2') = \sigma \cap$ пл. (ℓ', t');

$(\bar{1}\text{-}\bar{2}) = \bar{\sigma} \cap$ пл. (ℓ, t);

$(\bar{1}'\text{-}\bar{2}') = \bar{\sigma} \cap$ пл. (ℓ', t');

3/ дістаємо точки $A = (1\text{-}2) \cap (1'\text{-}2')$ та $B = (\bar{1}\text{-}\bar{2}) \cap (\bar{1}'\text{-}\bar{2}')$;

4/ (AB) – шукана пряма.

Щоб зменшити небажані технічні труднощі при відтворенні рис. 8.4, б на КП /рис. 8.4, а/, візьмемо площину $\bar{\sigma} \| \sigma \perp \pi_2$. Як і раніше, маємо прямі $(1\text{-}2) = \sigma \cap$ пл. (ℓ, t) і $(1'\text{-}2') = \sigma \cap$ пл. (ℓ', t') в проекціях, тобто за точками $1_2 = \sigma_2 \cap \ell_2$, $2_2 = \sigma_2 \cap t_2$ та $1_2' = \sigma_2 \cap \ell_2'$, $2_2' = \sigma_2 \cap t_2'$ будуємо точки 1_1, 2_1 та $1_1'$, $2_1'$, а потім аналогічно одержуємо $\bar{1}_1$, $\bar{2}_1$ та $\bar{1}_1'$, $\bar{2}_1'$ за точками $\bar{1}_2 = \bar{\sigma}_2 \cap \ell_2$, $\bar{2}_2 = \bar{\sigma}_2 \cap t_2$ та $\bar{1}_2' = \bar{\sigma}_2 \cap \ell_2'$, $\bar{2}_2' = \bar{\sigma}_2 \cap t_2'$ /оскільки $(\bar{1}_1\text{-}\bar{2}_1) \| (1_1\text{-}2_1)$, а $(\bar{1}_1\text{-}\bar{2}_1') \| (1_1'\text{-}2_1')$, то можна обмежитися побудовою точок $\bar{2}_1$ і $\bar{1}_1'$/. Шукані точки $A = (1_1\text{-}2_1) \cap (1_1'\text{-}2_1')$ та $B_1 = (\bar{1}_1\text{-}\bar{2}_1) \cap (\bar{1}_1'\text{-}\bar{2}_1')$ визначають r_1, а отримані за допомогою ЛПЗ точки A_2 та B_2 – пряму r_2.

Випадок 3. Площини паралельні. Задано пл. (ℓ, t) та пл. (ℓ', t') так, що $\ell \| \ell'$ і $t \| t'$, а отже, $\ell_1 \| \ell_1'$, $\ell_2 \| \ell_2'$ і $t_1 \| t_1'$, $t_2 \| t_2'$ /рис. 8.5/.

Як і в попередньому випадку, для побудови точки $A \in r = $ пл. $(l,t) \cap$ пл. (l',t') скористаємося горизонтальною площиною-посередником σ. Очевидно, що σ_2 має збиральну властивість, а тому $(1_2 - 2_2) = (1'_2 - 2'_2) = \sigma_2$. Побудувавши $(1_1 - 2_1)$ та $(1'_1 - 2'_1)$, помічаємо, що $(1_1 - 2_1) \parallel (1'_1 - 2'_1)$, а отже, $(1_1 - 2_1) \cap (1'_1 - 2'_1) = A_1^\infty \in r_1^\infty \Rightarrow r_2^\infty$ і, нарешті, r^∞ *.

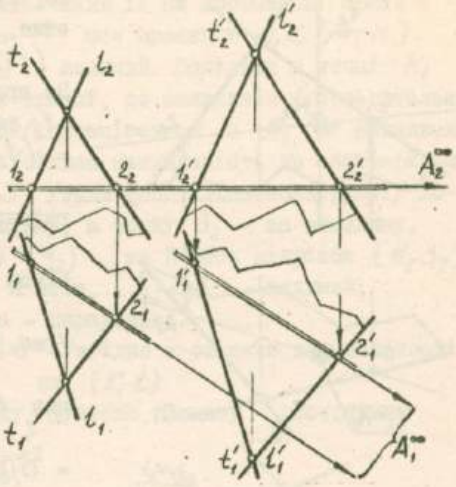


Рис. 8.5

Цей результат був упереджений при конструюванні заданих площин паралельністю відповідних прямих. Адже згідно з відомою зі шкільного курсу стереометрії ознаки паралельності двох площин: дві площини паралельні, якщо одній з них належить пара прямих, що відповідно паралельні двом прямим, які перетинаються і належать другій площині.

Приклад 8.3. Перетин прямої та площини.

Оскільки перетин прямої та площини – точка, то пл. $(r;t) \cap l = K$, якщо площину задано компланарними прямими r і t.

Розв"язання. Випадок I. Площина (r,t) – проеціююча. Умовимося, що площина $(r;t) \perp \pi_2$ /рис. 8.6/. Проекція $r_2 = t_2$ має збиральну властивість, а отже, $K \in$ пл. $(r;t) \Rightarrow$ $\Rightarrow K_2 \in r_2 = t_2$, тобто $K_2 = r_2 (= t_2) \cap l_2$ і $K_1 \in l_1$.

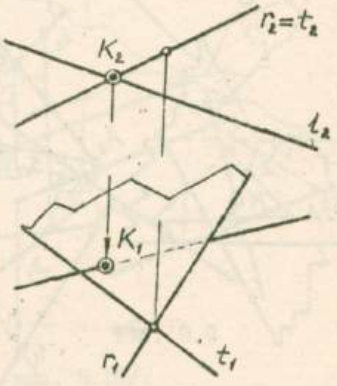


Рис. 8.6

* Аналогічно площина-посередник $\tau \parallel \sigma$ дає $(\bar{1}_1 - \bar{2}_1) \cap (\bar{1}'_1 - \bar{2}'_1) = B_1^\infty$

Випадок 2. Пряма l – проеціюча.

Нехай $l \perp \pi_1$ /рис. 8.7/. Оскільки $K \in l$, то $l_1 = K_1$. Проте, крім того, $K \in$ пл. (r, t), а отже, знайдеться пряма $(1\text{-}2) \ni K \wedge (1\text{-}2) \subset$ пл. (r, t). За проекціями 1_1 та 2_1 будуємо 1_2 та 2_2 і, нарешті, $K_2 = (1_2\text{-}2_2) \cap l_2$.

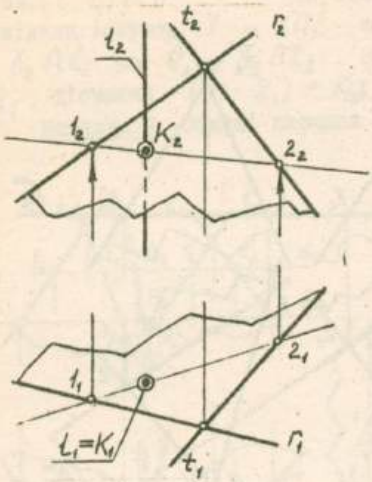


Рис. 8.7

Випадок 3. Пряма і площина загального положення.

Площину задано трикутним відсіком (ΔABC), пряма – l.

Алгоритм розв"язання такий /рис. 8.8, а/:

1/ проводимо площину-посередник $\sigma \supset l$;

2/ будуємо пряму $(1\text{-}2) = \sigma \cap (ABC)$;

3/ знаходимо точку $K = l \cap (1\text{-}2)$;

4/ K – шукана.

Справді, оскільки l і $(1\text{-}2)$ – компланарні, то існує точка $K = (1\text{-}2) \cap l$, а отже, і $K = l \cap (ABC)$. Ця побудова на КП має такий вигляд, як показано на рис. 8.8, б. Тут $\sigma \perp \pi_2$. Звідси $(1_2\text{-}2_2) = \sigma_2$. Дістаємо проекції точки K: $K_1 = (1_1\text{-}2_1) \cap l_1$, а K_2 будуємо за допомогою ЛПЗ. Точки $4 \in l$ і $5 \in [AC]$ – горизонтально-конкуруючі: $4_1 = 5_1$.

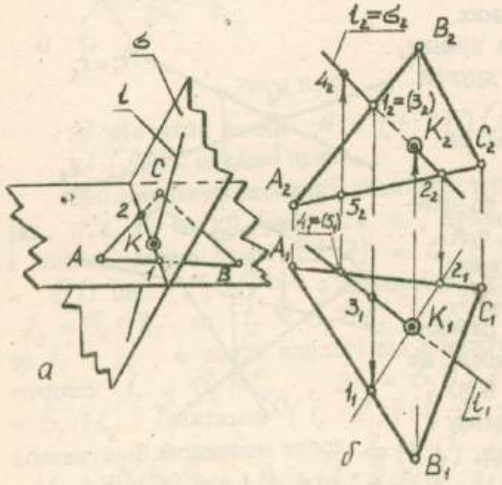


Рис. 8.8

Помітивши, що в точки 4 висота більша, ніж у точки 5, а отже, вона ближче до спостерігача, беремо горизонтальну проекцію точки 5 невидимою й умовимося позначення її на зображенні брати в дужки: (5_1). Видима ж точка 4 має проекцію $4_1 \in [4_1 K_1]$, і, отже, весь відрізок $[4_1 K_1]$ – видимий. Оскільки в точці K_1 видимість змінюється, то відсік прямої, що залишився /горизонтально-конкуруючий з трикутним відсіком/ проеціюється в π_1 як невидимий.

Аналогічно більша глибина /більша наближеність до спостерігача/ точки 1 порівняно з точкою 3 /вони фронтально-конкуруючі/ дозволяє точку 1_2 прийняти за видиму, а точку 3_2 – за невидиму.

Позаяк відрізок $[K_2 3_2) \ni (3_2)$, то й весь відрізок $[K_2 3_2]$ /без точки K_2/ – невидимий, а отже, $[K_2 2_2]$ – видимий.

Випадок 4. Пряма і площина – паралельні.

Нехай пл. $(r; t)$, а $\ell \parallel t$ /згідно з ознакою паралельності прямої й площини/, але $\ell \not\subset$ пл. $(r; t)$.

Як і в попередньому випадку, будуємо площину – посередник $\sigma \supset \ell \wedge \sigma \perp \pi_2$. Тоді $\sigma_2 = \ell_2$ /рис. 8.9/. Але $\ell_2 \parallel t_2$, отже, $\sigma_2 \cap t_2 = 2_2^\infty$. Звідси і 2_1^∞, а отже, і $(1_1 2_1^\infty) \cap \ell_1 = K_1^\infty$, тобто й $K_2^\infty = 2_2^\infty$.

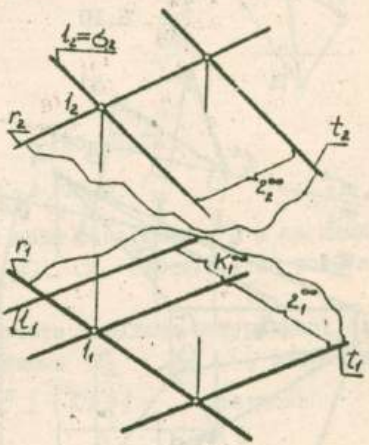


Рис. 8.9

Приклад 8.4. Перетин площини і поверхні.

Нехай задано Ω – тривимірний геометричний об"єкт і площину σ. Відповідно до загального визначення перетину, перетином тривимірного геометричного об"єкта (Ω) і площини (σ) називається плоска фігура $(\omega = \Omega \cap \sigma)$, що її складають точки, які належать як Ω, так і σ, тобто ω – перетин точкових множин Ω і σ /рис. 8.10/.

Плоску фігуру ω прийнято називати перерізом, а σ – січною площиною. Вид перерізу залежить від виду Ω. Якщо Ω – поверхня, то ω – лінія. Отож, далі нас цікавлять перерізи-лінії.

У загальному випадку алгоритм побудови перерізу $\omega = \Omega \cap \Sigma$ такий:

I/ виділяємо на Ω деяку підмножину /каркас/ ліній $\Omega^k = \{k^i\} \subset \Omega$ /наприклад, твірних або напрямних/;

2/ будуємо множину точок $\{N^i\}$ таких, що $N^i = K^i \cap \Sigma$;

3/ $\{N^i\} \subset \omega$ - шуканий переріз.

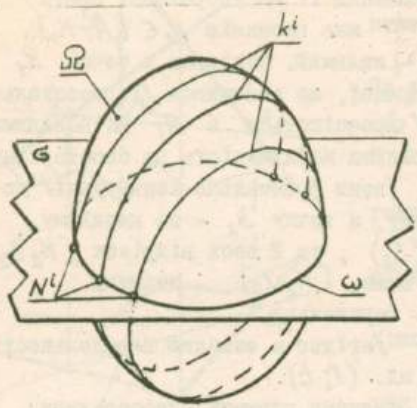


Рис. 8.10

Розглянемо конкретні випадки розв"язування задач на побудову перерізів.

Розв"язування. Випадок I. Переріз тригранної піраміди.

Задано відсік пірамідальної поверхні $ABCS$ і площину $\Sigma \perp AB \perp \pi_2$ /рис. 8.11/.

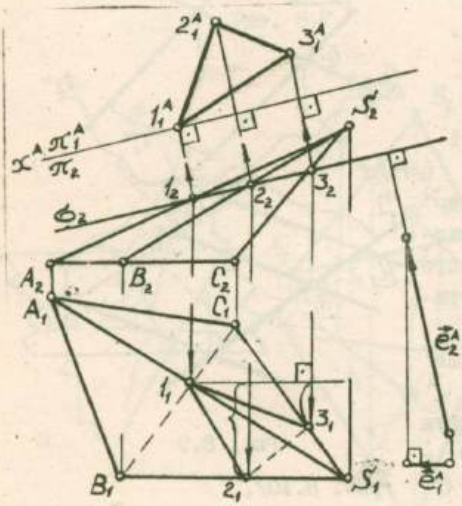


Рис. 8.11

Тут за лінії K^i правлять ребра. Отож, якщо $\Sigma \perp \pi_2$, то коли $1 = (AS) \cap \Sigma$, $2 = (BS) \cap \Sigma$ і $3 = (CS) \cap \Sigma$, точки 1_2, 2_2, $3_2 \in \Sigma_2$. За проекціями 1_2, 2_2, 3_2 будуємо 1_1, 2_1 і 3_1. Трикутник $1_1 2_1 3_1$ та відрізок $1_2 3_2$ - відповідно горизонтальна та фронтальна проекції перерізу $/\Delta 123/$.

У практиці технічного проектування часто виникає необхідність будувати натуральну фігуру перерізу. Натуральну фігуру $\Delta 123$ дістанемо, замінивши площину π_1 площиною $\pi_1^A \| \Sigma$. Це відповідає заміні напряму проеціювання $\vec{e}^{\pi_1}$ напрямом $\vec{e}^A \perp \Sigma$. При цьому $x^A \| \Sigma_2$ в системі π_2 / π_1^A.

δ - загального положення /рис. 8.12/.

Січну площину задано трикутним відсіком DEF. Для спрощення побудови беремо $(EF) \parallel \pi_1$.

Розв"язують чотири етапи:

1/ перетворюємо КП так, щоб дістати умови варіанта A : $\sigma \perp \pi_2$;

2/ будуємо проекції перерізу у перетвореному КП;

3/ будуємо проекції перерізу у вихідному КП;

4/ будуємо натуральну фігуру перерізу.

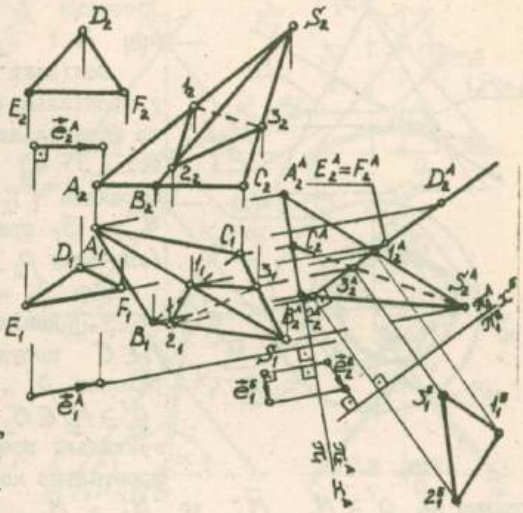


Рис. 8.12

Щоб виконати перший етап, використаємо заміну площин проекцій $\pi_2 \to \pi_2^A$, прийнявши напрям проеціювання $\vec{e}^A \parallel (EF)$. У новій системі, π_2^A / π_1 площина DEF - фронтально-проеціювча, а фронтальна проекція відсіку пірамідальної поверхні - $A_2^A B_2^A C_2^A S_2^A$.

Будуємо 1_2^A . 2_2^A . 3_2^A /другий етап розв"язання/, а за ними - 1_1 . 2_1 . 3_1 . за якими будуємо 1_2 . 2_2 . 3_2 /третій етап розв"язання/.

Для виконання четвертого етапу, тобто побудови натуральної фігури перерізу, в системі π_2^A / π_1 заміняємо $\pi_1 \to \pi_1^\delta$, обираючи напрям проеціювання $\vec{e}^\delta$ так, щоб $\vec{e}^\delta \perp (DEF)$. Дістаємо $\Delta 1_1^\delta 2_1^\delta 3_1^\delta \cong \Delta 123$.

Випадок 2. Переріз прямого кругового конуса.

Оперуємо з відсіком прямої кругової конічної поверхні.

Побудуємо точки перерізу. Домовимося, що січна площина $\sigma \perp \pi_2$. Роль ліній K^i тут можуть виконувати або твірні, або паралелі. Оберемо комбінований спосіб побудови, користуючись частково як тими, так і другими.

Якщо положення σ таке, що в неї будуть перетини з усіма твірними конуса, то шуканий переріз – еліпс. Знайдемо його осі.

Більша вісь визначається точками-перетинами 1 та 2 /рис. 8.13/ фронтальних твірних σ. Дістаємо 1_2 і 2_2 і за ними будуємо 1_1 і 2_1.

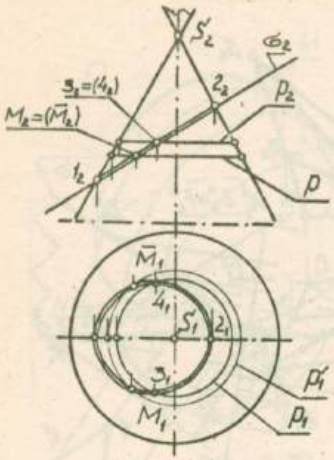


Рис. 8.13

Оскільки еліпс-переріз міститься у фронтально-проеціюючій площині σ, то фронтальною проекцією малої його осі $[3-4]$ буде точка $3_2 = (4_2)$ – середина $[1_2 - 2_2]$. Для побудови 4_1 та 3_1 проводимо паралель $\rho \ni 3,4$ /спочатку $\rho_2 \ni 3_2 = (4_2)$ /, а потім ρ_1. За $3_2 = (4_2)$ будуємо 3_1, $4_1 \in \rho_1$.

Довільну точку перерізу $M \in \sigma$ побудуємо, скориставшись паралеллю ρ'. Спочатку будуємо $\rho'_2 \ni M_2 \in \sigma_2$, а потім ρ'_1. Горизонтальні проекції точки M і фронтально конкуруючій з нею точки $\bar{M}$ знаходимо на $\rho'_1 \ni M_1$, $\bar{M}_1$ за $M_2 = \bar{M}_2$. Шуканий переріз – еліпс $\{M^i\}$. Одержуємо $\{M^i\}$, перезадаючи конус каркасом $\{\rho^i\}$.

Оскільки конічні перерізи широко використовуються в конструкторській практиці, розглянемо їх різновиди. При цьому слід розглядати обидві поли конічної поверхні. Отож, скористаємося повною конічною поверхнею.

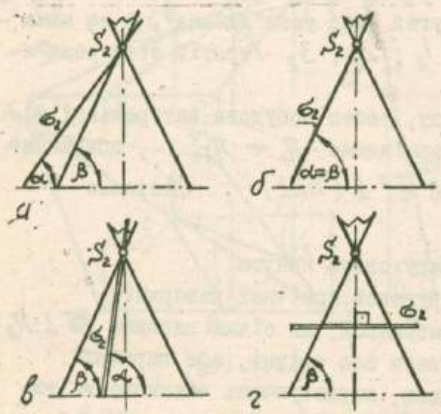


Рис. 8.14

Тут знову площина перерізу $\sigma \perp \pi_2$. Якщо $\alpha = \sigma \wedge \pi_1$, а β – кут нахилу твірних конуса до π_1, то серед конічних перерізів розрізняють:

1/ <u>точку</u> /при $S \in \sigma$ та $\alpha < \beta$, рис. 8.14, а/;

2/ <u>пряму</u> /при $S \in \sigma$ та $\alpha = \beta$, рис. 8.13, б/;

3/ <u>дві прямі, що перетинаються</u> /при $S \in \sigma$ та $\alpha > \beta$, рис. 8.14, в/;

4/ коло /при $\alpha = 0$ та $S \notin \sigma$, рис. 8.I4, г/.

Щоб розглянути інші види перерізів, домовимося, що $\sigma \supset [T\bar{T}]$, де $[T\bar{T}]$ - фронтально-проеціюючий діаметр кола основи відсіку конуса /рис. 8.I5/ *. Тепер маємо:

I/ еліпс /при $S \notin \sigma$ та $\alpha < \beta$, рис.8.I5,а/; профільна проекція перерізу - теж еліпс /на рис. 8.I5, а показано лише його дугу $T_3 K_3 \bar{T}_3$ /, що дотикається в точках T_3 і $\bar{T}_3$ до профільних проекцій твірних (TS) та $(\bar{T}S)$; оскільки тут

$$|K_3 O_3| < \frac{1}{2} |S_3 O_3|$$

/де O_3 - середина $[T_3 \bar{T}_3]$/. то значення відношення

$$f = |K_3 O_3| / |S_3 O_3| < 0{,}5;$$

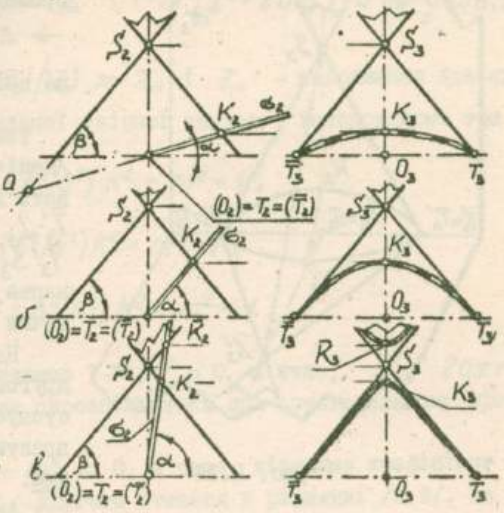


Рис. 8.I5

2/ параболу /при $S \notin \sigma$ та $\alpha = \beta$, рис. 8.I5, б/; в цьому випадку σ - паралельна до однієї з твірних, а отже, переріз має нескінченно віддалену точку; за профільною проекцією /парабола/ значення відношення $f = \dfrac{|K_3 O_3|}{|S_3 O_3|} = 0{,}5$;

3/ гіперболу /при $S \notin \sigma$ та $\alpha > \beta$, рис. 8.I5, в/, оскільки в цьому випадку σ - паралельна вже до двох твірних конуса, а отже, переріз має дві нескінченно-віддалених точки; за профільною проекцією гіперболи /вона теж гіпербола/

$$f = |K_3 O_3| / |S_3 O_3| > 0{,}5,$$

або точніше, $0{,}5 < f < I$.

