



517
3-15

**ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ З
ПИТАНЬ ТЕОРІЇ
АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ**

1993

517
3-15

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ УКРАЇНИ
Харківський авіаційний інститут ім. М.Є. Жуковського

О.В. Головченко, П.Т. Кошавець, В.М. Кузнichenko,
В.О. Рвачов, О.І. Соловйов

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ З ПИТАНЬ ТЕОРІЇ АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ
Навчальний посібник

ПЕРЕОБЛІК 200 р.

Харків ХАІ 1993

Научно-техническая
библиотека
"ХАИ"



mt0036551

Харківський авіаційний інститут
БІБЛІОТЕКА

УДК 517.54 (076.2)

Задачі та вправи з питань теорії аналітичних функцій / О.В. Голоченко, П.Т. Ковалевський, В.М. Кузніченко, В.О. Рвачов, О.І. Соловйов. - Кіев. посібник. - Харків: Харк. авіац. ін-т, 1993.

- 61 с.

Розглянуто основні теоретичні відомості та приведено формули в теорії аналітичних функцій. Наведено приклади розв'язування стандартних і нестандартних задач. Особливу увагу приділено самостійній роботі студентів.

Для студентів другого і третього курсів радіотехнічного та механічних факультетів.

Іл. 16. Бібліогр.: 8 назв.

Рецензенти: канд. фіз.-мат. наук, доц. В.Н. Калужний;
канд. техн. наук, доц. Н.С. Сивакоп



1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА І ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ

1.1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА ТА ДІЇ НАД НИМИ

Арифметичні дії над комплексними числами $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$ виконуються за формулами

$$1) z_1 \pm z_2 = x_1 \pm x_2 + i(y_1 \pm y_2);$$

$$2) z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1);$$

$$3) \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Комплексне число $z = x + iy$ зображується в площині Оху декартових координат точкою $M(x, y)$ або вектором $\vec{OM}$. Довжина вектора $\vec{OM}$, відповідно числу z , називається модулем цього числа (позначається $|z|$, тобто $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$), а кут між цим вектором та додатним напрямком дійсної осі Ох - аргументом числа z (позначається $\arg z$). Для $z=0$ поняття аргументу не має сенсу. Серед усіх значень $\arg z$ ($z \neq 0$) існує тільки одне, яке належить

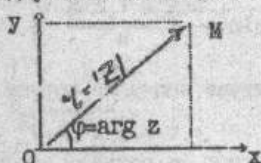


Рис. 1

проміжку $(-\pi, \pi]$. Воно називається головним значенням аргументу комплексного числа z і позначається $\arg z$, так що (рис. 1)

$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), де

$$\arg z = \begin{cases} \arctg \frac{y}{x} & (x > 0) \\ \pi + \arctg \frac{y}{x} & (x < 0, y \geq 0) \\ -\pi + \arctg \frac{y}{x} & (x < 0, y < 0) \\ \pm \frac{\pi}{2} & (x = 0, y \gtrless 0). \end{cases}$$

Будь-яке комплексне число z ($z \neq 0$) можна записати у вигляді $z = |z|[\cos(\arg z) + i \sin(\arg z)]$, або

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.1)$$

(тригонометрична форма запису комплексного числа).

Підносити комплексне число до натурального степеня зручніше за формулою

$$z^n = |z|^n (\cos(n \arg z) + i \sin(n \arg z)).$$

звідки випливає формула Муавра

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi.$$

Операція піднесення числа e до уявного степеня зводиться за допомогою рівності

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Тоді із рівності (1.1) дістаємо показникову форму запису комплексного числа z :

$$z = r e^{i\varphi}.$$

Множення, піднесення до степеня та ділення комплексних чисел у показниковій формі виконується за тими ж правилами, що й для звичайної показникової функції.

Розв'язання рівняння $w^n = z$ позначається символом $\sqrt[n]{z}$ і називається коренем степеня n з числа z . Існує рівно n різних значень $\sqrt[n]{z}$ ($z \neq 0$), що обчислюються за формулою

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right),$$

у якій через $\sqrt[n]{|z|}$ позначено арифметичне значення кореня степеня n з дійсного додатного числа $|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Вони розташовані на колі радіусом r і центром на початку координат і поділяють його на n рівних частин, тобто при $n > 2$ утворюють правильний n -кутник, вписаний у це коло.

Приклади

1. Довести тотожність

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$

Оскільки $|z| = z\bar{z}$ ($\forall z \in \mathbb{C}$), то ліву частину тотожності зобразимо у вигляді $(z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$ і скористаємося рівністю $\overline{w \pm v} = \bar{w} \pm \bar{v}$ ($\forall w, v \in \mathbb{C}$). Тоді

$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) + (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = \\ &= z_1 \bar{z}_1 + z_1 \bar{z}_2 + z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 + z_1 \bar{z}_1 - z_1 \bar{z}_2 - z_2 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 = \\ &= 2z_1 \bar{z}_1 + 2z_2 \bar{z}_2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2). \end{aligned}$$

2. Виразити $\sin 4x$ через функції $\sin x$ і $\cos x$.

Нехай $z = \cos x + i \sin x$. Тоді за формулою Муавра

$$z^4 = (\cos x + i \sin x)^4 = \cos 4x + i \sin 4x.$$

Використовуючи тепер формулу бінома Ньютона, дістаємо

$$\cos^4 x + 4i \cos^3 x \sin x - 6 \cos^2 x \sin^2 x - 4i \cos x \sin^3 x + \sin^4 x = \cos 4x + i \sin 4x.$$

$$\text{Тому } \sin 4x = 4 \cos^3 x \sin x - 4 \cos x \sin^3 x$$

$$\text{і одночасно } \cos 4x = \cos^4 x - 6 \cos^2 x \sin^2 x + \sin^4 x.$$

3. Записати у комплексній формі рівняння ліній:

$$a) 2x - 3y = 0;$$

$$б) (x+1)^2 + (y-1)^2 = i;$$

$$в) x^2/4 + y^2/3 = 1;$$

$$г) y^2 = 2x.$$

а) Перший спосіб. Оскільки $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$, то рівняння прямої має вигляд $2 \operatorname{Re} z - 3 \operatorname{Im} z + 1 = 0$.

Другий спосіб. Оскільки $z = x + iy$, а $\bar{z} = x - iy$, то

$$x = (\bar{z} + z)/2, \quad y = (\bar{z} - z)/2i.$$

Тому рівняння даної прямої має вигляд

$$2 \frac{(\bar{z} + z)}{2} - 3 \frac{(\bar{z} - z)}{2i} + 1 = 0 \quad \text{або}$$

$$(1 + \frac{3}{2i})z + (i - \frac{3}{2i}) + 1 = 0.$$

б) $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$ - рівняння кола радіусом 1 з центром у точці $(-1, 2)$. Оскільки рівняння кола радіусом R з центром у точці $z_0 = (x_0, y_0) = x_0 + iy_0$ має вигляд $|z - z_0| = R$, то шукане рівняння запишемо як

$$|z + 2 - i| = 1.$$

в) $x^2/4 + y^2/3 = 1$ - рівняння еліпса у канонічному вигляді.

Маємо $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{4 - 3} = 1$. Тому за означенням еліпса необхідне рівняння має вигляд $|z - 1| + |z + 1| = 2$.

г) $y^2 = 2x + 1$ - рівняння параболі.

Перший спосіб. $(\operatorname{Im} z)^2 = 2 \operatorname{Re} z + 1$.

Другий спосіб. $((z - \bar{z})/2i)^2 = z + \bar{z} + 1$.

4. Знайти геометричне місце точок, рівновіддалених від точок $z_1 = 1 - i$, $z_2 = 2 + 3i$.

Геометричному місцю точок, рівновіддалених від двох заданих точок z_1 і z_2 , відповідає рівняння $|z - z_1| = |z - z_2|$.

Тому $|z + i - 1| = |z - 2 - 3i|$ - шукане рівняння. Звідси $|x - 1 + i(y + 1)| = |x - 2 + i(y - 3)|$, або

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-3)^2}.$$

Піднявши обидві частини останнього рівняння до квадрата і виконувачи подальші алгебраїчні перетворення, дістанемо рівняння $x + 4y - 1 = 0$. Це рівняння задає пряму лінію.

5. Знайти множину E точок z у комплексній площині C , які задовольняють співвідношенням:

а) $|z - 1| + |z + i| \leq 4$; б) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = 1$; в) $\operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) = 0$.

а) $|z - 1| + |z + i| \leq 4$ - рівняння еліпса, для якого $2a = 4$, $b = 1$.

Тому канонічне рівняння цього еліпса ($b = \sqrt{a^2 - c^2}$) має вигляд $x^2/4 + y^2/3 = 1$.

Отже, множина $E = \{(x, y): x^2/4 + y^2/3 \leq 1\}$.

б) Оскільки $\operatorname{Re} z = x$, $\operatorname{Im} z = y$, $E = \{(x, y): x + y = 1\}$ - пряма лінія.

в) $\operatorname{Re}(z^2 - \bar{z}) = 0$. Подано z в алгебраїчній формі: $z = x + iy$. Тоді $\operatorname{Re}(x + iy)^2 - (x - iy)^2 = 0$, або $x^2 - y^2 - x = 0$. Звідси маємо

$$(x - \frac{1}{2})^2 - y^2 = \frac{1}{4}, \text{ тобто } E = \{(x, y): \frac{(x - 0,5)^2}{0,5^2} - \frac{y^2}{5^2} = 1\}$$

- гіпербола.

Вправи для аудиторних та домашніх завдань

1. Записати комплексні числа у тригонометричній та показниковій формах:

а) $z = -1 - i$; б) $z = 2 - 3i$; в) $z = 2$;
г) $z = -3i$; д) $z = -\sqrt{3} + i$; е) $z = 1 + i\sqrt{3}$.

2. Виконати дії:

а) $z = (\sqrt{3} - 1)$; б) $z = \frac{1-i}{1+i}$; в) $z = \sqrt[3]{-1}$;
г) $z = \sqrt[4]{-1}$; д) $z = \sqrt[5]{-1-i}$; е) $z = i^i$.

3. Виконати дії і записати комплексне число z у тригонометричній та показниковій формах, розуміючи аргументи комплексних чисел як головні значення:

а) $z = (\log_3 i)^i$; б) $z = \frac{\cos i - i \sin i}{\sin i - i \cos i}$;

$$а) z = ((-1)^i + i)^i; \quad г) z = e^{(\sqrt[4]{3} - 1)/(\sqrt[4]{3} + 1)}.$$

4. Зобразити на комплексній площині множини точок:

$$а) E = \{z: |z| \leq |z - 1|\}; \quad б) E = \{z: \frac{\pi}{2} < \arg(z - 1) < \frac{3\pi}{4}\}$$

$$в) E = \{z: -1 < \operatorname{Im} z < 2\}; \quad г) E = \{z: \operatorname{Re} \frac{z-2}{z+2} = 0\};$$

$$д) E = \{z: \operatorname{Re} \frac{1}{z} \leq \frac{1}{2}\}; \quad е) E = \{z: 0 < \arg \frac{1-z}{z+1} < \frac{\pi}{4}\}.$$

$$5. z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha. \text{ Довести, що } z^4 + 1/z^4 = 2 \cos 4\alpha \text{ на } (\forall n \in \mathbb{Z})$$

$$6. z^2 + z + 1 = 0. \text{ Довести, що } z^{3n} + z^{3n+1} + z^{3n+2} = 0 \\ (\forall n, m, p \in \mathbb{Z}).$$

7. Довести тотожності:

$$а) |1 - z_1 z_2|^2 - |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1 z_2|)^2 - (|z_1| + |z_2|)^2,$$

$$б) |z + \frac{1}{z}|^2 + |z + \frac{1}{z}|^2 - (1 + i)|z|^2 - \frac{1}{4}(1 + i) = z;$$

$$в) |\frac{1}{2}(z_1 + z_2) + z_3| + |\frac{1}{2}(z_1 + z_2) - z_3| = |z_1| + |z_2| \\ \text{якщо } z_1 z_2 = z_3^2;$$

$$г) \left| \frac{z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1}{z_1 + z_2 + z_3} \right| \quad г. \text{ якщо } |z_1| = |z_2| = |z_3| = r.$$

8. Зайти тригонометричну форму комплексного числа;

$$z = 1 + itg \alpha \quad (-\pi < \alpha < \pi, \alpha \neq \pm \frac{\pi}{2}).$$

9. Подати у тригонометричній формі число:

$$z = (1 - \cos \alpha + i \sin \alpha)^n, \text{ де } n - \text{ ціле число, що не дорівнює нулю.}$$

10. Знайти суми:

$$S_n = 1 + \frac{\sin x}{\sin x} + \frac{\sin 2x}{\sin^2 x} + \dots + \frac{\sin nx}{\sin^n x};$$

$$C_n = 1 + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{\cos 2x}{\sin^2 x} + \dots + \frac{\cos nx}{\sin^n x}.$$

Завдання для індивідуальної роботи

1. Виконати дії і записати комплексне число z у тригонометричній та показниковій формі, розуміючи аргументи комплексних чисел як головні значення:

$$1) z = \frac{1+i}{1-i} 2^i;$$

$$2) z = \frac{1e^{i\pi/4} - 1}{e^{i\pi/4} - 1};$$

$$3) z = 1 + i(\sqrt[4]{3})^i;$$

$$4) z = 2^{2+i} (1e^{i\pi/4} - i)$$

5) $z = \cos(i + (-1)^{1/2})$;

6) $z = 2^i \log_e \frac{1-i}{\sqrt{2}}$;

7) $z = (\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3})^{1+i}$;

8) $z = i^{\log_e(i-1)}$;

9) $z = \frac{(1+i)^{1-i}}{(1-i)^{1+i}}$;

10) $z = (1+i) e^{2i}$;

11) $z = (-1+i)^{1/i+1}$;

12) $z = \frac{2^i + \log_e 1}{\log_e 2 + 1^i}$;

13) $z = \frac{i \sin 1 + \log_e 1}{\log 1 - i \sin 1}$;

14) $z = \frac{2^i}{\log_e(\sqrt{3}-i)}$;

15) $z = (-1)^{(\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3})}$;

16) $z = (i-1)^{\log_e(i+1)}$;

17) $z = (\sqrt{3}+i)^{\frac{4+3i}{3-4i}}$;

18) $z = (-2)^i (-1+i)^{-2} - 1$;

19) $z = \frac{ie^{\pi/3} - \sin \pi/6}{e^{-\pi/6} + i \cos \pi/3}$;

20) $z = (1+(-1)^i) e^{i\pi/4}$.

II. Геометричні задачі в комплексній площині

1. Нехай $E = \{z: |z+1-2i| \leq 4\}$. Знайти $\min_{z \in E} \arg z$
і визначити те значення z , на якому досягається мінімум.

2. Довести, що площа трикутника визначається за формулою

$$S = \frac{i}{4} \begin{vmatrix} z_1 & \bar{z}_1 & 1 \\ z_2 & \bar{z}_2 & 1 \\ z_3 & \bar{z}_3 & 1 \end{vmatrix},$$

де z_1, z_2, z_3 - вершини трикутника, позначені відповідно о'ю до контуру трикутника проти ходу стрілки годинника.

3. Нехай z_1, z_2 - фокуси еліпса E , а $z_3 \in E$. Написати рівняння еліпса E і рівняння дотичної до E в точці z_3 у комплексній формі запису, якщо $z_1 = 3+i, z_2 = -4+2i, z_3 = 5i$.

4. Нехай $E = \{z: \operatorname{Re} \frac{iz+1}{i\bar{z}-1} \leq 0\}$, $M = 10+3i$. Знайти $\min_{z \in E} \rho(M, E)$.

5. Нехай $E = \{z: \operatorname{Re}(z^2 \bar{z}) = 0\}$. Знайти асимптоти множини E і написати їх рівняння у комплексній формі.

6. Дано пряму $L: (2i-1)z + (2i+1)\bar{z} + 6i$ та точку $M(1,6)$.

Знайти точку z , спряжену з точкою M відносно прямої L .

7. Нехай $E_1 = \{z: |z + 2i| \leq 1/\sqrt{2}\}$, $E_2 = \{z: z(1 - i) - \bar{z}(1 + i) + 2i = 0\}$. Знайти $\min \rho(u, v)$, $u \in E_1$, $v \in E_2$.