Відношення f називають звичайно дискримінантом конічного перерізу або дискримінантом кривої другого порядку.

---

* Відсік виконано за допомогою площини π_1 , яка перпендикулярна до осі конуса.

Певне числове значення дискримінанта відповідає певному виду конічного перерізу, а значення дискримінантів при паралельному проеціюванні конік /$\Delta T_3 S_3 \bar{T}_3 \rightarrow \Delta T_3' S_3' \bar{T}_3'$; рис. 8.16/ не змінюється: $\frac{|K_3' O_3'|}{|S_3' O_3'|} = \frac{|K_3 O_3|}{|S_3 O_3|}$.

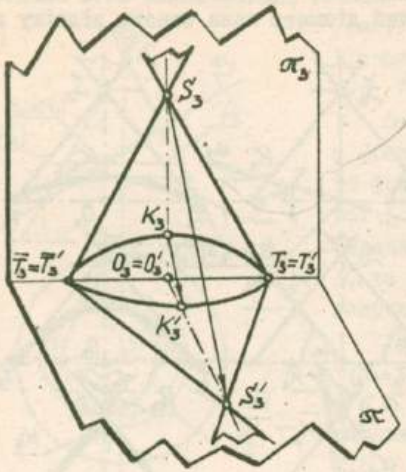


Рис. 8.16

Тому криву другого порядку /конічний переріз/ зручно задавати двома точками дотику / T_3' і $\bar{T}_3'$ /, двома дотичними / $T_3' S_3'$ і $\bar{T}_3' \bar{S}_3'$ / та значенням дискримінанта, що визначає положення точки K_3'.

Цей спосіб задання кривих другого порядку широко використовується в конструкторській практиці й називається <u>інженерним</u>.

<u>Аналітичне подання випадку 2</u>. Розмістимо прямий круговий конус у координатній системі $Oxyz$ так, щоб вершина $S = 0$, а вісь конуса збігалася з віссю Oz /на рис. 8.17 показано тільки фронтальну проекцію/.

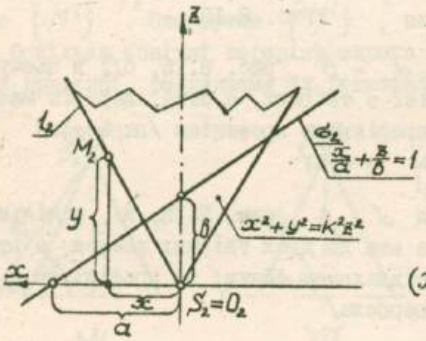


Рис. 8.17

Якщо рівняння фронтально-проеціюючої січної площини σ є $(x/a) + (z/b) = 1$, а рівняння прямого кругового конуса /з вершиною $S = 0$/ – $x^2 + y^2 = k^2 z^2$, то їх перетин /переріз/ описується системою

$$(x/a) + (z/b) = 1 ;$$
$$x^2 + y^2 = k^2 z^2, \qquad /8.1/$$

де $0 \le x, y, z < \infty$, а $k = tg\varphi$ з $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Відучаючи з /8.1/ координату z, матимемо горизонтальну проекцію перерізу $x^2 + y^2 = K^2(b^2/a^2)(x-a)^2$.

Покладемо $K^2(b^2/a^2) = m^2$, тоді

$$x^2 + y^2 - m^2(x-a)^2 \quad \text{та} \quad (1-m^2)x^2 + 2am^2x - a^2m^2 + y^2 = 0 \quad /8.2/$$

Помітивши, що $K = |x_0|/|z_0|$, де x_0 і z_0 – координати довільної точки $M \in \ell$ /фронтальної твірної конуса/, встановлюємо три можливості:

1/ $K = \frac{|a|}{|b|}$, тоді $(b^2/a^2)K^2 = m^2 = 1$;

2/ $K > \frac{|a|}{|b|}$, тоді $(b^2/a^2)K^2 = m^2 > 1$;

3/ $K < \frac{|a|}{|b|}$, тоді $(b^2/a^2)K^2 = m^2 < 1$.

У першому випадку дістаємо $1 - m^2 = 0$, а отже, $y^2 = 2ax + a^2$, тобто параболу, на яку може спроеціюватися при ортогональному проеціюванні тільки парабола.

У другому випадку $1 - m^2 < 0$, а отже, дістаємо коефіцієнт з від'ємним знаком перед x другого степеня в рівнянні /8.2/. Це – рівняння гіперболи, на яку могла спроеціюватися лише гіпербола.

У третьому випадку $1 - m^2 > 0$, тобто маємо коефіцієнт з додатним знаком перед x другого степеня в /8.2/, а отже, одержуємо рівняння еліпса, на який може ортогонально спроеціюватися лише еліпс.

Аналітичні подання інших видів конічних перерізів пропонується одержати самостійно.

У кожному випадку, якщо поверхня є поверхнею другого порядку, перетин її з площиною є крива другого порядку. Система /тут $\sigma \perp \pi_2$ /

$$\left.\begin{aligned} f^2(x,y,z) &= 0; \\ Ax + Cz + D &= 0, \end{aligned}\right\}$$

як можна було переконатися, приводить до рівняння $\varphi_1^2(x,y) = 0$ для горизонтальної проекції перерізу та до аналогічних рівнянь для інших проекцій.

Очевидно, якщо поверхня є алгебраїчною поверхнею n-го порядку, то перетин її з площиною /в загальному випадку/ – крива n-го порядку:

$$\left.\begin{aligned} f^n(x,y,z) &= 0; \\ Ax + Cz + D &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \varphi_1^n(x,y) = 0 \text{ – горизонтальна проекція.}$$

Приклад 8.5. Дотик площини до поверхні.

Візьмемо на перерізі $\omega = \Omega \cap \sigma$ $B \in K^2$ і $T \in K'$, K^2 - криві на Ω, довільні точки $A \in K'$, рис. 8.18, а/. Точки A, B і T визначають положення січної площини σ. При переміщенні точки A вздовж K' і B - вздовж K^2 до суміщення з T площина $\sigma = (ABT)$ матиме граничне положення σ'. Площина σ' називається дотичною площиною до Ω в точці T.

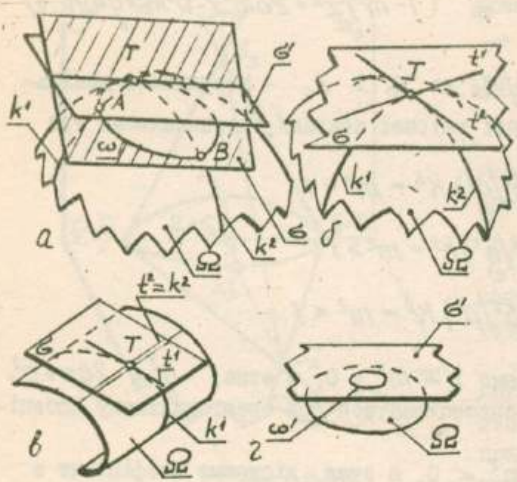


Рис. 8.18

Переріз при цьому виродиується /в точку дотику T /рис. 8.18, б/ або пряму дотику t^2 (рис.8.18,в), або ж перетворюється на криву дотику ω' /рис.8.18,г/.

Перпендикуляр $n \perp \sigma'$ в точці T називається нормаллю до Ω в точці T /рис. 8.18, б/.

Якщо на поверхні Ω через точку T провести будь-які лінії K^i, то дотичні t^i до кожної з них у спіральній точці T є належними до однієї площини - дотичної площини. Отже, дотична площина (σ') в точці T до поверхні Ω є множиною дотичних в точці T прямих (t^i), проведених до ліній (K^i), що проходять через точку на поверхні /одна з K^i може бути прямою або кривою дотику/. Цей факт має строге доведення в курсах диференціальної геометрії [124, с. 88-90].

Оскільки площина визначається парою прямих, що перетинаються, то досить задати на поверхні Ω дві лінії / K' і K^2 / типу K^i /одна з них може бути прямою/, щоб дістати дві дотичні / t' і t^2 / типу t^i для визначення положення σ' - площини, дотичної до Ω в точці T *.

Розглянемо деякі конкретні випадки.

Випадок I. Побудувати площину, дотичну до сфери в точці T. У даному разі однією з ліній, що їх можна провести через точку T

* Тут T - регулярна точка Ω.

на поверхні сфери, є паралель (ρ^T), а другою - меридіан (m^T) /рис. 8.19/.

Оскільки площина паралелі ρ^T є горизонтальною, то побудова горизонтальної проекції дотичної до паралелі (t_1') зводиться до планіметричної побудови дотичної в точці T_1 до кола ρ_1^T. Побудова фронтальної проекції (t_2') дотичної t' очевидна $(t_2' \supset \rho_2^T)$.

Помічаємо, що всі меридіанальні дотичні до сфери в точках паралелі ρ^T перетинають вертикальну вісь сфери в спільній точці K_T. Отож, для побудови дотичної в точці T до меридіана m^T слід передовсім побудувати точку K. Для цього достатньо побудувати дотичну (t') у точці T' до фронтального меридіана m'. Дістаємо $K = t' \cap (JJ)$. Обертаючи вздовж паралелі ρ^T точку $T' \to T$, одержуємо зміщення прямої $KT' \to (KT) = t^2$. Площина $(t', t^2) = \sigma'$ – шукана дотична площина.

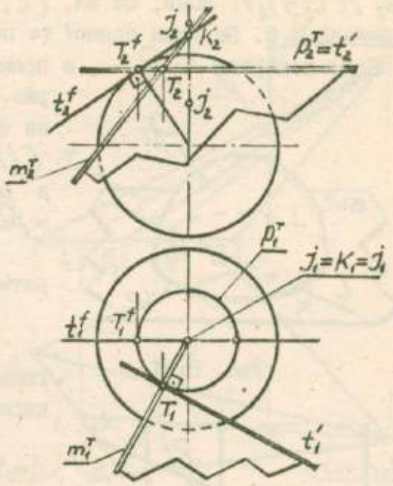


Рис. 8.19

Випадок 2. Побудувати площину, дотичну в точці T до еліптичного конуса (Ω).

Тут розв"язання спрощується, оскільки однією з кривих (k') є пряма-твірна $ST = k' = t'$ /рис. 8.20/. Друга крива /коло/ – $k^2 = \alpha \cap \Omega$, де $\alpha \| \pi_1$. Отже, побудова дотичної t^2 зводиться до побудови t_1^2 /дотичної

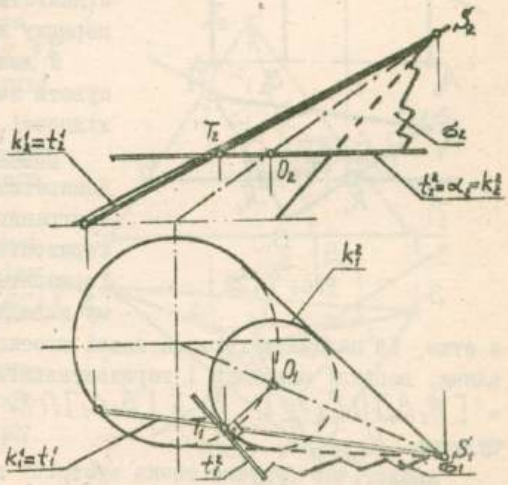


Рис. 8.20

в точці T_1 до кола K_1^2 і t_2^2 - горизонтальної прямої / $t_2^2 = \alpha_2 \wedge t_2 \ni T_2$ /. Ясно, що пл. $(t^1, t^2) = \sigma'$ - шукана.

Приклад 8.6. Перетин прямої та поверхні.

Якщо поверхня - Ω, а пряма - ℓ, то, як показано на рис. 8.21, точка K /як і точка $\bar{K}$/ - не тільки перетин Ω з $\ell (K, \bar{K} = \Omega \cap \ell)$, а й перетин ℓ з $\omega (K, \bar{K} = \ell \cap \omega)$/, де $\omega = \Omega \cap \sigma$ за умови, що $\ell \subset \sigma$.

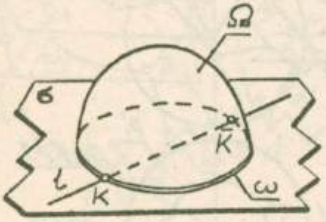


Рис. 8.21

Звідси випливає загальний алгоритм побудови точок K і $\bar{K}$:

1/ проводимо $\sigma \supset \ell$;

2/ будуємо $\omega = \Omega \cap \sigma$ /у загальному випадку перезадаючи Ω каркасом $\Omega^{\wedge}$ /;

3/ знаходимо $K, \bar{K} = \ell \cap \omega$.

Точки K і $\bar{K}$ інколи називають точками зустрічі ℓ з Ω. Якщо Ω - алгебраїчна поверхня, то кількість точок зустрічі залежить від порядку кривої ω [115, с. 43-44].

У деяких окремих випадках застосувати загальний алгоритм немає необхідності.

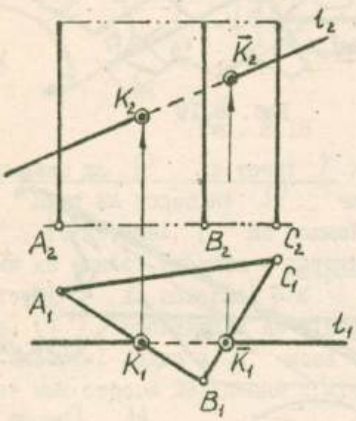


Рис. 8.22

Випадок I. Поверхня проеціюча. Конкретизуючи, покладемо, що відсік тригранної призматичної поверхні (ABC) - горизонтально-проеціюча /рис. 8.22/. Горизонтальна проекція відсіку в цьому випадку має збиральну властивість, а отже, їй належать горизонтальні проекції точок зустрічі. Останні, однак, повинні належати і горизонтальній проекції прямої. Отож, $K_1 = [A_1 B_1] \cap \ell_1$ і $\bar{K}_1 = [B_1 C_1] \cap \ell_1$. За проекціями K_1 і $\bar{K}_1$ будуємо K_2 і $\bar{K}_2$.

Аналогічно будуємо точки зустрічі прямої і проеціюючого прямого кругового циліндра або інших проеціюючих поверхонь.

Випадок 2. Пряма-проеціюча. Нехай потрібно знайти точку зустрічі прямої ℓ й відсіку тригранної пірамідальної поверхні $(ABCS)$, а пряма $\ell \perp \pi_1$.

З $K \in \Lambda \ell \perp \pi_1$ випливає, що $K_1 = \ell_1$ /рис.8.23/. Розв"язання задачі зводиться, таким чином, до побудови K_2 за K_1 за умови, що $K \in \Omega$ /де Ω - поверхня $ABCS$ /. Тому K_2 будуємо за допомогою прямої $t \ni K \Lambda t \subset (ABS)$:

1/ проводимо $t_1 \ni K_1$ і маємо $1_1 = t_1 \cap (A_1 B_1)$;

2/ дістаємо 1_2 за 1_1 і проводимо t_2;

3/ $K_2 = t_2 \cap \ell_2$.

Якщо Ω - криволінійна поверхня, то в загальному випадку задача розв"язується за допомогою кривої $k \subset \Omega \Lambda k \ni K$ /у випадку лінійчатої поверхні $k = t$, де t - пряма/.

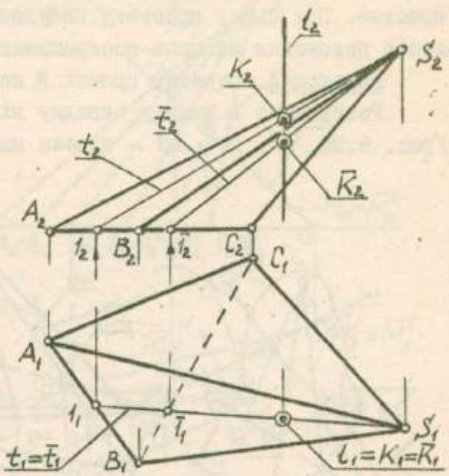


Рис. 8.23

Переходимо до розгляду випадків застосування загального алгоритму.

Випадок 3. Перетин прямої загального положення і відсіку пірамідальної поверхні $(ABCS)$

Площину-посередник σ слід обирати так, щоб забезпечувалася проста графічна побудова перерізу ω. У даному разі це забезпечує умова $\sigma \perp \pi_2$ /рис. 8.24/.

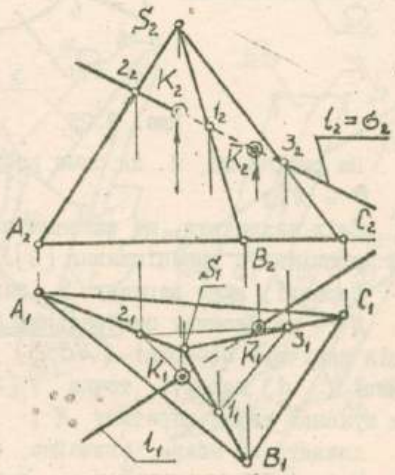


Рис. 8.24

Перерізом ω є $\Delta\, 123$. Помічаємо, що $1_2, 2_2, 3_2 \in \sigma_2$. За проекціями 1_2, 2_2 і 3_2 будуємо 1_1, 2_1 і 3_1. Нарешті, $K_1 = [1,2,] \cap \ell_1$ та $\bar{K}_1 = [1,3_1] \cap \ell_1$

У деяких випадках умова $\sigma \perp \pi_1$ /або $\sigma \perp \pi_2$ / недостатня для того, щоб графічна побудова ω , а отже, проекцій ω була простою. При цьому простоту побудови ω забезпечує спеціальний вибір положення площини-посередника σ .

Випадок 4. Перетин прямої й конічної поверхні.

Розглянемо в даному випадку відсік конічної поверхні ABS /рис. 8.25, а/, де AB - плоска напрямна.

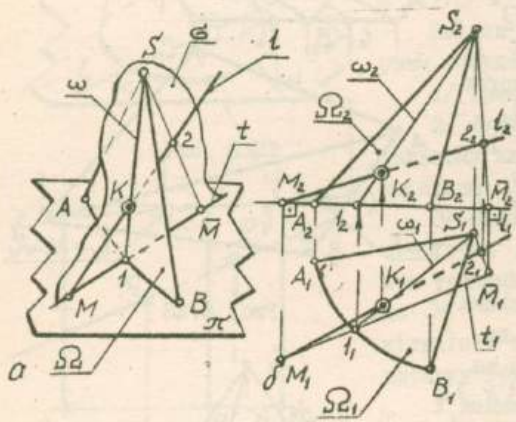


Рис. 8.25

Відомо, що за умови $\sigma \ni S$, переріз ω - твірна, тобто пряма /або прямі/. Отож, за площину σ доцільно взяти площину (l,S), оскільки очевидно, що площина $(l,S) \ni S$. Перетином пл. (l,S) і площини π /площини напрямної AB/ є пряма t . Її визначають точки $M = l \cap \pi$ і $\bar{M} = (S2) \cap \pi$, де 2 - довільна точка прямої l . Точка $1 = AB \cap t$ визначає $(S1)$ таку, що $(S1) \cap l = K$.

На рис. 8.25, б ця сама побудова дублюється на КП за умови, що $\pi = \pi_1$.

Слід зазначити, що останню побудову можна трактувати й з позицій допоміжного проеціювання [2].

Справді, якщо вершину S взяти за центр проеціювання, а площину π - за площину центральних проекцій, то AB - центральна проекція конічної поверхні (AB,S) , а пряма t - центральна проекція прямої l і, нарешті, точка $1 (1 = AB \cap t)$ - центральна проекція шуканої точки-перетину K.

Аналогічно можна, звичайно, трактувати й побудову точок-перетинів K і $\bar{K}$ у випадку 3 /рис. 8.26/.

Випадок 5. Перетин прямої й циліндричної поверхні.

Як і в попередньому випадку, покладемо, що пряма l - загального положення, а циліндричну поверхню задано відсіком (AB,r), де AB - плоска напрямна, а r - твірна /рис. 8.27, а/ і площина напрямної AB - π_1.

Щоб перетином площини-посередника σ й відсіку (AB, r) була пряма, слід, щоб в σ знайшлася хоча б одна пряма, паралельна r. Звідси випливає, як конструювати σ: площину σ визначають дві прямі – l і $(M2) \parallel r$, де 2 – довільна точка l. Дістаємо $M = l \cap \pi_1$ і $\bar{M} = (\bar{M}2) \cap \pi_1$, які визначають пряму $t = \sigma \cap \pi_1$. Далі маємо $1 = t \cap AB$ і $K = (1K) \cap l$, де пряма $(1K) \parallel r$.

Побудову точки K на КП ілюструє рис. 8.27, б. Цю побудову теж можна трактувати на основі допоміжного проеціювання, в даному випадку паралельного. Отож, проеціювання в площину $\pi = \pi_1$ відбувається в напрямі твірних циліндричної поверхні. При цьому поверхня відсіку (AB, r) циліндричної поверхні проеціюється на напрямну AB, пряма l – на пряму t, а шукана точка K – на точку $1 = AB \cap t$. Точку K будуємо як $K = (K1) \cap l$, де $(K1) \parallel r$.

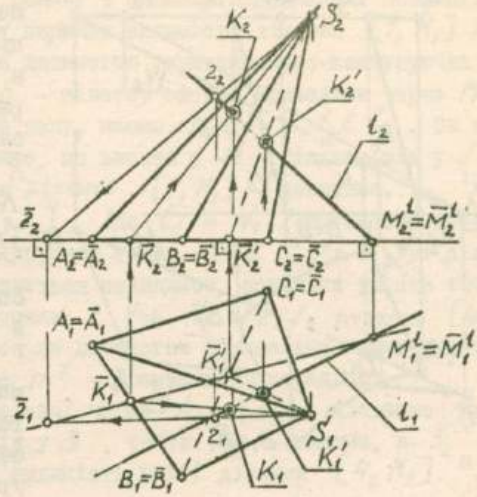


Рис. 8.26

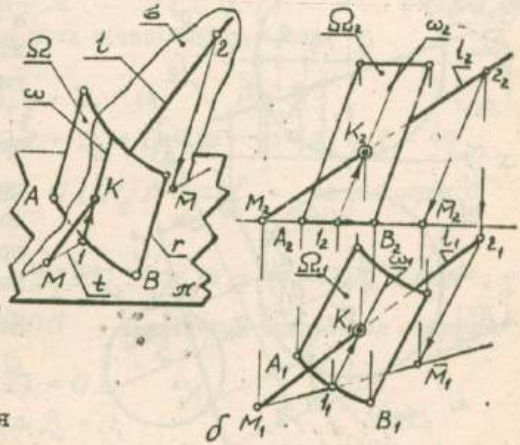


Рис. 8.27

Спрощення побудови K можна досягти і застосуванням інших видів перетворення КП.

Наприклад, побудувати точку K у попередньому випадку можна й за допомогою перетворення зсуву.

Застосуємо такий зсув відносно площини $\pi = \pi_1$, що перетворює відсік циліндричної поверхні (AB, r) на проеціюючий відносно π_1. При цьому $[BB'] \to [B\bar{B}'] \perp \pi_1$, а $2 \to \bar{2}, \ell \to \bar{\ell}$, де 2 беремо так, щоб її висота така сама, як і у B'. Дістаємо $\bar{K} = \bar{\ell} \cap (\bar{A}\bar{B})$, а потім $K = (K\bar{K}) \cap \ell$, де $(K\bar{K}) \parallel (2\bar{2})$ /рис. 8.28/.

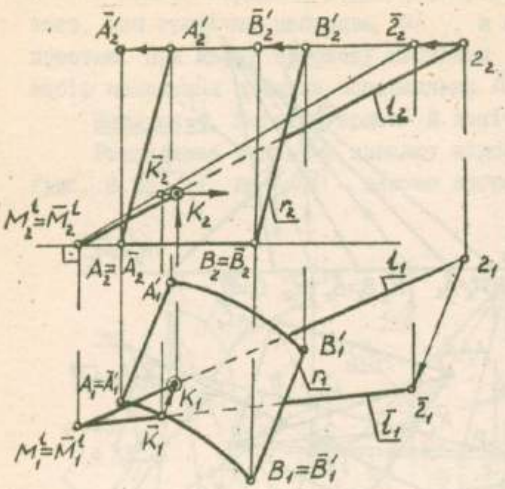


Рис. 8.28

Зміна площин проекцій спрощує побудову перетину в такому випадку.

Випадок 6. Перетин прямої та сфери. Задано пряму загального положення ℓ і сферу з центром в точці O /рис. 8.29/. Якщо вважати, що $\sigma \perp \pi_1 \wedge \sigma \supset \ell$, то горизонтальна проекція (ω_1) перерізу ω - відрізок M_1N_1, а фронтальна проекція (ω_2) - лекальна крива /еліпс/. Між тим, оригінал ω - коло.

Якщо систему π_1/π_2 замінити системою π_2^A/π_1 так, щоб $\pi_2^A \parallel \sigma$ /коли напрям погляду $\bar{e}^A \perp \sigma$/, то проекцією ω в π_2^A буде натуральна фігура кола ω. Центр цього кола $(\omega_2^A) - \bar{O}_2^A$. Дістаємо його за $\bar{O}_1$ і $\bar{O}_2$, а радіус $R = \frac{|M_1N_1|}{2}$. Потім знаходимо точки K_2^A. $\bar{K}_2^A = \ell_2^A \cap \omega_2^A$ і за

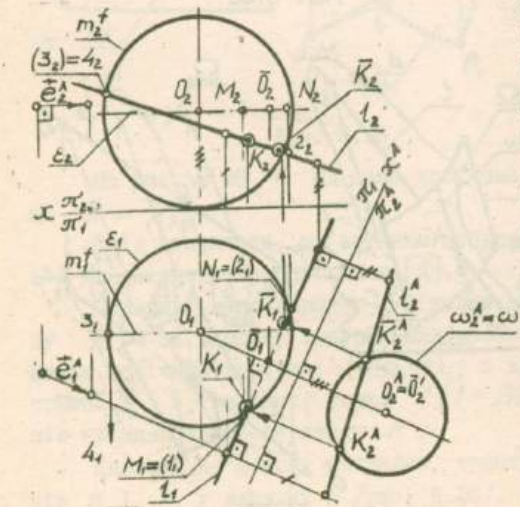


Рис. 8.29

ними - точки K_1, $\bar{K}_1$ і K_2, $\bar{K}_2$.

У всіх розглянутих випадках видимість окремих ділянок проекцій прямої встановлюється за допомогою конкуруючих точок, що визначаються перетинами проекцій прямої й обрисів однойменних проекцій поверхонь. Так, в останньому випадку видимість ділянки $[1, K_1]$ /де $1_1 = M_1$/ встановлюється за допомогою горизонтально-конкуруючих точок $M_1 \in \mathcal{E}$ і $1 \in \ell$, де $\mathcal{E}$ – екватор сфери. Проводячи через $M_1 = \ell_1$ лінію проекційного зв"язку, маємо $M_2 \in \mathcal{E}_2$ і $1_2 \in \ell_2$. За проекціями M_2 і 1_2 зазначаємо, що висота у M більша, ніж у 1, а отже, M_1 – видима, а вся ділянка $[1, K_1]$ – невидима.

Видимість ділянки $[\bar{K}_1 2_1]$ /де $\ell_1 = N_1$/ встановлюється аналогічно за допомогою конкуруючих точок $N \in \mathcal{E}$ і $2 \in \ell$. Тут ділянка $[\bar{K}_1 2_1]$ також виявляється невидимою, оскільки висота точки N більша, ніж висота точки 2 /за N_2 і 2_2/. Ділянка $[4_2 K_2]$ – видима. В цьому переконуємося за допомогою фронтально-конкуруючих точок $4 \in \ell$ і $3 \in m^f$, де m^f – фронтальний меридіан.

За допомогою ЛПЗ, проведеної через $4_2 = (3_2)$, дістаємо 4_1 і 3_1. Глибина у 4 більша, ніж у 3, тобто 4_2 – видима, а 3_2 – невидима. Звідси випливає й видимість усієї ділянки $[4_2 K_2]$ *.

Аналітичне подання перетину прямої і поверхні

Нехай рівняння поверхні $\Omega - \Omega(x, y, z) = 0$, а пряму зображено системою /як перетин двох проеціюючих площин/

$$A_1 x + B_1 y + D_1 = 0;$$
$$A_2 x + C_2 z + D_2 = 0, \quad \text{де } -\infty < x, y, z < \infty.$$

Якщо площина-посередник $\sigma \perp \pi_2 \wedge \sigma \supset \ell$, то рівняння σ має вигляд

$$A_2 x + C_2 z + D_2 = 0, \quad \text{де } -\infty < x, y, z < \infty,$$

Отож, перетин $\omega = \Omega \cap \sigma$ аналітично описується системою

$$\Omega(x, y, z) = 0;$$
$$A_2 x + C_2 z + D_2 = 0,$$

тобто рівняння його горизонтальної проекції: $\omega_1(x, y) = 0;\ z = 0$.

---

* Видимість другої ділянки ℓ_2 /під точки $\bar{K}_2$/ пропонується дослідити самостійно.

Координати горизонтальних проекцій точок зустрічі $(K_1, \bar{K}_1, \ldots)$* дістаємо як розв"язок системи

$$\omega_1(x, y) = 0;$$
$$A_1 x + B_1 y + D_1 = 0.$$

Приклад 8.7. Перетин кривої та поверхні.

Якщо треба побудувати точку /точки/ зустрічі поверхні з кривою $K = \Omega \cap k$, де k - крива, то замість площини-посередника тут використовується проеціююча поверхня-посередник /циліндрична/. Напрямною такої циліндричної поверхні править саме крива k.

Приклад 8.8. Перетин двох поверхонь. Перетин двох поверхонь - плоска просторова лінія або сукупність окремих ліній. Інколи перетин двох поверхонь називають лінією перетину поверхонь й позначають ЛП.

Згідно з визначенням перетину двох геометричних об"єктів ЛП - множина точок, які належать обом поверхням.



Рис. 8.30

Розглянемо алгоритм побудови окремих точок ЛП у геометричному аспекті.

Якщо перетинаються поверхні Ω і $\bar{\Omega}$, то для побудови множини точок $\{M^i\} \subset \omega = \Omega \cap \bar{\Omega}$ можна скористатися таким алгоритмом (рис.8.30):

1/ проводимо множину поверхонь-посередників $\{\sigma^i\}$;

2/ одержуємо дві множини ліній на поверхнях Ω й $\bar{\Omega}$:

$$\Omega^r = \{r^i\} = \{\sigma^i\} \cap \Omega$$

й

$$\bar{\Omega}^{\bar{r}} = \{\bar{r}^i\} = \{\sigma^i\} \cap \bar{\Omega},$$

тобто заміняємо обидві поверхні каркасами;

3/ точки $\{M^i\}$ одержуємо як перетини відповідних пар елементів множин - ліній $\{r^i\}$ і $\{\bar{r}^i\}$: $M^i = r^i \cap \bar{r}^i$ / M^i можуть існувати, оскільки $\{r^i\} \subset \{\sigma^i\} \wedge \{\bar{r}^i\} \subset \{\sigma^i\}$;

4/ множина точок $\{M^i\}$ задає $\omega(\wedge\Pi)$.

У деяких випадках для побудови точок $\{M^i\}$ можна обмежитись використанням лише однієї з множин $\{r^i\}$ або $\{\bar{r}^i\}$ без викори-

* Їх число визначає порядок рівняння $\omega_1(x, y) = 0$.

стання $\{G^i\}$. Таке спрощення алгоритму виявляється можливим, якщо вдається кожну M^i побудувати безпосередньо як перетин відповідної кривої $r^i(\subset\Omega)$ та $\bar{\Omega}$, тобто як $M^i = r^i \cap \bar{\Omega}$.

Випадок I. Перетин двох многогранних поверхонь.

Розглядувана тут побудова ЛП тригранних призми (DEF) і піраміди $(ABCS)$ є типовою для побудови ЛП будь-яких многогранних поверхонь.

Розв"язання. У даному випадку множинами $\Omega^r = \{r^i\}$ та $\bar{\Omega}^{\bar{r}} = \{\bar{r}^i\}$ є ребра відповідно призми й піраміди. Побудова множини точок $\{M^i\}$ зводиться до побудови точок зустрічі ребер однієї з поверхонь з гранями або ребрами другої.

Побудова фронтальної проекції ЛП труднощів не викликає, оскільки призма фронтально-проеціюча, а отже, фронтальні проекції кожної грані і ребер мають збиральні властивості. Тому фронтальні проекції точок зустрічі $1 = D\cap(ABS)$, $2 = D\cap(ACS)$, $3 = E\cap(BCS)$, $4 = E\cap(ACS)$. $5 = F\cap B$, $6 = F\cap(ACF)$, $7 = B\cap(DE)$* /рис. 8.3I, а/ дістаємо з фронтальної конкуренції точок 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 і 7 з D , E , F і B : $1_2 = 2_2 = D_2$, $3_2 = 4_2 = E_2$, $5_2 = 6_2 = F_2$ і $7_2 = B_2 \cap (D_2E_2)$.

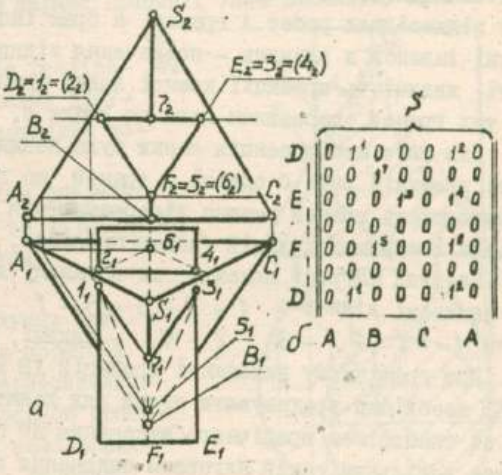


Рис. 8.3I

Множина $\{G^i\}$ у даному випадку виявляється двохелементною: дві горизонтальні площини-посередники G^1 та G^2 використовуються для побудови 1_1 , 2_1 , 3_1 , 4_1 , 5_1 , 6_1 і 7_1.

ЛП многогранних поверхонь являє собою в загальному випадку просторову /або плоску/ ламану, ланки якої визначено парами точок зустрічі ребер й граней, що належать одній грані.

---

* Тут заради спрощення ребра позначені однією, а грані - двома літерами.

У даному досить простому випадку визначення ланок й видимості проекцій кожної з них не викликає труднощів, але в більш складних випадках для цієї мети доцільно використовувати матрицю інцидентності ребер і граней, запропоновану Д.Г.Ананьовим /рис. 8.31, б/.

Звичайно такі матриці складають окремо для горизонтального й фронтального полів проекцій, але в даному простому випадку фронтальну проекцію ЛП було визначено графічними умовами використання збиральних властивостей, а отже, необхідність у матриці інцидентності для фронтального поля проекцій відпадає.

Рядки в матриці відображають ребра призми /через один вони позначені буквами зліва/, а міжряддя - відповідно грані призми. Ребро D зображене двома рядками-дублікатами, що означає: умовне розмикання поверхні призми відбувається якраз уздовж ребра D.

Стовпці в матриці відображають ребра піраміди /теж через один вони позначені літерами знизу/ і відповідні грані /між стовпцями ребер/. Тут розімкнення відбувається вздовж ребра A, яке дублюється.

Інцидентність ребер і граней позначається одиницею в місці перетину відповідних ребер і граней, а брак інцидентності таких - нулем. Верхні індекси в одиниць - позначення відповідних точок зустрічі. Нарешті, видимість проекції кожної ланки визначається видимістю проекцій тих граней, перетином яких ця ланка є.

Для того щоб проекція ланки була невидимою, достатньо невидимості проекції хоча б однієї з граней, що перетинаються. Видимість й невидимість граней умовно відображаються на матриці ділянками суцільних і штрихових ліній /знизу та зліва/.

Розгляд матриці показує, що в даному випадку ЛП розпалася на дві замкнені ділянки: $1-7-3-5-1$ й $2-4-6-2$. Ланки $1-7$, $7-3$, $2-4$ - видимі, а інші - невидимі.

При графічному виконанні проекцій ЛП криволінійних поверхонь на КП необхідно враховувати цілий ряд додаткових моментів, пов"язаних зі специфікою графічного виконання КП криволінійних поверхонь. Постає доцільним такий алгоритм виконання проекцій ЛП на КП /графічний аспект/.

1. Знаходимо області існування проекцій ЛП: ними є спільні частини однойменних проекцій, тобто для поверхонь Ω й $\tilde{\Omega}$ - перетини $\Omega_1 \cap \tilde{\Omega}_1$ та $\Omega_2 \cap \tilde{\Omega}_2$.

2. Знаходимо проецюючі поверхні та їх проекції, що мають збиральну властивість.

3. Обводимо ті проекції ЛП /або їх ділянки/, які збігаються з проекціями поверхонь, що мають збиральну властивість.

4. Знаходимо, якщо вона є, спільну площину симетрії поверхонь, що перетинаються, паралельну одній з площин проекцій; точки перетину обрисів їх проекцій на площині проекцій, яка паралельна спільній площині симетрії, належить до проекції ЛП.

5. Обираємо спосіб /або способи/ побудови проекцій окремих точок ЛП; при цьому керуємося тим, що обидві проекції Γ^2 та $\bar{\Gamma}^2$ /або хоча б одна/ були зручні для графічного відтворення.

6. Виявляємо й будуємо проекції опорних точок ЛП; набір опорних точок для кожної ЛП індивідуалізовано; до опорних точок звичайно відносять екстремальні точки, точки-перетини ЛП і геометричних елементів, що проеціюються в обриси відповідних проекцій, точки, що розділяють різнорідні ділянки ЛП тощо, тобто такі точки ЛП, які характеризують геометричні властивості ЛП.

7. Будуємо ті проміжні точки ЛП, необхідність в яких відчувається.

8. Виявляємо видимі й невидимі ділянки проекцій ЛП.

9. Здобутий точковий каркас проекції /або проекцій/ ЛП обводимо неперервною лінією.

Випадок 2. Розглянемо реалізацію цього алгоритму у випадку побудови ЛП відсіків прямих кругових конуса та циліндра.

Домовимося, що відсіки одержані за допомогою площин Π_1 та $\sigma \| \sigma' \| \Pi_1$, де $\sigma' \ni S$ – вершина конуса /рис. 8.32/.

Розв"язування. Штрихуємо /не щільно/ області існування проекцій ЛП. Оскільки циліндр є горизонтально-проеціюючим, то горизонтальною проекцією ЛП виявляється дуга кола-проекції циліндра $(1_1, 2_1)$, що належить області існування горизонтальної проекції ЛП.

Спільна площина симетрії (α) не паралельна жодній з площин проекцій.

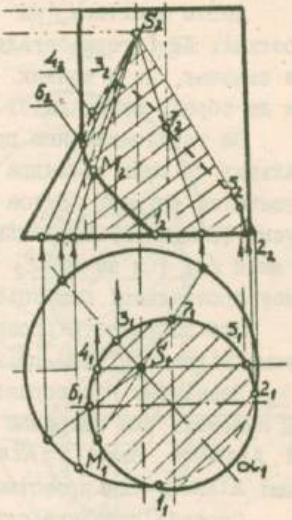


Рис. 8.32

Зазначаємо, що окремі точки ЛП у даному випадку можна одержувати або за допомогою горизонтальних площин-посередників $\{\sigma^i\}$, де $\sigma^i \parallel \pi_1$ /тоді r^i та $\bar{r}^i$ - кола, що проеціюються на кола в π_1 /, або за допомогою твірних конуса: горизонтальні проекції точок-перетинів їх та циліндра легко дістати на горизонтальній проекції циліндра, оскільки остання має збиральну властивість. У даному випадку при побудові точок ЛП скористаємося другим способом.

За горизонтальною проекцією ЛП неважко виявити опорні точки. Точки 1 і 2 виявляються найнижчими точками ЛП як точки-перетини кіл-основ відсіків. За 1_1 і 2_1 будуємо 1_2 і 2_2.

Найвища точка ЛП - точка 3, яка належить спільній осьовій площині симетрії (α) обох відсіків. Справді, її горизонтальна проекція 3_1 найближча від усіх інших точок горизонтальної проекції ЛП до S_1 - горизонтальної проекції вершини конуса, а отже, точка 3 вища од усіх інших точок ЛП. За горизонтальною проекцією твірної конуса, на якій міститься точка 3, будуємо фронтальну проекцію твірної, а потім і 3_2.

Легко помітити, що 4_1 і 5_1 - точки перетину горизонтальної проекції ЛП і горизонтальної проекції фронтальної твірної конуса. Це означає, що в точках 4_2 і 5_2 фронтальна проекція ЛП дотикається до обрису фронтальної проекції конуса.

За горизонтальною проекцією ЛП зазначаємо, що перетинами фронтальних твірних циліндра й ЛП є точки 6 та 2. За горизонтальною проекцією твірної конуса $(S_1 6_1)$, якій належить точка 6_1, будуємо фронтальну проекцію твірної $(S_2 6_2)$, а потім - точку 6_2, в якій /як і в точці 2_2 / фронтальна проекція ЛП дотикається до обрису фронтальної проекції циліндра.

Щоб побудувати проекції M /довільної точки ЛП/ за M_1, будуємо відповідні їй $(S_1 M_1)$, $(S_2 M_2)$ та M_2.

Зазначимо /за горизонтальною проекцією ЛП/, що ділянка $1-6$ ЛП належить тим частинам відсіків, які в π_2 проеціюються на видимі ділянки. Отже, і ділянка $1-6$ проеціюється в π_2 на видиму. Інші ділянки ЛП проеціюються в π_2 на невидимі.

Способи побудови окремих точок ЛП. Розглядаються лише найбільш поширені з графічних способів, що відрізняються або видом, або розміщенням поверхонь-посередників $\{\sigma^i\}$.

I. σ^i -площина.

а/ $\sigma^i \parallel \pi_1$, тобто σ^i - горизонтальна площина-посередник. На рис. 8.33 зображено застосування горизонтальної площини-посередника (σ^i) для побудови пари точок / 1 і 2 / ЛП прямого кругового конуса /з вертикальною віссю/ і сфери. Тут за точками 1_1 , 2_1 = $= r_1' \cap \bar{r}_1'$ будуємо 1_2 та 2_2. Перетини однойменних проекцій /вони заштриховані/ конуса й сфери - області існування відповідних проекцій ЛП.

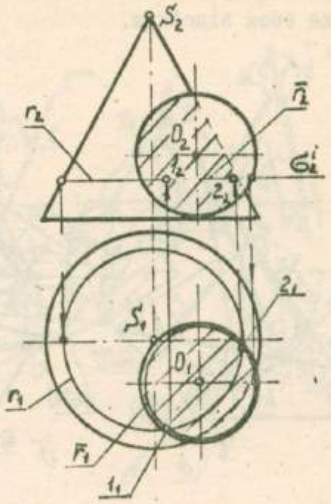


Рис. 8.33

б/ $\sigma^i \parallel \pi_2$ /рис. 8.34/. Хоча тут ті самі поверхні, що й в попередньому випадку, але вісь конуса перпендикулярна до π_2 і перетинами його та горизонтальних площин-посередників виявляються вже гіперболи, тобто лекальні криві. Фронтальні ж площини-посередники ($\sigma^i \parallel \pi_2$) дозволяють одержувати, як і в попередньому випадку, r^i та $\bar{r}^i$ - кола, а отже, й їх проекції / r_2^i та $\bar{r}_2^i$ / - кола на π_2. На рис. 8.34 показано побудову двох точок ЛП: спочатку 1_2 , 2_2 = $r_2' \cap \bar{r}_2'$, потім - 1_1 і 2_1.

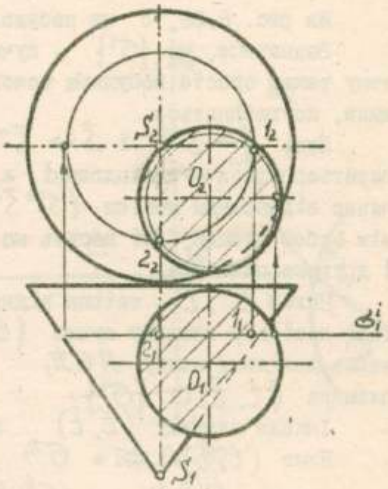


Рис. 8.34

в/ σ^i - площина спеціального розміщення.

Інколи зручний /для графічного виконання в проекціях/ вид ліній r^i та $\bar{r}^i$ вдається дістати лише спеціальним добором розміщення площин-посередників. Наприклад, при побудові точок ЛП двох відсіків конічних поверхонь загального виду з вершинами S та $\bar{S}$ і, відповідно, напрямними k , $\bar{k} \subset \pi_1$

/відсіки одержані за допомогою площин π_1 . $\Sigma \| \bar{\Sigma} \| \pi_1$, де $\Sigma \ni S$ та $\bar{\Sigma} \ni \bar{S}$; рис. 8.35, а/ лінії r^i та $\bar{r}^i$ - прямі, якщо $\sigma^i \supset (S\bar{S})$, тобто якщо площину-посередник проведено через вершини обох відсіків.

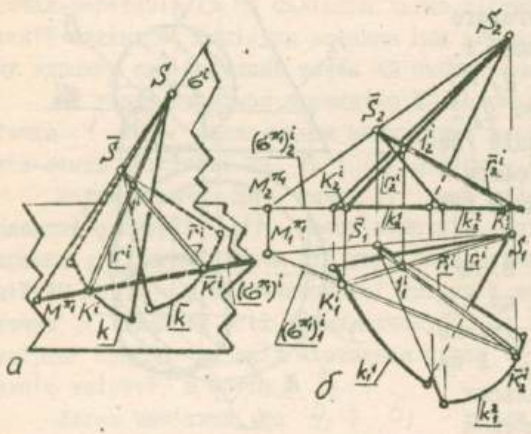


Рис. 8.35

Домовимося, що $(\sigma^{\pi_1})^i = \sigma^i \cap \pi_1$, а $M^{\pi_1} = (S\bar{S}) \cap \pi_1$. Тоді, очевидно, $M^{\pi_1} \in (\sigma^{\pi_1})^i$. Ясно, що напрям прямої слід обирати так, щоб існували перетини $K^i = (\sigma^{\pi_1})^i \cap k$ та $\bar{K}^i = (\sigma^{\pi_1})^i \cap \bar{k}$. Одержані при цьому твірні (K^iS) та $(\bar{K}^i\bar{S})$ і є відповідно r^i та $\bar{r}^i$. Звідси, нарешті, $(K^iS) \cap (\bar{K}^i\bar{S}) = 1^i \in \Lambda\Pi$.

На рис. 8.35, б ця побудова продубльована на КП.

Зазначимо, що $\{\sigma^i\}$ - пучок площин з носієм $(S\bar{S})$. Завдяки тому такий спосіб побудови точок 1^i називають інколи способом площини, що гойдається.