8. Записати у комплексній формі формулу відстані від точки до прямої.

9. Довести, що площа трикутника дорівнює

$S = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1)$, де z_1, z_2, z_3 - вершини трикутника позначені відповідно обходу трикутника проти стрілки годинника.

10. Нехай $E = \{z: |z| + \operatorname{Re} z = 1\}$. Знайти $\min (0, z)$ ($z \in E$) та визначити те значення z , на якому досягається мінімум.

11. До множини $E = \{z: \operatorname{Re}(z + 1) = |z|\}$ написати у комплексній формі рівняння дотичних, які виходять з точки $z = -1$.

12. Дано коло $K: |z + 2 - 3i| = 5$ і точка $M(1, 2)$. Знайти точку z , спряжену з точкою M відносно кола K .

13. Нехай $E = \{z: |z - 25i| \leq 15\}$. Знайти $\max \arg z$ та визначити те значення z , на якому досягається максимум.

14. Нехай $E = \{z: |\arg z| \leq \pi/4\} \cap \{z: |z - 2i| \geq |z + 1|\}$. Знайти площу множини E .

15. Нехай z_1, z_2, z_3 - точки кола K . Знайти центр кола K і записати його рівняння у комплексній формі, якщо $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -3 + 2i$, $z_3 = i + 3i$.

16. Нехай $E_1 = \{z: |z + 1 - 2i| = 6\}$, $E_2 = \{z: |z - i| = 1\}$. Знайти $\min \rho(u, v)$ ($u \in E_1, v \in E_2$), $\max \rho(u, v)$ ($u \in E_1, v \in E_2$).

17. Вписати в множину $E = \{z: \operatorname{Im}(z - 3i) \leq 4\} \cap \{z: \operatorname{Re}(z - i) \leq 5\}$ еліпс і написати його рівняння у комплексній формі.

18. Нехай $E_1 = \{z: |z - 3 - 2i| + |z - i - i| = 5\}$, $E_2 = \{z: |z - 4 - 3i| + |z + 5 + i| = 7\}$. Написати рівняння прямих l_1 і l_2 та знайти кут між ними, якщо пряма l_1 проходить через фокус еліпса E_1 , а пряма l_2 - через малу піввісь еліпса E_2 .

19. Нехай $E_1 = \{z: 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$, $E_2 = \{z: \pi/4 \leq \arg(z + 1) \leq \pi/3\}$. Знайти координати точки, через яку проходять дві дотичні спільні для множин E_1 та E_2 .

20. Нехай $K = \{z: 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\} \cap \{z: \pi/4 \leq \arg(z + 1) \leq \pi/2\}$. Знайти площу множини E .

1.2. Основні елементарні функції комплексної змінної
Показникова функція означається за формулою

$$e^z = e^x (\cos x + i \sin x)$$

і має такі властивості:

$$e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2} \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}),$$

$$e^{z_1 + 2\pi ki} = e^z \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Тригонометричні та гіперболічні функції вводяться за формулами:

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; & \cos z &= \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \\ \operatorname{sh} z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}; & \operatorname{ch} z &= \frac{e^z + e^{-z}}{2}; \\ \operatorname{tg} z &= \frac{\sin z}{\cos z}; & \operatorname{ctg} z &= \frac{\cos z}{\sin z}; \\ \operatorname{th} z &= \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}; & \operatorname{cth} z &= \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}. \end{aligned} \quad (1.2)$$

При цьому

$$\sin iz = i \operatorname{sh} z; \quad \cos iz = \operatorname{ch} z;$$

$$\operatorname{sh} iz = i \sin z; \quad \operatorname{ch} iz = \cos z.$$

Логарифмічна функція означається як обернена до показникової функції e^z , а саме:

$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i \operatorname{Arg} z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k) \quad (1.3)$$

$$(k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Функція $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ називається головним значенням логарифмічної функції $\operatorname{Ln} z$.

Неважко переконатися, що

$$\operatorname{Ln}(z_1 z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2; \quad \operatorname{Ln}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2;$$

$$\operatorname{Ln} z^n = n \operatorname{Ln} z + 2\pi ki \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Обернені тригонометричні функції виражаються через логарифмічну функцію:

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} z &= -i \operatorname{Ln}(iz + \sqrt{1 - z^2}); \\ \operatorname{Arccos} z &= -i \operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}); \\ \operatorname{Arctg} z &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 + iz}{1 - iz}; \\ \operatorname{Arcctg} z &= -\frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{z - i}{z + i}; \end{aligned} \quad (1.4)$$

Загальні степеневі z^a і показникові a^z функції означа-

ються за формулами:

$$z^a = e^{a \ln z}, \quad a^z = e^{z \ln a}. \quad (1.5)$$

Приклади

1. Розв'язати рівняння $\sin z = \pi i$.

Перший спосіб. Формули (1.2) дають можливість звести рівняння до квадратного відносно e^{iz} , а саме:

$$\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \pi i, \quad e^{2iz} + 2\pi e^{iz} - 1 = 0.$$

Розв'язуючи останнє рівняння відносно e^{iz} , дістаємо

$$e^{iz} = -\pi \pm \sqrt{\pi^2 - 1},$$

звідки за формулами (1.3) маємо

$$z = -i \ln(-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 1}) = -i (\ln(\sqrt{\pi^2 + 1} \mp \pi) + \quad (1.6)$$

$$+ i \arg(-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 1}) + 2\pi k i) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Оскільки $\arg(-\pi - \sqrt{\pi^2 + 1}) = \pi$, $\arg(-\pi + \sqrt{\pi^2 + 1}) = 0$, то остаточно дістаємо:

$$z = -i \ln(\sqrt{\pi^2 + 1} - \pi) + 2\pi k,$$

$$z = -i \ln(\sqrt{\pi^2 + 1} + \pi) + (2k + 1)\pi, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Другий спосіб. Із означення (1.4) функції $\operatorname{Arcsin} z$ безпосередньо знаходимо значення z , яке співпадає з (1.6):

$$z = -i \ln(-\pi \pm \sqrt{\pi^2 + 1}).$$

2. Розв'язати рівняння

$$3z^2 - 24|z|^2 + 12\bar{z}^2 - 2z(1 - 2i) + 3\bar{z}(1 - 2i) - 1 = 0.$$

Перепишемо рівняння у вигляді

$$2(4z^2 - 12z\bar{z} + 9\bar{z}^2) - (1 - 2i)(2z - 3\bar{z}) - 1 = 0.$$

Неважко помітити, що $4z^2 - 12z\bar{z} + 9\bar{z}^2 = (2z - 3\bar{z})^2$.

Тому підстановка $t = 2z - 3\bar{z}$ дозволяє звести останнє рівняння до квадратного відносно t :

$$2t^2 - (1 - 2i)t - 1 = 0.$$

Звідси $t_1 = -i$, $t_2 = 1/2$. Виконавши обернену підстановку, маємо:

$$2z - 3\bar{z} = -i$$

$$2z - 3\bar{z} = 1/2$$

$$2x + 2iy - 3x + 3iy = -i$$

$$2x + 2iy - 3x + 3iy = 1/2$$

$$-x + 5iy = -1$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1/5 \end{cases}$$

$$z = -i/5$$

$$-x + 5iy = 1/2$$

$$\begin{cases} x = -1/2 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$z = -1/2$$

3. Знайти значення модуля функції $\cos z$ у точці $z_0 = \pi + i \ln 2$ ($z_0 = x_0 + iy_0$, $x = \pi$, $y = \ln 2$).

Маємо

$$\begin{aligned} |\cos z| &= |\cos(x + iy)| = |\cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(iy)| = \\ &= |\cos(x)\operatorname{ch}(y) - i\sin(x)\operatorname{sh}(y)| = \sqrt{\cos^2(x)\operatorname{ch}^2(y) + \sin^2(x)\operatorname{sh}^2(y)}; \\ |\cos(z_0)| &= \sqrt{\cos^2 \ln 2} = \operatorname{ch} \ln 2 = \frac{e^{\ln 2} + e^{-\ln 2}}{2} = \frac{2 + 1/2}{2} = 5/4. \end{aligned}$$

Таким чином, абсолютні величини тригонометричних функцій від комплексної змінної можуть приймати значення, які більші, ніж одиниця. Це ж твердження вірне і для функції.

Вправи для аудиторних та домашніх завдань

1. Обчислити дійсну та уявну частини функцій:

а) $f(z) = ze^z$;

б) $f(z) = 2\operatorname{ch}(z + i)$;

в) $f(z) = i g z$;

г) $f(z) = 2z^3 - 3iz^2$;

д) $f(z) = \frac{1 + 2iz}{1 + \bar{z}}$;

е) $f(z) = \frac{1}{z} (1 + \frac{i}{z})$.

2. Розв'язати рівняння:

а) $4\cos z + 5 = 0$;

б) $\sin^4 z + \cos^4 z = 3/2$;

в) $e^{4z} - e^{2z} - 2 = 0$;

г) $2^{2z} + 5iz^2 + 6 = 0$;

д) $-z^2 + 2|z|^2 + \bar{z} - (2i - 1)z - (2 + i)\bar{z} + 2i = 0$;

е) $(2z^2 - i)|z|^4 = -6\bar{z}^2$.

Вправи для індивідуальної роботи

Розв'язати рівняння:

1) $6\ln z - \ln(z^3 - 1) = \pi i$;

2) $\cos z^{3/2} = 0$;

3) $\operatorname{Arccos} z^3 = \pi(i - 1)$;

4) $\operatorname{Arccos}(e^{iz} + 1) = z$;

5) $\ln \cos z = \pi i/3$;

6) $\cos \ln \bar{z} = 1 + i$;

7) $2z^2 + 4i|z|^2 - 2|\bar{z}|^2 + 3z + 3i\bar{z} + 6 = 0$;

8) $z^2 - 4iz\bar{z} - 4|z|^2 - 5z + 10iz + 6 = 0$;

$$9) \sqrt{z} = \operatorname{Arcsin} \frac{1+i}{\sqrt{2}};$$

$$10) e^{(z+1)/z} = 1 - i;$$

$$11) \cos^2 z = (1 + i)/2;$$

$$12) \operatorname{sh}^2 z = 1/2;$$

$$13) \sin^5 z + \cos^6 z = \frac{1}{4\sqrt{2}} (4\sqrt{2} - 3 - 3i);$$

$$14) \sin^2 z - (3+i)\sin z + 2 + 2i = 0; \quad 15) z^{\operatorname{Ln} z} = z^2 + 2i;$$

$$16) \operatorname{ch}^6 z - \operatorname{sh}^6 z = (11 - 3\sqrt{3} i/8)/6; \quad 17) \operatorname{ch}^2(iz) = 1/2;$$

$$18) \operatorname{Ln}(z^2 + 1) = (2 + 2i)\operatorname{Ln}^{-1}(z^2 + 1) - 1 + i = 0;$$

$$19) (z^2 - 5)|z|^4 = -4\bar{z}^2; \quad 20) e^{2z^2} - 7e^{z^2} - 4 = 0.$$

1.3. Диференціювання функцій комплексної змінної.

Умови Коші - Рімана

Нехай однозначна функція $f(z)$ визначена в деякій комплексній області D і точки z та $z + \Delta z$ - внутрішні точки області D . Похідною функції $f(z)$ у точці z називається скінченна границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, тобто

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Теорема (про необхідні та достатні умови диференційовності функції комплексної змінної). Для того, щоб функція $f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$, $z = x + iy$ була диференційована в точці z як функція комплексної змінної, необхідно і достатньо, щоб функції u і v були диференційовані в точці (x, y) (як функції дійсних змінних x, y) і їх частинні похідні у точці z задовольняли умовам Коші-Рімана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.7)$$

При виконанні всіх умов теореми похідну $f'(z)$ можна знайти за однією з наступних формул:

$$\begin{aligned} f'(z) &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Функція $f(z)$ називається аналітичною в точці z , якщо вона диференційована в кожній точці деякого околу точки z . Ми кажемо, що функція $f(z)$ аналітична в області D , якщо вона аналітична в

кожній точці цієї області (або диференційована в кожній точці області D).

Приклади

1. Для функції $f(z) = z\bar{z}$ маємо $u = \operatorname{Re} f(z) = x^2 + y^2$, $v = \operatorname{Im} f(z) = 0$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Звідси видно, що умови Коші - Рімана ($2x = 0$, $2y = 0$) виконуються лише при $x = 0$, $y = 0$, тобто в єдиній точці $z = 0$. Отже, функція $f(z) = z\bar{z}$, диференційована в єдиній точці $z = 0$, не є аналітичною в жодній точці, крім точки $z = 0$.

2. Для функції $f(z) = \cos 3z - i$ маємо:

$$u = \operatorname{Re} f(z) = \cos 3x \operatorname{ch} 3y, \quad v = \operatorname{Im} f(z) = -\sin 3x \operatorname{sh} 3y - 1;$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -3\sin 3x \operatorname{ch} 3y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 3\cos 3x \operatorname{sh} 3y;$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -3\cos 3x \operatorname{sh} 3y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -3\sin 3x \operatorname{ch} 3y.$$

Звідси видно, що умови (1.7) виконуються для всіх $z \in \mathbb{C}$, тобто дана функція аналітична на множині $\mathbb{D} = \mathbb{C}$ всіх комплексних чисел. Відповідно формулі (1.8)

$$(\cos 3z - i)' = -3\sin 3x \operatorname{ch} 3y - 3i\cos 3x \operatorname{sh} 3y = -3\sin 3z.$$

3. При яких значеннях параметрів a , b , c функція

$$f(z) = ax^2 - by^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2} + i \left(2cxy - x + 5y - \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

є аналітичною в деякій області D ?

Коефіцієнти a , b , c підберемо з умов Коші - Рімана (1.7):

$$u(x, y) = ax^2 - by^2 + 5x + y - \frac{y}{x^2 + y^2};$$

$$v(x, y) = 2cxy - x + 5y - \frac{x}{x^2 + y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2ax + 5 + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2by + 1 + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2cy - 1 + \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2cx + 5 + \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2};$$

Звідси $a = c$, $b = c$, тобто $a = b = c = 1$

$$f(z) = a(x^2 + 2iy - y^2) + 5(x + iy) - i(x + iy) - i \frac{x - iy}{x^2 + y^2} =$$

$$= az^2 + 5z - iz - \frac{i\bar{z}}{|z|^2} = az^2 + 5z - iz - \frac{i}{z}.$$

Отже, функція аналітична для всіх $z \neq 0$.

4. Довести, що умови Коші - Рімана, записані в полярних координатах, мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi}. \quad (1.9)$$

Для функцій $u(x, y) = u(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$ та $v(x, y) = v(x(\rho, \varphi), y(\rho, \varphi))$ частинні похідні мають вигляд

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \rho} \sin \varphi - \frac{\partial u}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho},$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \cos \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\sin \varphi}{\rho},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial \rho} \sin \varphi - \frac{\partial v}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\rho}.$$

З умов Коші - Рімана (1.7) дістаємо систему лінійних рівнянь відносно похідних $\frac{\partial u}{\partial \rho}$, $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial v}{\partial \rho}$, $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$. Розв'язуючи її, маємо рівності (1.9).

Вправи для аудиторних та домашніх завдань

Користуючись умовами Коші - Рімана, знайти область аналітичності функції:

- 1) $f(z) = z^2 e^z$; 2) $f(z) = \bar{z} / z^2$;
- 3) $f(z) = |z|(\operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z^2)$; 4) $f(z) = |z|(\operatorname{Im} z - i \operatorname{Re} z^2)$;
- 5) $f(z) = \operatorname{Re}(\sin z) \cos z$; 6) $f(z) = |x^2 - y^2| - 2i|xy|$.