Якщо $S \to S^\infty$ і $\bar{S} \to \bar{S}^\infty$, то відповідні конічні поверхні перетворюються на циліндричні, а пучок $\{\sigma^i\}$ - на пучок з нескінченно віддаленим носієм $(S^\infty\bar{S}^\infty)$, тобто на множину паралельних між собою площин, які несуть на собі напрями твірних як одного, так і другого циліндра.

Нехай l , $\bar{l}$ - твірна відповідно першого і другого циліндра. Тоді довільну площину пучка $\{\sigma^i\}$ сконструюємо так /рис. 8.36,а/: через довільну точку $A \in \pi_1$ проведемо прямі $t \| l$ та $\bar{t} \| \bar{l}$; площина $(t, \bar{t}) \subset \{\sigma^i\}$.

Інколи площину $(t, \bar{t})$ називають площиною паралелізму.

Якщо $(t, \bar{t}) \cap \pi_1 = \sigma^{\pi_1}$, то для побудови будь-якої іншої досить взяти $\sigma^i \cap \pi_1 = (\sigma^{\pi_1})^i \| \sigma^{\pi_1}$. Тоді дістанемо $K^i = (\sigma^{\pi_1}) \cap k$ та $\bar{K}^i = (\sigma^{\pi_1})^i \cap \bar{k}$. проведемо через K^i пряму

$r^i \parallel \ell$ і через $\bar{K}^i$ – пряму $\bar{r}^i \parallel \ell$ і, побудуємо, нарешті, точку $1^i = r^i \cap \bar{r}^i$.

На рис. 8.36, б що побудову продубльовано на КП.

2. σ^i-сфера. Спосіб побудови точок ЛП за допомогою сфер-посередників інколи називають способом сфер-посередників.

Розрізняють способи концентричних та ексцентричних сфер-посередників.

а/ Широке застосування в графічній практиці знаходить спосіб концентричних сфер-посередників. Його теоретичним обґрунтуванням є така теорема: перетином співвісних поверхонь обертання є коло, площина якого перпендикулярна до спільної осі, а центр належить останній *.

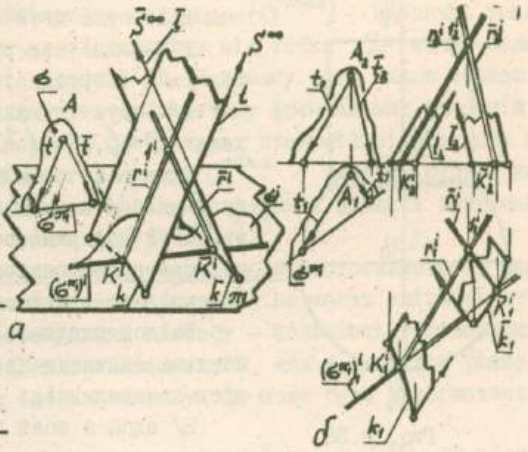


Рис. 8.36

Рис. 8.37 ілюструє умови цієї теореми у випадку, якщо перетинаються дві співвісні поверхні обертання, які мають фронтальні меридіани m^f та $\bar{m}^f$ з точкою-перетином $K = m^f \cap \bar{m}^f$ /дано лише фронтальні проекції/. Ясно, що, обертаючись, точка K описує коло-паралель ρ з центром $O^K \in (JJ)$ і площиною обертання $\mu^K \perp (JJ)$. Висновком цієї

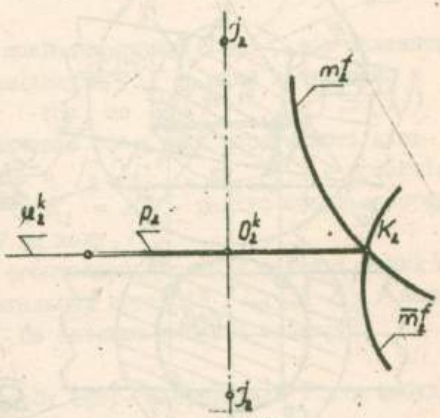


Рис. 8.37

* Залежно від виду поверхонь обертання, що перетинаються, коло-перетин може бути не одне.

теореми є той факт, що спільна вісь поверхонь обертання виявляється множиною центрів сфер ($\{O^K\}$), яких перетин з поверхнею обертання - кола (r) /рис. 8.38/.

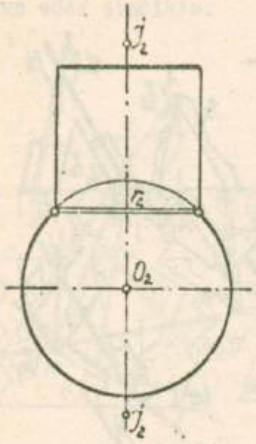


Рис. 8.38

Отож, спосіб концентричних сфер-посередників може бути застосований, якщо:

1/ обидві поверхні, що перетинаються, - поверхні обертання;

2/ існує точка-перетин осей цих поверхонь ($O=(JJ)\cap(\bar{J}\bar{J})$)

Якщо вісь поверхні обертання паралельна будь-якій з площин проекцій, то коло-перетин цієї поверхні обертання й сфери-посередника проеціюється в згадувану площину проекцій на відрізок.

Звідси випливає ще одна умова, за якої можливе застосування способу концентричних сфер-посередників:

3/ одна з осей поверхонь, що перетинаються, має бути проеціюючою, а друга - принаймні прямою рівня.

Звичайно, забезпечити наявність третьої умови можна за допомогою якогось з перетворень КП.

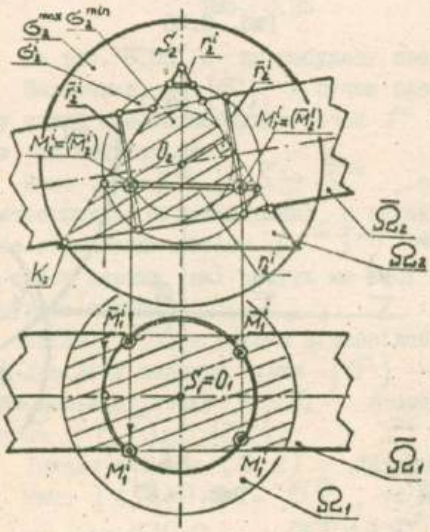


Рис. 8.39

Рис. 8.39 ілюструє застосування способу концентричних сфер-посередників для побудови точок ЛП відсіку прямого кругового конуса /з $(JJ)\perp\pi_1$ / й відсіку кругового циліндра / $(JJ)\parallel\pi_2$ /.

Тут відсік конуса - Ω, відсік циліндра - $\bar{\Omega}$. Нехай M^i - довільна точка їх ЛП. Тоді M_2^i = = $r_2^i\cap\bar{r}_2^i$, де r_2^i і $\bar{r}_2^i$ - фронтальні проекції, відповідно, r^i = = $\Omega\cap\sigma^i$ та $\bar{r}^i=\bar{\Omega}\cap\sigma^i$. За M_2^i будуємо $M_1^i\in r_1^i$.

Зазначимо, що сфера-посередник мінімального радіуса σ^{min} – дотична до поверхні конуса. Сфери-посередники ще меншого радіуса вже не можуть давати ліній r^i, а отже, і r_2^i.

Сферу-посередник найбільшого радіуса (σ^{max}) визначає така σ_2^i, яка проходить через найвіддаленішу від точки O_2 точку області існування фронтальної проекції ЛП. У даному разі такою точкою виявилася точка K – одна з точок перетину фронтальних проекцій твірних, що належать до обрисів фронтальних проекцій відповідних відсіків. Очевидно, сфери більшого, ніж у σ_2^{max}, радіуса будуть визначати такі r_2^i, в яких жодна точка не належить області існування фронтальної проекції ЛП, тобто фігурі $\Omega_2 \cap \bar{\Omega}_2$.

б/ Спосіб ексцентричних сфер-посередників застосовується, якщо в поверхонь обертання, що перетинаються, осі не мають спільної точки.

Умова можливості застосування способу – наявність у поверхонь, що перетинаються, спільної площини симетрії, яка є площиною рівня.

Очевидно, й тут для забезпечення умови може бути використано якесь з перетворень КП.

На рис. 8.40 показано побудову довільної точки (M) ЛП відсіків прямого кругового конуса Ω /відсікаючі площини: π_1 і $\Sigma \parallel \pi_1$, де $\Sigma \ni S$ / й кільця $\bar{\Omega}$ /відсікаючі площини π_1 й π_3, а $(JJ) \perp \pi_2$.

За центр сфери-посередника прийнято точку (O^i), яка належить осі конуса $(O^i \in (JJ))$ й перпендикуляру t, який побудовано в центрі $\bar{O}^i$ кола $\bar{r}^i = \Gamma \cap \bar{\Omega}$ так, що $t \perp \bar{r}^i$, а $\Gamma \supset (J\bar{J})$. Отож, t – геометричне місце центрів сфер, які перетинають кільце $\bar{\Omega}$ по колу $\bar{r}^i$. Якщо $K_2 = \Gamma_2 \cap \rho_2^t$, де ρ_2^t – проекція фронтальної паралелі кільця, то $\bar{O}_2^i K_2 = R^i$ – радіус сфери-посередника σ^i, який перетинає конус по колу r^i.

Звідси $r_2^i \cap \bar{r}_2^i = M_2^i$ – фронтальна проекція шуканої точки M.

Точки перетину обрисів фронтальних проекцій /L_2 і N_2/ належать до фронтальної проекції ЛП, бо спільна площина симетрії відсіків фронтальна.

в/ Можливе використання способу сфер-посередників і для побудови ЛП циклічних поверхонь більш загального виду [117] *.

---

* Рідше використовують способи побудови ЛП, наприклад, способи циліндрів-та конусів-посередників [9, с. 148-150].

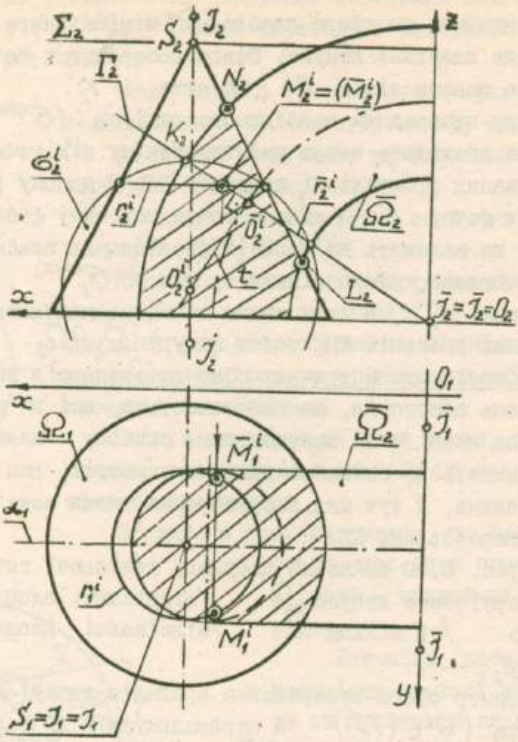


Рис. 8.40

Аналітичне подання ЛП. Нехай λ – ЛП поверхонь Ω та $\bar{\Omega}$, тобто $\lambda = \Omega \cap \bar{\Omega}$.

Якщо Ω може бути аналітично подана у вигляді алгебраїчної функції m-го порядку

$$\Omega^m(x, y, z) = 0,$$

а $\bar{\Omega}$ – у вигляді алгебраїчної функції n-го порядку

$$\bar{\Omega}^n(x, y, z) = 0,$$

то легко переконатися, що λ аналітично описується у вигляді

$$\left.\begin{aligned} \Omega^m(x, y, z) &= 0; \\ \Omega^n(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda^{mn}(x, y, z) = 0,$$

тобто ЛП поверхонь Ω та $\bar{\Omega}$ виявляється в загальному випадку кривою mn-го порядку.

Відомо, що просторова крива, яка є алгебраїчною mn-го порядку, має в загальному випадку mn точок-перетинів $(N^i = \lambda^{mn} \cap \sigma)$ з довільною площиною σ. Якщо площина π^Σ – спільна площина симетрії поверхонь Ω та $\bar{\Omega}$, то й λ^{mn} симетрична відносно π^Σ. Нарешті, якщо $\sigma \perp \pi^\Sigma$, то в кожної з точок $N^i \in \lambda^{mn}$ знайдеться симетрична $(\bar{N}^i)$ відносно π^Σ /рис. 8.41/. Отже, в прямої $\ell = \sigma \cap \pi^\Sigma$ та кривої λ^{mn}_{π} – ортогональної проекції λ^{mn} в π^Σ – виявляється вже не більше $mn/2$ точок-перетинів (N^i_π), оскільки інші $mn/2$ точок конкурують з першими відносно π^Σ. Отож, справедлива така теорема:

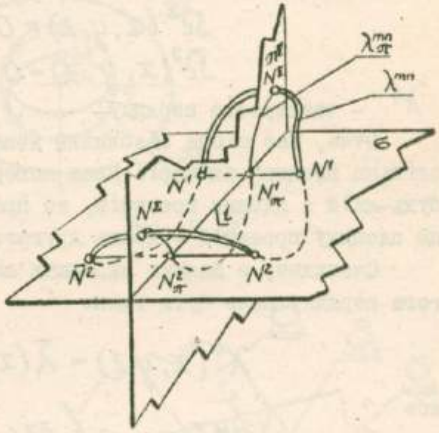


Рис. 8.41

Якщо спільна площина симетрії (π^Σ) поверхонь m-го та n-го порядків паралельна будь-якій з площин проекцій, то проекція ЛП зазначених поверхонь в цю площину проекцій є лінією $mn/2$ порядку *.

Зображення λ у вигляді системи

$$\Omega^m(x,y,z) = 0;$$
$$\bar{\Omega}^n(x,y,z) = 0$$

вказує на можливість використання ЕОМ для побудови ЛП поверхонь Ω і $\bar{\Omega}$.

У цьому загальному випадку одержання рівняння λ, як невизначеного розв"язку системи, також значно спрощується застосуванням площин рівня у вигляді площин-посередників: $x = a^i$, $y = b^i$ або $z = c^i$.

Приклади побудови ЛП за допомогою ЕОМ можна знайти в [5].

* Див. [115].

Особливості побудови ЛП поверхонь другого порядку

Побудову окремих точок ЛП широко поширених у техніці поверхонь другого порядку можна виконувати за допомогою вже розглянутих способів. Однак при цьому слід враховувати деякі особливості ЛП поверхонь другого порядку, що дозволяють спростити в окремих випадках побудову ЛП у цілому.

Аналітичне подання ЛП поверхонь другого порядку має вигляд

$$\left.\begin{aligned}\Omega^2(x,y,z)=0;\\ \bar{\Omega}^2(x,y,z)=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda^4(x,y,z)=0,$$

тобто крива λ^4 – четвертого порядку.

Отже, має місце особливий випадок попередньої теореми: якщо спільна площина симетрії двох поверхонь другого порядку паралельна будь-якій з площин проекцій, то проекція ЛП зазначених поверхонь у цю площину проекцій – крива другого порядку.

Очевидно, в деяких випадках аналітичне подання ЛП поверхонь другого порядку може бути таким

$$\lambda^4(x,y,z)=\bar{\lambda}(x,y,z)\,\bar{\bar{\lambda}}^3(x,y,z)=0,$$

або

$$\lambda^4(x,y,z)=\bar{\lambda}^2(x,y,z)\,\bar{\bar{\lambda}}^2(x,y,z)=0,$$

або іншим, відповідним можливим розкладам λ^4 на незвідні множники.

Перший випадок розпаду ЛП поверхонь другого порядку відповідає, зокрема, теоремі: якщо поверхні другого порядку мають спільну твірну $(\bar{\lambda})$, то вони мають ще один перетин – криву третього порядку $(\bar{\bar{\lambda}}^3)$.

Другий випадок розпаду ЛП поверхонь другого порядку відповідає теоремі про подвійний дотик /рис. 8.42/: якщо дві поверхні другого порядку мають дві точки дотику / T і $\bar{T}$ /, то їх ЛП – дві криві другого порядку / $\mathcal{T}^2$ і $\bar{\mathcal{T}}^2$ /.

Окремим випадком цієї теореми є теорема Монжа: ЛП двох поверхонь другого порядку розпадається на дві криві другого порядку / $\mathcal{T}^2$ і $\bar{\mathcal{T}}^2$ /, якщо існує третя поверхня другого порядку $(\bar{\Omega})$, що вписана в перші дві / Ω і $\bar{\Omega}$ / або описана навколо їх.

Рис. 8.43 ілюструє випадки побудови ЛП поверхонь другого порядку згідно з умовами теореми Монжа. Тут крива четвертого порядку $\lambda^4(x,y,z)=0$ розпадається на дві криві другого порядку /еліпси/: $\tau^2(x,y,z)=0$ та $\bar{\tau}^2(x,y,z)=0$. На рис. 8.43, а, б показано лише фронтальні проекції таких еліпсів: τ_2^2 й $\bar{\tau}_2^2$ *. В усіх випадках спільна площина симетрії поверхонь, що перетинаються, фронтальна.

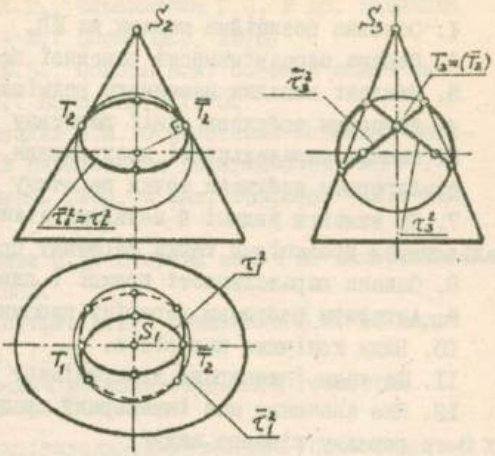


Рис. 8.42

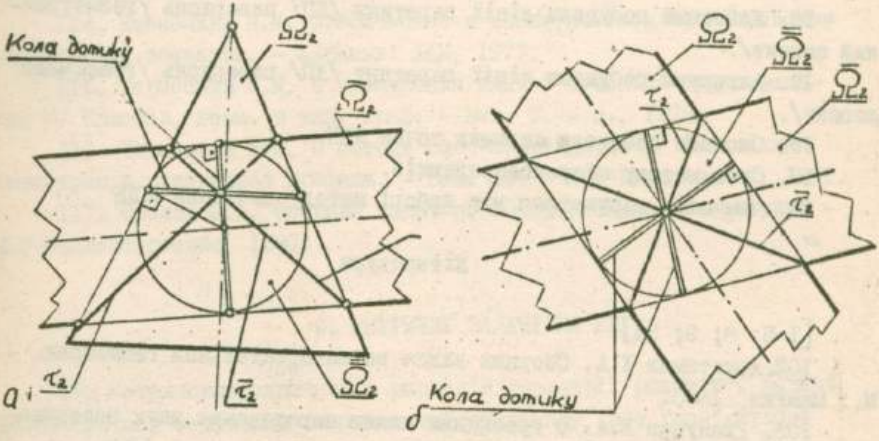


Рис. 8.43

---

* Аналітичні моделі ЛП поверхонь другого порядку досить детально розглянуто в [103]. Застосування ЕОМ для побудови ЛП поверхонь другого порядку висвітлено в [5].

Запитання для самоперевірки

1. Основна позиційна задача на КП.
2. Ознака нерозв"язності основної позиційної задачі на КП.
3. Можливі випадки взаємного розміщення прямих у просторі.
4. Алгоритм побудови лінії перетину двох площин.
5. Ознака паралельності двох площин.
6. Алгоритм побудови точки перетину прямої та площини.
7. Як виявити видимі й невидимі ділянки проекцій прямої, що розділяються проекціями точки перетину прямої з площиною?
8. Ознака паралельності прямої і площини.
9. Алгоритм побудови перерізу площини й поверхні.
10. Види конічних перерізів.
11. Що таке інженерний дискримінант кривої 2-го порядку?
12. Яке значення має інженерний дискримінант відносно дуг кривих 2-го порядку різного виду?
13. Алгоритм побудови дотичної площини до поверхні.
14. Алгоритм побудови точок перетину прямої й поверхні.
15. Як обирають положення площини-посередника?
16. Алгоритм побудови лінії перетину /ЛП/ поверхонь /геометричний аспект/.
17. Алгоритм побудови лінії перетину /ЛП/ поверхонь /графічний аспект/.
18. Способи побудови окремих точок ЛПП.
19. Суть методу сфер-посередників.
20. Чим слід керуватися при виборі методу побудови ЛПП?

Література

[1-5; 8; 9; 94].

102. Арустамов Х.А. Сборник задач по начертательной геометрии. - М.: Машгиз, 1963.

103. Глазунов Е.А. О проекциях линии пересечения двух поверхностей второго порядка, имеющих общую плоскость симметрии // Тр. московск. семин. по начерт. геом. и инж. графике. - М.: Сов. наука, 1958.

104. Глоговский В.В. Элементарные конструктивные задачи по начертательной геометрии. - Львов: Выща шк., 1991.

105. Гордон В.О., Иванов Ю.Б., Солнцева Т.Е. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Наука, 1967.

106. Засов В.Д., Зенгин А.Р., Иконникова Г.С. и др. Задачник по начертательной геометрии. – М.: Высш. шк., 1975.

107. Котов И.И., Амиянц Е.В., Осипов В.А. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Высш. шк., 1970.

108. Онищенко Л.И., Чернецкий Н.М. О некоторых аспектах методики обучения построению линии пересечения поверхностей /ЛПП/ // Сб. научно-метод. статей. Начерт. геом. и инж. графика. – М.: МГИ, 1987. – Вып. 16.

109. Посвянский А.Д., Рыжов Н.Н. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: ГИТТЛ, 1962.

110. Посвянский А.Д., Леонтьев А.И., Огнивенко В.М. 50 задач повышенной трудности: Калинин, 1970.

111. Руднев А. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Гостехиздат, 1960.

112. Сборник задач по начертательной геометрии /с элементами программирования/ /Под ред. В.Е.Михайленко. – К.: Вища шк., 1980.

113. Траутман Н.Ф. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Машгиз, 1954.

114. Чернецкий Н.М. Графическое и аналитическое моделирование графических объектов. – Харьков: ХАИ, 1977.

115. Чернецкий Н.М. О применении одного признака существования // Приклад. геом. и инж. граф. – Вып. 9. – К., 1978.

116. Чернецкий Н.М. О методе сфер-посредников // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Вып. 18. – К.; Будивельник, 1971.

117. Фролов С.А. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1980.

9. МЕТРИЧНІ ЗАДАЧІ НА КП

Під метричними задачами в нарисній геометрії розуміють задачі, що стосуються метричних властивостей оригіналу, але розв"язувані на зображенні. Такі, зокрема, задачі, пов"язані з побудовою натуральної фігури геометричних об"єктів за проекціями останніх на КП.

Розрізняють <u>лонгометричні</u> задачі, пов"язані з побудовою натуральної фігури відрізків, та <u>гоніометричні</u>, пов"язані з побудовою натуральної фігури кутів або проекцій кутів заданої величини.

Розв"язування будь-якої метричної задачі на КП може бути зведене до розв"язування двох основних задач.