Вправи для індивідуальної роботи

Знайти множину точок, на якій функція аналітична то тільки диференційована, та виписати відповідну похідну:

- 1) $f(z) = z \sin z$; 2) $f(z) = k/z^2$;
- 3) $f(z) = z \cosh z$; 4) $f(z) = z/|z|$;
- 5) $f(z) = 1/z$; 6) $f(z) = z^3 - (\operatorname{Im} z)^3$;

- 7) $f(z) = \ln z - 3z^2 + 1$; 8) $f(z) = az^2 + 5z - iz$;
 9) $f(z) = z^2 + 5z - iz - z/|z|^2$; 10) $f(z) = ze^z$;
 11) $f(z) = |z|\bar{z}$; 12) $f(z) = (z + |\bar{z}|)/2$;
 13) $f(z) = \sin 3z - iz$; 14) $f(z) = \bar{z} (\operatorname{Re} z^2 + i \operatorname{Im} z^3)$;
 15) $f(z) = z + \bar{z}/z^2$; 16) $f(z) = |z|^2 + 2z$;
 17) $f(z) = \sin(iz) + z$; 18) $f(z) = \operatorname{ch} z + z \sin(iz)$;
 19) $f(z) = \sin z + z^5$; 20) $f(z) = \operatorname{ch} z + z^2$.

1.4. Відновлення аналітичної функції за її відомою дійсною чи уявною частиною

Дійсна u та уявна v частини аналітичної в деякій області D функції $f(z) = u(x,y) + i v(x,y)$ задовольняють рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}.$$

Рівняння

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

є диференціальним рівнянням з частинними похідними другого порядку. Воно називається рівнянням Лапласа, а функції, які мають в області D неперервні частинні похідні до другого порядку включно і задовольняють цьому рівнянню, — гармонічними функціями. Отже, дійсна та уявна частини функції комплексної змінної, аналітичної в деякій області, є функціями, гармонічними в цій області. Ці дві гармонічні функції, зв'язані умовами Коші — Рімана, називаються спряженими гармонічними функціями. Виникає питання: якщо в області D задано довільну дійсну гармонічну функцію u (v), то чи можна знайти спряжену гармонічну функцію (u) таку, що функція $f(z) = u + iv$ буде аналітичною в області D ? Відповідь на це питання позитивна, якщо область D однозв'язна, а саме: будь-яка гармонічна в однозв'язній області функція є дійсною (уявною) частиною деякої аналітичної в цій області функції.

Приклади

1. Нехай $D = C$. Легко перевірити, що функція $u(x,y) = e^x (\cos y - y \sin y)$ гармонічна в D . Розглянемо повний диференціал функції v :

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy.$$

З умов Коші - Рімана (1.7) маємо

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = Pdx + Qdy \quad (P = -\frac{\partial u}{\partial y}, Q = \frac{\partial u}{\partial x}).$$

Оскільки u - гармонічна функція в D , то $-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, тобто

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad ((x, y) \in D).$$

Отже, диференціальний вираз

$$Pdx + Qdy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy = dv$$

є повним диференціалом в області D . Тоді за відомою теоремою математичного аналізу функцій v можна відновити за її відомим повним диференціалом dv з точністю до довільної сталої, виконуючи інтегрування по контуру OAB (рис. 2):

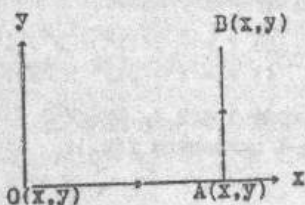


Рис. 2

$$\int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy =$$

(OAB)

$$= \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy +$$

(OA)

$$+ \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy =$$

(AB)

$$= -\int_0^x \frac{\partial u(x,0)}{\partial y} dx + \int_0^y \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} dy = e^x \int_0^y (x \cos y - y \sin y + \cos y) dy = e^x (x \sin y + y \cos y).$$

$$f(z) = e^x (x \cos y - y \sin y) + i e^x (x \sin y + y \cos y) + iC = ze^z + iC.$$

Відзначимо, що аналітична функція відновлюється за своєю дійсною частиною з точністю до чисто уявного сталого доданка (як у даному прикладі). Аналогічно за своєю уявною частиною аналітична функція відновлюється з точністю до дійсного сталого доданка.

Зауваження. Відновити аналітичну функцію можна і безпосередньо, виходячи тільки з умов Коші - Рімана.

2. Нехай $D = C$. Легко перевірити, що функція $v(x, y) = e^x \sin y + 2xy$ гармонічна в D . Знайдемо спряжену гармонічну функцію u , виходячи з умов Коші - Рімана (1.7), тобто з системи рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y + 2y,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y - 2x.$$

З першого рівняння інтегруванням по x дістаємо:

$$u(x, y) = e^x \cos y + x^2 + \varphi(y).$$

Тоді з другого рівняння маємо $\varphi'(y) = -2y$, тобто $\varphi(y) = -y^2 + C$ ($C = \text{const}$). Тому $u(x, y) = e^x \cos y + x^2 - y^2 + C$, отже,

$$f(z) = e^z + z^2 + C.$$

Вправи для аудиторії та домашніх завдань

I. Знайти спряжені гармонічні функції, якщо:

- | | |
|----------------------------|-----------------------------|
| 1) $u = e^x \cos y$ | 2) $v = -y/(x^2 + y^2)$; |
| 3) $u = x^3 - 3xy^2 - x$; | 4) $v = x^3 - 3xy^2 - 2y$; |

II. Відновити аналітичну в околі точки z_0 функцію $f(z)$ за відомою дійсною (уявною) частиною і значенням $f(z_0)$:

- 1) $u = e^{-y} \cos x + x$, $f(1) = 1 + 2i$;
- 2) $v = e^x \sin y + 2xy + 5y$, $f(0) = 2$;
- 3) $u = x/(x^2 + y^2)$, $f(2) = 1/2$;
- 4) $v = x - y/(x^2 + y^2)$, $f(i) = i$;
- 5) $u = \operatorname{ch} x \sin y - xy$, $f(0) = 0$;
- 6) $v = 2 \cos x \operatorname{ch} y - x^2 + y^2$, $f(0) = 4$;
- 7) $u = \ln(x^2 + y^2)$, $f(1) = 4$;
- 8) $u = \operatorname{arctg}(y/x)$, $f(1) = 1$;
- 9) $u = e^x \sin y + 1$, $f(i) = -1$;
- 10) $v = e^x \cos y + 1$, $f(1) = i$;
- 11) $u = (e^x - e^{-x}) \sin y$, $f(0) = 1$;
- 12) $v = 3y^2 x - x^3$, $f(1) = 1 - i$;
- 13) $u = \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}$, $f(0) = 1$;
- 14) $v = x^2 - y^2 + 2xy + 1$, $f(0) = i$;

- 15) $w = z/(z^2 + y^2) + i$, $f(2) = 2$;
 16) $u = e^{-x} \cos y + y$, $f(0) = 1 + i$;
 17) $v = x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3$, $f(1) = 4i$;
 18) $u = x^3 - 3xy^2 - x$, $f(0) = 0$;
 19) $v = 2(2\operatorname{sh} x \sin y + xy)$, $f(0) = 1$;
 20) $u = x \cos y \operatorname{ch} x - y \sin y \operatorname{sh} x$, $f(0) = 0$.

2. КОНІФОРМНІ ВІДОБРАЖЕННЯ

2.1. Дробово-лінійна функція

1. Дробово-лінійна функція

$$w = L(z) = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0, c \neq 0) \quad (2.1)$$

прямі і кола, які проходять через точку $z = -d/c$, відображає на прямі, а прямі і кола, які через неї не проходять, відображає на кола (крутова властивість дробово-лінійної функції).

2. Існує одне і тільки одне дробово-лінійне відображення $w = L(z)$, яке три різні довільно задані точки z_1, z_2, z_3 переводить відповідно в три різні довільно задані точки w_1, w_2, w_3 . Воно визначається із рівняння

$$\frac{w - w_1}{w - w_2} : \frac{w_3 - w_1}{w_3 - w_2} = \frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}. \quad (2.2)$$

Формула (2.2) дозволяє знайти дробово-лінійну функцію, яка відображає будь-яку пряму або коло γ_z площини z на будь-яку задану пряму або коло γ_w площини w . При цьому можна вимагати, щоб три які-небудь точки $z_1, z_2, z_3 \in \gamma_z$ переходили відповідно в три наперед задані точки $w_1, w_2, w_3 \in \gamma_w$.

Дробово-лінійна функція, відображаючи пряму або коло γ_z на пряму або коло γ_w , відображає при цьому кругову область (в широкому розумінні) з меж γ_z на кругову область з меж γ_w (одну з двох можливих).

3. Будь-яка пара точок, симетричних відносно кола або прямої γ_z , перетворюється дробово-лінійною функцією $w = L(z)$ в пару точок, симетричних відносно образу γ_w (властивість збереження симетричних точок).

Нагадаємо, що точки z і z^* називають ся симетричними відносно кола γ_z , якщо вони лежать на одному промені, який виходить із центра кола γ_z , і добуток їх відстаней від центра кола дорівнює радіусу кола.

нде квадрату його радіуса.

Якщо z і z^* симетричні відносно кола $|z - a| = R$, то

$$z^* = z + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{a}}.$$

Крім того, точки z і z^* є симетричними відносно кола γ_z тоді і

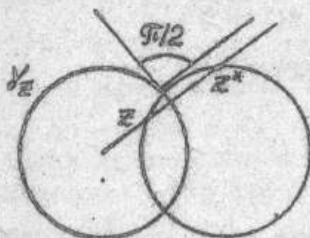


Рис. 3

тільки тоді, коли будь-яке коло, що проходить через ці точки, перетинає γ_z під прямим кутом (рис. 3). Відзначимо, що точкою, симетричною з центром кола γ_z , є нескінченно віддалена точка, а для кожної точки $z \in \gamma_z$ - сама точка z . Симетрія відносно прямої γ_z означає, що точки z і z^* лежать по різні сторони від прямої γ_z на одній

від неї відстані, а з'єднуючий їх відрізок перпендикулярний до γ_z . При цьому $z^* = a + \alpha^2(\bar{z} - \bar{a})$, де $\alpha \in \gamma_z$, $\alpha = \cos \varphi + i \sin \varphi$ відповідає одиничному векторові на прямій γ_z .

4. Нехай D_z і D_w - дві кругові області в широкому розумінні (тобто області, межами яких є кола або прямі) і функція $w = L(z)$ відображає D_z на D_w . Тоді образом межі області D_z є межа області D_w (припущення збереження межі).

5. Виходячи з наведених властивостей, можна довести, що будь-яке дробово-лінійне відображення круга $|z| = r$ на круг $w < R$ визначається формулою

$$w = e^{i\theta} \frac{rR(z - a)}{r^2 - \bar{a}z}, \quad (2.3)$$

де $|a| < r$, бо точка a знаходиться в середині круга $|z| < r$, θ - дійсне число.

Рівність (2.3) має три дійсних параметри. Довільність параметра θ пов'язана з тим, що при повороті на будь-який кут навколо центру круг відображається сам на себе (множення на $e^{i\theta}$ відповідає повороту на кут θ навколо початку координат). Довільність комплексного числа a ($|a| < r$), яке визначається двома дійсними числами $\text{Re } a$ і $\text{Im } a$, означає можливість перетворення

будь - якої заданої точки (яка лежить в середині круга $|z| < r$) в центр круга $w < R$.

Приклади

1. Знайти дробово-лінійну функцію $w = L(z)$, яка відображає дійсну вісь $\text{Im } z = 0$ на одиничне коло $|w| = 1$ так, що $L(-1) = 1$, $L(0) = i$, $L(1) = -1$.

Шукана функція на підставі (2.2) визначається рівнянням

$$\frac{w-1}{w+1} : \frac{-1-1}{-1-1} = \frac{z+1}{2} : \frac{1+1}{1},$$

звідки

$$w = \frac{z-1}{iz-1}. \quad (2.4)$$

При цьому верхня півплощина $\text{Im } z > 0$ відображається або на внутрішність, або на зовнішність кола $w = 1$. Подивимось, якій з цих двох областей належить образ якої-небудь точки верхньої півплощини. Наприклад $z = i$. Образом $z = i$ є точка $w = 0$, яка належить одиничному кругу $|w| = 1$. Отже, функція (2.4) відображає верхню півплощину $\text{Im } z > 0$ на внутрішність одиничного кола $|w| = 1$. Ця ж функція відображає нижню півплощину $\text{Im } z < 0$ на зовнішність одиничного кола $|w| = 1$.

2. Знайти дробово-лінійну функцію $w = L(z)$, яка відображає круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, що $w(\frac{1}{2}) = 0$ і $\arg w'(\frac{1}{2}) = 0$.

На підставі формули (2.3) при $r = 1$, $R = 1$, $\alpha = \frac{1}{2}$ функція

$$w = e^{i\theta} \frac{z - 1/2}{1 - \bar{z}/2} = e^{i\theta} \frac{2z - 1}{2 - \bar{z}}$$

задовольняє умову $w(\frac{1}{2}) = 0$.

Щоб знайти величину θ , використаємо умову $\arg w'(\frac{1}{2}) = 0$.

Маємо

$$w'(\frac{1}{2}) = e^{i\theta} \frac{2}{(2-z)^2}, \quad w'(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3} e^{i\theta}$$

1, отже, $\arg w'(\frac{1}{2}) = \theta = 0$. Тому шукана функція має вигляд

$$w = \frac{2z-1}{2-\bar{z}}.$$

3. Знайти дробово-лінійну функцію, яка відображає круг $|z-2| < 2$ так, що $w(2) = 1$, $\arg w'(2) = \pi/2$ (рис. 4).

Оскільки точка $z = 2$ симетрична точці $z^* = \infty$, точка $z = 2$ за умовою $w(2) = 1$ переходить у точку $w = i$, а дробово-лінійна функція $w = L(z)$ зберігає симетричні точки, то

$$w^4 = w(\infty) = 2i + \frac{4}{1-2i} = -2i, \text{ тобто } w(\infty) = -2i.$$

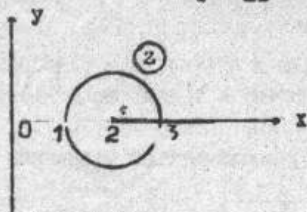


Рис. 4

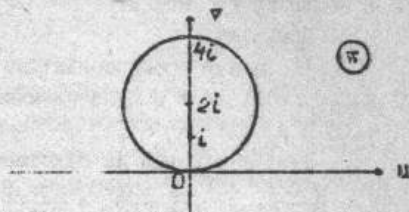


Рис. 5

Проведемо з точки $z = 2$ промінь ($z: \operatorname{Re} z \geq 2, \operatorname{Im} z = 0$). Його образом також є промінь, який виходить з точки $w = 1$ і утворює з додатним напрямом дійсної осі в площині w кут, дорівнює $\pi/2$ (бо за умовою $\arg w'(2) = \pi/2$), а саме промінь ($w: \operatorname{Re} w = 0, \operatorname{Im} w \geq 1$) (рис. 5), тобто $v(3) = 4i$. Крім того, $w(2) = 1, w(\infty) = -2i$. Отже, шукана функція $w = L(z)$ визначається рівнянням

$$\frac{w-1}{w+2i} : \frac{4i-1}{4i+2i} = \frac{z-2}{1} : \frac{3-2}{1}$$

звідси

$$w = 2i \frac{z-1}{4-z}.$$

2.2. Степенева функція і радикал

Функція $w = z^n$, $z \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ ($n > 1$) відображає розширену z -площину $\mathbb{C}$ на розширену w -площину $\mathbb{C}$, причому кожна точка $w \neq \infty$ має рівно n різних прообразів, які визначаються за формулою

$$\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{|w|} \left(\cos \frac{\arg w + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg w + 2k\pi}{n} \right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

Разом з тим функція $w = z^n$ ($n > 1$) відображає взаємно-однозначно і конформно внутрішність будь-якого кута з вершиною в точці $z = 0$ і розкилу α ($0 < \alpha \leq 2\pi/n$) на внутрішність кута з вершиною в точці $z = 0$ і розкилу $n\alpha$. Зокрема, при $\alpha = 2\pi/n$, $\varphi_0 < \varphi < \varphi_0 + 2\pi/n$ ($\varphi = \arg z$) функція $w = z^n$ відображає на w -площину з розрізом вздовж променя $\arg w = n\varphi_0 + 2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$). Тому до степеневих функцій $w = z^n$ звертається кожний

раз, коли треба відобразити кут з прямолінійними сторонами на інший кут з прямолінійними сторонами розхилом, в n раз більшим за перший.

Приклад. Відобразимо взаємно-однозначно і конформно внутрішність кута $D_z: -\pi/4 < \arg z < \pi/4$ на верхню півплощину $D_w: \operatorname{Im} w > 0$. Оскільки D_z - кут розхилу $\pi/2$, а півплощина - кут розхилу π , то, застосовуючи відображення $w_1 = z^2$, переводимо D_z в півплощину $D_{w_1}: -\pi/2 < \arg w_1 < \pi/2$. Поворотом D_{w_1} на кут $\pi/2$ у додатному напрямі, тобто вважаючи $w = iw_1$, відобразимо D_{w_1} на півплощину $D_w: \operatorname{Im} w > 0$. Отже, шукане відображення $w = iz^2$. Зауважимо, що воно не єдине. Якщо, наприклад, $\tilde{w} = L(w)$ - довільна дробово-лінійна функція, яка відображає верхню півплощину $\operatorname{Im} w > 0$, то $\tilde{w} = L(iz^2)$ також є розв'язком задачі.

Функція $\sqrt[n]{z}$ (радикал), яка є оберненою відносно степеневій функції, багатозначна і має рівно n різних однозначних аналітичних віток у деякій області D . Для виділення таких віток діють таким чином. У w -площині від початку координат проведемо n прямолінійних променів $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-1}$, кожен з яких утворює з сусіднім променем кут $2\pi/n$. Нехай $G_k (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ - область, обмежена променями γ_k і γ_{k+1} , а G_{n-1} - область, обмежена променями γ_{n-1} і γ_0 (рис. 6). Тоді відображення $w = z^n$ кожен промінь $\gamma_k (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ пере-

водить у деякий промінь Γ , який проходить через точки $z = 0$ і $z = \infty$. Нехай D_z - площина з розрізом вздовж променя Γ . В цій області D багатозначна функція $w = \sqrt[n]{z}$ допускає виділення однозначних віток. Нехай $w = (\sqrt[n]{z})_k, z \in D$ для кожного $k (k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ - така однозначна функція, що належить області G_k .

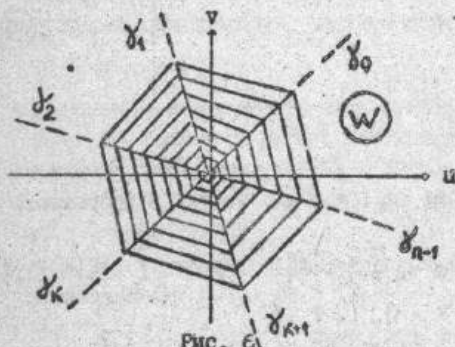


Рис. 6

для будь-якого $z \in D$ значення $(\sqrt[n]{z})_k$ належить області G_k .

Тоді функція $w = (\sqrt[n]{z})_k$, $z \in D_k$ взаємно-однозначно і конформно відображає область D z -площини на область G_k w -площини.

Для виділення однозначної неперервної вітки достатньо вказати значення $\sqrt[n]{z}$ в якій-небудь точці $z_0 \in D$.

Область D і вітки функції $w = \sqrt[n]{z}$, $z \in D$ істотно залежать від областей, в яких функція $z = w^n$ є однолистою. Наприклад, візьмемо як промінь γ_k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$)-промінь w -площини, нахилений до дійсної осі під кутом $(\pi + 2k\pi)/n$. Тоді область D буде площиною з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі Ox . Отримаємо такі однозначні аналітичні вітки многозначної функції $w = \sqrt[n]{z}$, $z \in D$:

$$(\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2k\pi}{n} \right) \\ (k = 0, 1, 2, \dots, n-1).$$

До функції $w = \sqrt[n]{z}$ звертаються кожний раз, коли треба відобразити кут з прямолінійними сторонами α на інший кут з прямолінійними сторонами β розхилом, в n раз меншим за перший.

Приклади

1. В z -площині з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі (область D) виділимо вітку $\sqrt[3]{z}$, яка в точці $z_0 = 1$ прий-

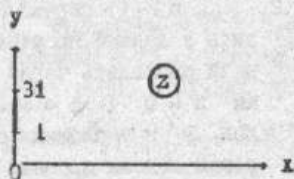


Рис. 7

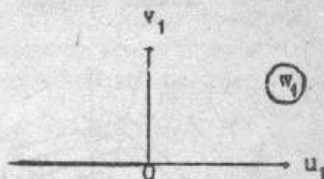


Рис. 8

має значення $w_0 = 1$. Області G_0, G_1, G_2 , на які відображають D різні вітки функції:

$$G_k: w = |w| (\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad -\frac{\pi}{3} + \frac{2k\pi}{3} < \varphi < -\frac{\pi}{3} + \frac{2(k+1)\pi}{3} \\ (k = 0, 1, 2).$$

Очевидно, що $w_0 \in G_0$ і відповідна вітка $\sqrt[3]{z} \in (\sqrt[3]{z})_0$:

$$(\sqrt[3]{z})_0 = \sqrt[3]{|z|} \left[\cos \frac{\arg z}{3} + i \sin \frac{\arg z}{3} \right].$$

Ця вітка відображає D взаємно-однозначно і конформно на область g_0 : $-\pi/3 < \varphi < \pi/3$.

2. Відобразити на верхню півплощину $\text{Im } w > 0$ усю z -площину з розрізом вздовж прямолінійного відрізка, який з'єднує точку $z = 1$ з точкою $z = 3i$ (рис. 7).

Дробово-лінійна функція

$$w_1 = \frac{z - 1}{z - 3i} \quad (2.5)$$

відображає кінці розрізу $z = 1$, $z = 3i$ відповідно в точки $w_1 = 0$

та $w_1 = \infty$, отже, задану область на w_1 -площину з розрізом вздовж деякого променя, який виходить з початку координат. Для того, щоб з'ясувати напрям цього променя, достатньо знайти на ньому хоча б

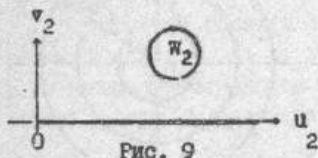


Рис. 9

одну проміжну точку. Точці $z = 2i$ розрізу в z -площині відповідає точка $z_1 = (2i - 1)/(2i - 3i) = -1$ w_1 -площини. Отже, функція (2.5) відображає дану область на w_1 -площину з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі Ou_1 (рис. 8). Проводячи за допомогою функції

$$w_2 = e^{i\pi} w_1 = -w_1 \quad (2.6)$$

поворот на кут π , відобразимо дану область на площину з розрізом вздовж додатної частини дійсної осі Ou_2 (рис. 9). Функція

$$w = \sqrt{\frac{z}{w_2}} \quad (2.7)$$

(точніше, одна з віток цієї функції) відображає w_2 -площину з розрізом вздовж додатної частини дійсної осі Ou_2 на верхню півплощину. Об'єднуючи (2.5) - (2.7), отримаємо

$$w = \sqrt{\frac{1 - z}{z - 3i}}.$$

Це, природно, тільки одна з функцій, яка здійснює шукане відображення.

2.3. Показникова функція і логарифм

Відображення, яке здійснюється показниковою функцією

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y), \quad (2.8)$$

є конформним в усіх площині, оскільки похідна цієї функції відмінна від нуля в кожній скінченній точці z -площини.

Прямі $x = c$, паралельні уявній осі z -площини, переходять при відображенні (2.8) в кола $\rho = e^c$ з центром у початку координат w -площини (рис. 10).

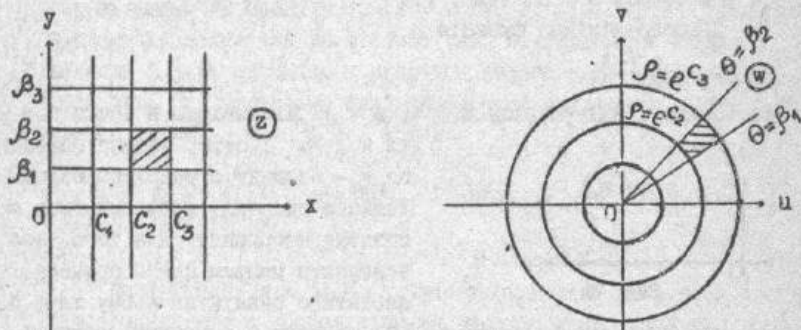


Рис. 10

Зокрема, дійсна вісь $x = 0$ z -площини переходить в одиничне коло $|w| = 1$. Прямі $y = \beta$, паралельні дійсній осі z -площини, переходять при відображенні (2.8) в промені $\theta = \beta$, які виходять з початку координат w -площини (рис. 10). Дійсна вісь $y = 0$ z -площини відображається на промінь $\theta = 0$, тобто на дійсну додатну піввісь w -площини. Отже, горизонтальна смуга $0 < y < \alpha$ ($\alpha < 2\pi$) шириною α відображається взаємно-однозначно і конформно на кут $0 < \theta < \alpha$ з вершиною на початку координат (рис. 11).

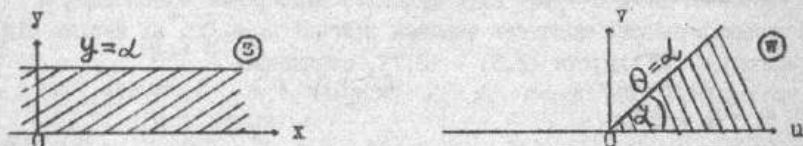


Рис. 11

Смуга $0 < y < \pi$ відображається функцією $w = e^z$ на півплощину $\text{Im } z > 0$, а смуга $0 < y < 2\pi$ - на всю w -площину з розрі-

зом ведовж додатної дійсної півосі. Відображення (2.8) усієї z -площини на w -площину є взаємно-однозначним: будь-якій точці $w \neq 0, \infty$ відповідає нескінченна множина точок

$$z = \ln w = \ln|w| + i \arg w + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Показникова функція (2.8) взаємно-однозначно і конформно відображає будь-яку смугу шириною h ($0 < h < 2\pi$), паралельну дійсній осі Ox на кут розхилу h з вершиною на початку координат.

Функція $w = \ln z$, обернена до функції $z = e^w$, визначається для кожного z , відмінного від 0 та ∞ , за допомогою формули $w = \ln z = \ln|z| + i \arg z + 2k\pi i$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$).

Враховуючи області однолистості функції $z = e^w$, однозначні вітки функції $w = \ln z$, $z \neq 0$ виділяють, наприклад, таким чином: у w -площині розглядають нескінченну кількість смуг g_k , межа кожної з яких складається з прямих, паралельних дійсній осі Ou

$$g_k: \alpha + 2k\pi < v < \alpha + (2k + 2)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Тоді функція $z = e^w$, $w \in g_k$ взаємно-однозначно відображає область g_k на область D - z -площину з викинутим променем, який виходить з початку координат під кутом α до дійсної осі Ox . Тому в цій області D отримуємо нескінченну множину однозначних віток функції $\ln z$, $z \in D$. При цьому вітка $w = (\ln z)_k$, $z \in D$ цілком характеризується тим, що для кожного $z \in D$ значення $(\ln z)_k$ належить області g_k . Іншими словами,

$$(\ln z)_k = \ln|z| + i(\arg z)_k + 2k\pi i \quad (\forall z \in D),$$

де значення $(\arg z)_k$ вибирається з урахуванням нерівності

$$\alpha + 2k\pi < (\arg z)_k < \alpha + (2k + 2)\pi.$$

Кожна з отриманих однозначних віток взаємно-однозначно і конформно відображає область D на відповідні області g_k .

Часто розглядають однозначні вітки многозначної функції $w = \ln z$, $z \in D$, якщо $\alpha = -\pi$. Тоді в z -площині з розрізом від'ємної частини дійсної осі Ox вітка $w = (\ln z)_k$, $z \in D$ визначається формулою

$$(\ln z)_k = \ln z + 2k\pi i \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Зокрема, $(\ln z)_0 = \ln z$ (головне значення логарифма). Функція

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z, \quad z \neq 0$$

відображає взаємно-однозначно і конформно z -площину з розрізом вздовж від'ємної частини дійсної осі Ox на горизонтальну смугу $-\pi < \operatorname{Im} w < \pi$.

Приклади. Відобразити вертикальну смугу $0 \leq \operatorname{Re} z \leq \pi/3$ в одиничний круг $|w| \leq 1$.

Переведемо вертикальну смугу в горизонтальну. Для цього повернемо її на кут $\pi/2$: $w_1 = e^{i\pi/2} z = iz$.

В площині w_1 отримаємо горизонтальну смугу $0 \leq \operatorname{Im} w_1 \leq \pi/3$. Розширимо її в три рази: $w_2 = 3w_1 = 3iz$. Горизонтальну смугу шириною π відобразимо на верхню півплощину за допомогою функції $w_3 = e^{w_2} = e^{3iz}$. Далі цю півплощину відобразимо за допомогою дробово-лінійної функції на круг $|w| \leq 1$. Одне з таких відображень набуде вигляду

$$w = \frac{1 - w_3}{w_3 + 1} = \frac{1 - e^{3iz}}{1 + e^{3iz}}.$$

2. Відобразити область D (рис. 12) на верхню півплощину.

Розглянемо відображення $w_1 = 1/z$, яке точку $z = 0$ переводить у точку $w = \infty$. Образ області D зображено на рис. 13 (перевірте самостійно).

Далі лінійним відображенням $w_2 = 4\pi w_1$ отримаємо смугу потрібної ширини π . Після цього відображенням $w = e^{w_2}$ переведемо дану

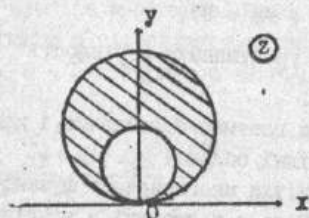


Рис. 12

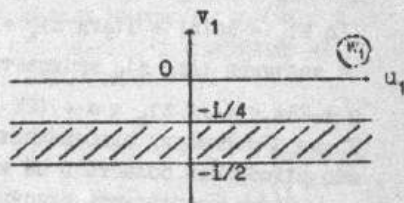


Рис. 13

область у верхню півплощину. Отже, шукане відображення має вигляд $w = e^{4\pi/z}$.

3. Знайти образ області D : $0 < \operatorname{Re} z < \pi/4$ при відображенні функцією $w = \operatorname{ctg} z$.

Відповідно означенню функції $w = \operatorname{ctg} z$ маємо

$\operatorname{ctg} z = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{-2iz} - 1}$. Тому ш. ане відображення наведем у вигляді

більш простих: $w_1 = iz$, $w_2 = e^{w_1}$, $w_3 = w_2^2$, $w = i \frac{w_3 + 1}{w_3 - 1}$.

Відображення $w_1 = iz$ переводить смугу $0 < \operatorname{Re} z < \pi/4$ у смугу $0 < \operatorname{Im} w_1 < \pi/4$. Остання смуга функцією $w_2 = e^{w_1}$ відображається в кут $0 < \arg w_2 < \pi/4$, який за допомогою відображення $w_3 = w_2^2$ згортається у кут $0 < \arg w_3 < \pi/2$. w_3 - площини.

Застосуємо дробово-лінійне перетворення $w = i \frac{w_3 + 1}{w_3 - 1}$ до області $0 < \arg w_3 < \pi/2$. Тоді промінь $\arg w_3 = 0$, $\operatorname{Re} w_3 > 0$ відображається в два промені: $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w < -1$ і $\operatorname{Re} w = 0$, $\operatorname{Im} w > 1$. Образом півпрямой $\arg w_3 = \pi/2$, $\operatorname{Im} w_3 > 0$ є півколо $|w| = 1$, $\operatorname{Re} w > 0$. Тому функція $w = \operatorname{ctg} z$ відображає область D на множини $\{w: |w| > 1, \operatorname{Re} w > 0\}$.

2.4. Функція Жуковського

Функція Жуковського $w = (z + 1/z)/2$, $z \neq 0$ є аналітичною, причому для всіх $z \neq 0$ $w'(z) = (1 - 1/z^2)/2$. Тому в кожній точці $z \neq \pm 1$ відображення за допомогою цієї функції є конформним. Областями однолистості функції Жуковського є ті області, які не містять двох точок z_1, z_2 , зв'язаних нерівністю $z_1 z_2 = 1$. Такими областями однолистості є внутрішність одиничного круга $|z| < 1$ або його зовнішність.