9.I. Перша основна метрична задача /лонгометрична/

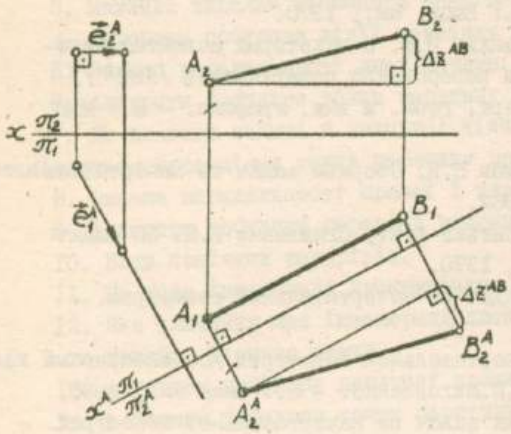


Рис. 9.I

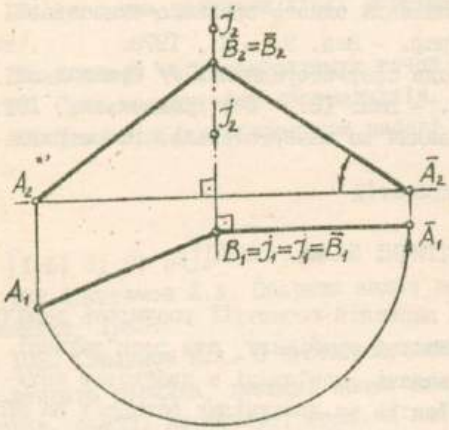


Рис. 9.2

I. За таку прийнято вважати задачу: задано проекції $[A_1B_1]$ та $[A_2B_2]$; знайти $|AB|$.

Розв"язування. З розв"язуванням даної задачі раніше вже доводилося неодноразово зустрічатися. Перші три варіанти найбільш поширені.

Варіант I. У системі $\frac{\pi_1}{\pi_2}[AB]$ /рис. 9.I/ – відрізок загального положення. Якби він був розміщений, наприклад, фронтально, його натуральна фігура дорівнювала б за довжиною фронтальній проекції: $|AB| = |A_2B_2|$. Тому замінимо $\pi_2/\pi_1 \to \pi_2^A/\pi_1$ так, щоб $\pi_2^A \parallel [AB]$ /або $\vec{e}^A \perp [AB]$/. Отже, в новій системі $[A_1B_1] \parallel x^A$. Побудувавши за $[A_1B_1]$, x^A та $[A_2B_2]$ проекцію $[A_2^AB_2^A]$, як показано на рис. 9.I, дістанемо $|AB| = |A_2^AB_2^A|$.

Варіант 2. Тут для приведення $[AB]$ у фронтальне положення скористаємося обертанням відрізка навколо $(JJ) \perp \pi_1 \wedge (JJ) \ni B$ /рис. 9.2/. Очевидно, $|AB| = |\bar{A}_2\bar{B}_2|$.

Як у варіанті I, тут можливе розв"язування цієї задачі також приведенням $[AB]$ у горизонтальне положення. В першому випадку для цього потрібна заміна $\pi_2 / \pi_1 \to \pi_2 / \pi_1^A$ де $\pi_1^A \parallel [AB]$, тобто $x^A \parallel [A_2 B_2]$. У другому випадку вісь обертання слід взяти так, щоб

$$(JJ) \perp \pi_2 \wedge (JJ) \ni B \wedge [AB] \to [\bar{A}\bar{B}] \parallel \pi_1.$$

Варіант 3. Розв"язування грунтується на тому, що як би не був оригінал $[AB]$ розміщений відносно будь-якої площини проекцій π_i /рис. 9.3, а/, де i = = I, 2, 3, він є гіпотенузою прямокутного $\Delta ABB'$, катет $AB' \parallel \pi_i$, а катет BB' дорівнює /за довжиною/ різниці відстаней точок A і B від π_i: Δi^{AB} .

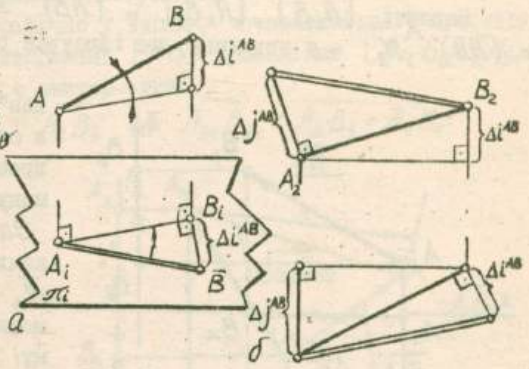


Рис. 9.3

Ясно, що в площині π_i на $[A_i B_i]$, як на катеті, завжди можна побудувати прямокутний трикутник, конгруентний $\Delta ABB'$. На рис. 9.3, а таким є $\Delta A_i B_i \bar{B}$. Очевидно, $|A_i B_i| = |AB|$, $|B_i \bar{B}| = |BB'|$ та $|A_i \bar{B}| = |AB|$.

Відомо, що спосіб розв"язування першої основної метричної задачі, використаний у варіанті 3, називається способом прямокутного трикутника. Рис. 9.3, б ілюструє його застосування до розв"язування першої основної метричної задачі на КП. Тут натуральну фігуру відрізка одержано двічі: як гіпотенузу прямокутного $\Delta A_1 B_1 \bar{B}$ та як гіпотенузу $\Delta A_2 B_2 \bar{A}$.

Перший трикутник побудовано на катеті $A_1 B_1$ з другим катетом $B_1 \bar{B}$ таким, що $|B_1 \bar{B}| = \Delta i^{AB}$. Різниця Δi^{AB} знімається в даному разі з фронтального поля проекцій. Другий трикутник побудовано на катеті $A_2 B_2$, а другий його катет $A_2 \bar{A}$ - такий, що $|A_2 \bar{A}| = \Delta j^{AB}$, де i , j = I, 2, 3 і $i \neq j$.

Різниця Δj^{AB} знімається в даному разі з горизонтального поля проекцій. Ясно, що $|A_1 \bar{B}| = |B_2 \bar{A}| = |AB|$.

Усі варіанти розв"язування дозволяють дістати й кути нахилу відрізка AB до відповідних площин проекцій. Наприклад, у першому варіанті розв"язування

$$(A_2^A B_2^A), \hat{} x^A = (AB), \hat{} \pi_1,$$

у другому –

$$(\bar{A}_2 \bar{B}_2), \hat{} (A_2 \bar{A}_2) = (AB), \hat{} \pi_1,$$

а в третьому –

$$[A_i \bar{B}], \hat{} [A_i B_i] = (AB), \hat{} \pi_1 \text{ /рис. 9.3, а/.}$$

Нарешті, $[A_1 \bar{B}] \hat{} [A_1 B_1] = (AB) \hat{} \pi_1$ та $[\bar{A} B_2] \hat{} [A_2 B_2] = (AB) \hat{} \pi_2$ – у випадках, що ілюструє рис. 9.3, б.

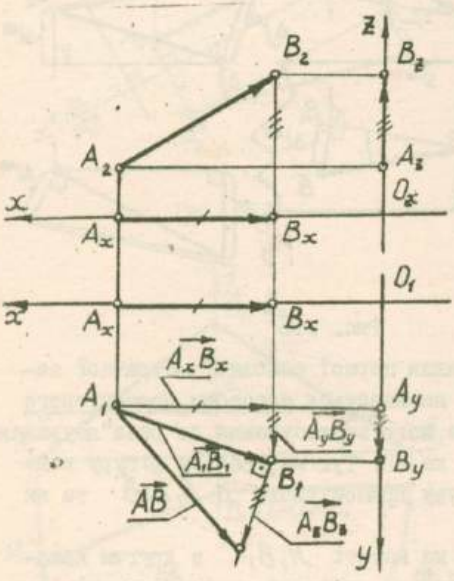


Рис. 9.4

Варіант 4. Розв"язування пов"язане з тим, що як тільки в системі площин проекцій осі проекцій прийнято за осі прямокутної системи координат $Oxyz$ з одиничними відрізками-векторами $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ та $\vec{e}_3$, то будь-який вектор $\overrightarrow{AB}$ можна розглядати як вектор-суму: $\overrightarrow{AB} = |A_x B_x| \vec{e}_1 + |A_y B_y| \vec{e}_2 + |A_z B_z| \vec{e}_3$, де $|A_x B_x|$, $|A_y B_y|$, $|A_z B_z|$ – довжини проекцій-відрізків вектора AB в осі проекцій [128] /рис. 9.4/.

Очевидно, що

$$\overrightarrow{AB} = |A_x B_x| \vec{e}_1 + |A_y B_y| \vec{e}_2 + |A_z B_z| \vec{e}_3 = \overrightarrow{A_x B_x} |\vec{e}_1| + \overrightarrow{A_y B_y} |\vec{e}_2| + \overrightarrow{A_z B_z} |\vec{e}_3| = \overrightarrow{A_x B_x} + \overrightarrow{A_y B_y} + \overrightarrow{A_z B_z},$$

а оскільки $\overrightarrow{A_x B_x} + \overrightarrow{A_y B_y} = \overrightarrow{A_1 B_1}$, то й $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1 B_1} + \overrightarrow{A_z B_z}$ або $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{A_1 B_1}| + |\overrightarrow{A_z B_z}|$, тобто дістанемо натуральну фігуру відрізка як модуль вектор-суми з прямокутного трикутника, що фігурував у варіанті 3.

2. Варіант 4 розв"язування першої основної метричної задачі дозволяє дістати розв"язування узагальнення цієї задачі на n-вимірний простір.

Справді, як і в тривимірному, в n-вимірному просторі будь-який відрізок AB можна розглядати як вектор-суму $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} + \ldots + \overrightarrow{A_nB_n}$, де $\overrightarrow{A_iB_i}$ – вектор-проекції вектора $\overrightarrow{AB}$ в осі Ox_1, Ox_2, ..., Ox_n координатної системи $Ox_1x_2\ldots x_n$.

Отож, натуральну фігуру відрізка AB одержуємо як вектор-суму послідовним підсумовуванням вектор-компонентів $\overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{A_2B_2}$, ..., $\ldots,\overrightarrow{A_nB_n}$ з взаємноортогональними напрямами.

Як це відбувається графічно у випадку чотиривимірного простору, показано на рис. 9.5, де зображено $[AB]$ проекціями $[A_{12}B_{12}]$, $[A_{34}B_{34}]$ на ПКП-4. Обидві проекції є вектор-суми:

$$\overrightarrow{A_{12}B_{12}} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{A_2B_2} \quad \text{та} \quad \overrightarrow{A_{34}B_{34}} = \overrightarrow{A_3B_3} + \overrightarrow{A_4B_4}.$$

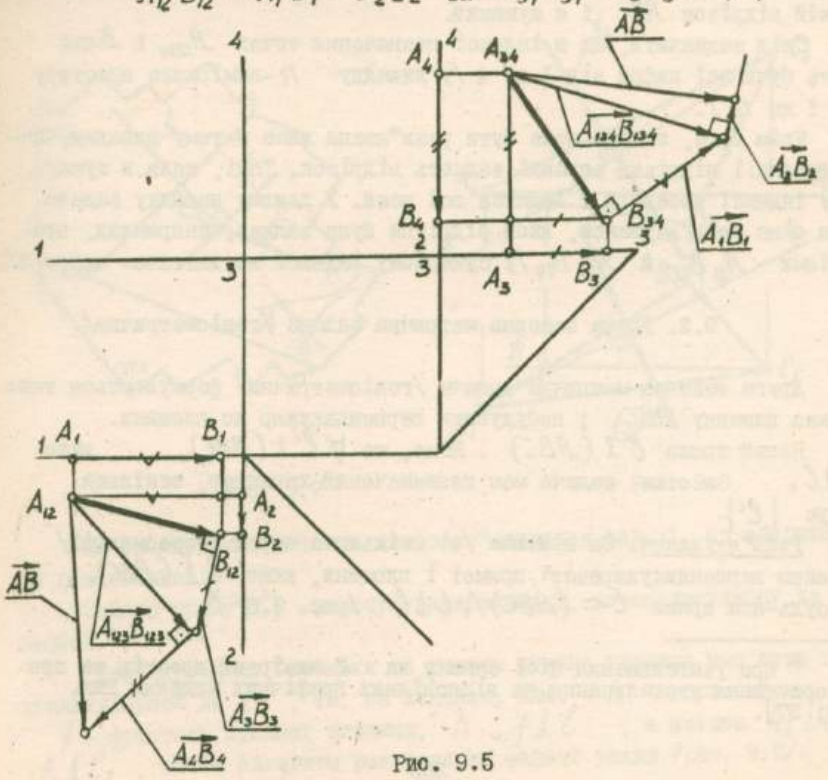


Рис. 9.5

Оскільки у векторі-сумі мають бути всі компоненти, то до мети ведуть два шляхи:

а/ спочатку складаємо суму /за правилом складання векторів, графічно ця операція ототожнюється зі способом прямокутного трикутника $\overrightarrow{A_{12}B_{12}} + \overrightarrow{A_3B_3} = \overrightarrow{A_{123}B_{123}}$ - вона є проекцією $\overrightarrow{AB}$ в тривимірний простір проекцій Π_{123}, а потім дістаємо шуканий відрізок AB як вектор-суму

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_{123}B_{123}} + \overrightarrow{A_4B_4} = \overrightarrow{A_{1234}B_{1234}};$$

б/ складаємо суму /за правилом складання векторів/ $\overrightarrow{A_{34}B_{34}} + \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_{134}B_{134}}$ вона є проекцією $\overrightarrow{AB}$ в тривимірний простір проекцій Π_{134} і, нарешті, дістаємо вектор-суму

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_{134}B_{134}} + \overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{A_{1234}B_{1234}},$$

в якій відрізок AB і є шуканий.

Слід зазначити, що в індексі позначення точок A_{1234} і B_{1234} мають бути всі цифри від I до 4 /у випадку n-вимірного простору від I до n /.

Крім того, задача може бути розв"язана лише в тому випадку, коли проекції відрізка справді задають відрізок. Тоді, коли в сумарному індексі проекцій є індекси всі осей. У даному випадку задача була б не розв"язуваною, якби відрізок було задано, наприклад, проекціями $A_{12}B_{12}$ й $A_{14}B_{14}$ /у сумарному індексі не вистачає цифри 3/.

9.2. Друга основна метрична задача /гоніометрична/

Друга основна метрична задача /гоніометрична/ формулюється так: задано площину ABC ; побудувати перпендикуляр до площини.

Нехай пряма $\ell \perp (ABC)$. Ясно, що $\forall \ell' \perp (ABC)$, якщо $\ell' \parallel \ell$, а отже, задача має невизначений характер, оскільки існує $\{\ell'\}$.

Розв"язування. За відомою /зі шкільного курсу стереометрії/ ознакою перпендикулярності прямої і площини, якщо $\ell \perp (ABC)$, то будь-яка пряма $t \subset (ABC) \wedge t \perp \ell$ /рис. 9.6/ *.

---

* Про узагальнення цієї ознаки на n-вимірний простір та про використання узагальнення на відповідних графічних моделях див. [36; 37].

Нехай h - горизонталь, а f - фронталь площини ABC. Тоді, $h, f \subset (ABC) \wedge \ell \perp (ABC) \Rightarrow \ell \perp h \wedge \ell \perp f$ /рис.9.7/, а отже,

$\ell \perp h \Rightarrow \ell_1 \perp h_1 \wedge \ell \perp f \Rightarrow \ell_2 \perp f_2$ /на основі теореми про прямокутне проеціювання прямого кута/, тобто дістаємо ознаку перпендикулярності прямої й площини для КП:

якщо пряма перпендикулярна до площини, то горизонтальна проекція прямої перпендикулярна до горизонтальної проекції горизонталі площини, а фронтальна проекція прямої перпендикулярна до фронтальної проекції фронталі площини /рис. 9.8/.

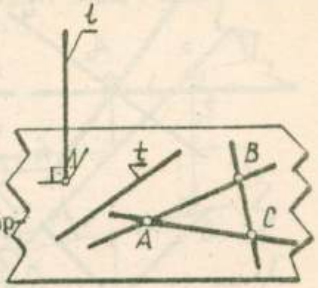


Рис. 9.6

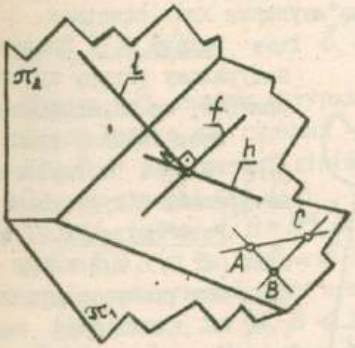


Рис. 9.7

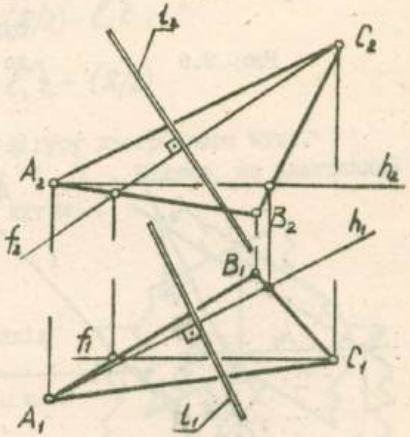


Рис. 9.8

Цю ознаку використаємо для розв"язування задачі, що обернена до попередньої:

Задано пряму (ℓ) ; побудувати площину, перпендикулярну до прямої.

Розв"язування. Оскільки за умовою шукана площина має бути перпендикулярною до ℓ , то, за ознакою, якщо h - горизонталь, а f - фронталь шуканої площини, $h \perp \ell$, $f \perp \ell$, а звідси $h_1 \perp \ell_1$, $f_2 \perp \ell_2$, тобто алгоритм розв"язання задачі такий /рис. 9.9/:

I/ побудуємо $\forall A \in \ell$;

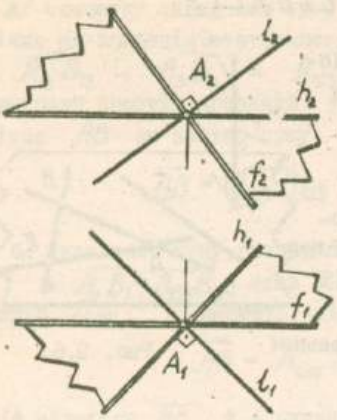


Рис. 9.9

2/ побудуємо $h \ni A \wedge h \perp \ell$, тобто таку, щоб $h_1 \perp \ell_1$;

3/ побудуємо $f \ni A \wedge f \perp \ell$, тобто таку, щоб $f_2 \perp \ell_2$;

4/ площина (h, f) - шукана, оскільки за побудовою задовольняє ознаку перпендикулярності прямої до площини.

9.3. Приклади розв"язування метричних задач зведенням до основних

Переконаємося, що розв"язування будь-якої метричної задачі зводиться до розв"язування двох основних.

Задача 9.I. Знайти натуральну фігуру кута між прямими, що перетинаються.

Отож, задано прямі $\ell \cap t = A$. Побудувати натуральну фігуру $\angle \ell, t$.

Розв"язування. У площині (ℓ, t) проведемо будь-яку пряму, наприклад, $h \subset$ пл. (ℓ, t). Матимемо $1 = h \cap \ell$ та $2 = h \cap t$ /рис.9.I0,а/. Достатньо тепер будь-яким з відомих способів, наприклад, через натуральні фігури кожної з сторін /перша основна задача/, побудувати натуральну фігуру $\Delta\, A12$, , щоб дістати натуральну фігуру

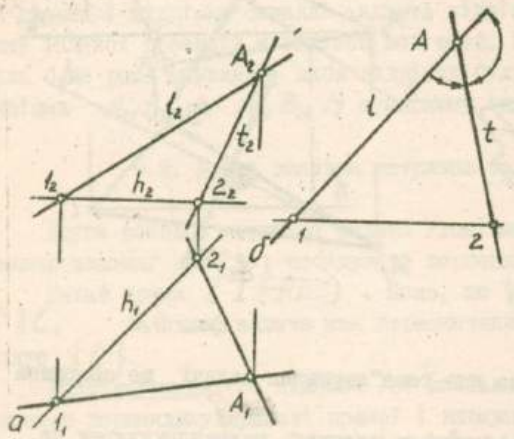


Рис. 9.I0

кута $\ell \hat{\ } t = (A1) \hat{\ } (A2)$. З одержаних таким чином двох суміжних кутів обираємо той, в якого $(A1) \hat{\ } (A2) < \pi/2$ /рис. 9.I0, б/.

Задача 9.2. Знайти натуральну фігуру кута нахилу прямої до площини.

Нехай ℓ – пряма, а α – площина /рис. 9.II/. Як і в попередній задачі, домовимося, що $\ell,\hat{\alpha} < \pi/2$.

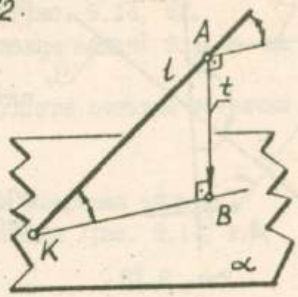


Рис. 9.II

Розв"язування. Зазначимо, що коли через $\forall A \in \ell$ провести $t \perp \alpha$ /друга основна задача/ так, щоб $B = t \cap \alpha$, то /з урахуванням $K = \ell \cap \alpha$ / кут $(AK)\hat{}(BK) = \ell\hat{}\alpha$, а з ΔABK випливає, що $\ell\hat{}\alpha = \pi/2 - \ell\hat{}t$.

Отож, задача побудови $\angle \ell,\alpha$ звелася до побудови $\angle \ell,t$, тобто до попередньої задачі 9.I. Необхідно враховувати, однак, дві можливості:

1/ $\ell,\hat{t} < \pi/2$, тоді $\ell,\hat{\alpha} = (\pi/2) - \ell,\hat{t}$;

2/ $\ell,\hat{t} > \pi/2$, тоді $\ell,\hat{\alpha} = \ell,\hat{t} - (\pi/2)$.

Задача 9.3. Знайти натуральну фігуру двогранного кута.

Нехай задано дві площини – α і β. Відомо, що двогранний кут $\angle \alpha,\beta$ вимірюється лінійним кутом, що належить площині $\sigma \perp \alpha,\beta$ /рис. 9.I2/, тобто $\alpha,\hat{\beta} = n^{\alpha},\hat{n}^{\beta}$, де $n^{\alpha} = \sigma \cap \alpha$ та $n^{\beta} = \sigma \cap \beta$. Як і при розв"язуванні двох попередніх задач, домовимося, що $\alpha,\hat{\beta} < \pi/2$.

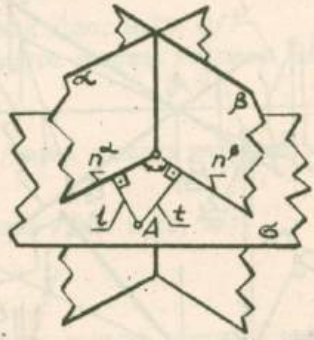


Рис. 9.I2

Розв"язування. Може бути таким алгоритм:

1/ з $\forall A \in \sigma$ опускаємо $\ell \perp \alpha$ й $t \perp \beta$ /друга основна задача/;

2/ натуральну фігуру $\angle \ell,t$ знаходимо згідно із задачею 9.I;

3/ є дві можливості:

а/ $\ell,\hat{t} > \pi/2$, тоді $n^{\alpha},\hat{n}^{\beta} = \pi - \ell,\hat{t}$;

б/ $\ell,\hat{t} < \pi/2$, тоді $n^{\alpha},\hat{n}^{\beta} = \ell,\hat{t}$.