Функція Жуковського переводить кола $|z| = r$ в еліпси

$$\frac{u^2}{[(r + 1/r)/2]^2} + \frac{v^2}{[(r - 1/r)/2]^2} = 1, \quad r \neq 1, \quad (2.9)$$

а промені $\arg z = \varphi$ ($\varphi \neq \pi/2$) - в гіперболи

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1. \quad (2.10)$$

Відрізки променів $\arg z = 0$ ($0 < r \leq 1$), $\arg z = \pi/2$ ($0 < r \leq 1$), $\arg z = \pi$ ($0 < r \leq 1$) і $\arg z = 3\pi/2$ ($0 < r \leq 1$), переходять відповідно в проміжки $(1, +\infty)$, $(-\infty, -1)$, $(-\infty, -1)$, $(1, +\infty)$. Будь-який еліпс (2.9) перетинається з будь-якою гіперболою (2.10) під прямим кутом.

Функція Жуковського відображає взаємно-однозначно як внутрішність

рішність, так і зовнішність одиничного круга $|z| < 1$ на зовнішність відрізка $[-1, 1]$ z -площини.

Приклад. Функція Жуковського конформно відображає:

а) область $D_z = \{z: \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$ на область $D_w = \{w: \operatorname{Im} w > 0\}$;

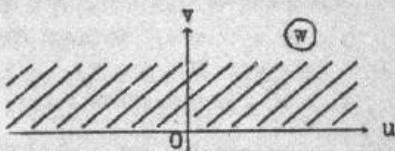
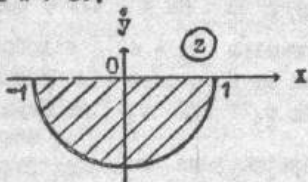


Рис. 14

б) область $D_z = \{z: \operatorname{Im} z < 0, |z| < 1\}$ на область $D_w = \{w: \operatorname{Im} w > 0\}$ (рис. 14);

в) область $D_z = \{z: |z| > \rho > 1\}$ на зовнішність еліпса (рис. 15);

г) область $D_z = \{z: \alpha < \arg z < \pi - \alpha, 0 < \alpha < \pi/2\}$ на зовнішність гіперболи (рис. 16).

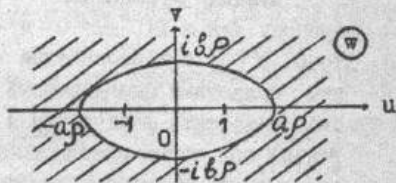
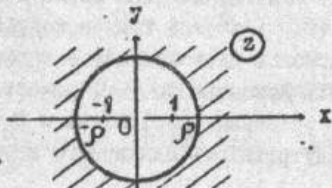


Рис. 15

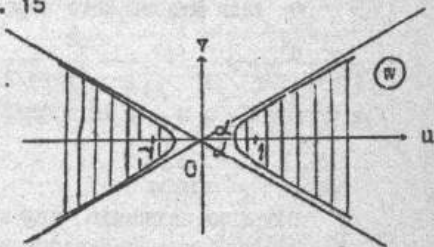
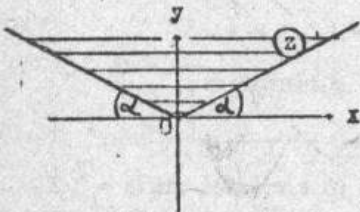


Рис. 16

Вправи для аудиторних та домашніх завдань

1. Знайти цілу лінійну функцію, яка відображає півкруг

$D_2: |z - 1| < 1/2, \operatorname{Re} z > 0$ на півкруг $D_w: |w - 2| < 1, \operatorname{Im} w > 0$.

2. Знайти образ трикутника з вершинами в точках $z_1 = 0, z_2 = 1, z_3 = i$ при відображенні $w = -z + i$.

3. Знайти всі дробово-лінійні функції, які відображають:

а) півплощину $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w - w_0| < R$;

б) круг $|z - z_0| < r$ на круг $|w - w_0| < R$.

4. Знайти таке відображення верхньої півплощини $\operatorname{Im} z > 0$ на круг $|w| < r$, що $w(i) = 0, w'(i) = 1$.

5. Відобразити круг $|z| < 2$ на півплощину $\operatorname{Re} w > 0$ так, щоб $w(0) = 1, \arg w'(0) = \pi/2$.

6. Відобразити круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$ так, щоб $w(0) = 0, \arg w'(0) = \pi/2$.

7. Знайти дробово-лінійне відображення, яке перетворює:

а) уявну вісь $\operatorname{Re} z > 0$ в коло $|w| = 1$;

б) пряму $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$ в коло $|w - 1| = 1$;

в) коло $|w| = 1$ в пряму $\operatorname{Re} w = 1$.

8. Знайти образи вказаних областей при дробово-лінійних відображеннях:

а) круга $|z| < 1$ при $w = \frac{z - 1}{z + 1}$;

б) квадранта $x > 0, y > 0$ при $w = \frac{1}{z}$;

в) зовнішності круга $|z| > 1$ при $w = \frac{z + 1}{z - 1}$;

г) смуги $0 < \operatorname{Re} z < 1$ при $w = \frac{1}{z}$;

д) півплощини $\operatorname{Im} z > 1$ при $w = \frac{z - 1}{z}$;

е) кута $0 < \arg z < \pi/4$ при $w = \frac{1}{z}$;

є) кільця $1 < |z| < 2$ при $w = \frac{z + 1}{z + 2}$.

9. Знайти точки, симетричні точці $1 + i$ відносно ліній:

а) $y = 0$; б) $x = 0$; в) $|z| = 1$; г) $|z| = \sqrt{2}$; д) $|z| = 2$;

е) $|z - 1 - i| = 2$.

10. Знайти дробово-лінійну функцію, яка переводить круг $|z| < 1$ у верхню півплощину $\operatorname{Im} w > 0$ так, що $w(0) = 1, w(1) = 0$.

11. Знайти дробово-лінійну функцію, яка переводить круг $|z| < 1$ в круг $|w| < 1$ так, що $w(1/2) = 0, w(1) = 1$.

12. Знайти образ області $D_z: |z - 1| = 2$ при $w = z^2$.

13. Знайти функцію $w = f(z)$, яка взаємно-однозначно і

конформно відображає внутрішність області D_z в z -площині на область D_w в w -площині (така функція не є єдиною):

- а) $D_z : x > 0, y > 0$; $D_w : \operatorname{Im} w > 0$;
- б) $D_z : x > 0, y > 0$; $D_w : |\arg w| < \pi$;
- в) $D_z : x > 0, y > 0$; $D_w : \operatorname{Re} w > 1$;
- г) $D_z : -\pi/6 < \arg(z-1) < \pi/3$; $D_w : \operatorname{Im} w > 0$;
- д) $D_z : \pi/4 < \arg(z-1) < 3\pi/4$; $D_w : \operatorname{Im} w > 0$;
- е) $D_z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$; $D_w : \operatorname{Im} w < 0$;
- є) $D_z : |z| < 1, |z-1| < 1$; $D_w : |\arg w| < \pi$.

14. Знайти образ верхньої півплощини при відображенні тієї ж віткою $\sqrt[3]{z}$, яка точку $z = i$ переводить у точку $w = -\sqrt[3]{3/2} + i/2$.

15. Відобразити взаємно-однозначно і конформно на квадрат $u > 0, v > 0$ в w -площині такі області в z -площині:

- а) $x > 0$; б) $y < 1$; в) $0 < \arg z < \pi/3$; г) $|z| < 1$.

16. Знайти образи множини D_z при відображенні $w = e^z$:

- а) $0 < \operatorname{Im} z < \pi$; б) $0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2$;
- в) $\operatorname{Re} z > 0, -\pi < \operatorname{Im} z < \pi$.

17. Півсмугу $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi, \operatorname{Re} z \geq 0$ відобразити в півкруг $|w| \leq 1, \operatorname{Im} w \geq 0$.

18. Півсмугу $0 < \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z > 0$ відобразити в півкруг $|w| < 1, \operatorname{Im} w > 0$.

19. Знайти образ області $D_z : 0 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ при $w = \sin z$.

20. В яку область перетворює функція

- а) $w = \operatorname{tg} z$ смугу $-\pi/4 < \operatorname{Re} z < \pi/4$,
- б) $w = z + e^z$ смугу $-\pi < \operatorname{Im} z < \pi$?

21. Знайти образ площини з розрізом вздовж додатної частини дійсної осі Ox при відображенні однозначною тут віткою логарифма у випадках, коли:

- а) $z = i$ переходить у $w = 5\pi i/2$;
- б) $z = -i$ переходить у $w = \pi i$;
- в) $z = -1$ переходить у $w = -\pi i/2$;
- г) $z = -1/2 - i\sqrt{3}/2$ переходить у $w = 10\pi i/3$.

22. Відобразити взаємно-однозначно і конформно задані області в z -площині на області в w -площині:

- а) площину z з розрізом вздовж додатної частини дійсної осі на

жугу $|v| < 1$;

б) півплощину $y > 0$ на смугу $0 < v < 2\pi$;

в) круг $|z| < 1$ на смугу $0 < v < \pi$.

Завдання для індивідуальної роботи

Відобразити конформно область на область:

1. $D_z: |z - 1| < 1$; $D_w: \operatorname{Re} w > 0$.
2. $D_z: |z| < 2$, $\operatorname{Im} z > 0$; $D_w: 0 < \arg w < \pi/2$.
3. $D_z: \operatorname{Re} z < 0$; $D_w: |w - i| > 2$.
4. $D_z: \operatorname{Im} z > \operatorname{Re} z$; $D_w: |w - 1 - i| < 1$.
5. $D_z: 0 < \operatorname{Re} z < \pi/2$; $D_w: \operatorname{Im} w < 0$.
6. $D_z: \operatorname{Re} z < 1$; $D_w: -\pi/2 < \operatorname{Im} w < \pi/2$.
7. $D_z: |z| < 1$, $0 < \arg z < \pi/2$; $D_w: 0 < \operatorname{Im} w < \pi$, $\operatorname{Re} w > 0$.
8. $D_z: \operatorname{Im} z > 0$, $0 < \operatorname{Re} z < \pi/2$; $D_w: |w| > 1$, $0 < \arg w < \pi/4$.
9. $D_z: \operatorname{Re} z > 0$; $D_w: |w| < 1$, $\operatorname{Im} w > 0$.
10. $D_z: |z| > 2$, $\operatorname{Re} z < 0$; $D_w: \operatorname{Im} w < 0$.
11. $D_z: 0 < \operatorname{Im} z < \pi$; $D_w: |w - i| < 1$.
12. $D_z: |z - 1| > 1$; $D_w: 1 < \operatorname{Re} w < 2$.
13. $D_z: 0 < \operatorname{Re} z < \pi$; $D_w: 0 < \operatorname{Re} w < \pi$, $\operatorname{Im} w > 0$.
14. $D_z: 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2$, $\operatorname{Re} z < 0$; $D_w: -\pi/2 < \operatorname{Im} w < \pi/2$.
15. $D_z: |z - 1| < 1$; $D_w: |w| < 2$, $\operatorname{Re} w > 0$.
16. $D_z: |z| > 1$, $\operatorname{Im} z > 0$; $D_w: |w - i| < 1$.
17. $D_z: |z - 2i| > 1$; $D_w: 0 < \operatorname{Re} w < \pi$, $\operatorname{Im} w > 0$.
18. $D_z: 0 < \operatorname{Im} z < \pi/2$, $\operatorname{Re} z < 0$; $D_w: |w + 1| > 2$.
19. $D_z: |z| < 2$, $|z - 1| > 1$; $D_w: 0 < \operatorname{Im} w < \pi$.
20. $D_z: 0 < \operatorname{Re} z < \pi/2$; $D_w: |w| < 3$, $|w - 2| > 1$.
21. $D_z: |z| < 1$; $D_w: |w - 1| < 2$, $|w| > 1$.
22. $D_z: |z - 2| < 2$, $|z - 1| > 1$; $D_w: |w| > 2$.
23. $D_z: |z| < 1$, $\operatorname{Re} z > 0$; $D_w: |w - i| < 2$, $|w| > 1$.

$$24. D_z: |z - 2| < 2, |z - 3| > 1; D_w: |w| < 2, \operatorname{Im} w > 0.$$

$$25. D_z: |z| < 4, |z - 2| > 2; D_w: 0 < \arg w < \pi/3.$$

$$26. D_z: \pi/6 < \arg z < \pi/3; D_w: |w| < 2, |w + 1| > 1.$$

$$27. D_z: |z| < 2, |z - 1| > 1, \operatorname{Im} z > 0; D_w: 0 < \operatorname{Im} w < 1, \operatorname{Re} w < 0.$$

$$28. D_z: 0 < \operatorname{Re} z < 2, \operatorname{Im} z > 0; D_w: |w| < 4, |w - 2| > 2, \operatorname{Im} w < 0.$$

$$29. D_z: |z| < 4, |z - 2| > 2; D_w: |w| < 2, |w - 1| > 1, \operatorname{Im} w > 0.$$

$$30. D_z: |z| < 2, |z + 1| > 1, \operatorname{Re} z > 0; D_w: |w| < 4, |w - 2i| > 2.$$

3. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ТЕОРІЯ ЛИШКІВ

3.1. Зведення до криволінійних інтегралів по координатах. Формула Ньютона-Лейбніца. Теорема Коші. Інтегральна формула Коші

Нехай однозначна функція $w = f(z)$ неперервна в області G , а C - кусково-гладка крива в G ; $z = x + iy$, $f(z) = u + iv$, де $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ - дійсні функції змінних x і y . Обчислення інтеграла від функції $w = f(x, y)$ комплексної змінної z зводиться до обчислення криволінійних інтегралів по координатах:

$$\int_C f(z) dz = \int_C u dx - v dy + i \int_C v dx + u dy. \quad (3.1)$$

Якщо крива C є гладкою і $x = x(t)$, $y = y(t)$ - її параметричні рівняння, а початкова та кінцева точки C відповідають значенням $t = \alpha$ і $t = \beta$, то

$$\int_C f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt. \quad (3.2)$$

де $z(t) = x(t) + iy(t)$.

Якщо $w = f(z)$ - аналітична функція в однозв'язній області G , то інтеграл не залежить від шляху інтегрування, а належить лише від початкової z_1 та кінцевої z_2 точок. У цьому випадку для

обчислення інтеграла використовується формула Ньютона-Лейбніца

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \Phi(z_2) - \Phi(z_1). \quad (3.3)$$

де $\Phi(z)$ — яка-небудь первісна для функції $f(z)$, тобто $\Phi'(z) = f(z)$ в області G .

Якщо функція $w = f(z)$ є аналітичною в області D , обмеженій кусково-гладким замкненим контуром C , і на самому контурі C , то

$$\oint_C f(z) dz = 0 \quad (\text{теорема Коші}). \quad (3.4)$$

(С)

Якщо функція $w = f(z)$ — однозначна і аналітична в області G , а C замкнена крива, яка належить G разом із своєю внутрішністю D , то для довільної точки $z_0 \in D$ справедлива формула

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{z - z_0} \quad (\text{інтегральна формула Коші}). \quad (3.5)$$

Приклади.

1. Обчислити інтеграл $\oint_C z \operatorname{Im} z^2 dz$.

$$|z| = 2$$

Оскільки для функції $f(z) = z \operatorname{Im} z^2$ маємо $u(x, y) = 2x^2y$, $v(x, y) = xy^2$, то на підставі формули (3.1) одержимо ($C = |z| = 2$)

$$\oint_{|z|=2} z \operatorname{Im} z^2 dz = \int_{x^2+y^2=4} 2x^2y dx - 2xy^2 dy + \int_{x^2+y^2=4} 2xy^2 dx + 2x^2y dy.$$

Рівняння контуру інтегрування (коло $|z| = 2$) запишемо у параметричній формі:

$$x = 2 \cos t, \quad y = 2 \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Обчислюючи криволінійні інтеграли відомим (із курсу математичного аналізу) способом, дістанемо

$$\oint_{|z|=2} z \operatorname{Im} z^2 dz = 32 \int_0^{2\pi} [-\cos^3 t \sin t - \cos t \sin^3 t] dt = -16\pi.$$

2. Обчислити інтеграл $I = \oint_C \bar{z} dz$ вздовж таких шляхів, які

з'єднують точки $z_1 = 0$ і $z_2 = 1 + i$:

а) вздовж прямої;

б) вздовж параболи $y = x^2$;

в) вздовж параболи $y = \sqrt{x}$;

г) виводом ламаної, яка сполучає точки z_1, z_2, z_3 , де $z_3 = i$.

Рівняння контуру інтегрування в кожному випадку можна за-

писати так:

а) $z = (1 + i)x, 0 \leq x \leq 1;$

б) $z = x + ix^2, 0 \leq x \leq 1;$

в) $z = y^2 + iy, 0 \leq y \leq 1;$

г) $z = iy, 0 \leq y \leq 1$ і $z = x + i, 0 \leq x \leq 1.$

Тому дістанемо:

а) $I = \int_0^1 (1 - i)x(1 + i)dx = 1;$

б) $I = \int_0^1 (x - ix^2)(1 + 2ix)dx = 1 + i/3;$

в) $I = \int_0^1 (y^2 - iy)(2y - i)dy = -1;$

г) $I = \int_0^1 (-iy)idy + \int_0^1 (x - i)dx = 1 - i.$

3. Обчислити інтеграл $\int_0^1 ze^{z^2} dz.$

Оскільки функція $f(z) = ze^{z^2}$ є аналітичною в $\mathbb{C}$ і однією із первісних для неї є $\Phi(z) = \frac{1}{2} e^{z^2}$, то для обчислення даного інтеграла можна використувати формулу Ньютона - Лейбніца (3.3):

$$\int_{-1}^1 ze^{z^2} dz = \left. \frac{1}{2} e^{z^2} \right|_{-1}^1 = 0.$$

4. Знайти $\int_0^1 (z - i)e^{-z} dz.$

Якщо функції $f(z)$ і $\varphi(z)$ є аналітичними в однозв'язній області G , а z_1 і z_2 - довільні точки цієї області, то справедлива формула інтегрування частинами:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\varphi'(z)dz = \left[f(z)\varphi(z) \right]_{z_1}^{z_2} - \int_{z_1}^{z_2} f'(z)\varphi(z)dz. \quad (3.6)$$

Використаємо формулу (3.6):

$$\int_0^1 (z-1)e^{-z} dz = -(z-1)e^{-z} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-z} dz = -1 - e^{-z} \Big|_0^1 = 1 - \cos 1 + i(\sin 1 - 1).$$

5. Обчислити $\oint_{|z+2|=1} \frac{e^z dz}{z}$.

Функція $f(z) = e^z/z$ аналітична на колі $|z+2| = 1$ в середині нього. Тоді даний інтеграл за теоремою Коші (3.4) дорівнює нулю.

6. Обчислити $\oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z}$.

Функція $f(z) = e^z$ аналітична в області $G = \mathbb{C}$. Контур $|z|=1$ належить разом із своєю внутрішністю $D: |z| < 1$, а точка $z_0 = 0 \in D$. Відповідно до інтегральної формули Коші (3.5) одержимо:

$$f(0) = 1 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{f(z) dz}{z-0} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z}. \text{ звідки } \oint_{|z|=1} \frac{e^z dz}{z} = 2\pi i.$$

7. Обчислити $\oint_{(C)} \frac{dz}{z^2 + 1}$, де $C: |z-1| = 1$. Для цього

візьмемо $f(z) = \frac{1}{z+1}$. Тоді $f(z)$ аналітична в області $G: \mathbb{C} \setminus (-1, -\infty)$, контур C разом із своєю внутрішністю $D: |z-1| < 1$ належать G , а точка $z = 1 \in D$. Згідно з формулою (3.5) одержимо

$$f(1) = \frac{1}{2} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{f(z) dz}{z-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(C)} \frac{dz}{(z-1)(z+1)},$$

тобто

$$\oint_{(C)} \frac{dz}{z^2 + 1} = 2\pi i \frac{1}{2i} = \pi.$$

Вправи для аудиторних та домашніх завдань

I. Обчислити інтеграли:

1) $\oint_{|z|=1} z \bar{z} dz$; 2) $\oint_{|z|=2} z \operatorname{Re} z^2 dz$; 3) $\oint_{|z-1|=1} \ln z dz$; 4) $\oint_{|z|=1} |z|^2 dz$;

$$5) \oint_{|z|=1} (z+1)e^z dz; \quad 6) \int_{\Gamma_1} \bar{z} dz; \quad 7) \int_0^{1+i\pi} ze^{-z} dz; \quad 8) \int_{\pi/2}^{\pi/2+i} \sin z dz;$$

$$9) \oint_{(ABC)} |z| dz, \text{ (ABC)-ламана } z_A = 0; z_B = -1 + i; z_C = 1 + i;$$

$$10) \oint_{(C)} (z/\bar{z}) dz, \text{ C - межа області D: } 1 < |z| < 2, \operatorname{Re} z > 0;$$

$$11) \int_{-1}^1 \frac{dz}{z} \text{ вздовж дуги параболу } y^2 = x + 1;$$

$$12) \int_{(AB)} (12z^5 + 4z^3 + 1) dz, \text{ (AB) - відрізок, } z_A = 1, z_B = i.$$

II. Використовуючи інтегральну формулу Коші, знайти:

$$1) \oint \frac{dz}{z(z^2+1)}; \quad 2) \int_{|z|=2} \frac{e^z dz}{z^2-1}; \quad 3) \oint_{|z|=4} \frac{\cos z dz}{z^2-\pi^2}; \quad 4) \oint_{|z-i|=1} \frac{\cos z dz}{(z-1)^3};$$

$$5) \oint_{|z-1|=1.5} \frac{e^z dz}{z(1-z)^3}; \quad 6) \oint_{|z+1|=2} \frac{\sin z dz}{z+1}.$$

Вправи для індивідуальної роботи

Знайти інтеграл від функції комплексної змінної вздовж даної кривої:

$$1. \int_{(C)} (z+2)e^{-z} dz; \text{ L: } |z|=1, \operatorname{Re} z \geq 0.$$

$$2. \int_{(AB)} \bar{z}^2 dz; \text{ (AB): } y = x^2, z_A = 0, z_B = 1+i.$$

$$3. \int_{(AB)} (z^2 + 1) dz; \text{ (AB): відрізок прямої, } z_A = 1, z_B = 1-i.$$

$$4. \int_{(ABC)} \operatorname{Re}(\bar{z}/z) dz; \text{ (AB): } |z|=1, \operatorname{Im} z \geq 0, \text{ BC - відрізок } z_A = 1,$$

$$z_B = 2.$$

$$5. \int_{(ABC)} (z^2 + \cos z) dz; \text{ (ABC) - ламана, } z_A = 0, z_B = 1, z_C = i.$$

$$6. \int (\operatorname{ch} z + \sin(iz)) dz ; (ABC) - \text{лімана}, z_A = 0, z_B = -1, z_C = i. \\ (ABC)$$

$$7. \int |z| \bar{z}^2 dz ; C : |z| = 4, \operatorname{Re} z \geq 0. \\ (C)$$

$$8. \int (\operatorname{ch} z + z) dz ; C : |z| = 1, \operatorname{Im} z \leq 0. \\ (C)$$

$$9. \int |z| \operatorname{Re} z^2 dz ; C : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0. \\ (C)$$

$$10. \int (3z^2 + 2z) dz ; (AB) : y = x^2, z_A = 0, z_B = 1 + i. \\ (AB)$$

$$11. \int z \operatorname{Re} z^2 dz ; C : |z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0. \\ (C)$$

$$12. \int (z^2 + 1) dz ; (ABC) - \text{лімана}, z_A = 0, z_B = 1 + i, z_C = i. \\ (ABC)$$

$$13. \int e^{z^2} \operatorname{Im} z dz ; (AB) - \text{відрізок } z_A = 1 + i, z_B = 0. \\ (AB)$$

$$14. \int (\sin iz + z) dz ; C : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0. \\ (C)$$

$$15. \int z \bar{z} dz ; (AB) : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0, \operatorname{Im} z \geq 0; (BC) - \text{відрі-} \\ (C)$$

$$\text{зок } z_B = 1, z_C = 0.$$

$$16. \int (\cos iz + 3z^2) dz ; C : |z| = 4, \operatorname{Im} z \geq 0. \\ (C)$$

$$17. \int |z| dz ; C : |z| = \sqrt{2}, 3\pi/4 \leq \arg z \leq 5\pi/4. \\ (C)$$

$$18. \int (z^3 + \sin z) dz ; C : |z| = 1, \operatorname{Re} z \geq 0. \\ (C)$$

$$19. \oint |z| \bar{z}^2 dz ; \quad 20. \oint |\bar{z}|^2 z dz . \\ |z|=R \quad \quad \quad |z|=R$$

3.2. Степеневі ряди. Ряди Тейлора і Лорана.

Ряд вигляду

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + c_2 (z - z_0)^2 + \dots + c_n (z - z_0)^n + \dots \quad (3.7)$$

де c_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) — деякі комплексні числа, називається степеневим рядом (розташованим за степенями $z - z_0$). Нехай

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|c_n|}} \quad (3.8)$$

(вважають, що $R = \infty$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|c_n|} = 0$ і $R = 0$, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt[n]{|c_n|} = \infty$). Число R називається радіусом збіжності степеневого ряду (3.7). Якщо $R = 0$, то ряд (3.7) збігається тільки в точці $z = z_0$, а якщо $R = +\infty$, то ряд (3.7) збігається (і до того ж абсолютно) в усіх площині z . Якщо ж $0 < R < \infty$, то ряд (3.7) збігається у колі $|z - z_0| < R$ радіусом R (і до того ж абсолютно). На колі $|z - z_0| = R$ він може збігатися, але може і розбігатися, а зовні замкненого круга $|z - z_0| \leq R$ (тобто $|z - z_0| > R$) він розбігається. Відзначимо, що коли всі (або починаючи з деякого) коефіцієнти c_n відмінні від нуля і існує $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$, то ця границя дорівнює радіусу збіжності ряду (3.7), тобто

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|. \quad (3.9)$$

Функція $f(z)$, аналітична в колі $|z - z_0| < R$, розкладається в ньому в збіжний степеневий ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \text{ де } c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \text{ (ряд Тейлора)}. \quad (3.10)$$

Зокрема,

$$\begin{aligned} \cos z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \dots \quad (z \in \mathbb{C}) \\ \sin z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \quad (z \in \mathbb{C}) \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (z \in \mathbb{C})$$

$$\operatorname{ch} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{z^6}{6!} + \dots \quad (z \in \mathbb{C})$$

$$\operatorname{sh} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} + \dots \quad (z \in \mathbb{C})$$

$$\ln(1+z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \dots \quad (|z| < 1)$$

$$\operatorname{arctg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{2n+1} = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \dots \quad (|z| < 1)$$

$$(1+z)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} z^n = 1 + \frac{\alpha}{1!} z + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} z^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} z^3 + \dots \quad (|z| < 1)$$

Приклади.

1. Знайти радіуси збіжності степеневих рядів:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i} \right)^n; \quad \text{б) } \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n; \quad \text{в) } \sum_{n=0}^{\infty} (\sin in) z^n;$$

$$г) \sum_{n=0}^{\infty} (3 + (-1)^n) z^n; \quad \text{д) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n;$$

$$е) \sum_{n=0}^{\infty} n! e^{-n^2} (z-1)^n, \quad (\alpha \in \mathbb{R}).$$

$$a) c_n = \frac{1}{(1-i)^n}, \quad |c_n| = \frac{1}{|(1-i)^n|} = \frac{1}{(\sqrt{2})^n} = 2^{-n/2}.$$

Застосовуючи (3.8), знаходимо

$$R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2^{-n/2}}} = \sqrt{2}.$$

б) $c_n = n + 1$, $|c_n| = |n + 1| = \sqrt{n^2 + 1}$. За формулою (3.8)

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^2 + 1}}{\sqrt{(n+1)^2 + 1}} = 1.$$

в) $c_n = \sin in$, $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{|\sin in|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{e^n - e^{-n}}{2}}$. Оскільки

чи $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{e^n - e^{-n}}{2}} = \infty$, то такою ж буде і верхня границя по-

слідовності $(n \sqrt{|\sin in|})$, тому $R = 1/2$.

г) $c_n = 3 + (-1)^n$. Оскільки верхня границя послідовності є найбільшою її граничною точкою, то $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{|c_n|} = 4$. Отже, за формулою (3.8) маємо $R = 1/4$.

$$\begin{aligned} \text{д) } R &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)!} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e. \end{aligned}$$

$$\text{е) } c_n = n! e^{-n^2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n \sqrt{|c_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e e^{n^2-1}}.$$

Якщо $\alpha > 1$, то згідно з правилом Лопітала ця границя дорівнює нулю, а радіус збіжності даного ряду дорівнює нескінченності. Якщо $\alpha = 1$, то ця границя дорівнює нескінченності і, отже, $R = 0$.

2. Знайти області збіжності рядів:

$$\text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{z^n \cos in} ; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 1}{(2 + 2i)^n}.$$

а) Позначимо через t вираз $\frac{1}{z}$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\cos in} =$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{\cosh n}$ - степеневий ряд, у якому $|c_n| = \frac{1}{\cosh n} = 2(e^{-n} + e^n)^{-1}$.

Використовуючи формулу (3.9), знаходимо радіус збіжності цього ряду:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^{n+1} + e^{-(n+1)}}{e^n + e^{-n}} = e \quad (t < e).$$

Отже, даний ряд збігається в області $|z| > 1/e$.

б) Позначимо через t вираз $\frac{1}{z+2t}$. Тоді $\sum_{n=1}^{\infty} (3^n + 1)t^n$ — степеневий ряд, у якого $|c_n| = 3^n + 1$. Тому за формулою (3.8) маємо $R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 1}} = \frac{1}{3}$ ($|t| < \frac{1}{3}$).

Отже, даний ряд збігається в області $|z + 2t| > 3$.

3. Довести, що $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \frac{1}{2}$.

Оскільки (див. розкладання функції $\cos z$ в ряд за степенями z)

$$\frac{1 - \cos z}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+2)!} = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + \dots \quad (z \neq 0)$$

і радіус збіжності ряду $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+2)!}$ дорівнює нескінченності,

то сума $f(z)$ цього ряду є неперервною функцією в точці $z = 0$. І

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} f(z) = f(0).$$

Але $f(0) = 1/2$, таким чином, дане твердження доведено.

Рядом Лорана називається ряд вигляду

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} (z - z_0)^{-m} \quad (3.12)$$

Його областю збіжності є кругове кільце

$$r < |z - z_0| < R, \text{ де } r = \lim_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|c_{-m}|}, \quad R = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}}.$$

В середині кільця ряд Лорана збігається абсолютно і його сума є там аналітичною функцією.

Якщо функція $f(z)$ є аналітичною і однозначною в круговому кільці $r < |z - z_0| < R$, то в ньому вона розкладається в збіжний ряд Лорана (3.12):

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \quad (\text{теорема Лорана}), \text{ де}$$

$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{(\gamma)} \frac{f(z) dz}{(z - z_0)^{n+1}}$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), γ - довільне коло з центром у точці z_0 , яке знаходиться в середині даного кільця.

На практиці для знаходження коефіцієнтів c_n (якщо це можливо) використовують відомі розкладення елементарних функцій у ряд Тейлора.

Приклади.

1. Розкладемо в ряд Лорана з центром у точці $z = 0$ функцію $f(z) = ze^{1/z}$. Ця функція аналітична в кільці $0 < |z| < \infty$, отже, розкладається в ньому в ряд Лорана. Використаємо розкладення функції e^z в ряд Тейлора в околі точки $z_0 = 0$:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \quad (z \in \mathbb{C})$$

і покладемо $\zeta = 1/z$. Тоді при $z \neq 0$

$$\begin{aligned} f(z) &= z^3 \left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots + \frac{1}{n!z^n} + \dots \right) = \\ &= \frac{1}{3!} + \frac{2}{2!} + z^2 + z^3 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{(m+3)!} z^{-m}. \end{aligned}$$

2. Знайти всі розкладення в ряд Лорана за степенями z функції

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + z - 2}.$$

Функція $f(z)$ має дві особливі точки $z_1 = -2$, $z_2 = 1$. Отже, є три "кільця" з центром у точці z_0 , в кожному з яких функція $f(z)$ аналітична: а) коло $|z| < 1$; б) кільце $1 < |z| < 2$; в) кільце $2 < |z| < \infty$.