Рис. 9.13 показує, що перша можливість відповідає положенню точки (A) в області кута $n^{\alpha}, \hat{} n^{\beta} < \pi/2$, а друга – положенню точки (A) в області кута, суміжного до нього:

$$\alpha, \hat{} \beta = n^{\alpha}, \hat{} n^{\beta}$$

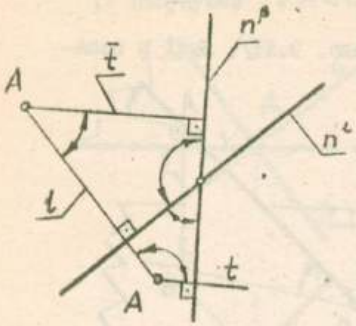
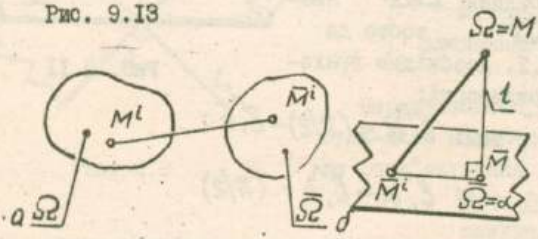


Рис. 9.13

Задача 9.4. Знайти відстань між об"єктами Ω й $\bar{\Omega}$.

Розв"язування. Нехай $M^i \in \Omega$, а $\bar{M}^i \in \bar{\Omega}$ /рис. 9.14, а/. Тоді $\inf\{|M^i\bar{M}^i|\}$, тобто точна нижня межа множини $\{|M^i\bar{M}^i|\}$ і є розв"язок *.



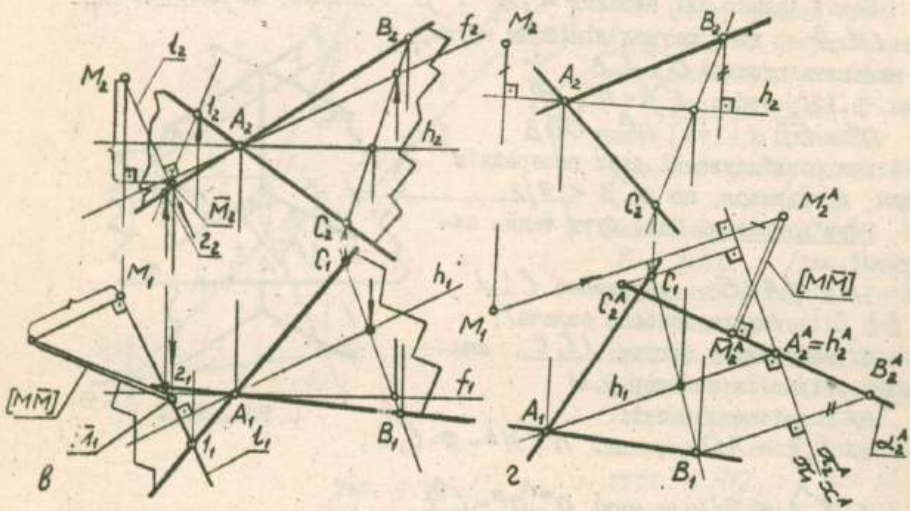


Рис. 9.14

* Див. [54, с. 29-32].

I. Якщо Ω – точка M, а $\bar{\Omega}$ – площина α /задача 9.4, а/, то розв"язком є $\inf\{|M^{\prime}\bar{M}^{\prime}|\} = |M\bar{M}|$ – відрізок перпендикуляра $\ell \perp \alpha \wedge \ell \ni M \wedge \bar{M} = \ell \cap \alpha$ /рис. 9.I4, б/.

Алгоритм першого варіанта розв"язування задачі 9.4, а на КП такий /рис. 9.I4, в/:

I/ проведемо $\ell \perp \alpha \wedge \ell \ni M$ /друга основна метрична задача/;

2/ побудуємо $\bar{M} = \ell \cap \alpha$;

3/ знайдемо $|M\bar{M}|$ /перша основна метрична задача/.

Алгоритм другого варіанта розв"язування /рис. 9.I4, г/:

I/ $\pi_2/\pi_1 \to \pi_2^A/\pi_1$, де $\pi_2^A \perp \alpha$;

2/ побудуємо $\ell_2^A \perp \alpha_2^A \wedge \ell_2^A \ni M_2^A$ /друга основна метрична задача/;

3/ дістаємо $\bar{M}_2^A = \ell_2^A \cap \alpha_2^A$;

4/ $|\bar{M}_2^A M_2^A| = |M\bar{M}|$ – розв"язок /перша основна метрична задача/.

2. Якщо Ω – точка M, а $\bar{\Omega}$ – пряма ℓ /задача 9.4, б/, то розв"язком є $\inf\{|M\bar{M}^{\prime}|\} = |M\bar{M}|$ – відрізок перпендикуляра $t \perp \ell \wedge t \ni M \wedge \bar{M} = \ell \cap t$ /рис. 9.I5, а/.

Алгоритм першого варіанта розв"язання /рис. 9.I5, б/.

I/ проведемо $\beta \perp \ell \wedge \beta \ni M$ /друга основна метрична задача/;

2/ побудуємо $\bar{M} = \beta \cap \ell$;

3/ знайдемо $|M\bar{M}|$ – розв"язок /перша основна метрична задача/.

Алгоритм другого варіанта розв"язання /рис. 9.I5, в/:

I/ $\pi_2/\pi_1 \to \pi_2^A/\pi_1$, де $\pi_2^A \| \ell$;

2/ $\pi_2^A/\pi_1 \to \pi_2^A/\pi_1^B$, де $\pi_1^B \perp \ell$ /друга основна метрична задача/;

3/ $|M_1^B \ell_1^B| = |M\bar{M}|$ – розв"язок /перша основна метрична задача/.

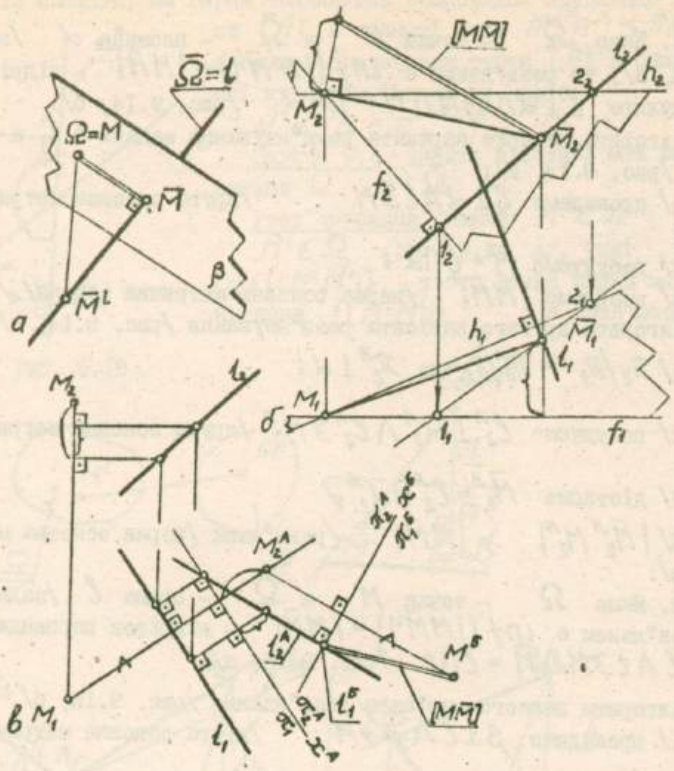


Рис. 9.I5

9.4. Розгортки та їх графічна побудова

I. Метричною є й така задача: задано поверхню /або її відсік/ Ω ; побудувати її /або відсіку/ розгортку $(\bar{\Omega})$.

Розгорткою $(\bar{\Omega})$ називається образ поверхні /або відсіку/ Ω на площині, здобутий у результаті розгортання $\Omega \to \bar{\Omega}$, тобто перетворення, яке задовольняє умову $\Delta^{\bar{A}\bar{B}} = \Delta^{AB}$.

Умова $\Delta^{\bar{A}\bar{B}} = \Delta^{AB}$ - характеристична властивість розгортки. Тут Δ^{AB} - довжина дуги $\smile AB$ кривої $k \subset \Omega$, а $\Delta^{\bar{A}\bar{B}}$ - довжина дуги $\smile \bar{A}\bar{B}$ кривої $\bar{k} \subset \bar{\Omega}$, якщо $\bar{k}$ - розгортка кривої k і, отже, $\smile AB\,(\subset k) \to \smile \bar{A}\bar{B}\,(\subset \bar{k})$/рис. 9.I6, а/.

Відображення поверхні або її відсіку на розгортку називається розгортанням або згинанням. Розгортанню піддаються лише розгортні поверхні.

Пучок площин з носієм-нормаллю n в точці T до поверхні Ω перетинає останню /рис. 9.I7/ по сім"ї кривих $\{k^i\}$ - нормальних перерізів, серед яких одна має в точці T найменшу кривину (R_{min}), а а ще одна - найбільшу (R_{max}).

Величина $R_r = R_{min} R_{max}$ називається повною або гауссовою кривиною поверхні Ω у точці T.

Якщо $R_r > 0$, то T - еліптична точка поверхні; якщо $R_r < 0$, то T - гіперболічна точка; якщо $R_r = 0$, то T - параболічна точка.

Поверхня Ω, що являє собою множину параболічних точок, і є розгортною поверхнею [I24, с. I42-I43], як, наприклад, циліндр або конус, або будь-яка торсова поверхня.

2. Властивості розгорток. З характеристичної властивості розгорток випливають похідні властивості *:

I/ при розгортанні зберігаються кути між лініями, що належать поверхні /див. рис. 9.I6, б/;

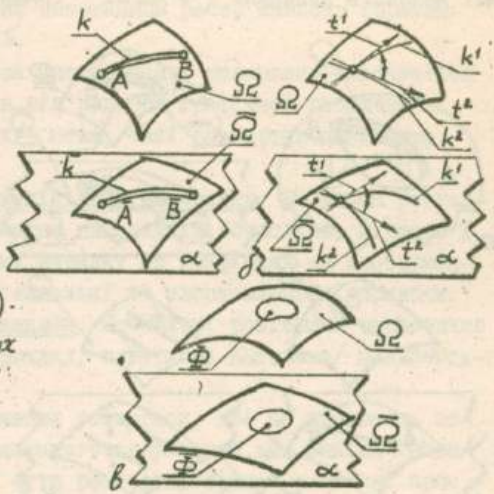


Рис. 9.I6

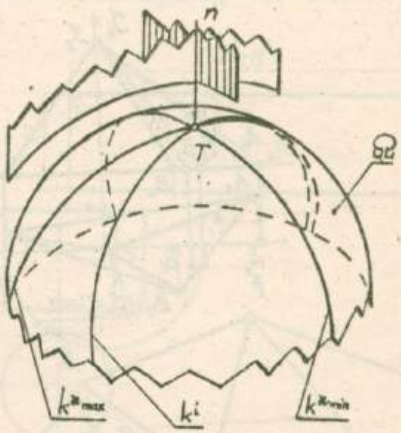


Рис. 9.I7

* Наводяться в курсі диференційної геометрії [I24, с. I6I-I76].

2/ при розгортанні зберігаються площі / $S^{\bar{\Phi}} = S^{\Phi}$ / фігур (Φ), які належать поверхні $(\Phi \subset \Omega$ /див. рис. 9.16, в/;

3/ при розгортанні найкоротшої лінії на поверхні /геодезичні/ розгортаються в прямі /рис.9.18, а/.

Серед різних ліній $\{k^i\}$, що з"єднують точки A і B на поверхні Ω є лінія найкоротша. Така лінія (k^{min}) - <u>геодезична</u>.

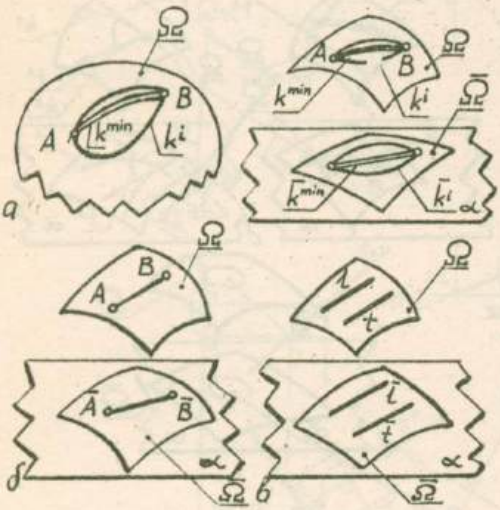


Рис. 9.18

Окремим випадком властивості 3 є така властивість:

4/ пряма розгортається в пряму /рис. 9.18, б/;

5/ паралельні прямі розгортаються в паралельні /рис. 9.18, в/.

3. <u>Побудова розгорток многогранних поверхонь</u>. Графічна побудова розгорток многогранних поверхонь не має труднощів, оскільки для цього досить знайти натуральну фігуру кожної з граней.

Прикладом побудови розгортки многогранної поверхні може бути побудова розгортки зовнішньої поверхні тригранної піраміди $(ABCS)$. Побудова ілюструється рис. 9.19. Фігура розгортки тут складається так:

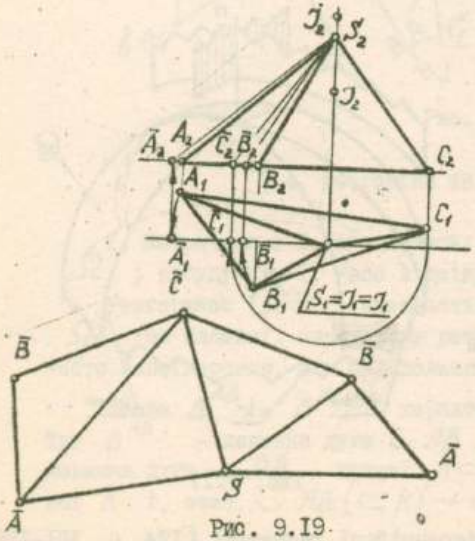


Рис. 9.19

1/ основу піраміди для розгортки $(\Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C})$ взято з горизонтальної проекції вихідного КП піраміди /оскільки $\Delta A_1B_1C_1 \cong \Delta ABC \cong \Delta \bar{A}\bar{B}\bar{C}$;

2/ натуральні фігури граней здобуто послідовною побудовою натуральної фігури кожного з відповідних бокових ребер / $\bar{A}\bar{S}$, $\bar{B}\bar{S}$, $\bar{C}\bar{S}$/, що можливо будь-яким з розглянутих раніше способів. На рис. 9.19 натуральні фігури ребер одержано обертанням ребер навколо горизонтально-проеціюючої осі $(JJ)\,\Im S$.

Графічна побудова розгорток многогранних поверхонь виконується з точністю, яка залежить тільки від похибок графічної побудови /й, зрозуміло, інструментальних/. Отож, такі розгортки називають точними.

4. Побудова розгорток криволінійних поверхонь. Побудова розгорток криволінійних поверхонь вимагає попередніх обчислень, а часто й апроксимування поверхні. В цьому випадку до графічних та інструментальних приєднуються ще й обчислювальні та апроксимаційні похибки. Такі розгортки називають наближеними. Наближені розгортки теоретично нерозгортуваних поверхонь /наприклад, поверхонь Каталана/ називаються умовними.

Прикладами побудови наближених розгорток, які не вимагають попереднього апроксимування /наближеного зображення або заміни іншою/ розгортуваної поверхні, можуть бути розгортки бічної поверхні прям. - го кругового циліндра та прямого кругового конуса.

Наприклад, розгортка бічної поверхні прямого кругового циліндра являє собою прямокутник, сторони якого мають довжину відповідно H і $2\pi R$ /рис. 9.20/.

Розгорткою бічної поверхні прямого кругового конуса з колом радіуса R в основі і твірною L є сектор з центральним кутом α і радіуса L /рис. 9.21/.

Значення кута α обчислюється, як відомо, за формулою $\alpha = (R/L)360^0$.

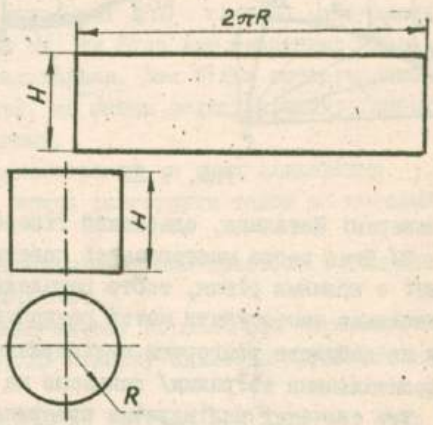


Рис. 9.20

5. Основні методи побудови розгорток.

I/ Як при побудові наближених /і, звичайно, умовних/, так інколи і при побудові точних розгорток широко застосовується метод триангуляції.

Суть його в тому, що поверхня, розгортка якої виконується, попередньо апроксимується многогранною з трикутними гранями.

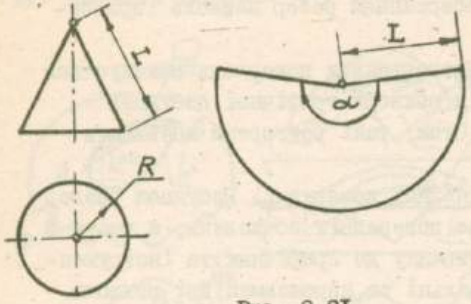


Рис. 9.21

На рис. 9.22 зображено побудову /за допомогою триангуляції/ розгортки відсіку конічної поверхні загального виду. Як бачимо, побудова розгортки відсіку в даному випадку зводиться до побудови натуральної фігури кожної з трикутних граней апроксимуючої поверхні.

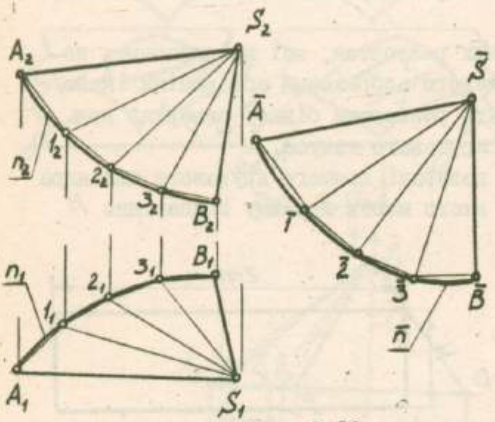


Рис. 9.22

Точки розгортки $(\bar{A}, \bar{1}, \bar{2}, \ldots, \bar{B})$, що відповідають точкам напрямної (n) конічної поверхні $(A, 1, 2, \ldots, B)$ й належать розгортці напрямної, за допомогою лекал з'єднуємо плавною кривою.

Метод триангуляції застосовується, зокрема, при побудові умовних розгорток таких нерозгортуваних лінійчатих поверхонь, як поверхні Каталана, однополий гіперболоїд тощо.

2/ Якщо ребра многогранної поверхні або твірні циліндричної поверхні є прямими рівня, тобто паралельні будь-якій з площин проекцій, то доцільно застосувати метод розкочування. Застосування цього методу до побудови розгортки циліндричної поверхні загального виду /з фронтальними твірними/ показано на рис. 9.23.

Тут спочатку циліндрична поверхня /відсік/ апроксимується відсіком призматичної, а потім будується натуральна фігура кожної грані цієї призматичної поверхні. Для цього послідовно кожне з ребер призматичної поверхні, що визначені кінцями / A , 1 , 2 , ..., B /

ланок ламаної, яка апроксимує напрямну, обертаємо навколо якогось з бічних ребер /наприклад, навколо ребра B / до введення кожного у фронтальну площину, визначену ребром B /для цього, очевидно, достатньо обертати лише одну з точок, що визначають відповідне ребро, наприклад точку A або 1, або 2 і т.д.

Фронтальні проекції точок поділу / A_2, 1_2, 2_2, .../ при цьому будуть рухатися по відповідних перпендикулярах до фронтальної проекції ребра B, тобто до ребра B_2, а зупинятися на відстанях відповідно

$$|B_2\bar{2}_2| = |B_1 2_1|,\ |\bar{2}_2\bar{1}_2| = |2_1 1_1|,$$
$$|\bar{1}_2\bar{A}_2| = |1_1 A_1|.$$

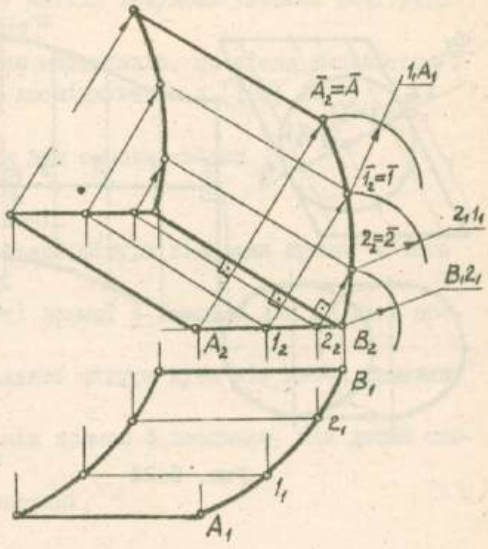


Рис. 9.23

Точки $\bar{A} = \bar{A}_2$, $\bar{1} = \bar{1}_2$, $\bar{2} = \bar{2}_2$, $\bar{B} = B_2$ і визначають розгортку напрямної AB відсіку – лекальну криву $\bar{A}\bar{B}$. В результаті розгортання, як було вже зазначено, паралельні ребра мають залишитися паралельними. Для більш точного виконання розгортки слід дуги напрямної, що мають велику кривину, апроксимувати ламаною з дрібнішими ланками.

3/ Циліндричні поверхні або многогранні, в яких відповідно твірні або ребра є прямими рівня, можна розгорнути також за методом нормального перерізу.

Цей метод, зрозуміло, тим ефективніший, чим простіше і точніше спрямляється лінія – нормальний переріз.

Рис. 9.24 ілюструє застосування методу нормального перерізу до побудови розгортки бічної поверхні відсіку похилого кругового циліндра з фронтальними твірними.

У площині σ, перпендикулярній до твірних циліндра, і, отже, фронтально-проеціюючій, дістаємо коло $(6\text{-}8)$ – нормальний переріз даної поверхні. Спрямляємо його *, наносимо на відрізок /на рис.9.24

* За допомогою одного з відомих способів /див. [120, с. 14] /.

зображена лише половина його/, який одержано внаслідок спрямляння, образи точок перетину кола з твірними циліндра /8, I, 2, 3, 4/, встановлюємо в кожній з них перпендикуляр і на кожному з останніх відключаємо натуральні фігури відрізків відповідних твірних /знімаючи їх з фронтальної проекції, де вони зображені без спотворення/. Кінці відрізків дають точки лекальної кривої - границі розгортки.

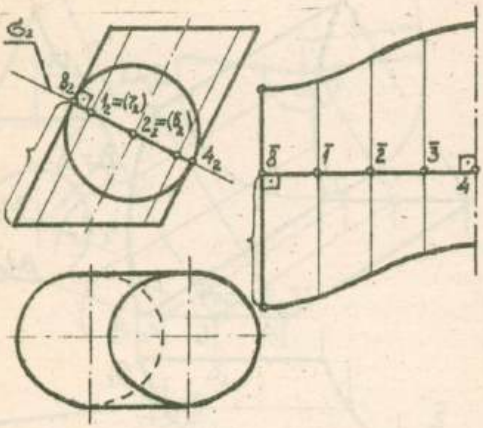


Рис. 9.24

4/ При побудові умовних розгорток нерозгортуваних поверхонь застосовується інколи метод допоміжних циліндрів й конусів. Суть його в тому, що нерозгортувана поверхня /наприклад, сфера/ попередньо апроксимується розгортуваною /циліндричною або конічною/, сукупність розгорток останньої /або останніх/ і складають умовну розгортку вихідної нерозгортуваної поверхні.

На рис. 9.25 показано застосування цього методу для побудови розгортки бічної поверхні тіла обертання, яка апрок-

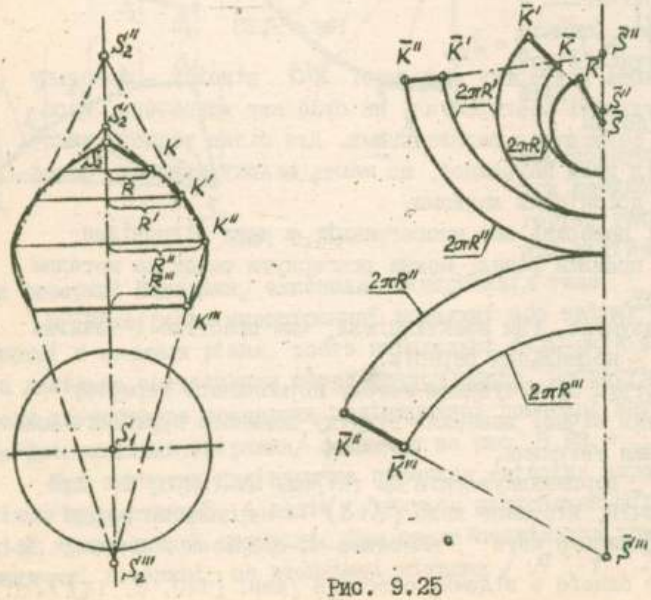


Рис. 9.25

симується конічними поверхнями /відсіками/. Для цього ділянка поверхні між паралелями /наприклад, $K-K'$ / замінюється відповідною ділянкою конічної поверхні, що обмежена тими самими паралелями.

Деякі /не розглядувані тут/ методи побудови умовних розгорток висвітлені в [8, с. 334] і в [122]*.

Питання оптимального розкрою матеріалів, що тісно змикаються з виконанням технічних розгорток, досліджуються в [123; 127].

Запитання для самоперевірки

1. Дві основні метричні задачі.
2. Способи побудови натуральної фігури відрізка прямої і його кутів нахилу до площин проекцій.
3. Ознака перпендикулярності прямої і площини для КП двох прямих, двох площин.
4. Способи побудови натуральної фігури кута між двома прямими, що перетинаються.
5. Алгоритм побудови кута між прямою й площиною, між двома площинами.
6. Визначення розгортки поверхні.
7. Властивості розгорток.
8. Основні методи побудови розгорток.
9. Приклади побудови розгорток методами триангуляції, нормального перерізу, розкатки.
10. Яка лінія на поверхні називається геодезичною?
11. Як розгортаються геодезичні лінії?
12. Які розгортки називаються умовними?

Література

[1-5; 8; 9; 37; 54].

118. Волков В.Я. Алгоритмы решения метрических задач пространства R_n . – Омск: Омск. политехн. ин-т, 1986. Деп. ВИНИТИ, № 3732-В86.

119. Годик Е.И., Хаскин А.М. Справочное руководство по машиностроительному черчению. Изд. 4-е. – М.: Машиностроение, 1974. – 534 с.

---

* Про виконання розгорток за допомогою ЕОМ можна прочитати в [121; 125].

120. Джанабаев Д.Д. Построение развертки торса с помощью ЭВМ // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Вып. 23. – К.: Будивэльник, 1977. – 156 с.

121. Иерусалимский А.М. Развертки из листового материала. – М.: Машгиз, 1955. – 231 с.

122. Канторович Л.В., Залгаллер В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов. – Изд. 2-е. – Новосибирск: Наука, 1971. – 299 с.

123. Погорелов А.В. Дифференциальная геометрия. – Изд. 6-е. – М.: Наука, 1974. – 228 с.

124. Пономарев А.М., Богушко А.А. О построении разверток поверхностей с помощью ЭВМ // Прикладная геометрия и инженерная графика. – Вып. 16. – К.: Будивэльник, 1973. – 133 с.

125. Потишко А.В., Крушинская Д.П. Справочник по инженерной графике. – К.: Будивэльник, 1976. – 258 с.

126. Стоян Ю.Г. Размещение геометрических объектов. – К.: Наук. думка, 1975. – 226 с.

127. Чернецкий Н.М. О разрешимости основной метрической задачи // Математ. методы анализа динамич. систем. – Харьков, 1977. – Вып. 1.

10. АВТОМАТИЗАЦІЯ ПОБУДОВИ ЗОБРАЖЕНЬ.

Візуалізацію різних технічних об"єктів і процесів, що її забезпечують зображення, значно спрощує машинна графіка. Під цією назвою мають на увазі комплекс обчислювального та периферійного устаткування та програмного забезпечення, який дозволяє одержувати зображення, що необхідні на стадіях дослідження, проектування і виробництва. Ці зображення можуть використовуватися як у вигляді тих, які виводяться на екран дисплея, так і у вигляді тих, що є складовою частиною графічних технічних документів. В обох випадках для одержання зображення потрібне попереднє програмування, яке використовує геометричну модель зображуваного об"єкта /чи процесу/, а також ту чи іншу графічну модель, що їх пропонує нарисна геометрія.

Автоматичне одержання і використання того чи іншого зображення за допомогою машинної графіки доцільне в так званому діалоговому режимі, що дозволяє зазначене зображення оперативно видозмінювати та коригувати.

Серед устаткувань, що забезпечують автоматичне одержання графічних моделей-зображень, розрізняють: ЕОМ /зокрема програмовані мікрокалькулятори та персональні ЕОМ/, пристрої введення графічної інформації /кодувальники/, графічні дисплеї /монітори/, графопобудівники /принтери/.

Велике значення для автоматизації виконання зображень має програмування цього процесу.

Після того як одержано геометричну модель об"єкта та обрано вид графічної моделі, необхідно ввести графічну інформацію до ЕОМ та організувати діалог з нею. Існує багато алгоритмічних мов, призначених для цього.

Для графічного моделювання найпридатнішими є графічні пакети, що отримані спеціалізованим розширенням алгоритмічних мов, за рахунок використання їх підпрограм - графічних операторів.

Зараз найбільш поширені пакети графічних операторів ГРАФОР[129] та ФАП-КФ ІЗІ , здобуті на базі ФОРТРАНа, та графічні пакети для персональних ЕОМ - на базі БЕЙСИКа та AutoCAD.

Оскільки одним з найбільш удалих спеціалізованих розширень ФОРТРАНа в напрямку створення пакетів графічних операторів є те, що дістало назву ФАП-КФ, доцільно ознайомитися з деякими його графічними операторами та програмами формування найпростіших зображень, складеними за допомогою цих графічних операторів.

IO.I. Автоматизація побудови зображень плоских об"єктів

I. Передовсім ознайомимося з деякими графічними операторами. В них геометричні образи подані як функції параметрів, що визначають відповідний образ. Побудова зображень елементарних образів забезпечується операторами побудови *:

а/ точок /табл. IO.I/;

б/ прямих /табл. IO.2/;

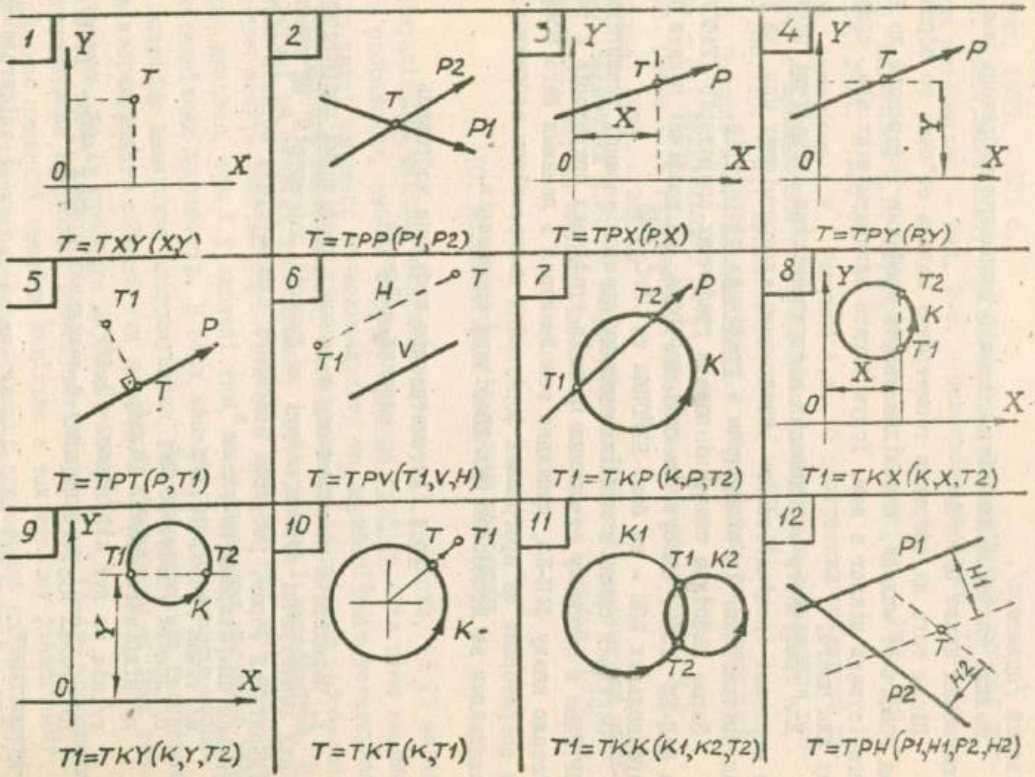
в/ відрізків /табл. IO.3/;

г/ кіл та дуг кіл /табл. IO.4/;

д/ кривих другого порядку й лекальних кривих /табл. IO.5/.

---

* У таблицях усі геометричні образи зображені орієнтованими, наведені символічні записи операторів.


1
Y
T
0
X
T=TXY(X,Y)
2
P2
T
P1
T=TPP(P1,P2)
3
Y
T
P
X
0
X
T=TPX(P,X)
4
Y
T
P
Y
0
X
T=TPY(P,Y)
5
T1
P
T
T=TPT(P,T1)
6
H
T
T1
V
T=TPV(T1,V,H)
7
T2
P
K
T1
T1=TKP(K,P,T2)
8
Y
T2
K
T1
X
0
X
T1=TKX(K,X,T2)
9
Y
T1
T2
K
Y
0
X
T1=TKY(K,Y,T2)
10
T
T1
K
T=TKT(K,T1)
11
K1
T1
K2
T2
T1=TKK(K1,K2,T2)
12
P1
H1
T
H2
P2
T=TPH(P1,H1,P2,H2)

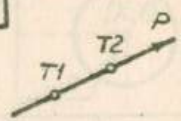
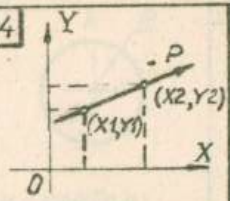
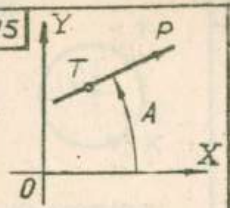
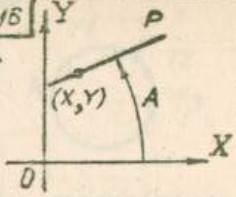
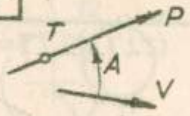
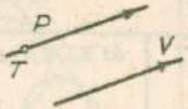
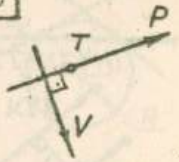
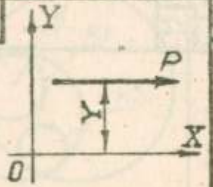
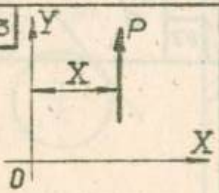
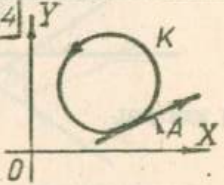
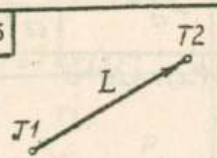
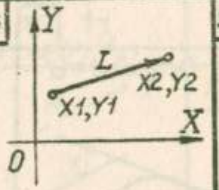
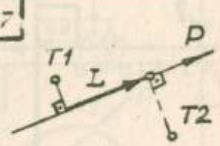
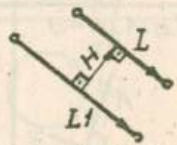
13  P=PTT(T1,T2)	14  P=PXY(X1,Y1,X2,Y2)	15  P=PTA(T,A)	16  P=PXYA(X,Y,A)
17  P=PTVA(T,V,A)	18  P=PTK(T,K)	19  P=PTV(T,V)	20  P=PTV1(T,V)
21  P=PPH(P1,H)	22  P=PX(Y)	23  P=PY(X)	24  P=PKA(K,A)

Таблица I0.3

25	26	27	28
			
L=LTT(T1,T2)	L=LXY(X1,Y1,X2,Y2)	L=LTTP(T1,T2,P)	L=LLH(L1,H)

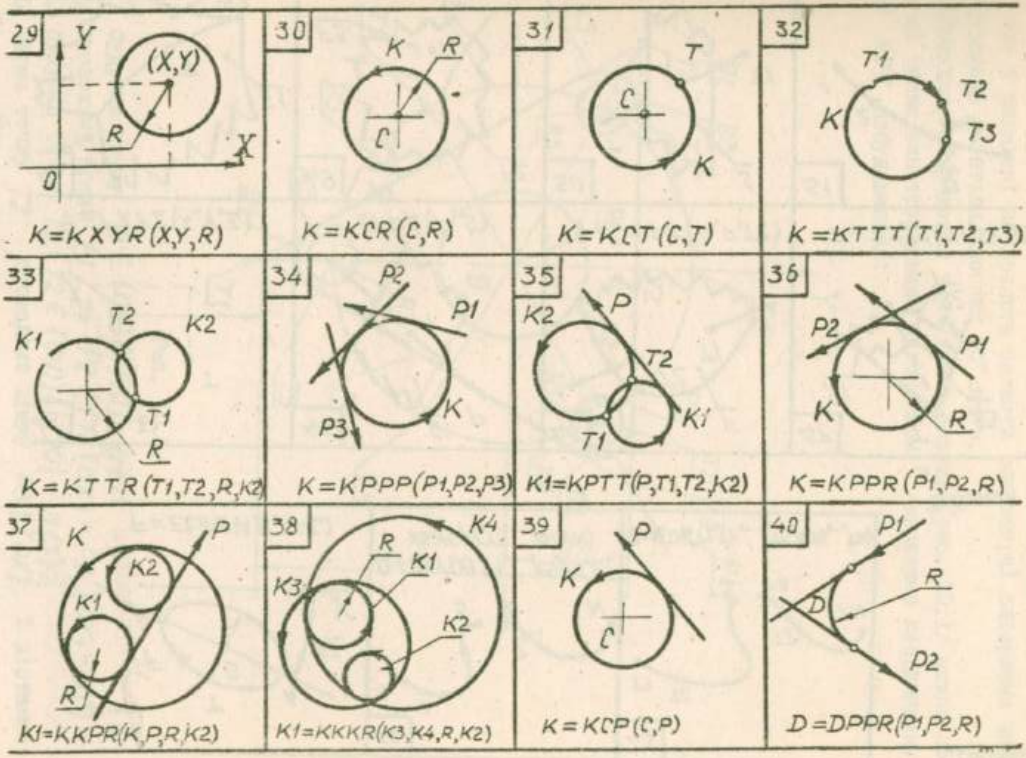

29
Y
(X,Y)
R
X
0
K=KXYR(X,Y,R)
30
K
R
C
K=KCR(C,R)
31
T
C
K
K=KCT(C,T)
32
T1
T2
K
T3
K=KTTT(T1,T2,T3)
33
T2
K2
K1
T1
R
K=KTTR(T1,T2,R,K2)
34
P2
P1
K
P3
K=KPPP(P1,P2,P3)
35
K2
P
T2
K1
T1
K1=KPTT(P,T1,T2,K2)
36
P2
P1
K
R
K=KPPR(P1,P2,R)
37
K
P
K2
K1
R
K1=KKPR(K,P,R,K2)
38
K4
R
K1
K3
K2
K1=KKKR(K3,K4,R,K2)
39
P
K
C
K=KCP(C,P)
40
P1
R
D
P2
D=DPPR(P1,P2,R)

Таблица 10.5

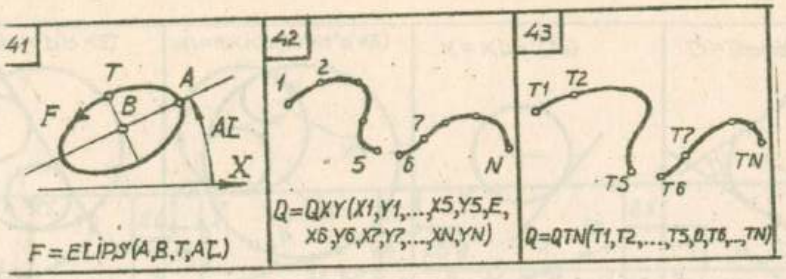
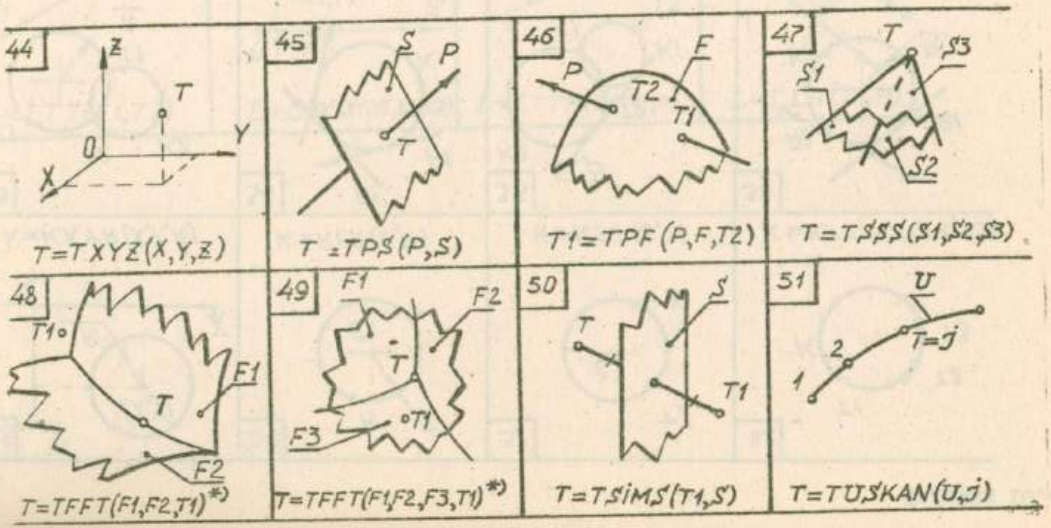


Таблица 10.6



2. Усього пакет ФАП-КФ має близько 200 графічних операторів [13], але й наведені дозволяють скласти операторні алгоритми побудови зображень багатьох плоских об"єктів.

Наприклад, зображення трикутного фланця /рис. 10.1/ можна побудувати за таким конструктивним алгоритмом * /вважаємо координатну систему XOY побудованою/:

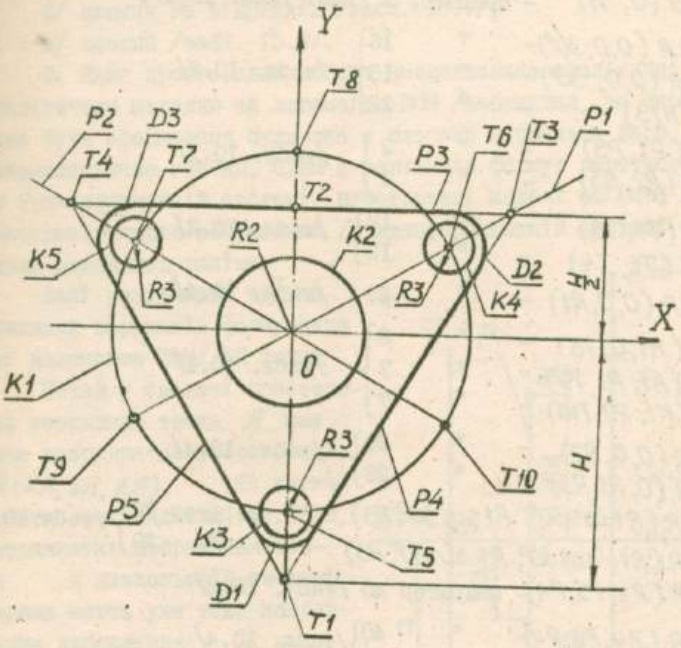


Рис. 10.1

1/ будуємо точку $T1 \in (OY)(|T10| = H)$;

2/ проводимо прямі $P1$ та $P2$ $(P1, \widehat{\ }(OX) = P2, \widehat{\ }(OX) = 30°)$;

3/ будуємо точку $T2\,(T2 \in (OY))(|T20| = H/3)$;

4/ через точку $T2$ проводимо пряму $P3 \parallel (OX)$ і дістаємо точки $T3$ та $T4$;

5/ будуємо пряму $T1T3 = P4$;

6/ будуємо пряму $T1T4 = P5$;

---

* Як відомо, існує безліч алгоритмів виконання тієї чи іншої конкретної побудови.

7/ будуємо коло $K1(0,R1)$ і дістаємо точки $T5 = K1 \cap (OY)$, $T7 = K1 \cap P2$, $T6 = K1 \cap P1$;

8/ будуємо кола $K2(0,R2)$, $K3(T5,R3)$, $K4(T6,R3)$ та $K5(T7,R3)$;

9/ будуємо спряження прямих $P3$ і $P4$, $P3$ і $P5$, $P4$ і $P5$ дугами кола радіуса $R4$: $D1$, $D2$ і $D3$.

В операторній формі цей алгоритм має такий вигляд:

$T1 = TXY(0,-H)$ - оператор I /див. табл. I0.I/.

$P1 = PXYA(0,0,30°)$ - " I6
$P2 = PXYA(0,0,-30°)$ - " I6 } /табл. I0.2/
$P3 = PX(H/3)$ - " 22

$T3 = TPP(P1,P3)$ - " 2
$T4 = TPP(P2,P3)$ - " 2 } /табл. I0.I/

$P4 = PTT(T1,T3)$ - " I3
$P5 = PTT(T1,T4)$ - " I3 } /табл. I0.2/

$K1 = KXYR(0,0,R1)$ - " 29 /табл. I0.4/

$T5 = TKX(K1,0,T8)$ - " 8
$T6 = TKP(K1,P1,T9)$ - " 7 } /табл. I0.I/
$T7 = TKP(K1,P2,T10)$ - " 7

$K2 = KXYR(0,0,R2)$ - " 29
$K3 = KXYR(0,R1,R3)$ - " 29 } /табл. I0.4/

$K4 = KXYR(R1\cos 30°, R1\sin 30°, R3)$ - оператор 29
$K5 = KXYR(R1 - \cos 30°, R1\sin 30°, R3)$ - " 29 } /табл. I0.4/

$D1 = DPPR(P4,P5,P4)$ - оператор 40 /табл. I0.2/

$D2 = DPPR(P4,P3,P4)$ - " 40
$D3 = DPPR(P3,P5,P4)$ - " 40 } /табл. I0.4/

Одержаний алгоритм в операторній формі неважко перетворити в машинну програму. Для цього слід параметрам надати числові значення і ввести деякі службові оператори. Не спиняючись на деталях цієї трансформації, бо вона є предметом іншої навчальної дисципліни, а саме "Машинної графіки", ознайомимося ще з деякими операторами, які використовуються вже для програмування машинного виконання зображень просторових об"єктів.

IO.2. Автоматизація побудови зображень просторових об"єктів

I. Для її реалізації номенклатура операторів побудови /табл. IO.I-IO.4/ поповнюється тими, що враховують просторове розміщення елементарних геометричних образів, зокрема операторами побудови:

а/ точок /табл. IO.6/;

б/ прямих та відрізків /табл. IO.7/;

в/ площин /табл. IO.8/.