Знайдемо розкладення функції $f(z)$ в ряди Лорана у кожній з цих областей, врахувавши, що

$$\frac{1}{z^2 + z - 2} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+2} \right).$$

а) При $|z| < 1$ маємо

$$f(z) = -\frac{1}{3} \frac{1}{1 + \frac{z}{2}} - \frac{1}{3} \frac{1}{1 - z} = -\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} z^n =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \right] z^n.$$

б) У випадку $1 < |z| < 2$

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{6} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} + \frac{1}{3z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n} + \frac{1}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} = \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} - \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

в) Аналогічно попередньому випадку при $|z| > 2$ одержимо

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{3z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{3z} \frac{1}{1+\frac{z}{2}} = \frac{1}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n} - \frac{1}{3z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^n}{2^n} = \\ &= \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n z^n}{z^{n+1}}. \end{aligned}$$

Вправи для аудиторних та домашніх завдань

1. Визначити області збіжності рядів:

$$\begin{aligned} \text{а)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - 1}{(n+1)^n}; \quad \text{б)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+1)^n}{(1+1)^n}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{z \ln n}}; \\ \text{г)} \sum_{n=1}^{\infty} n^3 e^{-nz}. \end{aligned}$$

2. Визначити радіус збіжності кожного з степеневих рядів:

$$\begin{aligned} \text{а)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^5 z^4}{(n+1)!}; \quad \text{б)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(3n-2) z^n}{2^{n+1} (n+1)^2}; \quad \text{в)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{21}{34^n} \right)^{n^2} z^n; \\ \text{г)} \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{2} z^n. \end{aligned}$$

3. Знайти всі розкладення в ряд Лорана даної функції за степенями z :

$$\begin{aligned} \text{а)} \frac{z-2}{2z^3+z^2-z}; \quad \text{б)} \frac{z}{z^4+z^3-2z^2}; \quad \text{в)} f(z) = \frac{3z-18}{2z^3+3z^2-9}; \\ \text{г)} \frac{2z-16}{z^4+2z^3-8z^2}. \end{aligned}$$

4. Знайти всі розкладення в ряд Лорана функції $\frac{z+1}{z(z-1)}$ за степенями $z - z_0$, якщо :

а) $z_0 = 1 + 2i$; б) $z_0 = 2 - 3i$; в) $z_0 = -3 - 2i$.

5. Довести, що $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z - 1}{z} = 1$.

Вправи для індивідуальної роботи

I. Знайти всі розкладення в ряд Лорана даної функції за степенями z :

1) $\frac{5z - 50}{2z^3 + 5z^2 - 25z}$; 2) $\frac{3z - 36}{z^4 + 3z^3 - 18z^2}$; 3) $\frac{7z - 98}{2z^3 + 7z^2 - 49z}$;

4) $\frac{4z - 64}{z^4 + 4z^3 - 32z^2}$; 5) $\frac{9z - 162}{2z^3 + 9z^2 - 81z}$; 6) $\frac{5z - 100}{z^4 + 5z^3 - 50z^2}$;

7) $\frac{11z - 242}{2z^3 + 11z^2 - 121z}$; 8) $\frac{6z - 144}{z^4 + 6z^3 - 72z^2}$; 9) $\frac{13z - 338}{2z^3 + 13z^2 - 169z}$;

10) $\frac{7z - 196}{z^4 + 7z^3 - 98z^2}$; 11) $\frac{15z - 450}{2z^3 + 15z^2 - 225z}$; 12) $\frac{8z - 256}{z^4 + 8z^3 - 128z^2}$;

13) $\frac{z + 2}{-2z^3 + z^2 + z}$; 14) $\frac{z + 4}{2z^2 + z^3 - z^4}$; 15) $\frac{3z + 18}{-z^3 + 3z^2 + 9z}$;

16) $\frac{2z + 16}{8z^2 + 2z^3 - z^4}$; 17) $\frac{z + 50}{-2z^3 + 5z^2 + 25z}$; 18) $\frac{3z + 36}{-z^4 + 3z^3 + 18z^2}$;

19) $\frac{7z + 98}{-2z^3 + 7z^2 + 49z}$; 20) $\frac{4z + 64}{-z^4 + 4z^3 + 32z^2}$.

II. Дану функцію розкласти в ряд Лорана в околі точки z_0 :

1) $z \cos \frac{1}{z-2}$, $z_0 = 2$; 2) $\sin \frac{z}{z-1}$, $z_0 = 1$;

3) $ze^{z/(z-5)}$, $z_0 = 2$; 4) $\sin \frac{2z^2 - z}{z+2}$, $z_0 = -2$;

5) $\cos \frac{3z}{z-1}$, $z_0 = 1$; 6) $\sin \frac{5z}{z-2i}$, $z_0 = 2i$;

7) $\sin \frac{3z - 1}{3z - 1}$, $z_0 = -1/3$; 8) $z \cos \frac{z}{z-1}$, $z_0 = 1$;

9) $z \sin \frac{z}{z-1}$, $z_0 = 1$; 10) $(z-3) \cos \frac{\pi(z-3)}{2}$, $z_0 = 0$;

11) $z^2 \sin \frac{\pi(z+1)}{2}$, $z_0 = 0$; 12) $z \cos \frac{z}{z+2i}$, $z_0 = -2i$;

- 13) $\cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}$, $z_0 = 2$; 14) $\sin \frac{z+1}{z-1}$, $z_0 = 1$;
 15) $\sin \frac{z}{z-3}$, $z_0 = 3$; 16) $ze^{1/(z-2)}$, $z_0 = 2$;
 17) $e^{z/(z-3)}$, $z_0 = 3$; 18) $\sin \frac{2z}{z-4}$, $z_0 = 4$;
 19) $\sin \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}$, $z_0 = 2$; 20) $e^{(4z-2z^2)/(z-1)^2}$, $z_0 = 1$.

3.3. Класифікація ізольованих особливих точок. Липки.

Основна теорема про липки

Точка z_0 називається ізольованою особливою точкою функції $f(z)$, якщо $f(z)$ є однозначною і аналітичною в круговому кільці $0 < |z - z_0| < \delta$, крім самої точки z_0 .

Ізольована особлива точка z_0 функції $f(z)$ називається усувною точкою, якщо існує скінченна границя $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$, полюсом - якщо $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, істотною особливою - якщо при $z \rightarrow z_0$ функція $f(z)$ не має границі (ні скінченної, ні нескінченної).

Приклади.

1. Функція $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ однозначна і аналітична в кільці $0 < |z| < +\infty$ і не визначена в точці $z = 0$. Але

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{1}{z} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \dots \right) \right] = \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots \right) = 1 \quad (A = 1), \text{ тобто границя} \end{aligned}$$

$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\sin z}{z}$ існує і скінченна. Отже, точка $z = 0$ є усувною особливою точкою.

2. Функція $f(z) = \frac{1}{z-1}$ є однозначною і аналітичною в кільці $0 < |z-1| < +\infty$ і не визначена в точці $z = 1$ ($z_0 = 1$), причому

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left| \frac{1}{z-1} \right| = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{|x+iy-1|} = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ y \rightarrow 0}} \frac{1}{|(x-1)^2 + y^2|} = +\infty.$$

тобто $\lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{z-1} = \infty$. Отже, точка $z = 1$ є полюсом функції $f(z)$.

3. Функція $f(z) = e^{1/z}$ є однозначною і аналітичною в кільці $0 < |z| < +\infty$ і не визначена в точці $z = 0$, причому границя $\lim_{z \rightarrow 0} e^{1/z}$ не існує - ні скінченна, ні нескінченна. Дійсно, візь-
 мемо $z = -i/y$ (y - дійсне число). Тоді $f(z) = f(i/y) = e^{iy} = \cos y + i \sin y$. Звідси зрозуміло, що $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{y \rightarrow \infty} (\cos y + i \sin y)$ не існує.

Якщо в деякому кільці $|z - z_0| < \delta$ функцію $f(z)$ можна записати у вигляді

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k} \quad (k \in \mathbb{N}),$$

де $\varphi(z)$ - аналітична функція в точці z_0 , причому $\varphi(z_0) \neq 0$, то точка $z = z_0$ є полюсом порядку k функції $f(z)$.

Приклад. Функцію $f(z) = \frac{z+2}{(z^2-1)^2}$ у кільці $0 < |z-1| < 2$ можна записати у вигляді

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z-1)^2}, \quad \varphi(z) = \frac{z+2}{(z+1)^2}, \quad \text{причому } \varphi(z_0) = \varphi(1) \neq 0,$$

$\varphi(z)$ - аналітична в точці $z = 1$. Отже, точка $z = 1$ є полюсом другого порядку функції $f(z)$. Аналогічно можна показати, що точка $z = -1$ також є полюсом другого порядку.

Існують такі залежності між характером ізольованої особливості точки функції $f(z)$ і виглядом її ряду Лорана:

а) Ізольована особлива точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функції $f(z)$ є усувною тоді і тільки тоді, коли розкладення Лорана цієї функції в деякому кільці $0 < |z - z_0| < \delta$ не містить головної частини, тобто

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n.$$

б) Ізольована особлива точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функції $f(z)$ є полюсом порядку k тоді і тільки тоді, коли розкладення Лорана цієї функції в деякому кільці $0 < |z - z_0| < \delta$ має вигляд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + c_{-1} (z - z_0)^{-1} + c_{-2} (z - z_0)^{-2} + \dots +$$

$$c_{-k}(z - z_0)^{-k},$$

де $c_{-k} \neq 0$. При цьому частина коефіцієнтів c_n ($n = 0, 1, 2, \dots$) $c_{-1}, c_{-2}, \dots, c_{-(k-1)}$ або навіть всі можуть дорівнювати нулю.

Треба підкреслити, що у цьому випадку головна частина розкладення Лорана містить лише скінченне число відмінних від нуля доданків.

в) Ізольована особлива точка $z_0 \in \mathbb{C}$ функції $f(z)$ є істотною особливою точкою тоді і тільки тоді, коли головна частина розкладення Лорана в деякому кільці $0 < |z - z_0| < \delta$ містить нескінченне число відмінних від нуля доданків.

Приклад. Наведена вище функція $f(z) = e^{1/z}$ розкладається в кільці $0 < |z| < +\infty$ у ряд Лорана

$$f(z) = e^{1/z} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \dots + \frac{1}{n!} z^{-n} + \dots = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!},$$

головна частина якого містить нескінченне число відмінних від нуля доданків $\frac{z^{-n}}{n!}$ ($n = 1, 2, \dots$). Отже, точка $z = 0$ є істотною особливою для функції $e^{1/z}$.

Нехай z_0 - ізольована особлива точка однозначної функції $f(z)$. γ - замкнена крива, яка орієнтована в додатному напрямі і містить всередині точку z_0 . Функція $f(z)$ аналітична на γ , крім точки z_0 . Тоді $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz$ називають лишком функції $f(z)$ у точці z_0 і позначають символом $\text{Res } f(z)$;
 $z=z_0$

$$\text{Res } f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz. \quad (3.13)$$

Основна теорема про лишки. Нехай функція $f(z)$ аналітична в області D , крім скінченного числа ізольованих особливих точок $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$ і аналітична на її межі Γ , орієнтованій у додатному напрямі. Тоді

$$\oint_{(\Gamma)} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res } f(z)_{z=z_k}. \quad (3.14)$$

Щоб застосувати цю теорему для обчислення інтегралів, треба вміти знаходити лишки. Використання для цієї мети означення

(3.13), як правило, пов'язано з складними обчисленнями. Знаходження лишку функції $f(z)$ в точці z_0 спрощується, якщо $f(z)$ достатньо просто розкладається в ряд Лорана у деякому кільці $0 < |z - z_0| < \delta$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} c_{-m} (z - z_0)^{-m}. \quad (3.15)$$

Тоді лишок функції $f(z)$ в точці z дорівнює коефіцієнту c при $(z - z_0)^{-1}$ в (3.15): $\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$.

Зауважимо, що усувний особливий точці z_0 лишок дорівнює нулю. Тому в подальшому нас будуть цікавити лишки тільки в полюсах і істинно особливих точках.

Приклади.

1. Розкладення в ряд Лорана функції $f(z) = \sin \frac{1}{z}$ у кільці $0 < |z| < +\infty$ має вигляд

$$\sin \frac{1}{z} = z^{-1} - \frac{1}{3!} z^{-3} + \frac{1}{5!} z^{-5} + \dots (z=0 - \text{істинно особлива точка}),$$

$$\text{звідси } \operatorname{Res}_{z=0} \sin \frac{1}{z} = 1.$$

2. Функція $f(z) = \frac{\cos z}{z^3}$ розкладається в кільці $0 < |z| < +\infty$ в ряд Лорана

$$\frac{\cos z}{z^3} = z^{-3} - \frac{1}{2!} z^{-1} + \frac{1}{4!} z - \frac{1}{6!} z^3 + \dots (z=0 - \text{полюс третього порядку}).$$

$$\text{Отже, } \operatorname{Res}_{z=0} \frac{\cos z}{z^3} = c_{-1} = -\frac{1}{2}.$$

3. Функція $f(z) = \cos \frac{1}{z-1}$ розкладається в кільці $0 < |z-1| < +\infty$ в ряд Лорана

$$\cos \frac{1}{z-1} = 1 - \frac{1}{2!} (z-1)^{-2} + \frac{1}{4!} (z-1)^{-4} - \frac{1}{6!} (z-1)^{-6} + \dots$$

($z=1$ - істинно особлива точка). Звідси

$$\operatorname{Res}_{z=1} \cos \frac{1}{z-1} = c_{-1} = 0.$$

У цих прикладах ряди Лорана одержані негайно на підставі

розкладень (3.11). Однак для більшості навіть елементарних функцій операція розкладення її в ряд Лорана досить громіздка. Тому бажано розглянути інші способи обчислення лишків, що можна досить просто зробити у випадку полюсів.

Нехай $z = z_0$ - полюс порядку $m \geq 1$ функції $f(z)$. Тоді

$$\operatorname{Res} f(z)_{z=z_0} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \left\{ \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[f(z)(z - z_0)^m \right] \right\}. \quad (3.16)$$

Зокрема, якщо $z = z_0$ - простий полюс ($m = 1$), то

$$\operatorname{Res} f(z)_{z=z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} [f(z)(z - z_0)].$$

Часто для обчислення лишку у випадку простого полюса більш зручна інша формула. Нехай функція $f(z)$ наведена у вигляді

ді $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, де функції $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ аналітичні в точці z_0 , $\varphi(z_0) \neq 0$, $\psi(z_0) = 0$, $\psi'(z_0) \neq 0$. Тоді функція $f(z)$ має в точці z_0 простий полюс і

$$\operatorname{Res} f(z)_{z=z_0} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

Приклад. Знайдемо лишки функції $f(z) = \operatorname{ctg} z$ в її особливих точках $z = \pi k$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Оскільки $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$, $\varphi(z) = \cos z$, $\psi(z) = \sin z$ аналітичні в точках $z = \pi k$, $\varphi(\pi k) = (-1)^k \neq 0$, $\psi(\pi k) = 0$, $\psi'(z) = \cos z$, $\psi'(\pi k) \neq 0$, то

$$\operatorname{Res} \operatorname{ctg} z_{z=\pi k} = \frac{\varphi(\pi k)}{\psi'(\pi k)} = \frac{\cos \pi k}{\cos \pi k} = 1 \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Використаємо знайдені лишки для обчислення інтеграла $\oint \operatorname{ctg} z \, dz$.

$$|z|=10$$

В середині контура $|z| = 10$ міститься тільки сім особливих точок функції, а саме $0, \pm \pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi$. Оскільки лишок у кожній з них дорівнює одиниці, то у відповідності до основної теореми про лишки $\oint \operatorname{ctg} z \, dz = 14\pi i$.

$$|z|=10$$

Вправи для аудиторних та домашніх завдань

Обчислити інтеграли:

- 1) $\oint \frac{dz}{1+z^4}$; $|z|=1$; 2) $\oint \frac{dz}{1+z^2}$; $|z|=2$; 3) $\oint \frac{dz}{(z^2-1)^2(z-3)}$; $|z|=4$;
 4) $\oint \sin^2 \frac{1}{z} \frac{z^2 dz}{(z-1)(z-2)}$; $|z|=3$; 5) $\oint \frac{z^3 dz}{z^4-1}$; $|z|=2$; 6) $\oint \frac{z^3 dz}{z^2+1} e^{1/z}$; $|z|=2$;
 7) $\oint \frac{2-z^2-3z^3}{4z^3} dz$; $|z|=1/2$; 8) $\oint \frac{6z - \sin 6z}{z^2 \sin^2 z} dz$; $|z|=1$; 9) $\oint \frac{e^{2z} - \cos 9z}{z \sinh iz} dz$; $|z|=1$.