2. Якщо просторовий об"єкт змодельовано аналітично, то за його аналітичною моделлю за допомогою ЕОМ /наприклад, на екрані дисплея/ може бути сформовано будь-яке з плоских зображень його, наприклад, аксонометричне або КП. Один з варіантів формул перетворення координат /у трикоординатній системі/ просторової моделі об"єкта в координати аксонометричного зображення /в двокоординатній системі екрана дисплея/ наводився раніше.

Далі розглянемо один з можливих варіантів формування /за допомогою ЕОМ/ КП точки

Нехай у системі просторових координат точка A має таке координатне зображення: $A(XA, YA, ZA)$. Як легко уявити, розглядаючи рис. IO.2, координатні зображення точки в двохосьовій системі екрана мають уже таке координатне зображення:

I/ горизонтальної проекції $A1(a-XA,\ a-YA)$;

2/ фронтальної проекції $A2(a-XA,\ a+ZA)$;

3/ профільної проекції $A3(a+YA,\ a+ZA)$,

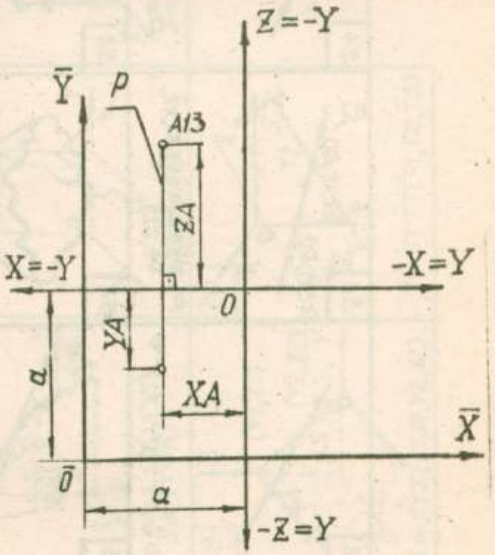
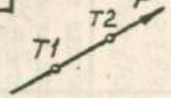
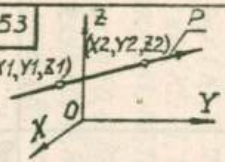
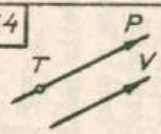
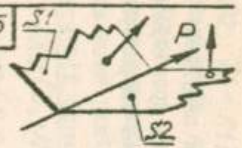
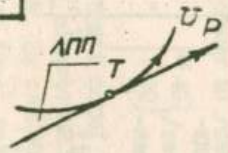
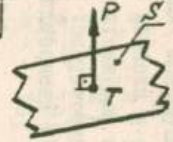
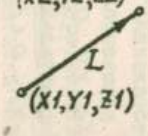


Рис. IO.2

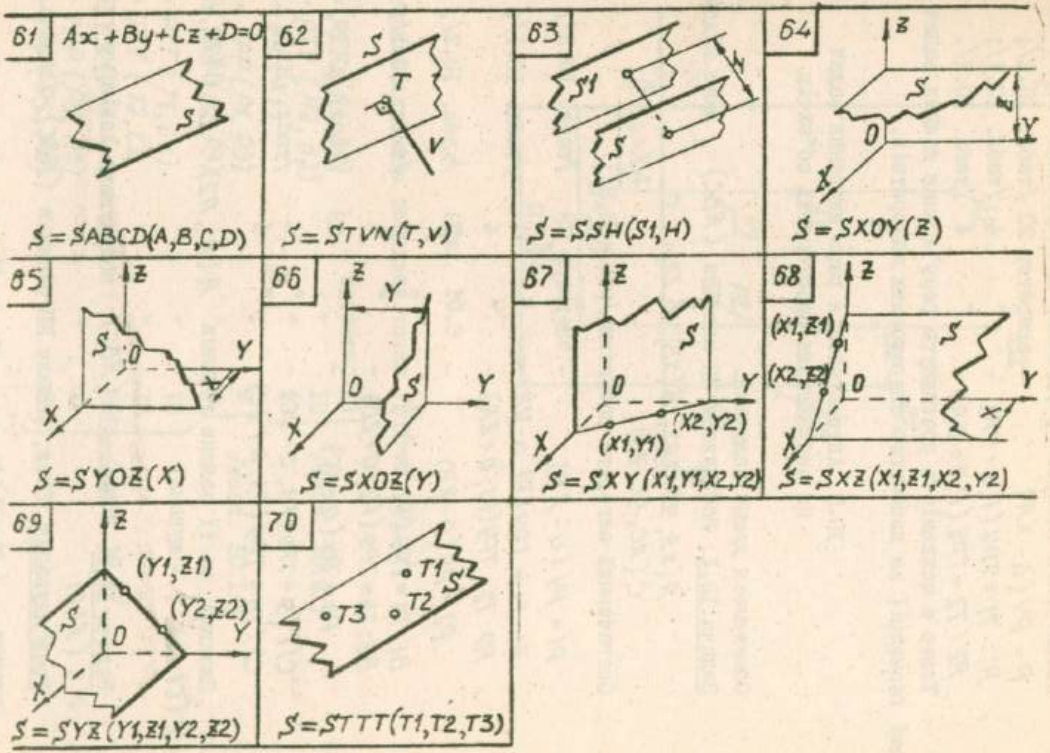
де $|XO| = |YO| = a$ - координата центра проекцій O.

Таблиця I0.7

52  $P=PTT3(T1,T2)^{**)}$	53  $P=PXYZ(X1,Y1,Z1,X2,Y2,Z2)$.	54  $P=PTV3(T,V)^{**)}$	55  $P=PSS(S1,S2)$
56  $P=PUT(U,T)$	57  $P=PFT3(F,T)^{**)}$	58  $P=PST(S,T)$	59  $L=LTT3(T1,T2)^{**)}$
60  $L=LXYZ(X1,Y1,Z1,X2,Y2,Z2)$			

*) Точку T одержуємо за допомогою точки T1, що зміщується до зустрічі з лінією перетину поверхонь (на зображенні) саме в точці T.

**) Трійка в символі відповідного оператора вказує на те, що побудова відбувається в тривимірному просторі.


61
Ax+By+Cz+D=0
S
S=SABCD(A,B,C,D)
62
S
T
V
S=STVN(T,V)
63
S1
H
S
S=SSH(S1,H)
64
z
S
0
Y
X
S=SXOY(z)
65
z
S
0
Y
X
S=SYOz(X)
66
z
Y
0
S
Y
X
S=SXOz(Y)
67
z
S
0
Y
(X2,Y2)
X
(X1,Y1)
S=SXY(X1,Y1,X2,Y2)
68
z
(X1,Z1)
(X2,Z2)
S
0
Y
X
S=SXz(X1,Z1,X2,Y2)
69
z
(Y1,Z1)
(Y2,Z2)
S
0
Y
X
S=SYz(Y1,Z1,Y2,Z2)
70
T1
S
T2
T3
S=STTT(T1,T2,T3)

Операторний алгоритм формування двокартинного КП точки :

$P = PУ(a - XA)$ – оператор 23 /табл. IO.2/;
$A1: T1 = TPУ(P, a - YA)$ – " 4 /табл. IO.1/;
$A2: T2 = TPУ(P, a + ZA)$ – " 4 /табл. IO.1/.

Тепер є можливість розглянути розв"язання деяких задач нарисної геометрії за допомогою операторних алгоритмів.

IO.3. Автоматизація розв"язування задач на зображеннях просторових об"єктів

Обмежимося двома задачами.

Задача IO.1. Побудувати КП площини (ABC), якщо відомо, що

$A(XA, YA, ZA)$, $B(XB, YB, ZB)$ і
$C(XC, YC, ZC)$.

Операторний алгоритм побудови /рис. IO.3/:

$P1 = PУ(a - XA)$ – оператор 23 /табл. IO.2/;
$A1: T1 = TPУ(P1, a - YA)$ – " 4 /табл. IO.1/;
$A2: T2 = TPУ(P1, a + ZA)$ – " 4
$P2 = PУ(a - XB)$ – " 23 /табл. IO.2/;
$B1: T3 = TPУ(P2, a - YB)$ – " 4 /табл. IO.1/;
$B2: T4 = TPУ(P2, a + ZB)$ – " 4
$P3 = PУ(a - XC)$ – " 23 /табл. IO.2/;
$C1: T5 = TPУ(P3, a - YC)$ – " 4 /табл. IO.1/.
$C2: T6 = TPУ(P3, a + ZC)$ – " 4

Площина, що її задано точками $A(A1, A2)$, $B(B1, B2)$ і $C(C1, C2)$, – шукана.

Задача IO.2. У площині (ABC) побудувати довільну точку $M \in (ABC)$.

Розв"язування. Отож, задано КП площини (ABC) /задача IO.1/.

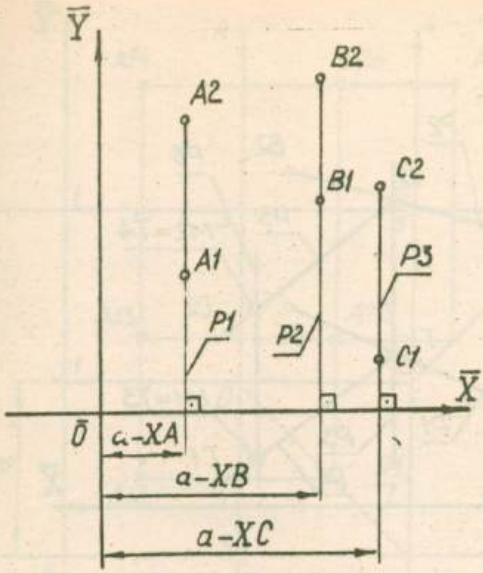


Рис. I0.3

Операторний алгоритм побудови точки M /рис. I0.4/:

$P1 = PTT(A1, B1)$ – оператор I3
$P2 = PTT(A2, B2)$ – " I3 } /табл. I0.2/;
$P3 = PY(X1)$ – " 23

$T1 = TPP(P1, P3)$ – " 2 } /табл. I0.I/;
$T2 = TPP(P2, P3)$ – " 2

$P4 = PTT(T1, C1)$ – " I3
$P5 = PTT(T2, C2$ – " I3
$P6 = PY(XY)$ – " 23 } /табл. I0.2/.
$T3 = TPP(P4, P6)$ – " 2
$T4 = TPP(P5, P6)$ – " 2

Оскільки $T3 = M_1$, а $T4 = M_2$, то $M(M_1, M_2)$ – шукана.

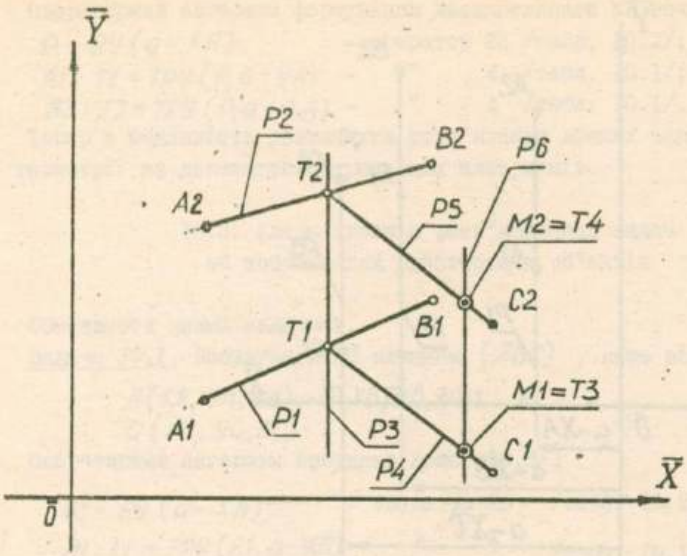


Рис. 10.4

10.4. Автоматизація формування ПКП-n точки A

У двокоординатній системі /дисплея/ може бути сформований і ПКП-n. Переконаємося в цьому, розглядаючи взаємозв"язок ПКП-4 з двокоординатною системою /дисплея/ /рис. 10.5/.

Неважко уявити, що в двокоординатній системі /дисплея/ проекції точки A на двовимірних проекційних полях визначаються такими координатами /у випадку ПКП-n/: проекція $A12\,(a-X1,\ a-X2)$, проекції $A1j\,[a-X1,\ (j-2)a+Xj]$ і, нарешті, проекції $Aij[(i-1)a+Xi,\ (j-2)a+Xj]$, де $i \neq j$, $2 \leq i \leq n-1$, $2 \leq j \leq n$.

Отож, у випадку ПКП-4 маємо для точки $A(X1, X2, X3, X4)$ такі координати проекцій:

$$A12\,(a-X1,\ a-X2),\ A13\,(a-X1,\ a+X3);$$
$$A14\,(a-X1,\ 2a+X4),\ A23\,(a+X2,\ a+X3);$$
$$A24\,(a+X2,\ 2a+X4),\ A34\,(2a+X2,\ 2a+X4).$$

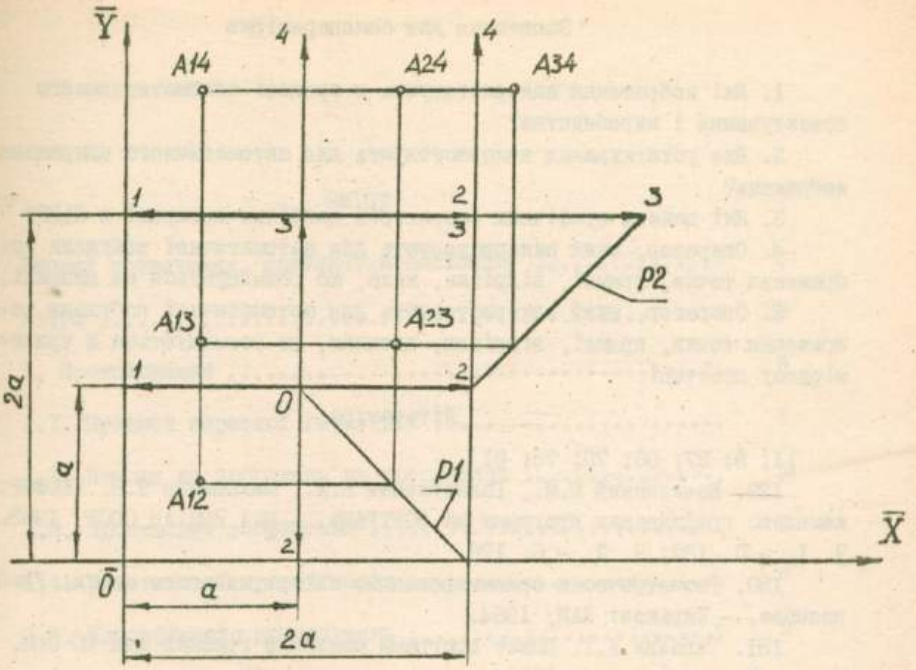


Рис. 10.5

Підвищити візуальні властивості ПКП-4 /як і ПКП-n/ можна нанесенням на екрані осей ПКП-4. Їх координати:

1/ осі I=2: ∞, a;
2/ " I=2=3: ∞, $2a$;
3/ " 2=3=4: a, ∞;
4/ " 3=4: $2a$, ∞.

Проекції AIJ наносять за допомогою оператора I /табл.10.1/, осі - за допомогою операторів 22 та 23 /табл. 10.2/. Постійні прямі / P_1 і P_2 / ПКП-4 /як і ПКП-n/ будують за допомогою оператора 16 /табл. 10.3/.

Запитання для самоперевірки

1. Які зображення використовують в процесі автоматизованого проектування і виробництва?

2. Яке устаткування використовують для автоматичного одержання зображень?

3. Які пакети графічних операторів найбільш поширені в САПР?

4. Оператор, який використовують для автоматичної побудови зображення точки, прямої, відрізка, кола, що розміщуються на площині.

5. Оператор, який використовують для автоматичної побудови зображення точки, прямої, відрізка, площини, що розміщуються в тривимірному просторі.

Література

[1; 5; 37; 66; 70; 78; 81].

129. Баяковский Ю.М., Галактионов В.А., Михайлова Т.Н. ГРАФОР: комплекс графических программ на ФОРТРАНе. – М.: ИПМ АН СССР, 1983. – Ч. 1. – С. 182; Ч. 2. – С. 176.

130. Геометрически ориентированные алгоритмические языки: Учеб. пособие. – Харьков: ХАИ, 1984.

131. Горелик А.Г. Пакет программ машинной графики для ЕС ЭВМ. – Минск: Машиностроение, 1986.

132. Грайс Д. Графические средства персонального компьютера. – М.: Мир, 1989.

133. Климов В.Е. Графические системы САПР. – М.: Высш. шк., 1990.

134. Михайленко В.Е., Анпилогова В.А., Седлецкая Н.И. Применение ЭВМ в преподавании курса начертательной геометрии. – К.: КИСИ, 1979.

135. Михайленко В.Е., Кислоский В.Н., Ляшенко и др. Геометрическое моделирование и машинная графика в САПР. – К.: Выща шк., 1991.

136. Справочник по машинной графике в проектировании /В.Е.Михайленко, В.А.Анпилогова, Л.А.Кириевский и др. – К.: Будивэльник, 1984.

ЗМІСТ

Умовні позначення, прийняті в посібнику 5
Вступ 33
I. Проецiювання 5
I.I. Предмет нарисної геометрії 5
I.2. Вимоги до зображень на кресленнях 5
I.3. Проекційні зображення 6
I.4. Властивості проецiювання 7
I.5. Класифікація проецiювань 9
I.6. Властивості паралельного проецiювання I0
I.7. Класифікація паралельних проецiювань II
I.8. Вимірність ортогональних проекцій II
Література I3
2. Побудова проекційних зображень I4
2.I. Побудова проекційних зображень плоских фігур I4
2.2. Монопроекції просторового оригіналу I9
Література 20
3. Аксонометричний метод побудови зображень 20
3.I. Апарат проецiювання. Основні поняття 20

3.2. Теорема Польке - Шварца 22

3.3. Класифікація аксонометричних систем 23

3.4. Приклади побудови зображень аксонометричним методом 27

3.5. Побудова аксонометричних проекцій плоских оригіналів за допомогою точкової відповідності 31

3.6. Реконструкція оригіналу за аксонометричною проекцією 33

3.7. Аналітичне подання аксонометричних проекцій 34

Література 38

4. Побудова зображень за методом комплексу проекцій /КП/. КП основних геометричних елементів 39

4.1. Двокартинний комплекс проекцій точки 40

4.2. Трикартинний КП точки 42

4.3. КП прямої 47

4.4. КП площини 53

4.5. Аналітичне подання прямої і площини 64

Література 70

5. КП кривих ліній 71

5.1. КП плоских кривих 71

5.2. КП просторових кривих 77

5.3. Аналітичні подання кривих на КП 86

5.4. Обводи 89

Література 98

6. КП поверхонь 100

6.1. КП многогранних поверхонь 100

6.2. КП криволінійних поверхонь 102

6.3. КП багатовимірних поверхонь 188

Література 191

7. Перетворення КП 192

7.1. Заміна площини проекцій 193

7.2. Аналітичне подання заміни площини проекцій 197

7.3. Обертання 198

7.4. Аналітичне подання обертання 203

7.5. Плоскопаралельне переміщення 204

7.6. Гвинтове переміщення 207

7.7. Зсув 208

7.8. Масштабування 210

7.9. Перетворення ПКП-/2 211

Література 216

8. Позиційні задачі
на КП 217

8.1. Основна задача 217

8.2. Приклади розв"язування
основної задачі 218

Приклад 8.1. Перетин двох прямих 219

Приклад 8.2. Перетин двох площин - пряма 219

Приклад 8.3. Перетин прямої та площини 221

Приклад 8.4. Перетин площини і поверхні 223

Приклад 8.5. Дотик площини до поверхні 230

Приклад 8.6. Перетин прямої та поверхні 232

Приклад 8.7. Перетин кривої та поверхні 238

Приклад 8.8. Перетин двох поверхонь 238

Література 252

9. Метричні задачі на КП 253

9.1. Перша основна метрична задача
/лонгометрична/ 254

9.2. Друга основна метрична задача
/гоніометрична/ 258
9.3. Приклади розв"язування метричних задач
зведенням до основних 260
9.4. Розгортки та їх графічна побудова 264
Література 271
10. Автоматизація побудови зображень 272
10.1. Автоматизація побудови зображень
плоских об"єктів 273
10.2. Автоматизація побудови зображень
просторових об"єктів 281
Література 288

Навчальне видання

Чернецький Микола Михайлович

Лекції з нарисної геометрії

Навчальний посібник

Редактор Л.М.Алдошина
Коректори: Н.М.Дзьома
Т.О.Суворова
Н.Ф.Слонiна

Підп. до друку 27.09.95 Формат 60×84 1/16. Папір друк. №3 . Друк офсетний. Умовн. друк. арк. 17,20. Умовн. фарбо-відб. 17,31. Облік.-вид. арк. 23,37 Тираж 1000 . Зам. № 5-819

ІСДО. 252070, Київ-70, вул. Сагайдачного, 37

Фірма «ВІПОЛ».
252151, Київ, вул. Волинська, 60.

Величина	Единица		
	Наименование	Обозначение	
		международное	русское
ОСНОВНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ			
Длина	метр	*m*	м
Масса	килограмм	*kg*	кг
Время	секунда	*s*	с
Сила электрического тока	ампер	A	А
Термодинамическая температура	кельвин	K	К
Количество вещества	моль	*mol*	моль
Сила света	кандела	*cd*	кд
ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ			
Плоский угол	радиан	*rad*	рад
Телесный угол	стерадиан	*sr*	ср

ПРОИЗВОДНЫЕ ЕДИНИЦЫ СИ, ИМЕЮЩИЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ НАИМЕНОВАНИЯ

Величина	Единица			Выражение через основные и дополнительные единицы СИ
	Наименование	Обозначение		
		международное	русское	
Частота	герц	*Hz*	Гц	$с^{-1}$
Сила	ньютон	*N*	Н	$м \cdot кг \cdot с^{-2}$
Давление	паскаль	*Pa*	Па	$м^{-1} \cdot кг \cdot с^{-2}$
Энергия	джоуль	*J*	Дж	$м^{2} \cdot кг \cdot с^{-2}$
Мощность	ватт	*W*	Вт	$м^{2} \cdot кг \cdot с^{-3}$
Количество электричества	кулон	*C*	Кл	$с \cdot А$
Электрическое напряжение	вольт	*V*	В	$м^{2} \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А^{-1}$
Электрическая емкость	фарад	*F*	Ф	$м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot с^{4} \cdot А^{2}$
Электрическое сопротивление	ом	Ω	Ом	$м^{2} \cdot кг \cdot с^{-3} \cdot А^{-2}$
Электрическая проводимость	сименс	*S*	См	$м^{-2} \cdot кг^{-1} \cdot с^{3} \cdot А^{2}$
Поток магнитной индукции	вебер	*Wb*	Вб	$м^{2} \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-1}$
Магнитная индукция	тесла	T	Тл	$кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-1}$
Индуктивность	генри	H	Гн	$м^{2} \cdot кг \cdot с^{-2} \cdot А^{-2}$
Световой поток	люмен	*lm*	лм	кд·ср
Освещенность	люкс	*lx*	лк	$м^{-2} \cdot кд \cdot ср$
Активность радионуклида	беккерель	*Bq*	Бк	$с^{-1}$
Поглощенная доза ионизирующего излучения	грэй	*Gy*	Гр	$м^{2} \cdot с^{-2}$
Эквивалентная доза излучения	зиверт	*Sv*	Зв	$м^{2} \cdot с^{-2}$