Вправи для індивідуальної роботи

Обчислити інтеграли:

- 1) $\oint \frac{\sin z dz}{z(z-1)}$; $|z|=2$; 2) $\oint \frac{\cos z dz}{z^2-4z+3}$; $|z|=2$; 3) $\oint \frac{z^3}{z+1} e^{1/z} dz$; $|z-1|=4$;
 4) $\oint \frac{z^4 dz}{z^5+1}$; $|z|=2$; 5) $\oint z \sin \frac{z+1}{z} dz$; $|z|=4$; 6) $\oint e^{1/(1-z)} z^{-1} dz$; $|z-1|=2$;
 7) $\oint \frac{z^7 dz}{z^8+1}$; $|z|=2$; 8) $\oint \frac{\sin z dz}{z^4}$; $|z|=1$; 9) $\oint \frac{1-\cos 2z}{z^4} dz$; $|z|=4$;
 10) $\oint \frac{\sin 3z}{z^3} dz$; $|z|=4$; 11) $\oint z^4 e^{1/z} dz$; $|z|=1$; 12) $\oint z^n \sin \frac{1}{z} dz$; $|z|=1$;
 13) $\oint z^3 \cos \frac{1}{z} dz$; $|z|=1$; 14) $\oint \frac{\sin z^3}{1-\cos z} dz$; $|z|=2$; 15) $\oint \frac{\sin 3z+z}{z^2(z-\pi)} dz$; $|z-1|=3$;
 16) $\oint \frac{ze^z dz}{\sin z}$; $|z-1|=3$; 17) $\oint \frac{1z(z-1)}{\sin \pi z} dz$; $|z-1/2|=4$; 18) $\oint \frac{\ln(z+2)}{\sin z} dz$; $|z-1|=3/2$;
 19) $\oint \frac{e^z+1}{z(z-1)} dz$; $|z-1/2|=1$; 20) $\oint \frac{z^2+z+3}{(\pi+z)\sin z} dz$; $|z|=\pi/2$; 21) $\oint \frac{e^{2z}-\sin z}{z^2} dz$; $|z|=1/3$.

3.4. Застосування лемки до обчислення деяких інтегралів

від функцій дійсної змінної

2π

1. Розглянемо інтеграл $\int R(\cos t, \sin t) dt$, де $R(u, v)$ - ра-

0

ціональна функція двох дійсних змінних u, v , причому функція $R(\cos t, \sin t)$ неперервна на відрізку $0 \leq t \leq 2\pi$. Якщо покласти $z = e^{it}$, то

$$\cos t = (z + \frac{1}{z})/2; \quad \sin t = (z - \frac{1}{z})/(2i); \quad dt = \frac{dz}{iz};$$

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t) dt = \oint_{|z|=1} \tilde{R}(z) dz, \quad (3.17)$$

де $\tilde{R}(z)$ - раціональна функція змінної z (тобто є відношенням деяких многочленів) і коло $|z| = 1$ обігається в додатному напрямі. Контурний інтеграл у правій частині (3.17) обчислюється за формулою (3.14), а лишки функції $\tilde{f}(z) = \tilde{R}(z)$ розглядаються тільки в тих особливих точках (полюсах) функції $\tilde{R}(z)$, які містяться в середині кола $|z| = 1$.

Приклад. Знайдемо $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t - 2}$. Покладаючи $e^{it} = z$, дістанемо

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t - 2} = \frac{1}{i} \oint_{|z|=1} \frac{z/(z + 1/z)/2 - 2}{z} dz = \frac{2}{i} \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z^2 - 4z + 1}.$$

Функція $R(z) = \frac{2}{z^2 - 4z + 1}$ має два простих полюси $z_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

З них тільки $z_2 = 2 - \sqrt{3}$ міститься в середині контуру $|z| = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Отже, } \int_0^{2\pi} \frac{dt}{\cos t - 2} &= 2\pi i \sum_{z=z_2} \operatorname{Res} \frac{1}{z^2 - 4z + 1} = 4\pi \operatorname{Res}_{z=z_2} \frac{1}{(z-z_1)(z-z_2)} = \\ &= 4\pi \lim_{z \rightarrow z_2} \left[\frac{z - z_2}{(z-z_1)(z-z_2)} \right] = \frac{4\pi}{z_2 - z_1} = -\frac{4\pi}{2\sqrt{3}}. \end{aligned}$$

2. Нехай $R(x)$ - раціональна функція, $R(x) = P_m(x)/Q_n(x)$, де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ - многочлени степенів m і n відповідно. Якщо $R(x)$ неперервна на дійсній осі і $n - m \geq 2$, тобто ступінь знаменника в усякому разі на дві одиниці більша від ступеня чисельника, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) dx = 2\pi i \sum_{z=z_k} \operatorname{Res} R(z), \quad (3.18)$$

сума ланків функції $R(z)$ береться по всіх полюсах $z = z_k$, розташованих у верхній півплощині $\text{Im } z > 0$.

Приклад. Обчислити інтеграл
$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}.$$

Функція $R(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$ неперервна на дійсній осі, $m = 0$,

$n = 4$. Функція $R(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$ у верхній півплощині $\text{Im } z > 0$

має тільки один полюс $z = i$ другого порядку. Отже, за формулою (3.18) $I = 2\pi i \text{Res } R(z)$.

Оскільки на підставі формули (3.16) при $m = 2$

$$\text{Res } R(z) = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{(z - i)^2}{(z^2 + 1)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow i} \left[\frac{1}{(z + i)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow i} \frac{-2}{(z + i)^3}$$

$$= \frac{2}{i^3} = \frac{1}{i}, \text{ то } I = 2\pi i \cdot \frac{1}{i} = \pi.$$

2. Нехай $R(x)$ - раціональна функція, $R(x) = P_m(x)/Q_n(x)$, де $P_m(x)$, $Q_n(x)$ - многочлени степенів m і n відповідно. Якщо $R(x)$ неперервна на дійсній осі, $n - m \geq 1$, $z = z_k \in \text{Im } z > 0$ - полюси $R(z)$, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) e^{i\lambda x} dx = 2\pi i \sum_{(k)} \text{Res } [R(z) e^{i\lambda z}] \quad (3.19)$$

$$(\lambda > 0; z_k \in \text{Im } z > 0).$$

Зокрема, якщо $R(x)$ - парна функція, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \cos \lambda x dx = \pi \sum_{(k)} \text{Res } [R(z) e^{i\lambda z}] \quad (3.20)$$

$$(\lambda > 0; z_k \in \text{Im } z > 0),$$

а якщо $R(x)$ - непарна функція, то

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x) \sin \lambda x dx = \pi \sum_{(k)} \text{Res } [R(z) e^{i\lambda z}] \quad (3.21)$$

$$(\lambda > 0; z_k \in \text{Im } z > 0).$$

Приклади.

1. Обчислити інтеграл $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx$. Оскільки

$$R(x) = \frac{x+1}{x^2 + 2x + 2} \quad \text{неперервна на дійсній осі, } m = 1, n$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) e^{2xi}}{x^2 + 2x + 2} dx,$$

$\lambda = 2 > 0$ і функція $R(z) = \frac{z+1}{z^2 + 2z + 2}$ у верхній півплощині

$\operatorname{Im} z > 0$ має лише простий полюс $z = -1 + i$, то

$$I = \operatorname{Im} \left[2\pi i \operatorname{Res}_{z=-1+i} \frac{z+1}{z^2 + 2z + 2} e^{2iz} \right].$$

$$\operatorname{Res}_{z=-1+i} \frac{z+1}{z^2 + 2z + 2} e^{2iz} = \frac{1}{2} e^{-2-2i} = \frac{1}{2} e^{-2} (\cos 2 - i \sin 2)$$

1. Отже,

$$I = \operatorname{Im} \left[2\pi i \frac{1}{2} e^{-2} (\cos 2 - i \sin 2) \right] = \pi e^{-2} \cos 2.$$

2. На підставі формул (3.20), (3.21)

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \pi \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{e^{i\lambda z}}{a^2 + z^2} = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{2a} \quad (\lambda > 0, a > 0);$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin \lambda x}{x^2 + a^2} dx = \pi \operatorname{Res}_{z=ia} \frac{z e^{i\lambda z}}{a^2 + z^2} = \frac{\pi e^{-\lambda a}}{2a} \quad (\lambda > 0, a > 0).$$

Вправи для аудиторних та домашніх завдань

1. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t \, dt}{5 + 4 \cos t}; \quad 2) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 + \sqrt{3} \sin t}; \quad 3) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \cos t)^2};$$

$$4) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2 + \cos t}; \quad 5) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos nt \, dt}{1 - 2a \cos t + a^2}; \quad 6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx;$$

$$7) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \, dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)}; \quad 8) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 1}{x^4 + 1} dx; \quad 9) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^4 + x^2 + 4} dx;$$

$$10) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 1) \sin x}{x^4 + 5x^2 + 4} dx; \quad 11) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 + 5x) \sin x}{x^4 + 10x^2 + 9} dx; \quad 12) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 3x}{(x^2 + 4)^2} dx;$$

$$13. \int_0^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^3} dx ; 14. \int_0^{\infty} \frac{x \sin x/2}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx ; 15. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^2 - 2x + 10} dx .$$

Вправи для індивідуальної роботи

I. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2} + \cos t)^2} ;$$

$$2) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} \cos t)^2} ;$$

$$3) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4 + \cos t)^2} ;$$

$$4) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4 + 3 \cos t)^2} ;$$

$$5) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + \sqrt{3} \cos t)^2} ;$$

$$5) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + 2 \cos t)^2} ;$$

$$7) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(4 + \sqrt{7} \cos t)^2} ;$$

$$9) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + \sqrt{5} \cos t)^2} ;$$

$$9) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(1 + 2\sqrt{2} \cos t)^2} ;$$

$$10) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6} + \cos t)^2} ;$$

$$11) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2\sqrt{2} + \sqrt{7} \cos t)^2} ;$$

$$12) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(3 + \cos t)^2} ;$$

$$13) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \sqrt{5} \cos t)^2} ;$$

$$14) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{6} + \sqrt{5} \cos t)^2} ;$$

$$15) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{5} + 2 \cos t)^2} ;$$

$$16) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{2} + \cos t)^2} ;$$

$$17) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{7} + \sqrt{2} \cos t)^2} ;$$

$$18) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(\sqrt{3} + \cos t)^2} ;$$

$$19) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \sqrt{3} \cos t)^2} ;$$

$$20) \int_0^{2\pi} \frac{dt}{(2 + \cos t)^2} .$$

II. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - x + 4}{x^4 + 10x^2 + 9} dx ;$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x - 1}{(x^2 + 4)^2} dx ;$$

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)^2} ;$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - x + 1)^2} ;$$

$$7) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 10x^2 + 9} ;$$

$$9) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 3)^2} ;$$

$$11) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 9)} ;$$

$$13) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^2 + 4x + 13)^2} ;$$

$$15) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} ;$$

$$17) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + 5)^2} ;$$

$$19) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4 + 7x^2 + 12} ;$$

$$4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 4)^2(x^2 + 16)} ;$$

$$6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 1)(x^2 + 9)^2} ;$$

$$8) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x - 1) dx}{(x^2 + 4)^2(x^2 + 9)} ;$$

$$10) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 1) dx}{(x^2 + x + 1)^2} ;$$

$$12) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 3)^2(x^2 + 2)} ;$$

$$14) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 5)^2} ;$$

$$16) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 5) dx}{x^4 + 5x^2 + 6} ;$$

$$18) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 4)} ;$$

$$20) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2(x^2 + 5)^2} ;$$

II. Обчислити інтеграли:

$$1) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2 + 1)^2} dx ;$$

$$3) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x + 1) \cos x}{x^4 + 5x^2 + 6} dx ;$$

$$5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^3 - 2) \cos x/2}{(x^2 + 1)^2} dx ;$$

$$7) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \cos x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx ;$$

$$2) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{(x^2 + 1)^3} dx ;$$

$$4) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 + 3) \cos 2x}{x^4 + 3x^2 + 2} dx ;$$

$$6) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x^2 - x) \sin x}{x^4 + 9x^2 + 20} dx ;$$

$$8) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin 2x - \sin x}{(x^2 + 4)^2} dx ;$$

$$9) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{(x^2+4)(x^2+1)^2} dx ;$$

$$11) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3 \sin x}{x^4+5x^2+4} dx ;$$

$$13) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2} dx ;$$

$$15) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+9)(x^2+16)} dx ;$$

$$17) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x/2}{x^2+4} dx ;$$

$$10) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+4)(x^2+1)^2} dx ;$$

$$12) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2+2x+2} dx ,$$

$$14) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+0.25)^2} dx ;$$

$$16) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2-2x+10} dx ;$$

$$18) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos x}{x^4+10x^2+9} dx .$$

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ТА РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

(мовою оригіналу)

1. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальные уравнения. Ряды. Функции комплексного переменного. М., 1981.
2. Грыщенко А.Е., Нагнисида Н.И., Настасиев П.П. Теория функций комплексного переменного. Решение задач. Киев, 1986.
3. Евграфов М.А. Аналитические функции. М., 1991.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М., 1973.
5. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М., 1966.
6. Сидоров Ю.В., Федорик М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории функций комплексного переменного. М., 1976.
7. Соловьев А.И., Томилова Е.П., Головченко А.В., Коцавец П.Т. Элементы теории аналитических функций. Харьков, 1992.
8. Чудесенко В.Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики. М., 1983.

ЗМІСТ

1. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА І ФУНКЦІЇ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ	3
1.1. Комплексні числа та дії над ними	3
1.2. Основні елементарні функції комплексної змінної .	9
1.3. Диференціювання функцій комплексної змінної. Умова Коші - Рімана	13
1.4. Відновлення аналітичної функції за її відомою дійсною чи уявною частиною	16
2. КОНТОРНИ ВІДБРАЖЕННЯ	19
2.1. Дробово - лінійна функція	19
2.2. Степенева функція і радикал	22
2.3. Показникова функція і логарифм	25
2.4. Функція Жуковського	29
3. ІНТЕГРУВАННЯ ФУНКЦІЙ КОМПЛЕКСНОЇ ЗМІННОЇ. ТЕОРІЯ ЛИНКІВ	34
3.1. Зведення до криволінійних інтегралів по коор- динатах. Формула Ньютона-Лейбніца. Теорема Ко- ші. Інтегральна формула Коші	34
3.2. Степеневі ряди. Ряди Тейлора і Лорана	39
3.3. Класифікація ізольованих особливих точок. Линки. Основна теорема про линки	47
3.4. Застосування линків до обчислення деяких інтегра- лів від функцій дійсної змінної	52
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ І РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ	59

1003

Олександр Васильович Головченко,
Петро Тихонович Кошавець,
Володимир Михайлович Кузніченко,
Володимир Олексійович Рвачов,
Олександр Іванович Соловйов

ЗАДАЧІ ТА ВПРАВИ З ПИТАНЬ ТЕОРІЇ
АНАЛІТИЧНИХ ФУНКЦІЙ

Редактор Т. І. Васильченко

Зв. план, 1993, поз. 48

Підписано до друку 14.05.93.

Формат 60×84 1/16. Папір офс. № 2. Офс. друк.

Умовн. -друк. 3,3. Облік. -вид. арк. 3,81. Т. 1000 прим.

Замовлення 48. Ціна 19 крб.

Харківський авіаційний інститут
310070, Харків-70, вул. Чкалова, 17
Ротапринт друкарні ХАІ
310070, Харків-70, вул. Чкалова, 17

Научно-техническая
библиотека
"ХАИ"



mt0036551